Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Oscar Ciaurri y José Luis Díaz-Barrero[1]

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@dmc.unirioja.es` *en archivos en formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Luis de Ulloa s/n, 26004, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta soluciones recibidas hasta el 30 de junio de 2006.*

Solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas enviados a esta sección sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (⋆) junto al enunciado de un problema indica que una solución al problema no está disponible en estos momentos.

Problemas

Problema 41

En un polígono regular de 24 lados, con sus vértices numerados, cada vértice se pinta de rojo o de verde. ¿De cuántas maneras es posible hacerlo de modo que no se puedan construir, uniendo vértices del polígono, ningún polígono regular que tenga todos los vértices del mismo color? ¿Y si el polígono regular de partida tiene 30 lados?

Propuesto por E. Fernández Moral, I. E. S. Sagasta, Logroño, y M. Sánchez Benito, Universidad Complutense, Madrid

Problema 42

Encontrar una expresión, simétrica en m y n, para el número de matrices $m \times n$ de ceros y unos que no contienen ninguna fila ni ninguna columna formada exclusivamente por ceros o por unos.

Propuesto por M. Benito Múñoz y E. Fernández Moral, I. E. S. Sagasta, Logroño, y M. Sánchez Benito, Universidad Complutense, Madrid

PROBLEMA 43

Sean $F_n(x,y)$ los polinomios de Fibonacci bivariados definidos por la relación de recurrencia $F_n(x,y) = xF_{n-1}(x,y)+yF_{n-2}(x,y)$, con $F_0(x,y) = 0$ y $F_1(x,y) = 1$ y donde $x^2+4y \neq 0$, $y > 0$ y $x \neq 0$. Probar:

a)

$$\arctan\left(\frac{y^{\frac{2n-1}{2}}x}{F_{2n+1}}\right) = \arctan\left(\frac{y^{\frac{2n-1}{2}}}{F_{2n}}\right) - \arctan\left(\frac{y^{\frac{2n+1}{2}}}{F_{2n+2}}\right),$$

b)

$$\arctan\left(\frac{y^{\frac{2n-1}{2}}}{F_{2n}}\right) + \arctan\left(\frac{F_{2n+1}}{y^{\frac{2n-1}{2}}x}\right) + \arctan\left(\frac{F_{2n+2}}{y^{\frac{2n+1}{2}}}\right) = \pi.$$

Propuesto por Ovidiu Furdui
Western Michigan University, Kalamazoo, Michigan

PROBLEMA 44

Sobre una circunferencia $\mathcal{C}$ de radio R se fija una cuerda AB, que determina en el círculo los segmentos circulares $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$. Sea T un punto interior al segmento AB y $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ las circunferencias, contenidas respectivamente en $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$, que son tangentes a la cuerda AB en el punto T y a la circunferencia $\mathcal{C}$ en puntos denotados respectivamente por C y D. Probar:

a) Si r_1, r_2 son los radios de las circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, entonces la razón $\frac{r_1}{r_2}$ es constante cuando T varía en la cuerda AB.

b) Al variar T sobre la cuerda AB, todas las cuerdas CT pasan por un cierto punto fijo y todas las rectas DT pasan por otro punto fijo.

Propuesto por Cristóbal Sánchez Rubio
I.E.S. Penyagolosa, Castellón

Problema 45

Dado p un divisor de un número de la forma $K \cdot 10^m + k$, con $K \geq 0$, $m \geq 0$, $k \neq 0$ y $\mathrm{mcd}(p, k) = 1$ (y todos ellos números enteros), probar el siguiente criterio de divisibilidad por p: Si, para cada $N = \sum_{i=1}^{n} a_i 10^{m \cdot i}$ denotamos $N' = \sum_{i=1}^{n} a_i (-k)^i K^{n-i}$ se cumple que $p \mid N$ si y sólo si $p \mid N'$.

