
EL DIABLO DE LOS NÚMEROS

Sección a cargo de

Javier Cilleruelo Mateo

Grafos de Moore

por

Lluís Acero

1 INTRODUCCIÓN

Todo el mundo que lea este artículo sabrá más o menos lo que es un *grafo*. De todas formas, me gustaría introducir el concepto de grafo tal como me lo explicaron a mí. La primera vez que oí hablar de un grafo fue en unas sesiones de preparación para las Olimpiadas Matemáticas por allá el otoño de 1996, donde nos plantearon el siguiente problema.

“La ciudad de Königsberg tenía, en el Siglo XVIII, siete puentes dispuestos tal como muestra la Figura 1. Los habitantes de Königsberg se preguntaban por aquel entonces si era posible dar un paseo por los siete puentes cruzando solamente una vez cada uno de ellos”.

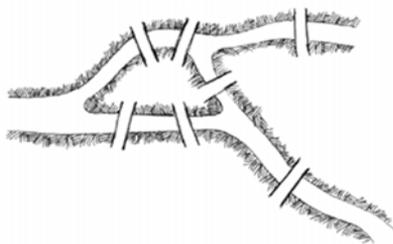


Figura 1: Representación de los puentes de Königsberg.

Euler publicó en 1736 un artículo que resolvía de forma general el problema de los puentes de Königsberg (véase [7]). El método que utilizó Euler fue identificar las porciones de tierra a visitar mediante puntos y los puentes a cruzar mediante líneas, de forma que la representación anterior de los puentes de Königsberg quedara simplificada al esquema de la Figura 2.

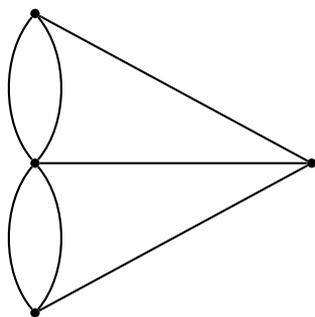


Figura 2: Esquema de los puentes de Königsberg.

Una vez modelizado el problema, Euler realizó el siguiente razonamiento: cada vez que se visita una porción de tierra (o punto) se necesitan dos puentes (o líneas), uno para llegar y otro para salir. Es decir, para no quedar “atrapado” en una porción de tierra es necesario que ésta posea un número par de puentes, a menos que dicha porción de tierra sea el inicio o el final del recorrido.

En general, un recorrido como el de los puentes de Königsberg sólo es posible si a lo sumo dos de los puntos a visitar (que además deben ser el inicio y el final) tienen un número impar de conexiones. En el caso de los puentes de Königsberg este recorrido no es posible, ya que hay cuatro puntos con un número impar de líneas.

El trabajo que Euler publicó en [7] se considera en la actualidad el nacimiento de la *Teoría de Grafos*. Desde entonces, la teoría de grafos se ha utilizado para modelizar todo tipo de problemas relacionados con las redes, como por ejemplo problemas de transporte, optimización de rutas, telecomunicaciones, circuitos, teoría de juegos, y un largo etcétera.

2 LA TEORÍA DE GRAFOS

A continuación vamos a introducir muy brevemente algunas definiciones básicas de la teoría de grafos. Un *grafo* G consiste en un conjunto finito V , cuyos elementos se llaman *vértices*, y un conjunto también finito E de pares de elementos de V , cuyos elementos reciben el nombre de *aristas* o *ramas*. Habitualmente se escribe $G = (V, E)$ y decimos que $V = V(G)$ es el *conjunto de vértices* y $E = E(G)$ el *conjunto de aristas*. Los vértices de un grafo suelen representarse a través de puntos y las aristas a través de líneas que unen dichos puntos. Por ejemplo, el grafo de la Figura 3 tiene 4 vértices y 6 aristas. Este grafo en particular recibe el nombre de *4-completo* ya que cada uno de sus vértices está conectado con todos los demás.

El *orden* de un grafo se define como el número de vértices que tiene, es decir, el cardinal de V , y se denota por n . Dos vértices x e y se dice que son *adyacentes* si y sólo si (x, y) es una arista del grafo.

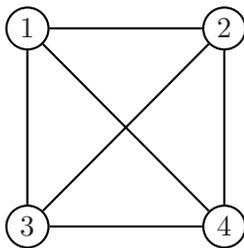


Figura 3: El grafo 4-completo, o K_4 .

Dado un vértice x , se define su *grado* $\delta(x)$ como el número de aristas incidentes sobre él. El *grado máximo* de un grafo es el máximo de los grados de sus vértices y se denota Δ . El *grado mínimo* de un grafo es el mínimo de los grados de sus vértices y se denota δ . Si $\Delta = \delta$, se dice que el grafo es Δ -regular.

Dados dos vértices x e y cualesquiera, se define un *recorrido* de x a y como una sucesión de vértices $x, x_1, x_2, \dots, x_k, y$ tal que $(x, x_1), (x_i, x_{i+1})$ $1 \leq i \leq k-1$, y (x_k, y) son aristas del grafo. Si todos los vértices del recorrido son distintos, el recorrido recibe el nombre de *camino*. Un grafo es *conexo* si para cada par de vértices x e y existe un camino que va de x a y .

Dado un recorrido de x a y , se define su *longitud* como el número de aristas que contiene. Entre dos vértices x e y de un grafo conexo siempre existe un recorrido de longitud mínima. Este recorrido, cuyos vértices además son todos distintos, recibe el nombre de *camino más corto*, y su longitud es la *distancia* entre x e y . El *diámetro* de un grafo se define como la longitud del más largo de los caminos más cortos y se denota por D . Dicho de otra forma, el diámetro es la distancia entre los dos vértices más alejados de un grafo.

Dado un vértice x , se llama *ciclo* a cualquier camino de x a x y *ciclo mínimo* al camino más corto de x a x . El *cuello* o *girth* de un grafo se define como la longitud del más corto de los ciclos mínimos y se denota por g .

Un *árbol* es un grafo conexo que no contiene ciclos (ver Figura 4). Un grafo conexo es un árbol si verifica alguna de las siguientes propiedades:

- 1) Si el número de aristas es el número de vértices menos uno.
- 2) Si hay solamente un camino que una dos vértices cualesquiera.
- 3) Si es extremal respecto al número de aristas (es decir, si al añadir una arista se cierra forzosamente un ciclo).

3 LOS PROBLEMAS (Δ, D) Y (δ, g)

Ahora que ya tenemos unas nociones básicas de teoría de grafos, estamos en condiciones de introducir un par de problemas especialmente interesantes. El primero de ellos es el llamado problema (Δ, D) . Este problema consiste



Figura 4: Ejemplo de árbol.

en encontrar grafos con el mayor número posible de vértices para un grado máximo Δ y un diámetro D dados. El problema (Δ, D) es de gran importancia debido a sus implicaciones en el diseño de topologías de redes de interconexión y otras cuestiones como problemas de alineación de datos y algoritmos criptográficos.

Junto al problema (Δ, D) encontramos el problema (δ, g) , que trata de encontrar grafos con el menor número posible de vértices para un grado mínimo δ y un cuello g dados. Los grafos que cumplen esta condición reciben el nombre de *cages* (“jaulas”).

Los problemas (Δ, D) y (δ, g) pertenecen a la *teoría extremal de grafos* y están íntimamente relacionados. Es más, los problemas más interesantes en teoría extremal de grafos son aquellos que combinan ambos problemas (Δ, D) y (δ, g) . Por ejemplo, cuando $g = 2D$, el problema (Δ, D) consiste en la búsqueda de los llamados *polígonos generalizados*. Se sabe que los polígonos generalizados existen sólo para valores del cuello g iguales a 4, 6, 8 y 12, y se han construido algunos de ellos, concretamente para valores del grado iguales a la potencia de un número primo más uno. Este problema reviste una especial dificultad y es fuente de gran actividad en la comunidad matemática internacional.

Cuando $g = 2D + 1$, el problema (Δ, D) consiste en la búsqueda de los llamados *grafos de Moore*. Se sabe que los grafos de Moore sólo pueden existir para valores del grado iguales a 3, 7 y 57. Los dos primeros casos son conocidos y reciben los nombres de *grafo de Petersen* y *grafo de Hoffman-Singleton*, mientras que el caso $\Delta = 57$ sigue sin resolverse. El estudio de los grafos de Moore y de sus propiedades ha sido el objetivo central de la tesina de especialidad [1], cuyos resultados más relevantes vamos a presentar en este artículo.

4 LOS GRAFOS DE MOORE

Para definir correctamente un *grafo de Moore* primero debemos introducir el concepto de *cota de Moore*. Dado un grado máximo Δ y un diámetro D , se define la *cota de Moore* de un grafo como el siguiente valor:

$$m = 1 + \Delta \sum_{i=1}^D (\Delta - 1)^{i-1} = \begin{cases} 2 & \text{si } \Delta = 1 \\ 2D + 1 & \text{si } \Delta = 2 \\ \frac{\Delta(\Delta-1)^D - 2}{\Delta-2} & \text{si } \Delta \geq 3 \end{cases} \quad (1)$$

El valor m es la cota superior del número de vértices que puede tener un grafo de grado máximo Δ y diámetro D . Es decir se verifica que $n \leq m$ para todo grafo G de orden n . Sin embargo, veremos que no siempre es posible llegar a la cota de Moore. Cuando un grafo alcanza la cota de Moore recibe el nombre de *grafo de Moore*. Por otro lado, cuando un grafo no alcanza la cota de Moore aún teniendo el máximo número posible de vértices, hablamos de un *grafo denso*.

