# La Olimpiada Matemática

Sección a cargo de

**María Gaspar**

## XLI Olimpíada Matemática Española

por

**María Gaspar**

La Fase Nacional de la Olimpiada del curso 2004-2005 se celebró en Galicia, en Santiago de Compostela. Son muchas las Instituciones locales y autonómicas a las que debemos agradecer el éxito de esta última edición de la Olimpiada: a las Universidades de A Coruña, Vigo y Santiago –en Galicia celebran conjuntamente la primera fase, con la Olimpiada Galega; a los Ayuntamientos de Santiago y de A Coruña, a la Xunta, y especialmente a su Consellería de Educación. Pero el verdadero motor de esta Olimpiada ha sido Felipe Gago. Vaya para él nuestro reconocimiento y gratitud.

Entre problema y problema, los estudiantes se trasladaron a A Coruña, donde tuvo lugar, en el Paraninfo de su Universidad, la entrega de premios que a todos les correspondía como ganadores de la primera fase de la Olimpiada.

Las pruebas se realizaron en el Monte do Gozo, donde se alojaban todos los participantes. Como de costumbre, en dos sesiones de tres horas y media cada una, en las que se propusieron los siguientes problemas:

**Problema 1**

Sean $a$ y $b$ enteros. Demostrar que la ecuación

$$(x-a)(x-b)(x-3)+1=0$$

admite a lo sumo una solución entera.

**Problema 2**

¿Es posible colorear los puntos del plano de coordenadas enteras con tres colores, de tal modo que cada color aparezca infinitas veces en infinitas rectas paralelas al eje $Ox$ y tres puntos cualesquiera, cada uno de distinto color, no estén nunca alineados? Justificar la contestación.

**Problema 3**

Diremos que un triángulo es multiplicativo si el producto de las longitudes de dos de sus lados es igual a la longitud del tercer lado.

Sea $ABC...XYZ$ un polígono regular de $n$ lados con todos sus lados de longitud 1. Las $n-3$ diagonales que salen del vértice $A$ dividen al triángulo $ZAB$ en $n-2$ triángulos más pequeños. Probar que cada uno de esos $n-2$ triángulos es multiplicativo.

**Problema 4**

Probar que para todo entero positivo $n$, la expresión decimal de

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

es periódica mixta.

**Problema 5**

Sean $r, s, u, v$ números reales cualesquiera. Probar que

$$\min\{r - s^2, s - u^2, u - v^2, v - r^2\} \leq \frac{1}{4}$$

**Problema 6**

En un triángulo de lados $a, b, c$, el lado $a$ es la media aritmética de $b$ y $c$. Probar:

a) $0^o \leq A \leq 60^o$

b) La altura relativa al lado $a$ es tres veces el inradio $r$.

c) La distancia del circuncentro al lado $a$ es $R - r$. ($R$ es el radio de la cicunferencia circunscrita)

Las frecuencias de puntuaciones y las medias por problema han sido las que siguen:

| | **P1** | **P2** | **P3** | **P4** | **P5** | **P6** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **0 ptos** | 56 | 92 | 53 | 86 | 82 | 85 |
| **1 pto** | 4 | 5 | 39 | 13 | 14 | 4 |
| **2 ptos** | 1 | 9 | 9 | 4 | 8 | 19 |
| **3 ptos** | 5 | 5 | 7 | 4 | 1 | 3 |
| **4 ptos** | 3 | 1 | 0 | 4 | 1 | 6 |
| **5 ptos** | 5 | 4 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| **6 ptos** | 12 | 1 | 0 | 2 | 2 | 0 |
| **7 ptos** | 32 | 1 | 10 | 4 | 9 | 1 |
| media oros | 5 | 2,17 | 7 | 3,67 | 5,83 | 3,17 |
| media premiados | 5,56 | 1,03 | 2,78 | 1,92 | 2,67 | 1,69 |
| media todos | 3 | 0,64 | 1,25 | 0,80 | 0,99 | 0,69 |
| desviación | 3,14 | 1,42 | 1,94 | 1,72 | 2,04 | 1,29 |

