La Columna de Matemática Computacional

Sección a cargo de

Tomás Recio

El objetivo de esta columna es presentar de manera sucinta, en cada uno de los números de La Gaceta*, alguna cuestión matemática en la que los cálculos, en un sentido muy amplio, tengan un papel destacado. Para cumplir este objetivo el editor de la columna (sin otros méritos que su interés y sin otros recursos que su mejor voluntad) quisiera contar con la colaboración de los lectores, a los que anima a remitirle (a la dirección que se indica al pie de página[1]) los trabajos y sugerencias que consideren oportunos.*

En este número . . .

. . . presentamos un artículo del profesor de la Universidad de Alcalá, José Javier Martínez Fernández de las Heras, sobre un aspecto poco difundido de la aplicabilidad del Álgebra Lineal: la importancia del cálculo de valores singulares.

En el trabajo de José Javier Martínez, de extraordinario estilo divulgativo, se ilustra, a través de ejemplos atractivos y con referencia a diversas bibliotecas de algoritmos de álgebra lineal numérica, el papel de la descomposición en valores singulares (SVD) en contextos tales como la recuperación de la información y la compresión de imágenes.

En cierto sentido queremos continuar aquí con la serie de artículos aparecidos en el *Boletín* de la hermana Sociedad Española de Matemática Aplicada (SEMA), que en su volumen 30, del año 2004, incluye artículos de P. Fernández ("El secreto de Google y el Álgebra Lineal") y J.M. Gracia ("Matrices"), que destacan el papel aplicado de esta materia, el Álgebra Lineal, una asignatura tan extendida en la docencia universitaria como necesitada de un enfoque atractivo y actual.

¡Ojalá el lector encuentre que esta nueva aportación de "La Columna..." supone, también, un paso más en esa dirección!

[1]Tomás Recio. Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad de Cantabria. 39071 Santander. `tomas.recio@unican.es`

La descomposición en valores singulares (SVD) y algunas de sus aplicaciones

por

José Javier Martínez Fernández de las Heras

Dedicado a la memoria de Mariano Hormigón

1 Introducción

La redacción de este trabajo fue impulsada por la reciente lectura de dos artículos publicados en un mismo número (no sé si casualmente) del Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada, debido uno de ellos a P. Fernández [12] y el otro a J. M. Gracia [17].

El primero de ellos, que ha merecido el *V Premio SEMA a la Divulgación de la Matemática Aplicada (2004)*, muestra de manera atractiva una reciente aplicación del álgebra lineal (y de otras ramas de las matemáticas como la teoría de grafos y la probabilidad). Más concretamente ilustra la aplicabilidad, en el terreno de la búsqueda de información en Internet, del cálculo de valores y vectores propios de matrices no negativas (en particular de la teoría de Perron-Frobenius) y hace referencia a los *aspectos computacionales* del problema. Pese a la brillantez de la exposición, hay una frase en el artículo que debería movernos a la reflexión:

> *Salvo por la cuestión, casi sentimental, de comprobar que uno de los ingredientes básicos de los cursos de Álgebra lineal permite describir una cuestión tan "aplicada", es posible que esto todavía no haya despertado el entusiasmo del lector.*

La preocupación surge al constatar que a estas alturas de la historia la *aplicabilidad real* del cálculo de valores y vectores propios necesita ser puesta de manifiesto como algo sorprendente.

A esto se refiere, en parte, el breve artículo de J. M. Gracia [17] que, con un justificado tono de lamento, comienza con una frase muy expresiva:

> *Intentaré probar que, al igual que Teruel o Soria, la teoría de matrices también existe.*

En el texto se destaca cómo durante demasiado tiempo han recibido muy poca atención (entre otras muchas cuestiones de la teoría de matrices) *la teoría de matrices no negativas y el teorema de Perron-Frobenius*.

Como lector, eché de menos en el trabajo de P. Fernández la referencia a los valores singulares (algo muy relacionado con el cálculo de valores propios) en el contexto de la aplicación del álgebra lineal a la búsqueda de información. Y es éste precisamente el primero de los problemas destacados por J. M. Gracia: *durante demasiado tiempo se han ignorado los valores singulares y su relación con el cálculo del rango*.

El resto del presente trabajo se estructura como sigue. En la Sección 2 se lleva a cabo una introducción concisa a la descomposición en valores singulares (SVD), y en la Sección 3 se presenta una breve panorámica de aspectos importantes de su aparición en la literatura matemática y de su desarrollo hasta convertirse en una importante herramienta computacional. La descripción de dos importantes aplicaciones de la SVD constituye el contenido de las Secciones 4 y 5.