La Ecuación 1 es fácil de deducir a partir del siguiente razonamiento: si asumimos que todos los vértices del grafo tienen el grado máximo, entonces el número de vértices a distancia i de un vértice cualquiera es $\Delta \cdot (\Delta - 1)^{i-1}$. Por lo tanto, el número máximo de vértices que puede tener el grafo es $1 + \Delta \sum_{i=1}^D (\Delta - 1)^{i-1}$. Del mismo razonamiento deducimos que para que un grafo sea de Moore, todos sus vértices tienen que tener grado máximo, es decir, el grafo tiene que ser Δ -regular.

A parte de la Ecuación 1, existen otros dos teoremas que nos dan más información sobre los grafos de Moore.

TEOREMA 1. *Si G es un grafo de Moore de grado $\Delta \geq 3$, entonces G tiene diámetro 2.*

TEOREMA 2. (DE HOFFMAN Y SINGLETON) *Para $\Delta \geq 3$, la cota de Moore sólo se alcanza en grafos regulares de diámetro 2 y grado 3, 7 y posiblemente 57.*

Las demostraciones a los Teoremas 1 y 2 no son sencillas y están fuera del alcance de este artículo. No obstante, el lector interesado puede consultarlas en [2].

A partir de la Ecuación 1 y de la combinación de los Teoremas 1 y 2 podemos extraer las siguientes conclusiones:

- El único grafo de Moore de grado $\Delta = 1$ es el K_2 (dos vértices unidos por una arista).
- Hay infinitos grafos de Moore de grado $\Delta = 2$, que son los correspondientes a los ciclos de longitud $2D + 1$.

- Sólo existen (o puede que existan) tres grafos de Moore de grado $\Delta \geq 3$. Estos grafos tienen diámetro 2 y grado 3, 7 y posiblemente 57.

En general, cuando hablamos de un grafo de Moore nos referimos siempre uno de los tres (posibles) grafos de Moore de $\Delta \geq 3$. El grafo de Moore de grado $\Delta = 3$ es conocido y recibe el nombre de *grafo de Petersen*. El grafo de Moore de grado $\Delta = 7$ también es conocido y recibe el nombre de *grafo de Hoffman-Singleton*. Finalmente, el grafo de Moore de grado $\Delta = 57$ todavía se desconoce. A lo largo de este artículo estudiaremos las propiedades de los grafos de Petersen y Hoffman-Singleton para caracterizar en la medida de lo posible el grafo de Moore de grado $\Delta = 57$, conocido también como *Gran Grafo de Moore*.

5 EL GRAFO DE PETERSEN

El más pequeño de los grafos de Moore es el llamado *grafo de Petersen*, que se caracteriza por los parámetros de la Tabla 1.

Diámetro	$D = 2$
Grado	$\Delta = 3$
Cuello	$g = 5$

Tabla 1: Parámetros del grafo de Petersen.

Como el grafo de Petersen es un grafo de Moore, podemos calcular el número de vértices que tendrá a través de la fórmula de la cota de Moore (Ecuación 1).

$$n = \frac{\Delta(\Delta - 1)^D - 2}{\Delta - 2} = \frac{3(3 - 1)^2 - 2}{3 - 2} = 10$$

Por otro lado, como sabemos que el grafo de Petersen es un grafo regular de grado $\Delta = 3$ (cada vértice tiene tres aristas adyacentes), podemos calcular el número de aristas de forma sencilla.

$$e = \frac{\Delta \cdot v}{2} = \frac{3 \cdot 10}{2} = 15$$

Resumiendo, el grafo de Petersen es un grafo con 10 vértices y 15 aristas. La construcción del grafo de Petersen es relativamente sencilla si utilizamos una *representación en árbol*. Para ello, empezamos colocando un vértice cualquiera, que llamaremos vértice 0, en el nivel más alto del árbol, que llamaremos nivel 0. A continuación colocamos las 3 aristas adyacentes al vértice 0, y al otro extremo de cada arista añadimos su vértice correspondiente (ver Figura 5).

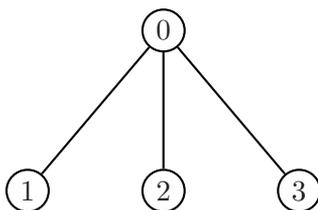


Figura 5: Construcción del grafo de Petersen. Paso 1.

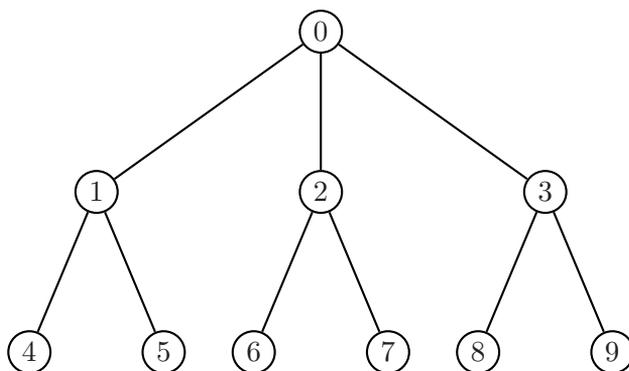


Figura 6: Construcción del grafo de Petersen. Paso 2.

Los vértices 1, 2 y 3 tienen ahora una arista cada uno, por lo que necesitan dos aristas más para alcanzar grado 3. Colocamos pues las aristas que faltan con sus correspondientes vértices en los extremos (ver Figura 6).

Llegados a este punto hemos colocado los 10 vértices del grafo de Petersen y 9 de sus 15 aristas. Por otro lado, sabemos que el árbol del grafo de Petersen no puede tener más niveles porque no puede tener más vértices (estrictamente, este hecho es debido a que el grafo de Petersen tiene diámetro 2, por lo que sus vértices no pueden estar más alejados del “origen”, o vértice 0, que 2 niveles).

El grafo de la Figura 6 es un *subgrafo* del grafo de Petersen que contiene todos los vértices del grafo principal y el máximo número de aristas sin que se cierren ciclos. Este tipo de grafo recibe el nombre de *árbol generador*. El árbol generador es una “buena manera” de empezar a construir un grafo de Moore, ya que todos los vértices están conectados y su simetría nos asegura que no hay ninguna arista colocada que nos impida completar el grafo.

Una vez tenemos el árbol generador del grafo de Petersen, vemos que nos falta colocar las aristas de los vértices del segundo nivel. El secreto para completar el grafo de Petersen es colocar dichas aristas de forma que no se formen ciclos de longitud 3 ni 4, ya que en caso contrario el grafo no tendría cuello 5 y consecuentemente no sería un grafo de Moore.

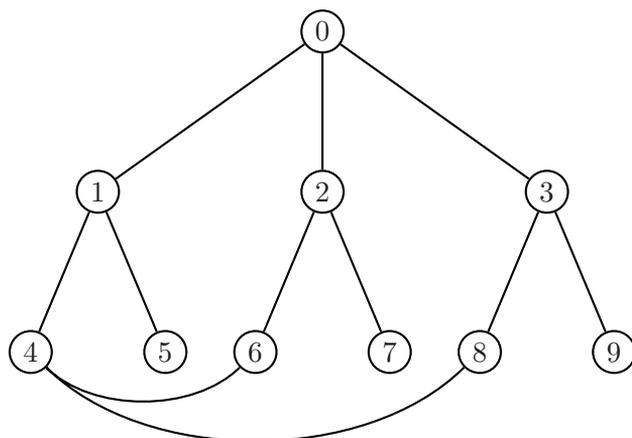


Figura 7: Construcción del grafo de Petersen. Paso 3.

Fijemos nuestra atención en el vértice 4. Este vértice tiene una arista que lo une al vértice 1. Por lo tanto, le faltan dos aristas para tener grado 3. Vamos a colocarle una segunda arista. Dicha arista no puede ir al vértice 5 porque cerraría un ciclo de longitud 3 (ciclo 1-4-5). En cambio, la arista puede ir a cualquiera de los vértices 6, 7, 8 y 9. Por comodidad, llevaremos la arista del vértice 4 al vértice 6 (ver Figura 7).

Nos falta colocar la tercera arista del vértice 4. Esta arista no puede ir al vértice 5 por la misma razón que antes ni al vértice 6 dado que ya hay una arista que une los vértices 4 y 6. Tampoco puede ir al vértice 7, porque se cerraría un ciclo de longitud 4 (ciclo 4-6-2-7). En cambio, dicha arista puede ir tanto al vértice 8 como al 9. Siguiendo el mismo criterio que antes, llevaremos la tercera arista del vértice 4 al vértice 8 (ver Figura 7).

Hecho esto, el vértice 4 ya tiene todas las aristas necesarias. Pasemos pues al vértice 5. A este vértice le faltan también dos aristas para tener grado 3. Tanto el vértice 6 como el vértice 8 están descartados ya que se cerrarían ciclos de longitud 4 (ciclos 5-6-4-1 y 5-8-4-1, respectivamente). Quedan pues los vértices 7 y 9. Como tenemos que colocar dos aristas desde el vértice 5 y las dos no pueden ir a un mismo vértice, llevaremos una al vértice 7 y otra al 9 (ver Figura 8).