Propuesto por Juan Luis Varona Malumbres
Universidad de La Rioja, Logroño

Problema 46

Sean $\{p_1, p_2, \dots\}$ y $\{q_1, q_2, \dots\}$ dos sucesiones de números reales positivos tales que $\lim_{n\to\infty} \frac{p_1+\cdots+p_n}{np_n} = \alpha$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{q_1+\cdots+q_n}{nq_n} = \beta$, con $\alpha + \beta > 0$. Calcular el límite $\lim_{n\to\infty} \frac{p_1q_1+2p_2q_2+\cdots+np_nq_n}{n^2p_nq_n}$.

Propuesto por Jaime Vinuesa Tejedor
Universidad de Cantabria, Santander

Comentario del proponente. El problema anterior aparece propuesto y resuelto en el libro de Pólya-Szegö, Problems and Theorems in Analysis (vol. I, Pt. I, Cap. 2 n.º 77). Sin embargo, para mi sorpresa, encontré que fue propuesto en un examen de Análisis de primer curso de licenciatura en el año 1950. Por ello traté de encontrar una solución al alcance de un alumno avispado de primer curso. Efectivamente es así, dicha solución existe y no ocupa más de una línea (y media todo lo más).

Problema 47

Sean $x_1, \dots, x_p$ números reales positivos y α y λ números reales tales que $2 \leq p \leq \alpha$ y $0 \leq \lambda \leq 1$. Probar que

$$\frac{x_1 + \cdots + x_p}{p} \leq \sqrt[\alpha]{\frac{\lambda(x_1 + \cdots + x_p)^\alpha + (1-\lambda)(x_1^\alpha + \cdots + x_p^\alpha)}{p + \lambda(p^\alpha - p)}} \leq \sqrt[\alpha]{\frac{x_1^\alpha + \dots x_p^\alpha}{p}}.$$

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez
Universidad Complutense, Madrid

PROBLEMA 48

Sean $x \geq y > 0$ y $a_1, \ldots, a_n$ números reales positivos. Probar que

$$x - y \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(x + a_k)} - \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(y + a_k)}.$$

Propuesto por Mihàly Bencze
Brasov, Rumanía

Soluciones

Problema 17

Sean F_n los números de Fibonacci definidos por $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ y $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para $n \geq 1$. Probar que

$$F_1^{F_1} F_2^{F_2} F_3^{F_3} \cdots F_n^{F_n} \leq e^{(F_n - 1)(F_{n+1} - 1)}.$$

Propuesto por Zdravko F. Starc
Vršac, Serbia y Montenegro

Solución

La solución se basará en la identidad

$$\sum_{k=1}^{n} F_k(F_k - 1) = (F_n - 1)(F_{n+1} - 1). \tag{1}$$

Para probar (1) se procede por inducción. El caso $n = 1$ es trivial. Supongamos ahora que (1) se verifica para un cierto n, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} F_k(F_k - 1) &= (F_n - 1)(F_{n+1} - 1) + F_{n+1}(F_{n+1} - 1) \\ &= (F_{n+1} - 1)(F_n + F_{n+1} - 1) = (F_{n+1} - 1)(F_{n+2} - 1),\end{aligned}$$

lo que concluye la prueba.

Para obtener el resultado solicitado bastará usar la desigualdad $\log x \leq x - 1$, valida para $x \geq 1$, y (1). En efecto

$$F_1^{F_1} F_2^{F_2} F_3^{F_3} \cdots F_n^{F_n} = e^{\sum_{k=1}^{n} F_k \log(F_k)} \leq e^{\sum_{k=1}^{n} F_k (F_k - 1)} = e^{(F_n - 1)(F_{n+1} - 1)}.$$

Solución enviada por Juan Mir Pieras
También resuelto por O. Furdui, S. Gómez Moreno, M. Peña y J. Sierra (estudiantes), J. Vinuesa, G. R. A. 20 Math Problems Group (Italia) y el proponente

PROBLEMA 18

Probar que

$$1 \leq \int_1^\infty \frac{\Gamma(x+1)}{x^x}\,dx \leq 2,$$

donde Γ denota la función Gamma de Euler.