2 La descomposición en valores singulares (SVD) y el teorema de aproximación

Queda dicho antes que tras la lectura de [12] uno echaba de menos la referencia a los valores singulares, pero no debido a una carencia de dicho trabajo sino porque mi trayectoria docente en el campo de las aplicaciones del álgebra lineal me ha llevado a asociar inmediatamente el problema de la búsqueda de información con la descomposición en valores singulares. Trataremos de ilustrar esta aplicación en la Sección 4.

El hecho de que la descomposición en valores singulares siga sin ocupar el papel *central* que debería corresponderle en la enseñanza de las aplicaciones del álgebra lineal (una de las pocas excepciones en España es el texto [2]) es más llamativo si tenemos en cuenta la siguiente cita de un artículo ya clásico de Golub y Kahan [14], publicado en 1965 (no hay error: 1965):

> *In the past the conventional way to determine the rank of A was to convert A to a row-echelon form... But in floating-point calculations it may not be so easy to decide whether some number is effectively zero or not... In other words, without looking explicitly at the singular values there seems to be no satisfactory way to assign rank to A.*

Este trabajo coloca en el pasado a la eliminación gaussiana como herramienta para calcular el rango de una matriz. Podemos imaginar lo que pensarían los autores acerca del enfoque del cálculo del rango a través de los determinantes, enfoque que aún se puede leer en textos muy recientes.

Dada una matriz real $m \times n$ A, existen matrices ortogonales U (de orden m) y V (de orden n) y una matriz diagonal Σ (de tamaño $m \times n$) tales que

$$A = U\Sigma V^T.$$

Esta factorización de A se llama *descomposición en valores singulares* de A (en inglés *singular value decomposition*, abreviadamente SVD).

Los r (con $r \leq m, n$) elementos diagonales no nulos de Σ son los valores singulares de A (es decir las raíces cuadradas positivas de los valores propios de $A^T A$). Si hay r valores singulares (no nulos) entonces r es el *rango* de A. Supondremos en lo que sigue que los r valores singulares en la diagonal de Σ aparecen en orden descendente, es decir $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r$.

Una elegante demostración constructiva de la existencia de la SVD puede verse en el libro de G. Strang [30], si bien debe quedar claro que el procedimiento empleado en esa construcción "teórica" de la SVD no es en modo alguno la base para los algoritmos desarrollados para su cálculo efectivo.

El cálculo de la SVD permite escribir A como suma de r matrices de rango uno, como sigue:

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \cdots + \sigma_r u_r v_r^T,$$

donde $u_1, \ldots, u_r$ y $v_1, \ldots, v_r$ son las r primeras columnas de las matrices U y V, respectivamente.

Un resultado fundamental para las aplicaciones de la SVD es el siguiente *teorema de aproximación*, cuya demostración puede verse en [16]:

> *Supongamos que, a partir del cálculo de la SVD, tenemos A (de rango r) expresada como*
>
> $$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \cdots + \sigma_r u_r v_r^T.$$
>
> *Entonces, la mejor aproximación de A (en la norma espectral) mediante matrices de su mismo tamaño y rango $\leq k < r$ es la matriz*
>
> $$A_k = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \cdots + \sigma_k u_k v_k^T$$
>
> *que se obtiene tomando solamente los k valores singulares más grandes.*

La *norma espectral* de una matriz A viene dada por

$$\| A \|_2 = \sigma_1,$$

es decir es igual al mayor de sus valores singulares. En relación con la mejor aproximación mediante matrices de rango $\leq k < r$ se tiene

$$\| A - A_k \|_2 = \sigma_{k+1}.$$

El teorema es también válido si se usa la *norma de Frobenius* dada por

$$\| A \|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_r^2},$$

en cuyo caso

$$\| A - A_k \|_F = \sqrt{\sigma_{k+1}^2 + \cdots + \sigma_r^2}.$$

3 Un poco de historia

El estudio de los orígenes de la SVD ha sido llevado a cabo por G. W. Stewart en [29], donde se muestra cómo la introducción en la literatura matemática de dicha descomposición se debe a los trabajos pioneros de Eugenio Beltrami (1873) y Camille Jordan (1874). Debe destacarse que el descubrimiento de la SVD precedió al uso de las matrices: los resultados se presentan en términos de determinantes y formas bilineales y cuadráticas.

Que el problema se enmarca en la teoría de las formas bilineales y en particular en la búsqueda de formas canónicas lo expresa claramente el comienzo del trabajo de Jordan [23]:

> *Étant donné un polynôme bilinéaire, le amener à une forme canonique simple par des substitutions orthogonales operées, les unes sur les variables* $x_1, \cdots, x_n$*, les autres sur les variables* $y_1, \cdots, y_n$.