Llegados a este punto, es importante darse cuenta que las decisiones que hemos ido tomando, es decir, el conectar el vértice 4 con los vértices 6 y 8 y el vértice 5 con el 7 y el 9, no supone ninguna pérdida de generalidad, ya que hasta el momento los vértices del segundo nivel del árbol generador eran indistinguibles en términos de sus adyacencias con otros vértices. Dicho de otro modo, todavía no hemos colocado ninguna arista que después pueda impedirnos completar el grafo de Petersen. Por este motivo, podemos decir que esta construcción basada en el árbol generador más las aristas correspondientes

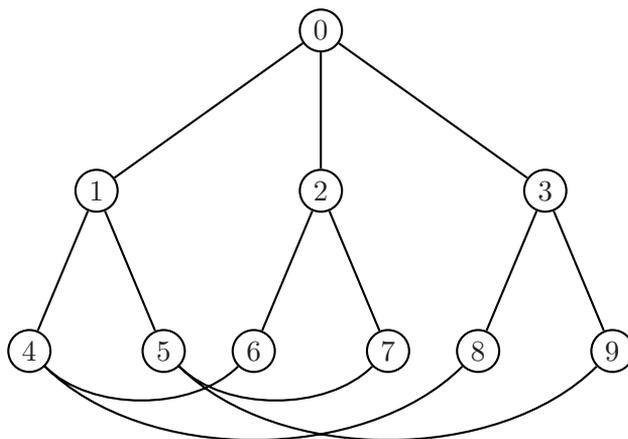


Figura 8: Construcción del grafo de Petersen. Paso 4.

al primer grupo de vértices del segundo nivel es la “mejor manera” de empezar a construir un grafo de Moore. Esta construcción la hemos bautizado con el nombre de *grafo soporte*.

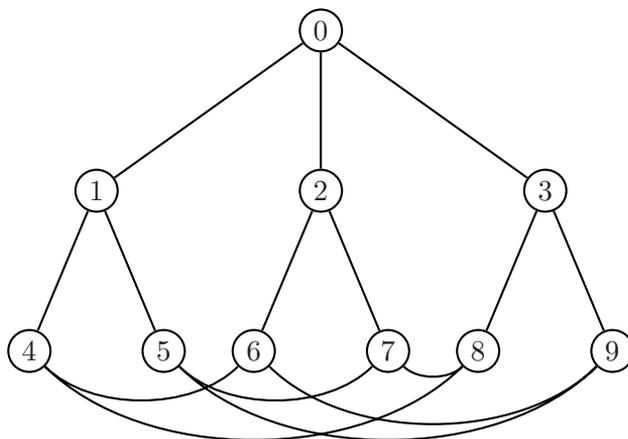


Figura 9: Construcción del grafo de Petersen. Paso 5.

Volviendo a la construcción del grafo de Petersen, vemos que nos falta colocar dos aristas que unan los vértices 6, 7, 8 y 9, que son los únicos que todavía no tienen grado 3. Dado que las parejas 6-7 y 8-9 están descartadas porque cerrarían ciclos de longitud 3 (ciclos 6-7-2 y 8-9-3, respectivamente), sólo nos quedan dos posibilidades: o bien unir el vértice 6 con el 8 y el 7 con el 9, o bien unir el vértice 6 con el 9 y el 7 con el 8. Un tanteo rápido nos revela que las parejas correctas son la 6-9 y la 7-8 (ver Figura 9).

De esta forma hemos acabado la construcción del grafo de Petersen. Para verificar que el grafo de Petersen es efectivamente un grafo de Moore podemos hacer dos cosas:

- O bien comprobar que desde cualquier vértice podemos ir a cualquier otro en a lo sumo dos pasos.
- O bien comprobar que el ciclo más corto que contiene el grafo tiene longitud 5.

Para aquellos que deseen perfeccionar sus habilidades en la construcción del grafo de Petersen, la Figura 10 nos muestra otras representaciones del mismo. Estas representaciones del grafo de Petersen están basadas en el pentágono, el hexágono, el octágono y el nonágono. Nótese que todas las figuras representan el mismo grafo, tan sólo cambia la disposición de los vértices en el plano. A pesar de ello, el grafo de Petersen es habitualmente conocido por su representación basada en el pentágono.

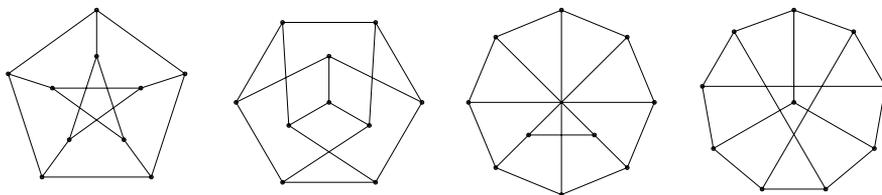


Figura 10: Otras representaciones del grafo de Petersen.

6 EL GRAFO DE HOFFMAN-SINGLETON

El segundo grafo de Moore que encontramos es el llamado *grafo de Hoffman-Singleton*, que se caracteriza por los parámetros recogidos en la Tabla 2.

Diámetro	$D = 2$
Grado	$\Delta = 7$
Cuello	$g = 5$

Tabla 2: Parámetros del grafo de Hoffman-Singleton.

Por ser el grafo de Hoffman-Singleton un grafo de Moore, podemos calcular el número de vértices y de aristas que tendrá mediante las fórmulas

introducidas anteriormente:

$$n = \frac{\Delta(\Delta - 1)^D - 2}{\Delta - 2} = \frac{7(7 - 1)^2 - 2}{7 - 2} = 50$$

$$e = \frac{\Delta \cdot v}{2} = \frac{7 \cdot 50}{2} = 175$$

Es decir, el grafo de Hoffman-Singleton tiene 50 vértices y 175 aristas. Vamos intuyendo que la construcción del grafo de Hoffman-Singleton no va a ser tan sencilla como la del grafo de Petersen. Para ilustrar este hecho no hay más que ver la Figura 11, que nos muestra el aspecto que tiene el grafo soporte para el caso de Hoffman-Singleton (recordemos que el grafo soporte era la “mejor manera” de empezar a construir un grafo de Moore).

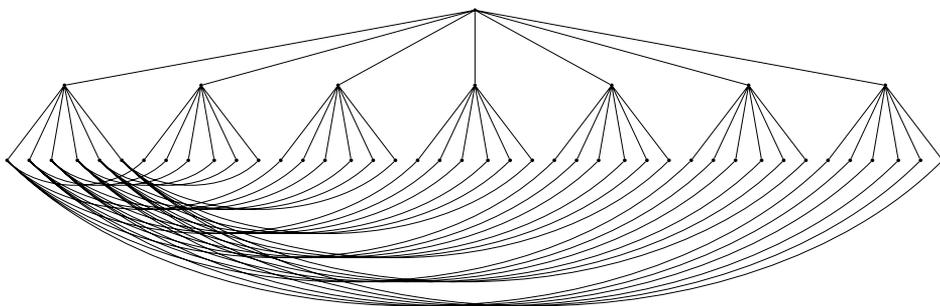


Figura 11: Grafo soporte para el caso de Hoffman-Singleton.

Afortunadamente, existe una construcción clásica del grafo de Hoffman-Singleton basada en el grafo completo bipartito $K_{5,5}$. Un grafo se llama *bipartito* cuando sus vértices están agrupados en dos conjuntos de forma que no hay aristas que unan vértices dentro de un mismo conjunto. Un grafo se llama *completo* cuando cada vértice está unido con todos los demás. Para construir el grafo de Hoffman-Singleton basta tomar 5 “estrellas” y 5 “pentágonos” como los de la Figura 12 y unir cada vértice i de la “estrella” E_j con el vértice $i + jk$ (módulo 5) del “pentágono” P_k .

Si seguimos este método habremos construido el grafo de Hoffman-Singleton. Para comprobar que efectivamente se trata de un grafo de Moore podríamos seguir el mismo procedimiento que para el grafo de Petersen, es decir, comprobar que todo vértice está a distancia a lo sumo 2 de cualquier otro o que el grafo no contiene ciclos de longitud inferior a 5. Sin embargo, al tener el grafo de Hoffman-Singleton 50 vértices y 175 aristas, esta tarea puede resultar muy tediosa, de forma que vamos a introducir una nueva manera de trabajar con grafos que nos va a permitir hacer la comprobación con más comodidad.

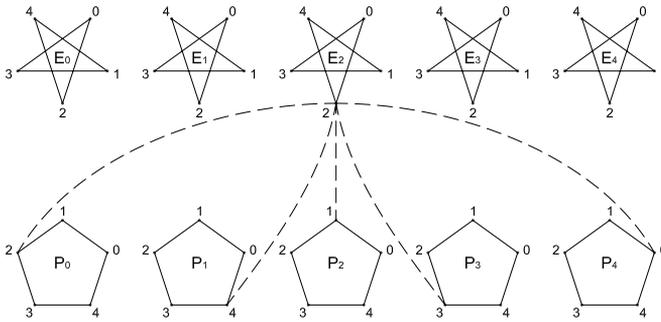


Figura 12: Construcción del grafo de Hoffman-Singleton.

7 MODELIZACIÓN POR MATRICES

Dada la estructura discreta de los grafos, parece natural pensar que su tratamiento mediante un ordenador pueda hacerse de forma eficaz. De hecho, así es. Sin embargo, es necesario poder extraer la información que contiene el grafo y almacenarla de forma que pueda ser interpretada por un ordenador. Es así como surge el concepto de la *matriz de adyacencia*, cuya definición es la siguiente: dado un grafo G de orden n , se define la *matriz de adyacencia* asociada al grafo como una matriz binaria ($n \times n$) en la que cada elemento (i, j) contiene un 1 si el vértice i está unido al vértice j por una arista, o un 0 en caso contrario. En la Figura 13 vemos un ejemplo de un grafo y su matriz de adyacencia.