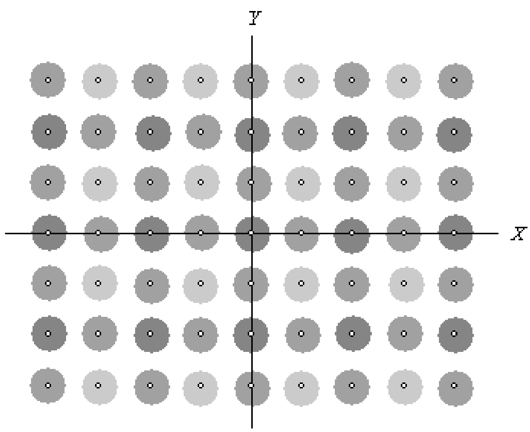
Como muestra del trabajo realizado por los estudiantes, recogemos aquí soluciones a los problemas 2, 3 y 4 realizadas durante la prueba por alumnos que recibieron Medalla de Oro:

**Solución al problema 2 (Miguel Teixidó)**

Consideremos una coloración de $Z^2$ de acuerdo con las siguientes reglas: un punto será:

- azul, si sus dos coordenadas son pares
- verde, si ambas son impares
- naranja cuando sus coordenadas tienen distinta paridad.

Demostraremos que tal coloración cumple las condiciones requeridas.




Observamos que tres puntos $A, B$ y $C$ están alineados si y solo si existe $k$ tal que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.
Caso 1. Supongamos que los puntos $A$ azul, $B$ verde y $C$ naranja con la primera coordenada par están alineados. La condición $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ sobre la primera componente nos da: $b_x - a_x = k(c_x - a_x)$,y reduciéndola módulo 2 resulta: $1-0 = k(0-0) \iff 1 = 0 \cdot k$, contradicción que prueba que no existen tales puntos.
Caso 2. Igual que el anterior, con la primera coordenada de $C$ impar y por lo tanto la segunda par. Razonando del mismo modo sobre la segunda coordenada tenemos $b_y - a_y = k(c_y - a_y)$, y módulo 2 resulta $1-0 = k(0-0) \iff 1 = 0 \cdot k$ y la correspondiente contradicción.

La segunda condición también se cumple:

El azul se repite infinitas veces en las rectas de la forma $y = k$ para $k$ par.

El verde se repite infinitamente enlas rectas de la forma $y = k$ para $k$ impar.

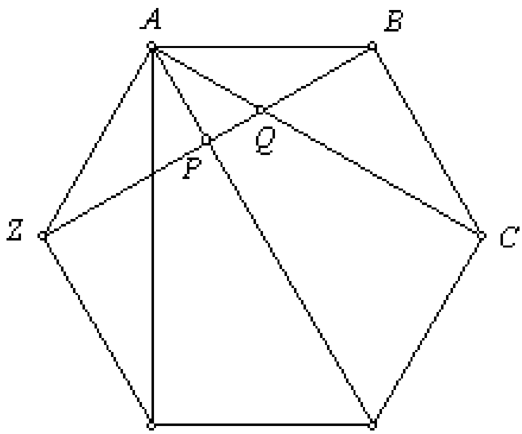
El naranja se repite infinitas veces en las rectas de la forma $y = k$ para cualquier $k$.

**Solución al problema 3 (Anas El Barkani)**

Vamos a probar el enunciado demostrando que si un triángulo es multiplicativo también lo es el colindante.

Obsérvese primero que el triángulo $ABQ$ es isósceles puesto que los ángulos $A$ y $B$ abarcan el mismo arco. Es obvio que el triángulo $ABQ$ es multiplicativo pues $AB = 1$.

$$QB = AQ \cdot AB = AQ \cdot 1 = AQ \ (1)$$




Ahora bien, si aplicamos el teorema de la bisectriz al triángulo $APB$ tenemos que

$$\frac{PQ}{AP} = \frac{QB}{AB} = AQ \Longrightarrow PQ = AQ \cdot AP$$

lo que prueba que $APQ$ también es multiplicativo, como queríamos demostrar.

**Solución al problema 6 (Elisa Lorenzo)**

a) Por la desigualdad triangular:

$$\begin{aligned} b &\leq \frac{b+c}{2}+c \Longleftrightarrow b \leq 3c \Longleftrightarrow \frac{b}{c} \leq 3 \\ c &\leq \frac{b+c}{2}+b \Longleftrightarrow c \leq 3b \Longleftrightarrow \frac{b}{c} \geq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{1}{3} \leq \frac{b}{c} \leq 3$$

Por el teorema del coseno

$$\frac{(b+c)^2}{4} = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Longrightarrow \cos A = \frac{3b^2+3c^2-2bc}{8bc}$$