Un párrafo del trabajo de Beltrami [3] da una idea del lenguaje matemático empleado, previo al afianzamiento de las matrices:

> *Cioè: il determinante della funzione trasformata é eguale a quello della primitiva moltiplicato per il prodotto dei moduli delle due sostituzioni.*

Stewart resalta el hecho de que Beltrami y Jordan son los *progenitores* de la SVD, Beltrami por ser el primero en llevar a cabo la publicación de dicha descomposición y Jordan por la completitud y la elegancia de su tratamiento.

Vale la pena indicar que el trabajo de Beltrami [3] fue publicado en el *Giornale de Matematiche ad Uso degli Studenti delle Università Italiane*, lo que lleva a pensar con envidia en qué tipo de estudiantes había entonces, al menos en Italia.

Tras la lectura del artículo de Stewart, me resultó muy grato encontrar los trabajos originales de Beltrami y Jordan en la nutrida hemeroteca de la Sección de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza.

Si se me permite una digresión, diré que debe resaltarse el importante papel de Zoel García de Galdeano, segundo presidente de la Real Sociedad Matemática Española, en el crecimiento de los fondos *clásicos* de dicha hemeroteca. Su tarea ha sido recordada recientemente en esta revista por Mariano Hormigón [20]. En otro trabajo de Mariano Hormigón (véase [19]) acerca de la revista *El Progreso Matemático* puede leerse sobre la esforzada labor de García de Galdeano:

> *El comentario sistemático del contenido de las revistas matemáticas que se iban recibiendo en la Facultad de Ciencias de Zaragoza es uno de los aspectos más notables de la publicación, por cuanto sirvió para romper ya definitivamente la situación de aislamiento de la matemática hecha en España.*

Se lee además en [19] cómo una de las metas de la publicación de la revista era precisamente *el intercambio de revistas*. En relación con este objetivo se indica en una nota lo siguiente:

> *Un dato fehaciente del espléndido resultado de esta iniciativa es el logro de la actual hemeroteca del Seminario Matemático "García de Galdeano" de la Facultad de Ciencias de Zaragoza, cuyos fondos históricos la convierten en una de las más valiosas del país.*

Por lo que se refiere al *teorema de aproximación*, es un hecho digno de mención que fue publicado por Eckart y Young (en 1936) en la revista *Psychometrika* [11], en el contexto de otra importante aplicación de la SVD. El comienzo de la Introducción es altamente ilustrativo:

> *If N individuals are each subjected to n tests, it is a fundamental postulate of factor theory that the resulting $n \times N$ score matrix α can be adequately approximated by another matrix β whose rank r is less than the smaller of n or N. Closely associated to this postulate is the purely mathematical problem of finding that matrix β of rank r which most closely approximates a given matrix α of higher rank R.*

Los autores utilizan la *norma de Frobenius* y hacen notar que *la cantidad de trabajo numérico involucrada en las aplicaciones puede ser prohibitiva*.

En relación con dicho aspecto computacional debe destacarse que una idea fundamental para la construcción de algoritmos efectivos para el cálculo de la SVD es la reducción previa de la matriz a *forma bidiagonal*, idea que apareció por primera vez en [14]. Un algoritmo en lenguaje Algol basado en los resultados de [14] fue publicado en [15] e incorporado posteriormente (ya en FORTRAN) al texto clásico [13]. Esta subrutina histórica está disponible en `netlib` en la dirección `http://www.netlib.org/fmm/svd.f`

Recientes avances en la construcción de algoritmos para el cálculo de la SVD han sido incorporados a los programas contenidos en la librería de algoritmos de álgebra lineal numérica LAPACK (véase [10]) y son accesibles en la dirección `http://www.netlib.org/lapack`

Es de destacar también (véase [18]) que MATLAB, a partir de la versión 6, hace uso del software de LAPACK.

4 Aplicación de la SVD a la recuperación de información

El artículo [12] se dedica al estudio del proceso de *ordenación* (*ranking*) de los resultados de una búsqueda en Internet, más concretamente al estudio del algoritmo `PageRank` en *Google* (véase también, a este respecto, el Capítulo 2 de [26]) pero no se ocupa en detalle de cómo se han encontrado esos resultados de la búsqueda, si bien se indica en la Sección 2 que uno de los problemas importantes en el diseño de un buscador es *cómo buscar en las gigantescas bases de datos, uno de los problemas en los que, sin duda, las matemáticas tienen mucho que decir*.

La aplicación de la SVD que vamos a considerar a continuación se refiere precisamente a la búsqueda de los documentos relevantes –en relación con una petición (*query*) específica– dentro de una determinada colección, así como a la ordenación de los resultados de una búsqueda.