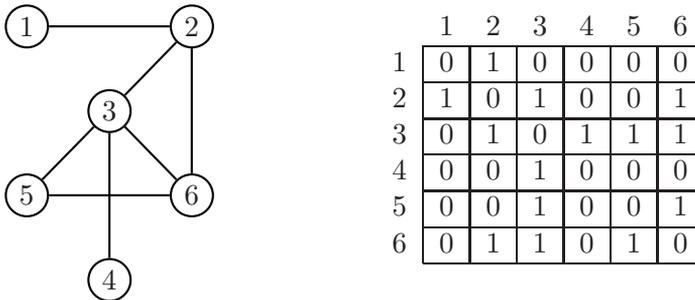


Figura 13: Grafo de 6 vértices y matriz de adyacencia asociada.

Es fácil ver que la matriz de adyacencia de un grafo simple cumple las siguientes condiciones:

- 1) Es simétrica (si el vértice i es adyacente al j , entonces el vértice j es adyacente al i).
- 2) Los elementos de la diagonal son cero (un vértice no puede ser adyacente a sí mismo).

La definición de la matriz de adyacencia puede extenderse fácilmente a órdenes superiores de la siguiente manera: dado un grafo G de orden n , se define la *matriz de adyacencia de orden ν* asociada al grafo como una matriz $(n \times n)$ en la que cada elemento (i, j) contiene el número de recorridos de longitud ν que unen los vértices i y j del grafo. Recuperando el ejemplo anterior, la Figura 14 nos muestra la matriz de adyacencia de orden 2 asociada al mismo grafo.

	1	2	3	4	5	6
1	1	0	1	0	0	1
2	0	3	1	1	2	1
3	1	1	4	0	1	2
4	0	1	0	1	1	1
5	0	2	1	1	2	1
6	1	1	2	1	1	3

Figura 14: Matriz de adyacencia de orden 2 asociada al grafo de la Figura 13.

Nótese que en este caso los elementos de la diagonal no son cero. Esto es debido a que se cuentan los recorridos del tipo $i \rightarrow j \rightarrow i$ (“ida y vuelta”). Es más, los elementos de la diagonal de la matriz de adyacencia de orden 2 indican precisamente el grado de cada vértice.

Las matrices de adyacencia de orden $\nu \geq 1$ son relativamente fáciles de calcular gracias a la siguiente propiedad: si A es la matriz de adyacencia de orden 1 asociada a un grafo, entonces A^ν es la matriz de adyacencia de orden ν asociada al mismo grafo. Podemos demostrar este resultado recurriendo a la inducción sobre ν :

- Para $\nu = 1$, $A_{ij}^1 = 1$ si el vértice i es adyacente al vértice j , y 0 en caso contrario.
- Para $\nu = 2$, $A_{ij}^2 = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj}$. Sabemos que el producto $a_{ik} a_{kj}$ vale 1 si i es adyacente a k y k es adyacente a j , y 0 en caso contrario. Por lo tanto, si $a_{ik} a_{kj} \neq 0$, entonces los vértices i y j están unidos por un recorrido de longitud 2, por lo que A_{ij}^2 representa el número de recorridos de longitud 2 entre los vértices i y j .
- Supongamos que para todo $h < \nu$, A_{ij}^h es el número de recorridos de longitud h que unen los vértices i y j . Sabemos que $A_{ij}^\nu = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj}^{\nu-1}$, donde $a_{ik} a_{kj}^{\nu-1} \neq 0$ si i es adyacente a k y k está unido con j por un recorrido de longitud $\nu - 1$. Por lo tanto, si $A_{ij}^\nu \neq 0$, entonces i está unido con j por un recorrido de longitud ν , y A_{ij}^ν representa el número de recorridos de longitud ν entre los vértices i y j .

Como corolario a la demostración anterior tenemos las siguientes propiedades: si A^r y A^s son respectivamente las matrices de adyacencia de orden r y s de un grafo, entonces la matriz de adyacencia definida como $A^r + A^s$ contiene el número de recorridos de longitud r o s , mientras que la matriz definida como $A^r \cdot A^s$ contiene el número de recorridos de longitud $r + s$.

7.1 FORMA CANÓNICA DE UN GRAFO DE MOORE

Como ya hemos visto, el grafo soporte es la “mejor manera” de empezar a construir un grafo de Moore. Pues bien, a la matriz de adyacencia asociada al grafo soporte de un grafo de Moore la hemos bautizado con el nombre de *forma canónica*. En general, si el grafo soporte de un grafo de Moore tiene el aspecto de la Figura 15, entonces la forma canónica de la matriz de adyacencia asociada a dicho grafo soporte es la que muestra la Figura 16.

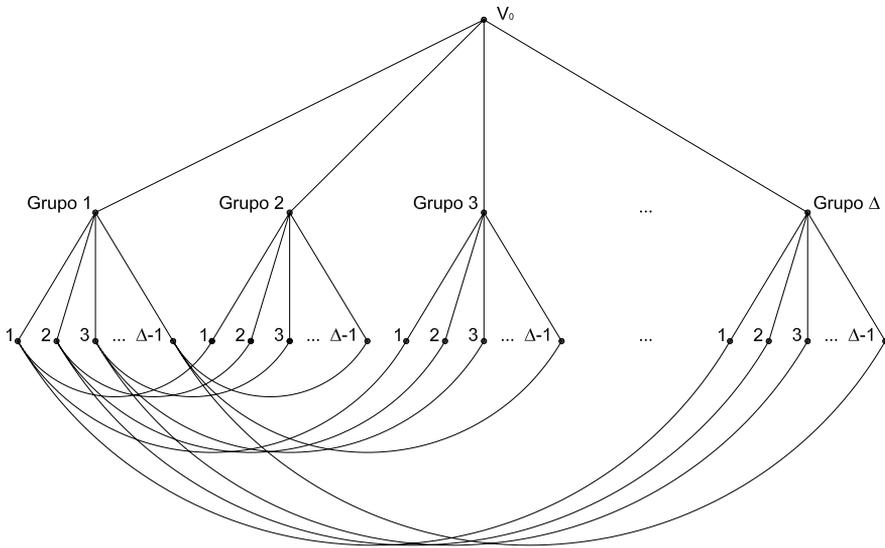


Figura 15: Grafo soporte de un grafo de Moore.

Una propiedad interesante es que dada la matriz de adyacencia asociada a un grafo de Moore, siempre es posible escribirla en forma canónica mediante permutaciones adecuadas de sus filas y sus columnas (recordemos que la matriz de adyacencia es una matriz simétrica, por lo tanto toda permutación de fila tendrá su correspondiente permutación de columna). Dicho más formalmente, podemos asegurar que dada una matriz de adyacencia A asociada a un grafo de Moore, existe una matriz de permutación P tal que $A' = P^T \cdot A \cdot P$, siendo A' la forma canónica de A .

$$A^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 17: Forma canónica de la matriz de adyacencia del grafo de Petersen.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Figura 18: Matriz de adyacencia de orden 2 del grafo de Petersen.

$$A^1 + A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Figura 19: Matriz suma de las matrices A^1 y A^2 del grafo de Petersen.

Vistas las matrices de adyacencia de orden 1 y orden 2 asociadas al grafo de Petersen, veamos qué aspecto tiene la suma de las matrices A^1 y A^2 (Figura 19). En la matriz $A^1 + A^2$ ningún elemento vale cero. Recordando las propiedades de la suma de matrices de adyacencia, esto significa que toda pareja de vértices i y j está conectada por un camino de longitud 1 o 2. Por lo tanto, hemos demostrado matricialmente que el grafo de Petersen es efectivamente un grafo de Moore.

Llegados a este punto, podemos aplicar el mismo procedimiento para comprobar que el grafo de Hoffman-Singleton construido a partir del grafo bipartito $K_{5,5}$ es también un grafo de Moore (ver Figuras 20, 21 y 22).

Nótese que la matriz de adyacencia del grafo de Hoffman-Singleton puede dividirse en 4 submatrices 25×25 . Esto es debido al carácter bipartito del grafo de Hoffman-Singleton. En el primer cuadrante tenemos las “estrellas” E_0 a E_4 , mientras que en el cuarto cuadrante tenemos los “pentágonos” P_0 a P_4 . Los cuadrantes segundo y tercero, que por simetría son uno el traspuesto del otro, contienen los enlaces entre las “estrellas” E_j y los “pentágonos” P_k según la fórmula $i + jk$ (módulo 5). Nótese también que hay exactamente 7 unos por fila y por columna, lo que nos indica que el grafo es 7-regular.

Como podemos observar, ningún elemento de la matriz $A^1 + A^2$ vale cero. Por lo tanto, podemos asegurar cualquier pareja de vértices distintos o bien son adyacentes o bien están unidos por un único camino de longitud 2. Es decir, el grafo tiene diámetro 2. Además, como se trata de un 7-regular (todos los elementos de la diagonal valen 7), tiene que ser un grafo de Moore.

7.2 REFORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Vista la técnica de trabajar con los grafos de Moore mediante matrices, y antes de cerrar esta sección de modelización matricial, vamos a reformular el problema de encontrar grafos de Moore de la siguiente manera: el objetivo de construir un grafo de Moore de grado Δ puede verse como el de hallar una matriz simétrica A que verifique la siguientes condiciones:

- 1) La matriz A debe ser una matriz binaria $n \times n$, con $n = \Delta^2 + 1$ y diagonal nula.
- 2) La matriz A debe tener exactamente Δ unos en cada fila y en cada columna.
- 3) La matriz A debe verificar la siguiente relación (I es la matriz identidad y J la matriz cuyos elementos son todos unos):

$$A + A^2 = (\Delta - 1) \cdot I + J \quad (2)$$

La demostración a la proposición anterior es la siguiente: sea A la matriz de adyacencia asociada a un grafo G . Por la primera condición, G es un grafo simple de orden n . Por la segunda condición, G es un grafo Δ -regular. Y por la tercera condición, G es un grafo de diámetro 2. Por lo tanto, G es un grafo de Moore.