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez
Universidad de Valladolid, Valladolid

SOLUCIÓN

Una de las versiones de la fórmula de Stirling establece que, para valores positivos de x, $\Gamma(x+1) = \sqrt{2\,\pi}\,x^{x+\frac{1}{2}}\exp\left(-x+\frac{\theta}{12x}\right)$, donde $0 < \theta = \theta(x) < 1$, (ver [1], pág. 257). Por tanto, y teniendo en cuenta que para $x \geq 1$ se cumple que $0 < \theta/(12x) < 1/12$, obtenemos la acotación

$$\sqrt{2\,\pi}\,x^{\frac{1}{2}}e^{-x} < \frac{\Gamma(x+1)}{x^x} < \sqrt{2\,\pi}\,x^{\frac{1}{2}}e^{-x}e^{\frac{1}{12}}, \tag{2}$$

para $x \geq 1$. Por otro lado

$$\begin{aligned}\int_1^\infty x^{\frac{1}{2}}e^{-x}\,dx &= \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}}e^{-x}\,dx - \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}e^{-x}\,dx \\ &= \Gamma\Big(\frac{3}{2}\Big) - \int_0^1 2t^2e^{-t^2}\,dt = \Gamma\Big(\frac{3}{2}\Big) + te^{-t^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-t^2}\,dt \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{1}{e} - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{erf}(1), \end{aligned} \tag{3}$$

donde la función error, erf, se define mediante $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ ([1], pág. 297). Integrando en la expresión (2) y usando (3) queda

$$\sqrt{2\,\pi}\,\alpha < \int_1^\infty \frac{\Gamma(x+1)}{x^x}\,dx < \sqrt{2\,\pi}\,\alpha\,e^{\frac{1}{12}},$$

donde denotamos $\alpha = (\sqrt{\pi}/2)(1-\mathrm{erf}(1)) + (1/e)$. La función error está tabulada y se puede verificar (ver, por ejemplo, [1], pág. 311) que $0.842 < \mathrm{erf}(1) < 0.843$, con lo que obtenemos la acotación

$$1.27 < \int_1^\infty \frac{\Gamma(x+1)}{x^x}\,dx < 1.39.$$

[1] M. Abramowitz, I. A. Stegun *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, Dover, Novena Edición, 1970.

Solución enviada por Samuel Gómez Moreno y Esther M. García Caballero
Universidad de Jaén
También resuelto por Juan Mir Pieras, Ovidiu Furdui y el proponente.

Nota. Tanto O. Furdui como el proponente hacen uso en sus soluciones de la estimación $\left(\frac{x}{e}\right)^{x-1} \leq \Gamma(x) \leq \left(\frac{x}{2}\right)^{x-1}$, valida para $x \geq 2$, que fue propuesta por este último como Problema 1651 en la revista *Mathematics Magazine* de junio de 2002.

Problema 19

Se tienen n ordenadores que se desean conectar entre ellos evitando que en la red resultante se formen triángulos y cuadrados. Sea δ el mínimo número de aristas que une un ordenador con los demás. Probar que $\delta \leq \sqrt{n-1}$. Para $n = 10$, encontrar una configuración que reúna estas características.

Propuesto por C. Balbuena, M. Cera, A. Dianez y P. García Vázquez
Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, y Universidad de Sevilla, Sevilla

Solución

Supongamos que un ordenador cualquiera u está unido a $d(u)$ ordenadores. Como en la red no puede haber triángulos, resulta que no puede haber aristas entre estos $d(u)$ ordenadores. Además como en la red tampoco hay cuadrados, estos $d(u)$ ordenadores solo tienen como vecino común al ordenador u. Vamos a nombrar a los vecinos de u como $u_1, u_2, \dots, u_{d(u)}$. Tenemos,

$$n \geq 1 + d(u) + \sum_{i=1}^{d(u)} (d(u_i) - 1) = 1 + \sum_{i=1}^{d(u)} d(u_i)$$

y por tanto,

$$n(n-1) \geq \sum_u \sum_{i=1}^{d(u)} d(u_i) \tag{4}$$

Por otra parte, como en la doble suma anterior cada número $d(u)$ aparece $d(u)$ veces obtenemos

$$\sum_u \sum_{i=1}^{d(u)} d(u_i) = \sum_u d(u)^2 \geq \frac{1}{n} \left(\sum_u d(u) \right)^2 \tag{5}$$