Debe destacarse desde el principio que *Google solamente devuelve las páginas web que contienen todas las palabras que se han especificado en la consulta*, lo que es presentado como una ventaja en la información suministrada por la compañía. Por el contrario, en la aplicación que vamos a describir se construye automáticamente un espacio semántico que permite al usuario hallar información relevante incluso cuando un documento no contiene ningún término de los especificados en la consulta. Esta característica es de utilidad en muy diferentes campos.

El modelo general dentro del que se enmarca la aplicación de la SVD es el modelo de espacio vectorial (*vector space model*) en la recuperación de información (*information retrieval*, abreviadamente IR).

Aunque nos hemos referido a cuestiones relacionadas con la búsqueda de información en Internet, debe destacarse que este tipo de aplicaciones tiene ya una larga historia previa a la irrupción de Internet. Véase como ejemplo el artículo [24] en [8], que tiene el expresivo título de *Computing Similarity*. En él se destaca la aplicación de estas técnicas (de cálculo de semejanzas) en IR y se resalta el papel crucial de la SVD en una mejora del modelo de espacio vectorial llamada *Latent Sematic Indexing* (LSI) [9]. En [24] se indica cómo esta nueva representación codifica las relaciones entre términos y documentos de un modo que ya no descansa únicamente sobre los términos: la aproximación mediante la SVD permite trabajar con un subespacio k-dimensional (habitualmente con k mucho menor que r) y ahora dos documentos pueden estar próximos en el subespacio k-dimensional sin tener ningún término en común.

Una adecuada introducción al LSI puede verse en [6] (véase también [5]), y una breve pero cuidada presentación de los elementos esenciales de dicho método puede encontrarse en la Sección 5.12 de [25], sección dedicada al estudio de la SVD.

Uno de los pasos fundamentales en LSI consiste en hacer uso de la SVD para aproximar una matriz A mediante una matriz A_k de rango k, siendo k en general mucho menor que el rango de A. La matriz A cuya SVD se calcula es la llamada *matriz término-documento*. Si en una cierta colección o base de datos hay un total de d documentos descritos por t términos, entonces A es de tamaño $t \times d$, es decir los d vectores que representan los documentos forman las columnas de A. Sin embargo, *una vez calculada A_k los d documentos vienen representados por las columnas de A_k*, que es del mismo tamaño que A.

Hay distintas técnicas para construir la matriz A a partir de una colección de documentos, ya que es habitual llevar a cabo ciertas tareas de preprocesado y de ponderación (*weighting*) y normalización de los elementos de la matriz (véanse [6], [7]).

El vector de búsqueda (*query vector*) q se construye a partir de los términos que se incluyen en una determinada búsqueda, por ejemplo haciendo iguales a uno las componentes correspondientes a los términos presentes e iguales a cero las restantes componentes.

De cara a decidir cuáles son los documentos relevantes, una medida habitual de la semejanza entre un vector de búsqueda q y una columna v de la aproximación A_k a la matriz término-documento A es calcular el *coseno* del ángulo que forman ambos vectores.

Este procedimiento proporciona directamente la ordenación (*ranking*) de los documentos relevantes obtenidos: los documentos más relevantes (más próximos a la búsqueda especificada) corresponderán a los valores más altos del coseno.

Los ejemplos que se presentan como ilustración en los artículos son inevitablemente pequeños y no siempre reflejan adecuadamente lo que ocurre cuando se trata de colecciones realmente grandes.

Por ello resultará de gran utilidad para el lector poder probar el comportamiento del método de LSI mediante la *demo* de la aplicación disponible (al menos en Junio de 2005) en Internet: `http://lsi.research.telcordia.com/`

Algunos detalles acerca de la implementación práctica pueden verse en [7]. Una de las colecciones de texto disponibles en esta aplicación consiste en todos los versículos de la Biblia (en inglés), lo que nos permitirá llevar a cabo una prueba concreta. La aplicación usa en este caso 312 factores (es decir $k = 312$).

La muy reciente biografía de Galileo [27] escrita por A. Naess lleva el sugerente título *Galileo Galilei: When the World Stood Still*, que hace referencia al famoso pasaje del libro de Josué que jugó un papel muy importante en *primer* proceso de Galileo en 1616 (véase también [31]).

Una de las secciones del libro (dentro del capítulo titulado *Friendship and Power*) se titula precisamente *Sun, Stand Thou Still upon Gibeon!*, que corresponde a *Josué 10,12*.