Dividiendo numerador y denominador por $c^2$ y llamando $x = \frac{b}{c}$ queda

$$\cos A = f(x) = \frac{3x^2-2x+3}{8x} = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4} + \frac{3}{8x} = -\frac{1}{4} + \frac{3}{8}(x+\frac{1}{x}) \geq -\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\cdot 2$$

con igualdad para $x = 1$. Resumiendo, queda

$$\frac{1}{2} \leq \cos A \leq 1 \Longleftrightarrow 60^o \geq A \geq 0^o$$

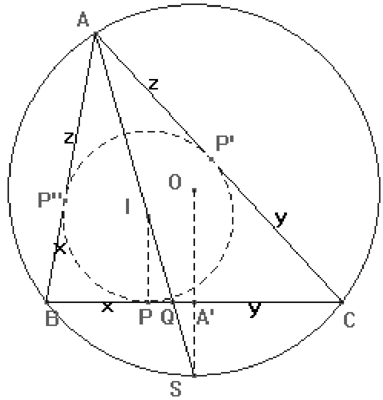
b) Designando $I$ al incentro, $h_a$ a la altura correspondiente al lado $a$, $S$ al área y $p$ al semiperímetro, tenemos

$$S = pr = \frac{a+b+c}{2}r = \frac{3ar}{2} = \frac{1}{2}ah_a \Longrightarrow 3r = h_a$$

c) La bisectriz interior de $A$ corta a la mediatriz correspondiente al lado $a$ en el punto $S$ que es el punto medio del arco $BC$ en la circunferencia circunscrita de centro $O$, y corta en $Q$ al lado $a$. Además $IP = IP' = IP'' = r$

Llamando $BP = x = BP''$; $PC = y = CP'$, $AP' = z = AP''$ resulta:

$$\begin{aligned} a &= x+y = \frac{b+c}{2}; \\ b &= y+z \\ c &= x+z \end{aligned}$$




de donde

$$x = \frac{3c-b}{4}$$

Aplicando el teorema de la bisectriz:

$$\frac{c}{BQ} = \frac{b}{CQ}$$

y

$$BQ + CQ = a = \frac{b+c}{2} \Longrightarrow BQ = \frac{c^2+bc}{2b+2c}$$

Además $BA' = \frac{b+c}{4}$. Calculemos:

$$QA' - PQ = BA' - BQ - BQ + BP = \frac{b+c}{4} - 2\frac{c^2+bc}{2b+2c} + \frac{3c-b}{4} = c - c = 0$$

de donde $QA' = PQ$, y como los ángulos $IPQ$ , $QA'S$ son ambos rectos y los ángulos $IQP, A'QS$ son iguales, resulta que los triángulos $PIQ$ y $A'SQ$ son iguales y $IP = A'S = r$ de donde queda finalmente : $OA' = OS - A'S = R - r$.

Concluidas ya las pruebas, los Rectores de las tres Universidades gallegas presidieron en el Salón Noble de Fonseca el solemne acto de entrega de premios a los ganadores de esta edición de la OME. Entre los premiados con Medalla de Oro, Miguel Teixidó y Elisa Lorenzo lo obtenían por segunda vez. Ambos, al igual que Pau Labarta, también ganador de Oro, son ya estudiantes de Matemáticas. El próximo año, la Olimpíada se celebrará en Sevilla.

**Alumnos premiados en la XLI OME**

**Medallas de Oro**

Miguel Teixidó Román (2° Bto., Colegio Claver de Raimat, Lleida)
Elisa Lorenzo García (2° Bto., IES Fortuny de Madrid)
Javier de la Nuez González (1° Bto., Liceo Italiano de Madrid)
Anas El Barkani (2º Bto., IES Lope de Vega de Nador, Marruecos)
Hugo Fernández Hervás (1° Bto., IES San Juan Bautista de Madrid)
Pau Labarta Bajo (2° Bto.,Escola Pía de Nostra Senyora de Barcelona)

**Medallas de Plata**

Marc Viñals Pérez (1° Bto., IES Palamós de Palamós, Gerona)
Alberto Camacho Martínez (2° Bto., IES Joannot Martorell de E. de Llobregat)
Nuria Gómez González (2° Bto., IES Zorrilla de Valladolid)
Abel Molina Prieto (2° Bto., IES Aguilar y Eslava de Cabra, Córdoba)
María Calvo Cervera (1° Bto., IES Luis de Góngora de Córdoba)
Gabriel Poussif (1° Bto., IES Mare Nostrum de Málaga)
Víctor Martínez Martínez (2° Bto., Colegio Ntra Sra del Buen Consejo de León)
Ignacio Somoza Sotillos (2° Bto., Colegio Valdeluz de Madrid)
Ricardo Martín Brualla (2° Bto., Colegio Alemán de Madrid)
Zhuoli Chen (1° Bto., Colegio San Francisco de Paula de Sevilla)
Lander Ramos Garrido (2° Bto., Colegio San Felipe Neri de Chiclana, Cádiz)
Marc Sabaté Vidales(2° Bto., Aula Escola Europea de Barcelona