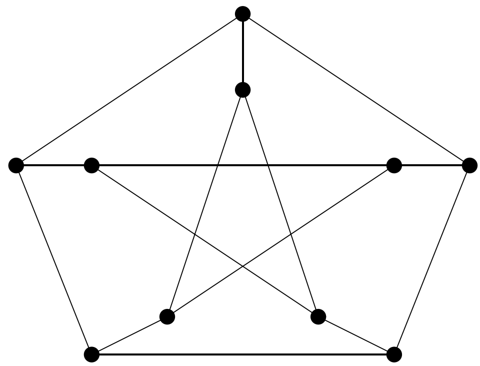


Figura 1: Grafo de Petersen

Además, el número total de enlaces o aristas de la red, e, satisface

$$2e = \sum_u d(u) \geq n\delta \tag{6}$$

Por tanto, a partir de (4), (5) y (6) concluimos que el valor máximo de enlaces entre ordenadores en una red libre de triángulos y cuadrados es $\delta \leq \sqrt{n-1}$.

Por último, si $n = 10$, el número máximo de enlaces de un ordenador con los demás es $\delta \leq 3$. La Figura 1 representa un grafo de 10 vértices y 15 aristas. Se denomina grafo de Petersen y no es difícil ver que es el único grafo de 10 nodos y 15 ramas tal que cada vértice está unido a otros tres, es decir, $d(u) = 3 = \delta$ para cualquier vértice u.

Solución enviada por los proponentes

PROBLEMA 20

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo finito. Se elige al azar una aplicación de entre todas las que pueden definirse del cuerpo $\mathbb{K}$ en sí mismo. Hallar la probabilidad de que dicha aplicación sea biyectiva y polinómica.

Propuesto por Juan José Egozcue y José Luis Díaz Barrero
Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona

Solución

En primer lugar, veamos que toda aplicación de un cuerpo finito $\mathbb{K}$ en sí mismo es polinómica. En efecto, sean $a_1, a_2, \cdots, a_n$ los elementos de $\mathbb{K}$ entonces $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)$ también pertenecen a $\mathbb{K}$ para cualquier aplicación $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$. Sea $A(x)$ el polinomio de grado menor o igual que $n-1$ definido por

$$A(x) = \sum_{k=1}^{n} f(a_k) \prod_{k=1 k \neq j}^{n} \frac{x - a_j}{a_k - a_j}.$$

Dado que para todo $a_k \in \mathbb{K}$ se satisface que $f(a_k) = A(a_k)$, tendremos que $f = A$ y hemos terminado. Finalmente, como de $\mathbb{K}$ en sí mismo se pueden establecer n^n aplicaciones de las cuales $n!$ son biyectivas, resulta que la probabilidad pedida es $n!/n^n$.