Entrando en la aplicación y especificando la búsqueda con los términos

```
Sun stand still
```

se obtiene entre muchos otros resultados (la aplicación proporciona 50 como máximo) el versículo *Josué 10,13* que nos cuenta el final de la historia:

> *And the sun stood still, and the moon stayed, until the people had avenged themselves upon their enemies. Is not this written in the book of Jasher? So the sun stood still in the midst of heaven, and hasted not to go down about a whole day.*

Pero obtenemos también (con valores mayores o iguales del coseno) el documento *Segundo Libro de Samuel 2,10*

> *He bowed the heavens also, and came down; and darkness was under his feet*

y el documento *Mateo 5,15*:

> *Neither do men light a candle, and put it under a bushel, but on a candlestick; and it giveth light unto all that are in the house.*

Observemos que estos dos documentos no contienen ninguno de los términos de la búsqueda, pero sí términos semánticamente próximos, como *light*, *heavens* and *darkness*.

Hagamos notar que M. W. Berry ha desarrollado software para este tipo de aplicaciones de la SVD en LSI [4] y que, en concreto, en `netlib` está disponible el paquete SVDPACK en la dirección `http://www.netlib.org/svdpack/`. Finalmente es de destacar que el método de LSI ha encontrado recientemente otra novedosa aplicación, como es la clasificación de ciertas curvas de interés en el campo de la visión artificial [28].

5 Aplicación de la SVD a la compresión de imágenes

Una importante aplicación de la SVD es la compresión de imágenes digitales, que es precisamente la primera de las aplicaciones que destaca G. Strang en [30]. Podemos ilustrar con gran claridad esta aplicación haciendo uso de MATLAB. Aunque existan técnicas de compresión de datos más efectivas, difícilmente se podrán explicar con la claridad que permite el uso de la SVD.

Si escribimos en MATLAB la instrucción `what demos` encontramos que el directorio `demos` contiene una colección de ficheros que corresponden a imágenes digitalizadas. Por ejemplo el fichero `clown` corresponde al rostro de un payaso que J. Demmel usa como ejemplo en [10]. El fichero `durer` reproduce el famoso grabado de Durero que lleva por título *Melancolía I* y contiene en su parte superior derecha un cuadrado mágico de orden 4, que a su vez se incluye en el fichero `detail`.

Dado el marco de nuestro trabajo, resultará de interés elegir el fichero `gatlin`, que nos lleva a una época esencial en el desarrollo del álgebra lineal numérica. Mediante la instrucción

```
load gatlin
```

se carga una matriz X de tamaño 480×640 correspondiente a la imagen que puede verse ejecutando las instrucciones

```
colormap(gray)
image(X)
```

La imagen es la digitalización de una fotografía tomada en 1964 en la *III Gatlinburg Conference on Numerical Algebra* (véanse [18], [21]), en la que aparecen reunidos seis pioneros del álgebra lineal numérica: Jim Wilkinson, Wallace Givens, George Forsythe, Alston Householder, Peter Henrici y Fritz Bauer.

Mediante la instrucción

```
rank(X)
```

comprobamos que el rango de X es el máximo posible, es decir $r = 480$. La imagen puede verse en la Figura 1.

Figura 1: Imagen original, correspondiente a una matriz con rango $r = 480$

Los elementos de X son números enteros que van desde 2 hasta 63. Los valores más grandes corresponden a tonos más claros en una escala de grises. Puesto que los elementos de X son enteros, la norma de Frobenius de X puede calcularse de manera exacta y resulta ser

$$\| X \|_F = \sqrt{\mathtt{traza(X^TX)}} = \sqrt{276209817} \approx 16619.56,$$

mientras que la norma $\| X \|_2$ calculada por MATLAB mediante la instrucción

```
norm(X,2)
```

es el valor singular más grande:

$$\| X \|_2 = \sigma_1 \approx 1.5462 \times 10^4.$$

Podemos calcular la SVD de X mediante la siguiente instrucción:

```
[U,S,V]=svd(X);
```

Observemos que el punto y coma al final de la instrucción significa que los resultados no se muestran en la pantalla, por ser demasiado extensos. La matrix S es la matrix Σ de la descomposición $X = U\Sigma V^T$.

Creemos que resultará ilustrativo de la aplicabilidad de la SVD en la compresión de imágenes el llevar a cabo el cálculo de la mejor aproximación a X para valores del rango $k = 5, 10, 50$. Para $k = 50$ se obtiene una aproximación visualmente aceptable a la imagen original.