**Medallas de Bronce**

Diego Gimeno Sanz (1° Bto, Colegio San José de Valladolid)
José Carpio Pinedo(2° Bto., IES San Juan Bautista de Madrid)
Ding Ru Cai(1º Bto., IES Ramiro de Maeztu de Madrid)
Guillermo Vicente García (2° Bto., IES Pau Vila de Sabadell,Barcelona)
Kristina Krasimirova (2° Bto., IES Leonardo da Vinci de Albacete)
Alberto Soria Barroso (2° Bto., Colegio PP Escolapios de Granada)
Laurent Dietrich Langkemper (2° Bto., IES Bellaguarda de Altea, Alicante)
Alejandro Merino Madrid (2° Bto., IES Práxedes Mateo Sagasta de Logroño)
Javier Fresán Leal (2° Bto., IES Barañain de Barañain, Navarra)
Álvaro Morante Amat(2° Bto., IES La Torreta de Elda, Alicante)
Mikael Rodríguez Chala (2° Bto., IES Álvarez Cubero de Priego de Córdoba)
Miguel Ángel Asensio Álvarez (1° Bto., IES Castilla de Soria)
Andrés Parrilla Gómez (1° Bto., Liceo Francés de Murcia)
Alba Hiniesta Lozano de las Heras (2° Bto., Colegio Valdeluz de Madrid)
Jorge Ruiz Navarro (2° Bto., IES Oleana de Requena, Valencia)
Antonio José Berenguer Verdú (2° Bto., IES La Crevetta de Onil, Alicante)
Jaime Bonnín Roca (1° Bto., Colegio San Cayetano de Palma de Mallorca)
Adrián Coso Rodríguez (2° Bto., Colegio Sta María del Pilar de Zaragoza)

## Ganadores de la fase local de la XLI OME:

### Primer Premio

| | |
|---|---|
| Andalucía: | Baena Sánchez, Pedro |
| | Calvo Cervera, María |
| | Chen, Zhuoli |
| | El Barkani, Anas |
| | Espinosa Ruiz, Rafael |
| | Gallardo García, Jorge |
| | Poussif, Gabriel |
| | Ramos Garrido, Lander |
| Aragón | Montaner Ramón, Alicia |
| Asturias | Pachas García, Miguel |
| Baleares | González Sastre, Alejandro |
| Canarias | Curbelo Hernández, Jezabel |
| | Álvarez Guerra, Enrique |
| Cantabria | Álvarez Guerra, Enrique |
| Castilla y León | Fueyo Pestaña, María Rosa |
| | Gimeno Sanz, Diego |
| | Ibáñez González, Sandra |
| | Sánchez Manzano, M. Mercedes |
| Castilla-La Mancha | Antonie, Carmen Gabriela |
| Cataluña | Teixidó Román, Miguel |
| | Vicente García, Guillermo |
| | Viñals Pérez, Marc |
| Comunidad Valenciana | Berenguer Verdú, Antonio José |
| | Ionascu, Mariana Ioanna |
| | Korzhykov, Oleg |
| | Román Bernabeu, Adrián Alejandro |
| | Ruiz Navarro, Jorge |
| Extremadura | Casillas González, Jesús Pedro |
| Galicia | Cadarso Rebolledo, Andrea María |
| | Guede Fernández, Federico |
| | Rodríguez Calvo, Manuel |
| La Rioja | Merino Madrid, Alejandro |
| Madrid | de la Nuez González, Javier |
| | Lorenzo García, Elisa |
| | Martín Brualla, Ricardo |
| Melilla | Giner Abad, Pablo |
| Navarra | Fresán Leal, Javier |
| País Vasco | Zhan, Yong Jian |
| Región de Murcia | Nortes Lorva, Heriberto |
| | Parrilla Gómez, Andrés |