Repitiendo las mismas cuentas que para los grafos de Petersen y Hoffman-Singleton, el número de vértices y de aristas que tendrá el Gran Grafo de Moore será el siguiente:

$$n = \frac{\Delta(\Delta - 1)^D - 2}{\Delta - 2} = \frac{57(57 - 1)^2 - 2}{57 - 2} = 3.250$$

$$e = \frac{\Delta \cdot v}{2} = \frac{57 \cdot 3.250}{2} = 92.625$$

Como podemos observar, el Gran Grafo de Moore tiene más de tres mil vértices y casi cien mil aristas. Es más, su matriz de adyacencia es una matriz 3.250×3.250 , es decir, tiene más de diez millones de elementos. Para hacernos una idea de la dificultad que supone encontrar el Gran Grafo de Moore veamos la Tabla 4, que muestra la evolución del tamaño del problema.

Grafo de Moore	Número de vértices	Número de aristas	Tamaño de la matriz de adyacencia
Petersen	10	15	100
Hoffman-Singleton	50	175	2.500
Gran Grafo de Moore	3.250	92.625	10.562.500

Tabla 4: Evolución del tamaño del problema.

Por ejemplo, si quisiéramos encontrar el Gran Grafo de Moore mediante una búsqueda exhaustiva por ordenador, sería necesario comprobar más de $10^{200.000}$ casos, lo cual es imposible en términos de potencia computacional. Por lo tanto, en nuestra búsqueda del Gran Grafo de Moore va a ser necesario encontrar una serie de propiedades sobre los grafos de Moore, y en particular sobre sus matrices de adyacencia asociadas. Empezaremos estudiando las propiedades algebraicas de las matrices de adyacencia de los grafos de Moore.

8.1 PROPIEDADES ALGEBRAICAS DE LAS MATRICES DE ADYACENCIA DE LOS GRAFOS DE MOORE

A continuación se presenta un análisis de las propiedades algebraicas de las matrices de adyacencia de los grafos de Moore. Dicho análisis consiste en la determinación de los valores propios y los vectores propios de las matrices de adyacencia.

Para los grafos de *Petersen* y *Hoffman-Singleton*, la caracterización algebraica puede hacerse a partir de la propia matriz de adyacencia. Sin embargo, para el caso del Gran Grafo de Moore esto no es posible, ya que no se conoce dicha matriz. No obstante, existe un procedimiento que permite determinar los valores y vectores propios sin conocer necesariamente la matriz de adyacencia. Este procedimiento es el resultado de las siguientes proposiciones.

PROPOSICIÓN 1. *La matriz de adyacencia de un grafo de Moore tiene los mismos valores propios que la siguiente matriz tridiagonal:*

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \Delta & 0 & 1 \\ 0 & \Delta - 1 & \Delta - 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

PROPOSICIÓN 2. *La multiplicidad de cada valor propio de la matriz de adyacencia del grafo de Moore puede calcularse mediante la siguiente fórmula:*

$$m(\lambda_i) = \frac{n}{\mathbf{u}(\lambda_i) \cdot \mathbf{v}(\lambda_i)} \quad (4)$$

donde $\mathbf{u}(\lambda_i)$ y $\mathbf{v}(\lambda_i)$ son, respectivamente, los vectores propios por la izquierda y por la derecha de la matriz T , previamente reducidos para que su primera componente valga 1, y n es la dimensión de la matriz de adyacencia, en este caso $\Delta^2 + 1$.

PROPOSICIÓN 3. *Las componentes del vector $\mathbf{v}(\lambda_i)$ se pueden escribir en función de las componentes del vector $\mathbf{u}(\lambda_i)$ de la siguiente manera:*

$$v_0(\lambda_i) = u_0(\lambda_i) = 1 \quad (5)$$

$$v_1(\lambda_i) = \Delta u_1(\lambda_i) \quad (6)$$

$$v_2(\lambda_i) = \Delta(\Delta - 1) u_2(\lambda_i) \quad (7)$$

La demostración de las Proposiciones 1, 2 y 3 no es sencilla. De hecho, forma parte de la demostración del Teorema 1, que como ya se dijo está fuera del alcance de este artículo (aunque puede consultarse en [2]). Basándonos pues en las Proposiciones 1, 2 y 3 y haciendo los cálculos necesarios para los grados 3, 7 y 57, obtenemos los resultados que muestra la Tabla 5.

Con estos resultados ya sabemos algo sobre la matriz de adyacencia del Gran Grafo de Moore. En la siguiente sección veremos si es posible obtener alguna información más de dicha matriz mediante la ayuda de una aplicación informática.

8.2 LA APLICACIÓN *The Biggest Moore Graph*

Con la finalidad de poder manipular de una forma ágil y visual las matrices de adyacencia asociadas a los grafos de Moore, el autor de este artículo ha desarrollado una herramienta informática específica que ha bautizado con el nombre del problema: *The Biggest Moore Graph* (TBMG).

TBMG ha sido creada en lenguaje *Visual Basic*, el cual permite un grado muy elevado de interacción con el usuario a costa de un menor rendimiento de cálculo en comparación con otros lenguajes. Sin embargo, hemos visto que el problema de capacidad de cálculo no es relevante, ya que el problema del

Δ	λ_i	$\mathbf{u}(\lambda_i)$	$\mathbf{v}(\lambda_i)$	$m(\lambda_i)$
3	-2	$(1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{6})$	$(1, -2, 1)$	4
3	1	$(1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$	$(1, 1, -2)$	5
3	3	$(1, 1, 1)$	$(1, 3, 6)$	1
7	-3	$(1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{21})$	$(1, -3, 2)$	21
7	2	$(1, \frac{2}{7}, -\frac{1}{14})$	$(1, 2, -3)$	28
7	7	$(1, 1, 1)$	$(1, 7, 42)$	1
57	-8	$(1, -\frac{8}{57}, \frac{1}{456})$	$(1, -8, 7)$	1520
57	7	$(1, \frac{7}{57}, -\frac{1}{399})$	$(1, 7, -8)$	1729
57	57	$(1, 1, 1)$	$(1, 57, 3192)$	1

Tabla 5: Valores y vectores propios de los grafos de Moore.

Gran Grafo de Moore no puede ser resuelto mediante los métodos llamados “de fuerza bruta”. En cambio, resulta mucho más interesante poder observar el *aspecto* de la matriz de adyacencia para deducir las propiedades que las caracterizan.

Hechas estas consideraciones, vamos a presentar el interfaz que nos permite interactuar con las matrices de adyacencia. La pantalla principal de TBMG se compone de una rejilla que representa la matriz de adyacencia y una serie de cajas de herramientas que permiten realizar diversas tareas pre-programadas.

La matriz de adyacencia que muestra TBMG es en realidad una combinación de las matrices de adyacencia A^1 y A^2 definida de la forma siguiente: $B = A^1 + 2A^2$. De esta manera, los unos identifican los elementos de la matriz A^1 y los doses los de la matriz A^2 . Además, para dotar a la aplicación de un carácter más visual, se utiliza la siguiente simbología¹:

Celda en blanco: indica las posiciones de la matriz B que se encuentran vacantes, es decir, aquellas posiciones que contienen un 0.

Celda en negro: identifica los elementos de la diagonal, de forma que se resalta carácter simétrico de la matriz B .

Círculo azul: indica las posiciones de la matriz B que contienen un 1.

Punto verde: indica las posiciones de la matriz B que contienen un 2.

¹Para visualizar las figuras en colores, véase LA GACETA DIGITAL <http://www.rsme.es/gacetadigital/>

✘ **Equis roja:** indica las posiciones en la matriz B donde hay un conflicto, es decir, aquellas casillas fuera de la diagonal cuyo valor es superior a 2.

Por ejemplo, echemos un vistazo a la matriz B correspondiente al grafo de Petersen y a su representación mediante la simbología de TBMG (ver Figura 23). Cuando todos los elementos de la matriz B son azules o verdes (a excepción de los de la diagonal), el grafo de Moore está completo. Si algún elemento de la matriz está en blanco, significa que todavía no hay ningún camino de longitud 1 o 2 que una esa pareja de vértices. Y si algún elemento contiene una equis roja, significa que esa pareja de vértices está unida por más de un camino de longitud 1 o 2, por lo que el grafo no podrá completarse al haberse perdido la optimalidad.

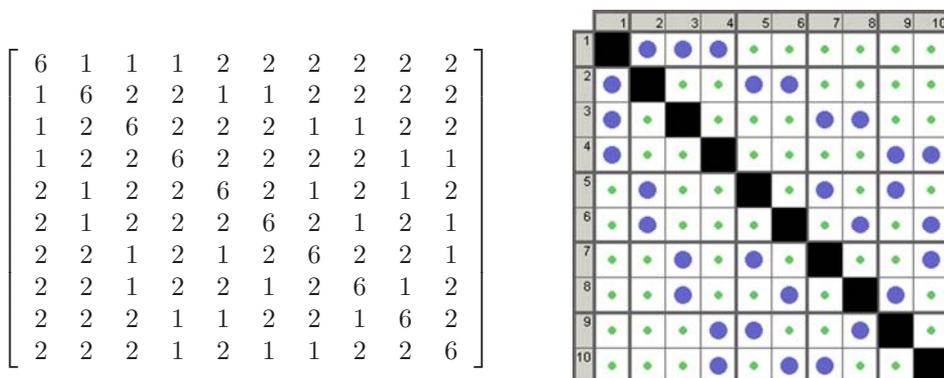


Figura 23: Matriz B asociada el grafo de Petersen y su representación en TBMG.