Solución enviada por los proponentes

Problema 21

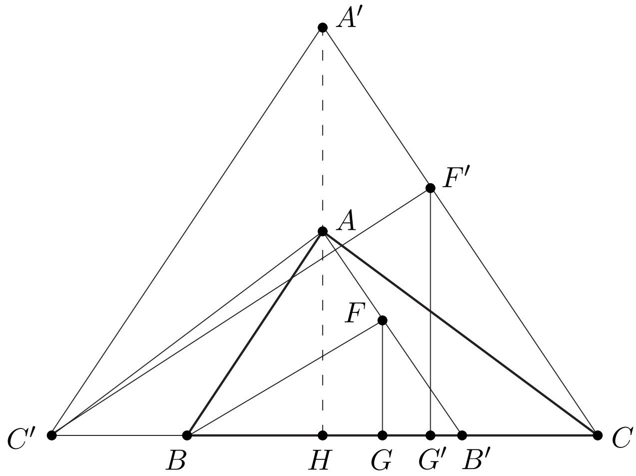
Sea el triángulo ABC de lados $a \geq b \geq c$. Sean B' y C' los puntos simétricos respecto de AH de los vértices B y C, respectivamente, donde H es el pie de la altura sobre el lado BC correspondiente al vértice A. Se define el punto A' como la intersección de las rectas paralelas a AB y AB' que pasan por los puntos C' y C respectivamente. Por último, denotamos por F el pie de la altura del vértice B sobre AB'; por F' el pie de la altura del punto C' sobre $A'C$; y por G y G' los pies de las perpendiculares trazadas desde F y F', respectivamente, sobre BC. Probar que:

a) Los puntos H, F y F' son colineales.

b) $2AH - (GF + G'F') \gtreqless 0 \Leftrightarrow A \lesseqgtr 90°$.

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez
Universidad de Valladolid, Valladolid
Dedicado al Profesor Miguel de Guzmán

SOLUCIÓN



a) Es fácil ver que los triángulos $\triangle C'A'C$ y $\triangle BAB'$ son isósceles y semejantes por construcción. Estos dos triángulos comparten la recta AH como altura común, luego son homóteticos en la homotecia de centro H y razón $\frac{HC}{HB}$ que transforma B en C', B' en C y A en A'. El transformado del punto F por esta homotecia será un punto $F^\star$ de la recta $A'C$ de tal forma que la recta $C'F^\star$ sea paralela a la recta BF. Luego $F^\star = F'$ y los puntos F, F' y H están alineados ya que un punto y su transformado siempre están alienados con el centro de la homotecia.

b) Introducimos un sistema de coordenadas en el cual $H = (0,0)$, $A = (0,a)$, $B = (-b,0)$, $C = (c,0)$, $C' = (-c,0)$ y $B' = (b,0)$, donde consideramos $a,b,c > 0$. De la semejanza de los triángulos $\triangle ABH$ y $\triangle BB'F$ resulta

$$BF = \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad FB' = \frac{2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

y de esta forma, del cálculo del área del triángulo $\triangle BB'F$ de dos maneras obtenemos $GF = \frac{2ab^2}{a^2+b^2}$. Aplicando la homotecia de centro H y razón $\frac{c}{b}$ llegamos a que $G'F' = \frac{2abc}{a^2+b^2}$, luego $2AH-(GF+G'F') = 2a-\frac{2ab}{a^2+b^2}(b+c)$. Entonces

$$2AH - (GF + G'F') \gtrless 0 \Leftrightarrow a^2 \gtrless bc.$$

Ahora bien

$$a^2 \gtreqless bc \Leftrightarrow \frac{a}{b}\frac{a}{c} \gtreqless 1 \Leftrightarrow \tan B \tan C \gtreqless 1 \Leftrightarrow 1 - \tan B \tan C \lesseqgtr 0.$$

Teniendo en cuenta que $c \leq b \leq a$ tendremos $C \leq B \leq 90^\circ$ y, por tanto, $\tan B + \tan C > 0$. Entonces, si $1 - \tan B \tan C \neq 0$,

$$1 - \tan B \tan C \lesseqgtr 0 \Leftrightarrow \tan(B + C) = -\tan A \lesseqgtr 0 \Leftrightarrow A \lesseqgtr 90^\circ,$$

mientras que en el otro caso

$$1 - \tan B \tan C = 0 \Leftrightarrow B + C = 90^\circ \Leftrightarrow A = 90^\circ.$$

Solución enviada por M. Peña y J. Sierra (estudiantes)
Universidad de Sevilla
También resuelto por R. Barroso y el proponente

Problema 22

Sean a, b y c números complejos no nulos y distintos. Probar que

$$\frac{a^2(1 + b^2c^2)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(1 + c^2a^2)}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2(1 + a^2b^2)}{(c-a)(c-b)}$$

es entero y determinar su valor.