Podemos construir dichas aproximaciones, dadas por

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \cdots + \sigma_k u_k v_k^T,$$

de manera sencilla (una vez asignado un valor concreto a k) mediante la siguiente instrucción de MATLAB:

```
A = U(:,1:k)*S(1:k,1:k)*V(:,1:k)',
```

y podemos ver la correspondiente imagen aproximada mediante la instrucción

```
image(A)
```

Calcularemos para cada uno de los casos la compresión que se consigue, así como el error relativo cometido. La matriz error se calcula mediante la instrucción

```
E = X - A.
```

El *error relativo* (usando la norma espectral $\| X \|_2$) se calcula como

```
e = norm(E,2)/norm(X,2),
```

(es decir $e = \sigma_{k+1}/\sigma_1$), mientras que el *factor de compresión* se calculará como

$$\frac{k(480 + 640 + 1)}{480 \cdot 640},$$

que representa el cociente entre el espacio requerido para almacenar la imagen aproximada y el necesario para almacenar la matriz original (puesto que la compresión se consigue al almacenar no la matriz A sino solamente k valores singulares, k vectores u_i y k vectores v_i).

Indicamos a continuación los resultados correspondientes a los tres casos:

(i) *Aproximación de rango* $k = 5$. En este primer caso el factor de compresión resulta ser 0.0182, es decir la imagen aproximada ocupa menos del dos por ciento de la imagen original. El error relativo σ_6/σ_1 tiene el valor 0.0828, y merece la pena destacar que tomando solamente 5 valores singulares de los 480 ya puede apreciarse que se trata de la fotografía de seis personas con corbata. La imagen correspondiente puede verse en la Figura 2.

(ii) *Aproximación de rango* $k = 10$. Ahora el factor de compresión resulta ser 0.0365 (naturalmente el doble del valor obtenido para $k = 5$), es decir la imagen aproximada ocupa menos del cuatro por ciento de la imagen original, mientras que el error relativo σ_{11}/σ_1 tiene el valor 0.0570. La imagen correspondiente puede verse en la Figura 3.

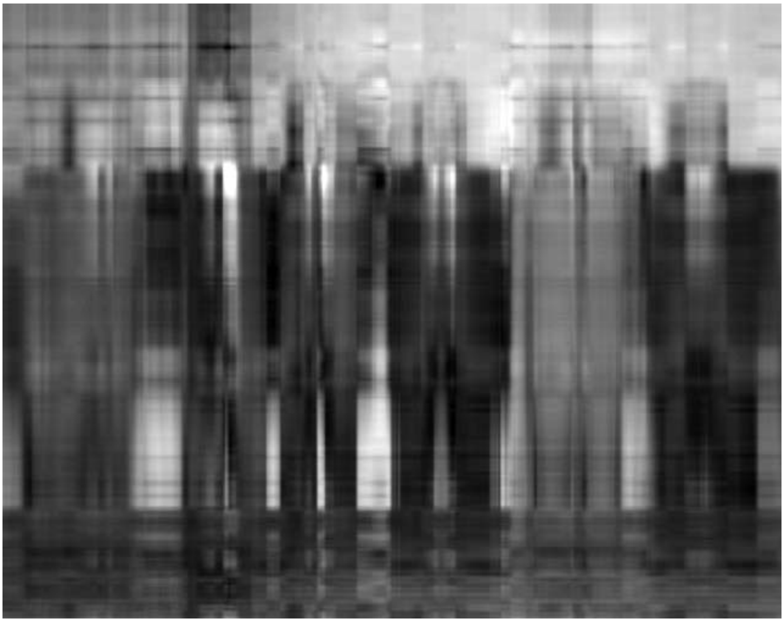

Figura 2: Aproximación de rango $k = 5$

(iii) *Aproximación de rango* $k = 50$. En este último caso (véase la imagen en la Figura 4) ya es posible distinguir perfectamente a los personajes fotografiados. El error relativo es ahora bastante más pequeño ($e = 0.0129$) y el factor de compresión, con un valor de 0.1825, sigue siendo bastante aceptable: la imagen aproximada ocupa menos del veinte por ciento de la imagen original.

Observemos que para este último caso (la aproximación de rango $k = 50$) el rango de A calculado por MATLAB es efectivamente $r = 50$. Pero para apreciar la dificultad del cálculo del rango debemos hacer notar que ejecutando la instrucción

```
rank(E)
```

se obtiene como resultado $r = 431$, en lugar del valor correcto que es $r = 430$. De hecho, para la matriz E los valores singulares σ_{430} y σ_{431} dados por MATLAB resultan ser