Veamos ahora un ejemplo con algunos conflictos, es decir, con algunas equis rojas. En la Figura 23 podemos observar lo siguiente:

- Tanto la fila 5 como la columna 5 tienen 4 puntos azules, lo que significa que hay 4 aristas incidentes sobre el vértice 5 (es decir, el grado del vértice 5 es 4 cuando debería ser 3). Esto podemos verlo reflejado en la posición (5,5) de la matriz B , donde hay un 8 en vez de un 6.
- Las equis rojas en las posiciones (4,5) y (5,4) nos indican que los vértices 4 y 5 están unidos por más de un camino de longitud 2. Estos caminos son el 4-9-5 y el 4-10-5. Este conflicto puede verse reflejado en las mismas posiciones de la matriz B , donde hay un 4 en vez de un 2.
- Las equis rojas en las posiciones (9,10) y (10,9) nos indican que entre los vértices 9 y 10 también hay redundancia de caminos, en este caso el 9-4-10 y el 9-5-10.

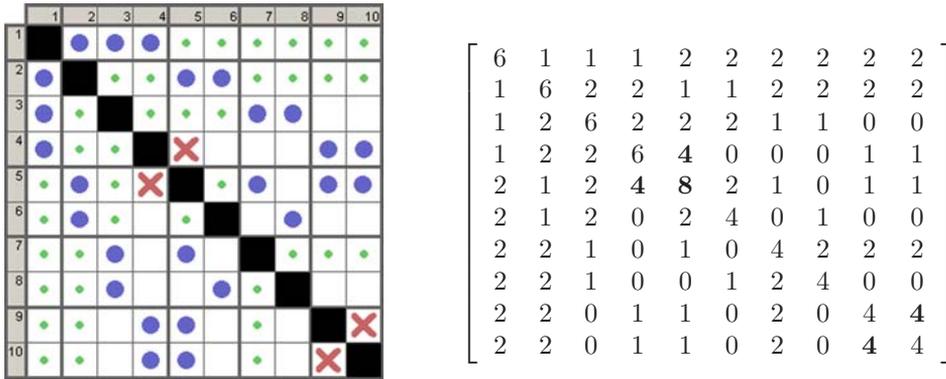


Figura 24: Matriz de adyacencia del grafo de Petersen con conflictos.

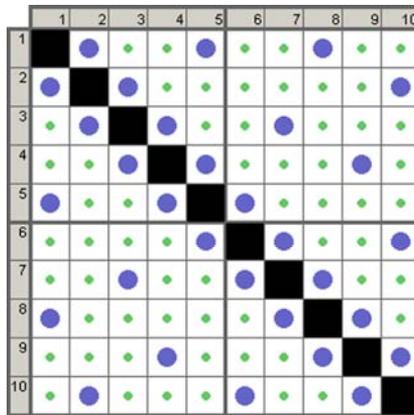


Figura 25: Matriz de adyacencia del grafo de Petersen basada en un patrón 5×5 .

Mediante el interfaz gráfico de TBMG es muy fácil identificar los conflictos en la matriz B , por lo que podremos probar más combinaciones en menos tiempo. Para más agilidad, existen dos maneras de introducir los puntos azules en la matriz. Una es directamente con el ratón, haciendo *double-click* en la posición deseada. Si la posición está vacante, entonces aparece un punto azul, y si hay un punto azul, entonces se libera la casilla. En ambos casos se actualiza el resto de la matriz con los puntos verdes correspondientes.

La otra manera de introducir los puntos azules es mediante las herramientas pre-programadas en la aplicación, las cuales resultan muy útiles a la hora de rellenar grandes matrices siguiendo alguna clase de patrón, como por ejemplo el grafo soporte o un patrón 5×5 como el que muestra la Figura 25.

Ha sido precisamente gracias a la agilidad que proporciona TBMG que ha podido realizarse una caracterización de la matriz de adyacencia de los grafos de Moore, es decir, se han detectado ciertos patrones dentro de la matriz de adyacencia que hacen más fácil abordar el problema del Gran Grafo de Moore.

8.3 CARACTERIZACIÓN DE LA MATRIZ DE ADYACENCIA DE LOS GRAFOS DE MOORE

A continuación se presentan los resultados más relevantes que se han obtenido a lo largo de la tesina de especialidad [1] en lo que se refiere a la caracterización de la matrices de adyacencia asociadas a los grafos de Moore. Para empezar, vamos a echar un vistazo a la matriz de adyacencia del grafo de Hoffman-Singleton que obtuvimos mediante la construcción clásica, esta vez mediante el interfaz de TBMG (Figura 26). El interfaz gráfico de TBMG destaca los unos de la matriz de adyacencia, de forma que basta con un vistazo rápido para hacerse una idea de la estructura de la matriz. En particular, podemos volver a remarcar el carácter cuasi-bipartito de la matriz de adyacencia y su estructura basada en submatrices 5×5 .

Recordemos que toda matriz de adyacencia asociada a un grafo de Moore siempre puede escribirse en forma canónica permutando adecuadamente sus filas y sus columnas. Afortunadamente, el algoritmo para realizar este procedimiento está implementado en TBMG, por lo que al seleccionar la opción *Arrange matrix* obtenemos el resultado que muestra la Figura 27. Podemos observar que ha cambiado el patrón de la rejilla (las líneas gruesas) para resaltar el nuevo carácter de la matriz de adyacencia, que ya no está basado en submatrices de orden 5 sino de orden 6. Este es el primer resultado importante, que expresaremos mediante la Observación 1.

OBSERVACIÓN 1. *Al representar en forma canónica la matriz de adyacencia de un grafo de Moore de grado Δ , aparece un patrón basado en submatrices de orden $\Delta - 1$.*

Las $\Delta + 1$ primeras filas y las $\Delta + 1$ primeras columnas se corresponden con las aristas del árbol generador, mientras que las filas y las columnas de la $\Delta + 2$ a la 2Δ se corresponden con las aristas añadidas durante la construcción del grafo soporte. Las filas y columnas restantes, es decir, de la $2\Delta + 1$ a la $\Delta^2 + 1$, se corresponden con las aristas de los grupos 2 a Δ , y son precisamente las que hay que determinar para completar el grafo de Moore a partir de su grafo soporte. Por otro lado, si nos fijamos en la estructura de las submatrices de orden 6 que aparecen en la forma canónica de la matriz de adyacencia del grafo de Hoffman-Singleton, podremos deducir algunas de sus características, como por ejemplo la recogida en la Observación 2.

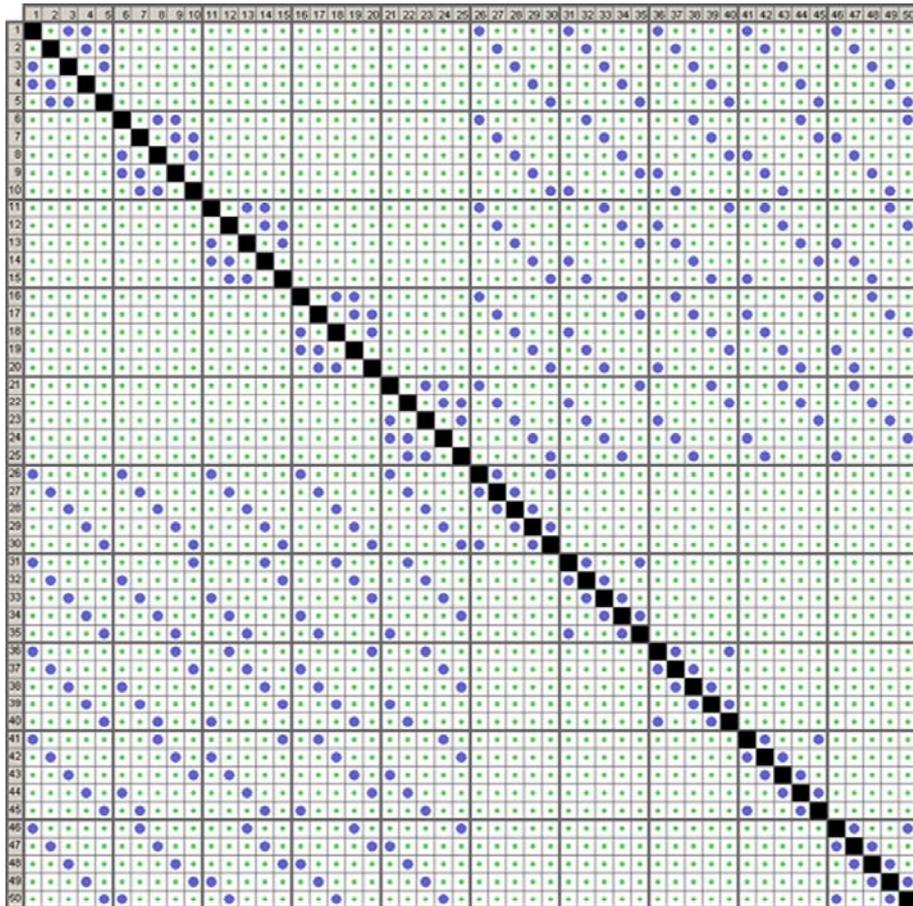


Figura 26: Matriz de adyacencia del grafo de Hoffman-Singleton.