Propuesto por Juan José Egozcue y José Luis Díaz Barrero
Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona

Solución

Designando por $s(a, b, c)$ la suma propuesta, tenemos que

$$\begin{aligned} s(a,b,c) &= \frac{a^2(b-c)(1+b^2c^2) - b^2(a-c)(1+a^2c^2) + c^2(a-b)(1+a^2b^2)}{(a-b)(a-c)(b-c)} \\ &= \frac{a^2b - a^2c - ab^2 + b^2c + ac^2 - bc^2}{(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 1. \end{aligned}$$

Por tanto, el valor que buscábamos es igual a 1, y como vemos esto sigue siendo cierto incluso si es nulo alguno de los números a, b o c.

Solución enviada por Esther M. García Caballero
Universidad de Jaén
También resuelto por O. Furdui, J. Mir Pieras, M. Peña y J. Sierra (estudiantes), A. Ramos Gutiérrez, C. Sánchez Rubio, J. Vinuesa y los proponentes

NOTA. Casi todas las soluciones recibidas siguen el procedimiento de la propuesta. Sin embargo A. Ramos Gutiérrez lo resuelve por medio de determinantes de Vandermonde y J. Vinuesa lo hace usando el teorema de Cauchy. Los proponentes plantean la siguiente generalización: Si $a_1, \ldots, a_n$ son números complejos distintos, se verifica que

$$\sum_{1\le k\le n} \left[\left(a_k^2 + \prod_{1\le m\le n} a_m^2 \right) \prod_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne k}} \frac{1}{a_k - a_j} \right] = 1.$$

La demostración de esta identidad puede obtenerse por el teorema de Cauchy.

PROBLEMA 23

Encontrar los valores de $a > 0$ para los que es convergente la sucesión definida por $t_0 = 0$, $t_1 = a$ y

$$t_{k+1} = t_k + \frac{(t_k - t_{k-1})^2}{2(1-t_k)}, \qquad k \ge 1.$$

Determinar el valor del límite en los casos de existencia.

Propuesto por J. Manuel Gutiérrez Jiménez
Universidad de La Rioja, La Rioja

SOLUCIÓN

Hagamos el cambio $y_k = 1 - t_k$. La sucesión se convierte en

$$y_{k+1} = y_k - \frac{(y_k - y_{k-1})^2}{2y_k}, \qquad k \ge 1, \tag{1}$$

con valores iniciales $y_0 = 1$, $y_1 = b$ (aquí, $b = 1-a$). Tenemos que suponer que $b \ne 0$ para que al menos tenga sentido y_2.

Sin más que multiplicar por $2y_k$ y reordenar convenientemente la ecuación, tenemos $(2y_{k+1} - y_k)y_k = (2y_k - y_{k-1})y_{k-1}$, $k \ge 1$. Reiterando (es decir, por inducción), tenemos

$$(2y_{k+1} - y_k)y_k = (2y_1 - y_0)y_0 = 2b - 1, \tag{2}$$

de manera que si la sucesión tuviera un límite $L \in \mathbb{R}$, necesariamente $(2L - L)L = 2b - 1$, es decir,

$$L^2 = 2b - 1 \tag{3}$$

y, en particular, tendría que ser $2b \ge 1$. Esto no demuestra que la sucesión tenga límite, pero da una pista. Distinguimos los casos $2b \ge 1$ y $2b < 1$.

Supongamos que $2b \geq 1$. Afirmamos que, en ese caso, $y_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$. La demostración es inmedidata por inducción: el valor inicial $y_1 = b$, prueba el caso $k = 1$ y la ecuación (2) prueba que si $y_k > 0$ para algún k entonces $y_{k+1} \geq \frac{1}{2}y_k > 0$.