$$\sigma_{430} = 2.3982$$

y

$$\sigma_{431} = 7.9184 \times 10^{-11}.$$

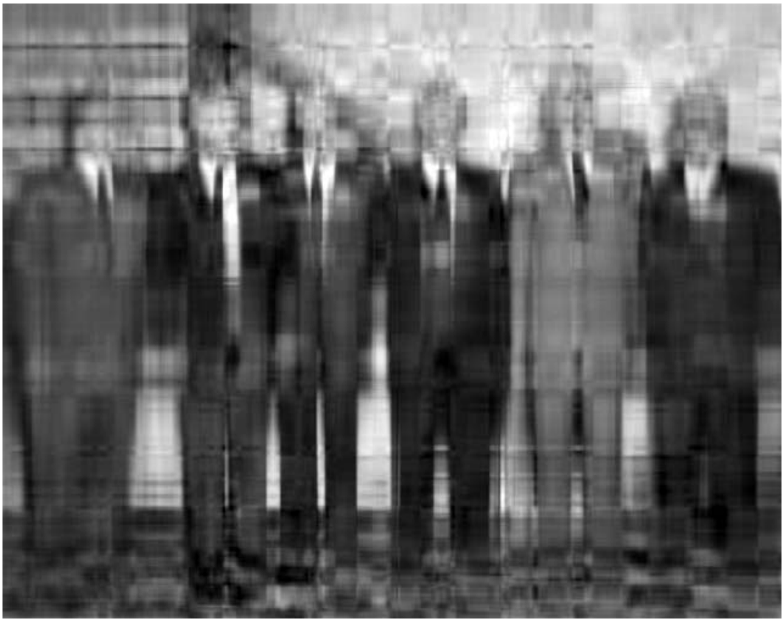

Figura 3: Aproximación de rango $k = 10$

Un artículo ya clásico en relación con la aplicación de la SVD que hemos descrito es [1], un trabajo en el que se considera además otro aspecto interesante de la aplicación, como es la observación de cada uno de los términos individuales $\sigma_i u_i v_i^T$ (los *productos exteriores* a que alude el título), llamados por los autores *eigenimages*.

Observación final: Una importante aplicación de la SVD en estadística, que en cierto sentido puede verse como una generalización de las aplicaciones concretas que hemos descrito, es el *análisis de componentes principales* (PCA). En muchos textos de estadística que no desean adentrarse más en el álgebra lineal se lleva a cabo dicho análisis solamente en términos de valores propios y vectores propios de una matriz de covarianza. Un texto que sí destaca la gran importancia de la SVD en el análisis de componentes principales es el de Jackson [22], cuyo capítulo 10 se titula precisamente *Singular Value Decomposition: Multidimensional Scaling I*.

AGRADECIMIENTOS. El autor desea agradecer la amable invitación del Profesor Tomás Recio a participar en su columna y su eficiencia en el proceso de edición, así como la labor de un *referee* anónimo que con su concienzudo análisis de la versión inicial ha ayudado a mejorar el trabajo, respetando al mismo tiempo el enfoque original que el autor quiso darle.

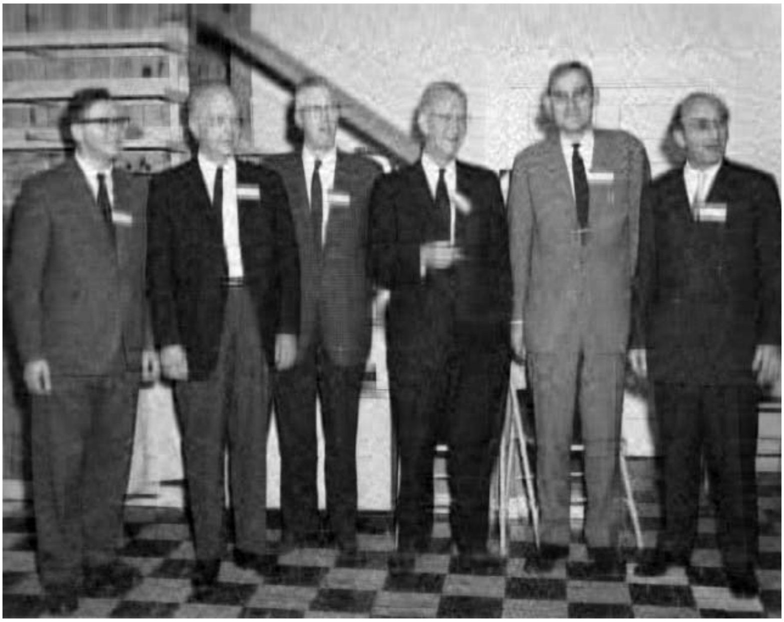

Figura 4: Aproximación de rango $k = 50$

Referencias

[1] H. Andrews, C. Patterson, Outer product expansions and their uses in digital image processing, *Amer. Math. Monthly* **82** (1975) 1-13.

[2] J. Arvesú Carballo, R. Álvarez Nodarse, F. Marcellán Español, *Álgebra Lineal y Aplicaciones*, Editorial Síntesis, Madrid, 1999.