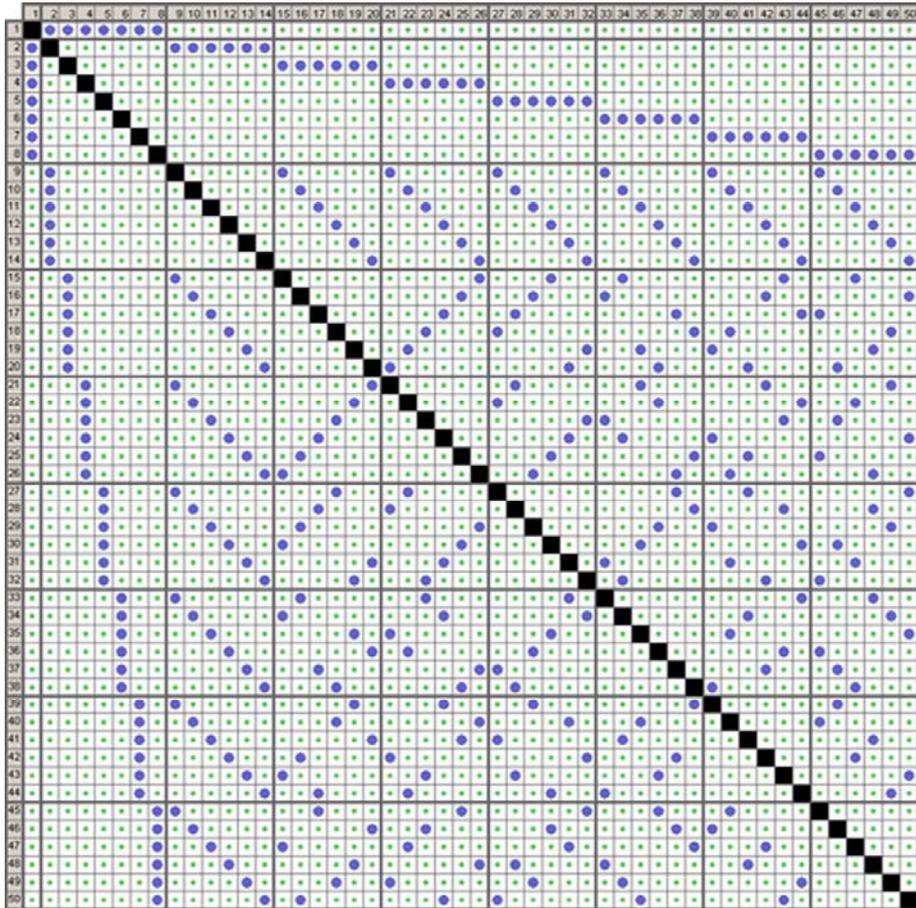


Figura 27: Forma canónica de la matriz de adyacencia del grafo de Hoffman-Singleton.

OBSERVACIÓN 2. *Las submatrices de orden $\Delta - 1$ que aparecen en la forma canónica la matriz de adyacencia de un grafo de Moore de grado Δ son matrices de permutación.*

La explicación de este hecho yace en que cada submatriz de orden $\Delta - 1$ representa los enlaces entre dos grupos del segundo nivel del grafo soporte. Como ya se dijo en su momento, las aristas de un vértice no pueden ir a un mismo grupo, lo que se traduce en que cada submatriz sólo puede contener un punto azul por fila y por columna.

Fijémonos ahora en las submatrices de la franja seleccionada en la Figura 29. Nótese que hemos indexado las submatrices para poder trabajar con ellas de forma algebraica. Ahora podemos representar la figura anterior mediante la siguiente notación.

DEFINICIÓN 1. *Dada la forma canónica de la matriz de adyacencia asociada a un grafo de Moore, indicaremos mediante los índices i y j la posición de la submatriz P_{ij} dentro de la matriz original:*

$$\begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & \dots & P_{06} \\ P_{10} & P_{11} & \dots & P_{16} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{60} & P_{61} & \dots & P_{66} \end{pmatrix}$$

Nótese que las submatrices P_{ii} de la diagonal son matrices nulas, mientras que las submatrices fuera de la diagonal son las matrices de permutación propiamente dichas. Por ejemplo, la submatriz P_{34} corresponde a la matriz de permutación de la Figura 28.

$$P_{34} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 28: Matriz de permutación correspondiente a la submatriz P_{34} .

Dado que toda matriz de adyacencia es por definición una matriz simétrica, podríamos pensar que las submatrices P_{ij} son también matrices simétricas. Esto es cierto para los grafos de Petersen y Hoffman-Singleton, pero no para el caso del Gran Grafo de Moore.

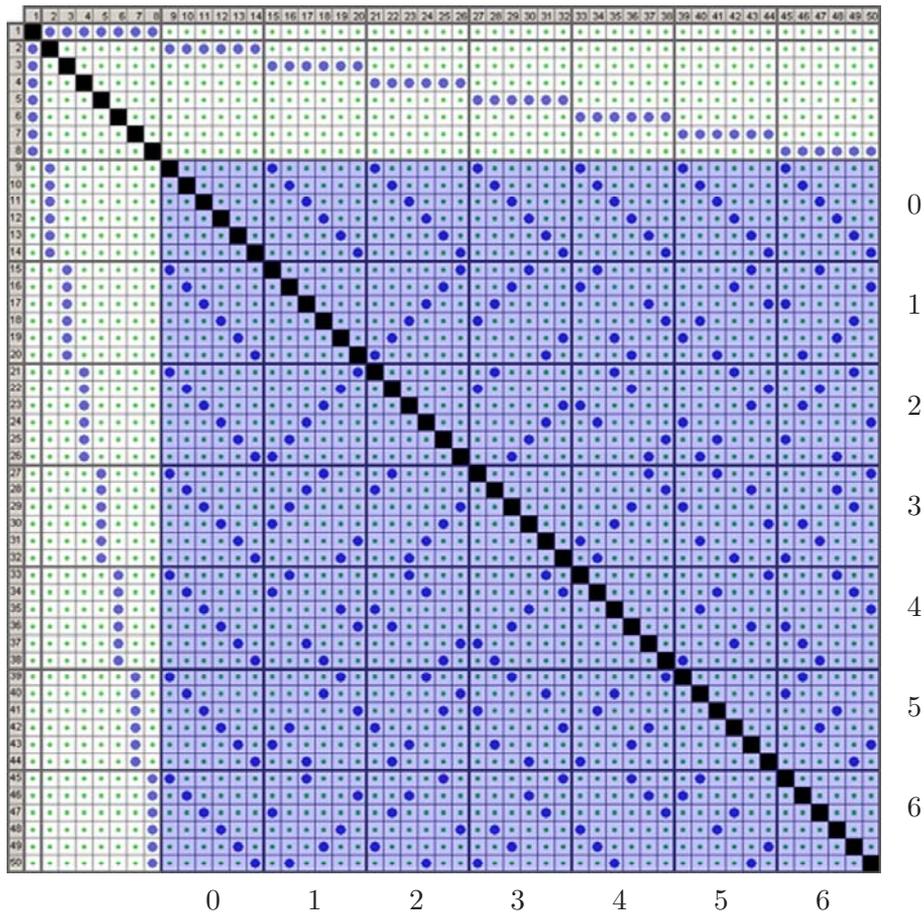


Figura 29: Submatrices 6×6 en la forma canónica del grafo de Hoffman-Singleton.

Consideremos ahora las matrices de permutación que tienen el mismo índice de fila o de columna. Si nos fijamos en la posición de los puntos azules dentro de cada submatriz, enseguida veremos que dichos puntos azules ocupan posiciones distintas en matrices distintas. Es más, si superponemos las matrices que tienen el mismo índice de fila o de columna, los puntos azules recubren toda la matriz resultante tal como muestra la Figura 30. Esta es otra propiedad que expresaremos mediante la Observación 3.



Figura 30: Matrices de permutación correspondientes a la primera fila.

OBSERVACIÓN 3. *Las submatrices de una misma fila o columna forman una partición de la matriz J .*

Existe una propiedad que dice que una partición de la matriz J en matrices de permutación puede escribirse como un *cuadrado latino*. Un cuadrado latino es una matriz $n \times n$ en la que cada celda contiene un elemento entre 1 y n de forma que cada fila y cada columna no tiene ningún elemento repetido. Por ejemplo, si a los puntos azules de cada submatriz de la Figura 30 les asignamos un valor en función de la posición que ocupa el primero de ellos, obtenemos las matrices que muestra la Figura 31. Si ahora superponemos estas submatrices, el resultado es un cuadrado latino como el de la Figura 32. Esta propiedad la podemos expresar mediante la Observación 4.

OBSERVACIÓN 4. *La partición que forman las submatrices de orden $\Delta - 1$ de un grafo de Moore de grado Δ pueden verse como un cuadrado latino obtenido de la siguiente forma:*

$$L_j = \sum_{i=1}^{\Delta-1} \omega_i \cdot P_{ij} = \sum_{i=1}^{\Delta-1} \omega_i \cdot P_{ji} \quad (8)$$

donde ω_i representa el índice de columna del punto azul de la primera fila de la matriz P_{ij} .

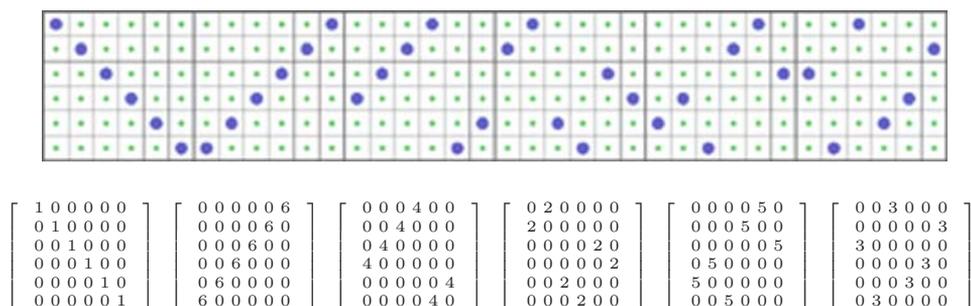


Figura 31: Matrices asociadas a cada matriz de permutación de la primera fila.