De paso, vemos que en la recurrencia (1) el denominador $2y_k$ no se anula nunca, y por lo tanto tenemos bien definida la sucesión. Pero además, la recurrencia (1) junto con $y_k > 0$ prueban que $y_{k+1} \leq y_k$. En resumen, la sucesión $\{y_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ es decreciente y de términos positivos, luego converge a un número real no negativo. A la vista de (3), el límite es $\sqrt{2b-1}$.

Supongamos ahora que $2b < 1$. Volviendo a (3), los únicos posibles límites son $\pm\infty$. En cualquiera de los dos casos, la sucesión debería tener signo constante a partir de algún término: signo positivo si el límite es $+\infty$, signo negativo si el límite es $-\infty$. De (2) deducimos que $(2y_{k+1} - y_k)y_k < 0$, $k \in \mathbb{N}$. Si, a partir de algún término, es siempre $y_k > 0$, entonces se sigue que $y_{k+1} < \frac{1}{2}y_k < y_k$, luego la sucesión es decreciente y no tiende a $+\infty$. De la misma manera, si es siempre $y_k < 0$ a partir de algún término, se sigue que $y_{k+1} > \frac{1}{2}y_k > y_k$, la sucesión es creciente y no tiende a $-\infty$. De modo que la sucesión no tiene límite.

En términos de la sucesión original $\{t_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ y el valor inicial $a = 1-b$, hemos probado lo siguiente:

a) Si $a \leq 1/2$, la sucesión $\{t_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ converge a $1 - \sqrt{1-2a}$.

b) Si $a > 1/2$, la sucesión no tiene límite.

Observemos por último que en la sucesión $\{y_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ no hemos supuesto nada sobre el valor inicial $y_1 = b$, excepto $b \neq 0$; la restricción $a > 0$ no es necesaria; sí hay que suponer que $a \neq 1$. La hipótesis $y_0 = 1$ tampoco es importante: si $y_0 = c \neq 0$, tomamos $z_k = y_k/c$ y esta sucesión cumple la misma recurrencia (1) con valor inicial $z_0 = 1$. Traducido a la sucesión $\{t_k\}_{k\in\mathbf{N}}$, si los valores iniciales son $t_0 \neq 1$ y $t_1 \neq 1$, entonces

$$\lim_k t_k = 1 - (1-t_0)\sqrt{2\frac{1-t_1}{1-t_0} - 1}$$

cuando $2\frac{1-t_1}{1-t_0} \geq 1$ y no hay límite si $2\frac{1-t_1}{1-t_0} < 1$.

Solución enviada por Mario Pérez Riera
Universidad de Zaragoza
También resuelto por S. Gómez Moreno y E. M. García Caballero, J. Vinuesa y el proponente

PROBLEMA 24

Supongamos que $z \neq 1$ es un número complejo tal que $z^n = 1$ para algún entero $n > 1$. Probar que

$$|n^2(z-1)^2 - 3n(z-1) + 3(z+1)| \leq \frac{n(n+1)^2}{4}|z-1|^3$$

y

$$|n^3(z-1)^3 - 4n^2(z-1)^2 + 6n(z^2-1) - 4(z^2+4z+1)| \\ \leq \frac{(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}|z-1|^4.$$

Propuesto por Óscar Ciaurri Ramírez
Universidad de La Rioja, La Rioja

SOLUCIÓN

Consideremos la bien conocida identidad

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}.$$

Aplicando a ambos lados el operador $\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz}\right)\right)$ obtendremos que

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 z^k = f(z) \tag{1}$$

para una cierta función f. Aplicando la condición $z^n = 1$ y simplificando tendremos que la función f se reduce a

$$\frac{n(n(z-1)^2 - 3n(z-1) + 3(z+1))}{(z-1)^3}.$$

Para concluir la primera desigualdad propuesta basta tomar el valor absoluto en (1) y observar que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} k^3 z^k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Para obtener la segunda desigualdad procederemos del mismo modo pero usando el operador $\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz}\right)\right)\right)$.

Solución enviada por el proponente