[3] E. Beltrami, Sulle funzioni bilineari, *Giornale de Matematiche ad Uso degli Studenti delle Università Italiane* **11** (1873) 98-106.

[4] M. W. Berry, Large scale singular value computations, *International Journal of Supercomputer Applications* **6** (1992) 13-49.

[5] M. W. Berry, M. Browne, *Understanding Search Engines: Mathematical Modeling and Text Retrieval*, SIAM, Philadelphia, 1999. [La segunda edición aparecerá en 2005].

[6] M. W. Berry, S. T. Dumais, G. W. O'Brien, Using linear algebra for intelligent information retrieval, *SIAM Review* **37**(1995) 573-595.

[7] C. Chen, N. Stoffel, M. Post, C. Basu, D. Basu, C. Behrens, Telcordia LSI Engine: implementation and scalability issues. En: *Eleventh International Workshop on Research Issues in Data Engineering: Document Management for Data Intensive Business and Scientific Applications, Heidelberg, Germany, 1-2 April 2001* (K. Aberer and L. Liu, eds.), IEEE Computer Society, 2001.

[8] R. Dale, H. Moisl, H. Somers (eds.), *Handbook of Natural Language Processing*, Marcel Dekker, New York, 2000.

[9] S. Deerwester, S. Dumais, G. Furnas, T. Landauer, R. Harshman, Indexing by latent semantic analysis, *J. American Society for Information Science* **41** (1990) 391–407.

[10] J. W. Demmel, *Applied Numerical Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 1997.

[11] C. Eckart, G. Young, The approximation of one matrix by another of lower rank, *Psychometrica* **1** (1936) 211–218.

[12] P. Fernández, El secreto de Google y el Álgebra lineal, *Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada* **30** (2004) 115–141.

[13] G. E. Forsythe, M. A. Malcolm, C. B. Moler, *Computer Methods for Mathematical Computations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1977.

[14] G. H. Golub, W. Kahan, Calculating the singular values and pseudo-inverse of a matrix, *J. SIAM Numer. Anal.*, Ser. B, **2** (1965) 205–224.

[15] G. H. Golub, C. Reinsch, Singular Value Decomposition and Least Squares Solutions, *Numerische Mathematik* **14** (1970) 403–420.

[16] G. H. Golub, C. Van Loan, *Matrix Computations*, 3rd edition, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1996.

[17] J. M. Gracia, Matrices, *Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada* **30** (2004) 23–26.

[18] D. J. Higham, N. J. Higham, *MATLAB Guide*, SIAM, Philadelphia, 2000. [La segunda edición aparecerá en 2005].

[19] M. Hormigón Blánquez, El Progreso Matemático (1891-1900). Un estudio sobre la primera revista matemática española, *LLULL* **4** (1981) 87-115.

[20] M. Hormigón Blánquez, Una aproximación a la biografía científica de Zoel García de Galdeano, La Gaceta de la RSME **7.1** (2004) 282–294.

[21] A. S. Householder, The Gatlinburgs, *SIAM Review* **16** (1974) 340–343.

[22] J. E. Jackson, *A User's Guide to Principal Components*, John Wiley and Sons, 2003.

[23] C. Jordan, Mémoire sur les formes bilinéaires, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Deuxième Série*, **19** (1874) 35–54.

[24] L. Lebart, M. Rajman, Computing Similarity [Capítulo 20 en [8]].

[25] C. D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 2000.

[26] C. B. Moler, *Numerical Computing with MATLAB*, SIAM, Philadelphia, 2004.

[27] A. Naess, *Galileo Galilei: When the World Stood Still*, Springer-Verlag, 2005.

[28] C. Shakiban, R. Lloyd, P. Lloyd, Classifying signature curves using latent semantic analysis. Technical Report, Institute for Mathematics and Its Applications (IMA), University of Minnesota, 2004 (disponible en la dirección `http://www.ima.umn.edu/talks/workshops/ipaws/shakiban/iPAWS04.pdf`).

[29] G. W. Stewart, On the early history of the singular value decomposition, *SIAM Review 35* (1993) 551–566.

[30] G. Strang, *Linear Algebra and Its Applications, 3rd edition*, Harcourt Brace Jovanovich, 1988.

[31] R. S. Westfall, *Essays on the Trial of Galileo*, Vatican Observatory Publications, Special Series: *Studi Galileiani*, number 5, 1989.

José Javier Martínez Fernández de las Heras
Departamento de Matemáticas
Universidad de Alcalá
Campus Universitario
28871 Alcalá de Henares (Madrid)
Correo electrónico: `jjavier.martinez@uah.es`