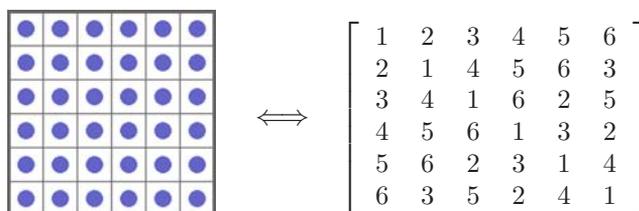


Figura 32: Cuadrado latino asociado a la primera fila de submatrices.

Visto este resultado, ahora podemos escribir cada fila y cada columna de submatrices a través de un cuadrado latino (ver Figura 34).

De forma similar a la definición de la matriz P_{ij} , podemos definir la matriz Q_{ij} como aquella matriz cuyos unos representan los puntos verdes. Por ejemplo, la matriz Q_{34} sería la que muestra la Figura 33. Evidentemente, se verifica que $P_{ij} + Q_{ij} = J, \forall i, j$.

$$Q_{34} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 33: Matriz correspondiente a la submatriz Q_{34} .

Una vez definidas las matrices P_{ij} y Q_{ij} , es fácil ver mediante la ayuda de TBMG que dichas matrices están relacionadas tal como indica la Observación 5.

$$Q_{34} = \sum_{k=1}^6 P_{3k} \cdot P_{k4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La Observación 5 es importante por dos razones:

- 1) Permite determinar qué puntos verdes aparecen al colocar nuevos puntos azules.
- 2) Permite restringir la búsqueda de una matriz P_{ij} a aquellas que sean compatibles con una matriz Q_{ij} dada.

Una consecuencia inmediata de la Observación 5 es que los cuadrados latinos que aparecen en la matriz de adyacencia de los grafos de Moore están relacionados entre ellos tal como describe la Observación 6.

OBSERVACIÓN 6. *Los cuadrados latinos que aparecen en la forma canónica de la matriz de adyacencia de los grafos de Moore son equivalentes entre ellos, y la relación que rige dicha equivalencia es la siguiente:*

$$L_i \sim P_{ij} \cdot L_j \cdot P_{ji} \quad \forall i, j \tag{10}$$

Por ejemplo, podemos escribir el cuadrado latino L'_2 en función de L_5 :

$$L'_2 = P_{25} \cdot L_5 \cdot P_{52} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 6 & 3 \\ 5 & 3 & 4 & 6 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 5 & 4 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

El cuadrado latino L'_2 no está *normalizado*, ya que los elementos de su primera fila no aparecen ordenados. Si lo normalizamos, entonces obtenemos el cuadrado latino L_2 , que es el que se corresponde con la definición que hemos dado.

$$L'_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 5 & 4 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 1 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} = L_2$$

Como consecuencia de la Observación 6, los $\Delta - 1$ cuadrados latinos que aparecen en la matriz de adyacencia de un grafo de Moore están determinados a partir de uno de ellos. Por consiguiente, un algoritmo para buscar dichos cuadrados latinos podría ser el siguiente:

- Se genera un cuadrado latino de orden $\Delta - 1$.

- Se determinan los $\Delta - 2$ cuadrados latinos restantes según la Observación 6.
- Se colocan los cuadrados latinos dentro de la forma canónica de la matriz de adyacencia. Si no aparecen conflictos, entonces se ha completado el Gran Grafo de Moore. En caso contrario, se prueba con otro cuadrado latino.

El número de cuadrados latinos de orden 56 que habría que comprobar para encontrar el Gran Grafo de Moore es muy grande, del orden de $10^{3.018}$, por lo que probarlos todos es inasumible. No obstante, los cuadrados latinos que aparecen en la matriz de adyacencia de un grafo de Moore *tienen* que cumplir más propiedades. Por ejemplo, si consideramos el conjunto de cuadrados latinos del grafo de Hoffman-Singleton y los comparamos dos a dos, vemos que siempre aparece el mismo número de parejas distintas (ver Figura 35).

$$L_1 \oplus L_2 = \begin{bmatrix} \underline{11} & \underline{22} & \underline{33} & \underline{44} & \underline{55} & \underline{66} \\ 22 & 11 & \underline{45} & \underline{53} & 66 & \underline{34} \\ 33 & 45 & 11 & 66 & \underline{24} & \underline{52} \\ 44 & 53 & 66 & 11 & \underline{32} & \underline{25} \\ 55 & 66 & 24 & 32 & 11 & \underline{43} \\ 66 & 34 & 52 & 25 & 43 & 11 \end{bmatrix}$$

Figura 35: Parejas distintas que aparecen al superponer los cuadrados latinos L_1 y L_2 .

Formalmente, se dice que dos cuadrados latinos son *r-ortogonales* si al superponerlos aparecen *r* pares ordenados no duplicados. Si todos los pares ordenados son distintos, entonces los cuadrados latinos son simplemente *ortogonales*.

Para el caso de Petersen el grado *r* de ortogonalidad es 2, mientras que para Hoffman-Singleton *r* vale 14. Si extrapolamos estos resultados al Gran Grafo de Moore, entonces tenemos la siguiente conjetura.

CONJETURA 1. *Los $\Delta - 1$ cuadrados latinos que aparecen en la matriz de adyacencia de un grafo de Moore son mutuamente r-ortogonales con el siguiente grado de ortogonalidad:*

$$r = \Delta - 1 + \frac{(\Delta - 3)^2}{2} \tag{11}$$

Si la Conjetura 1 es cierta, entonces el grado *r* de ortogonalidad de los cuadrados latinos del Gran Grafo de Moore es 1514. Por lo tanto, se nos plantea la siguiente pregunta: si fuéramos capaces de encontrar un conjunto de 56 cuadrados latinos de orden 56 mutuamente *r-ortogonales* con grado

de ortogonalidad $r = 1514$, entonces ¿habríamos encontrado el Gran Grafo de Moore? La respuesta a esta pregunta se desconoce por el momento. En caso de ser afirmativa, la búsqueda del Gran Grafo de Moore ya no sería un problema de grafos densos sino de cuadrados latinos mutuamente ortogonales.

9 LA RAMA QUE CIERRA EL CICLO

Antes de despedirme, querría remarcar un hecho curioso. Hemos empezado este artículo introduciendo el concepto de grafo a través del problema de los puentes de Königsberg, que como ya sabemos fue resuelto por Euler dando lugar al nacimiento de la Teoría de Grafos. Después hemos planteado el problema (Δ, D) y hemos estudiado los tres grafos de Moore, Petersen, Hoffman-Singleton y el Gran Grafo de Moore. Finalmente, hemos conjeturado que para encontrar el Gran Grafo de Moore es necesario encontrar un conjunto de 56 cuadrados latinos mutuamente r -ortogonales con grado de ortogonalidad $r = 1514$. Pues bien, resulta que el problema más famoso que involucra a los cuadrados latinos r -ortogonales es también un problema propuesto por Euler, concretamente el llamado “Problema de los 36 oficiales”.

“Tenemos 36 oficiales de 6 rangos distintos en 6 regimientos distintos. ¿Pueden disponerse los 36 oficiales en un cuadrado de forma que en cada fila y en cada columna haya un oficial de cada rango y de cada regimiento?”

En lenguaje moderno, Euler buscaba un par de cuadrados latinos ortogonales de orden seis. No fue capaz de resolver el problema y ahora sabemos que no existe ningún par de este tipo (véanse [5], [11], y [12]). Sólo esperemos que este no sea el caso del Gran Grafo de Moore...

REFERENCIAS

- [1] L. ACERO, Cuadrados latinos y grafos de Moore, *Escola Tècnica Superior d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona*, 2004.
- [2] E. BANNAI, T. ITO, *Algebraic combinatorics I*, Benjamin and Cummings, 1984.
- [3] G. BELYAVSKAYA, r -Orthogonal Latin Squares, *Annals of Discrete Mathematics*, 1991, 169–202.
- [4] N. L. BIGGS, *Matemática Discreta*, Edicions Vicens Vives, 1994, 143–146.
- [5] C. J. COLBOURN, L. ZHU, The Spectrum of r -Orthogonal Latin Squares, *Combinatorics Advances*, 1995, 49–75.
- [6] S. DUZHIN, *Graphes de Moore*, manuscrito, 1994,
<http://www.pdmi.ras.ru/~duzhin/papers/moore.ps.gz>
- [7] L. EULER, Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, *Commentarii Academiae Petropolitanae*, 8 (1736), 128–140.

- [8] C. D. GODSIL, *So Few Moore Graphs*, manuscrito, 2001,
<http://quoll.uwaterloo.ca/agt/supplem/moore.ps>
- [9] J. H. VAN LINT, R. M. WILSON, *A Course in Combinatorics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [10] B. D. MCKAY, E. ROGOYSKI, Latin Squares of Order 10, *Electronic J. Combinatorics*, **2** (1995), No. 1, R3, 1–4.
- [11] L. ZHU, H. ZHANG, A few more r -orthogonal latin squares, *Discrete Mathematics*, **238** (2001), 183–191.
- [12] L. ZHU, H. ZHANG, Completing the spectrum of r -orthogonal Latin squares, *Discrete Mathematics*, **268** (2003), 343–349.

Lluís Acero
Universidad Politécnica de Cataluña
Correo Electrónico: lluis24@casal.upc.edu