## Segundo Premio

| | |
|---|---|
| Andalucía | Gea Sánchez, Alfredo |
| | Jiménez González, Antonio José |
| | Mantic Lugo, Vladislav |
| | Manuel de Villena Quijano, Carlos |
| | Rodríguez Chala, Mikael |
| | Rodríguez Marugán, Eduardo |
| | Soria Barroso, Alberto |
| | Vega Sánchez, Marta |
| Aragón | Coso Rodríguez, Adrián |
| Asturias | Fernández Colunga, Iván |
| Baleares | Bonnín Roca, Jaime |
| Canarias | Ostilla Mónico, Rodolfo |
| | Rodríguez Camacho, Marcos |
| Cantabria | Sánchez Ruiloba, Óscar |
| Castilla y León | García Pinillos, Aída |
| | Gómez González, Nuria |
| | Martín López, Enrique |
| | Martínez Martínez, Víctor |
| Castilla-La Mancha | Krasimirova Vladimirova, Kristina |
| Cataluña | Camacho Martínez, Alberto |
| | Isanta Navarro, Roger |
| | Jin Lin, Xiaolei |
| Comunidad Valenciana | Calabuig Pascual, Pablo |
| | Dietrich Langkemper, Laurent |
| | Herrero Sáez, Carlos |
| | Morante Amat, Álvaro |
| | Sáez Cebrián, Jorge |
| Extremadura | Sánchez Rodríguez, Carlos |
| Galicia | Ares Blanco, Félix |
| | Carro Saavedra, Cristina |
| | Moure Rosende, Adrián |
| La Rioja | Aguilera Lizarraga, Miguel |
| Madrid | Carpio Pinedo, José |
| | Fernández Hervás, Hugo |
| | Ru Cai, Ding |
| Melilla | Karkour Afhim, Mohamed |
| Navarra | Gastón Puig, Jorge |
| País Vasco | González-Pinto González, Diego |
| Región de Murcia | Heredia Martín, Clara |
| | Hernández Palazón, Álvaro |

## Tercer Premio

| | |
|---|---|
| Andalucía | Delgado Sillero, Miguel |
| | Espina Casado, María Ángeles |
| | Gabín Moreira, Brais |
| | González de Céspedes, Alberto |
| | González Somosierra, José María |
| | Herrero Martín-Peñasco, Carmen |
| | Molina Prieto, Abel |
| | Pardo Ridao, Juan Miguel |
| Aragón | Elduque Viñuales, Daniel |
| Asturias | Álvarez Álvarez, Alejandro |
| Baleares | Rapha Juan, Antonio |
| Canarias | Encinoso Brito, Paula |
| | Pardo Rodríguez, Jorge |
| Cantabria | García Merino, Hugo |
| Castilla y León | Álvarez García, Mario |
| | Asensio Álvarez, Miguel Ángel |
| | García Flórez, Diego |
| | Villoria Iglesias, Jonatan |
| Castilla-La Mancha | Ciller Cutillas, Pedro |
| Cataluña | Labarta Bajo, Pau |
| | Sabaté Vidales, Marc |
| | Sánchez Net, Marc |
| Comunidad Valenciana | Ayats Pérez, Cristina |
| | Badenes Escudero, Carles |
| | Durante López, Alejandro |
| | Sanz Añanos, Santiago |
| | Úbeda Sala, Raúl |
| Extremadura | López Pozo, Alberto |
| Galicia | Lastres Guerrero, Ramón |
| | Martínez Pousa, Borja |
| | Palau Lage, Ana |
| La Rioja | Eguizábal Alonso, Miguel |
| Madrid | Fernández Sánchez, David |
| | Lozano de las Heras, Alba Hiniesta |
| | Somoza Sotillos, Ignacio |
| Melilla | Mohatar Maanan, Nabil |
| Navarra | Guibert Zafra, Belén |
| País Vasco | Larrakoetxea González, Josu |
| Región de Murcia | Carrillo Corbalán, Laura |
| | Yepes Nicolás, Jesús |

# 46 Olimpíada Internacional de Matemáticas

por

**Marco Castrillón López y María Gaspar**

El pasado mes de julio se celebró en Mérida, capital del mejicano estado de Yucatán, la 46 Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO). Méjico participó por primera vez en esta competición internacional en 1980, en Washington, aunque no volvió a asistir hasta que se celebró en Cuba en 1987. A partir de allí, Méjico ha mostrado un creciente interés en las competiciones matemáticas, una evolución que ha culminado con la organización de esta última edición de la IMO.

La celebración (ya por tercera vez después de Cuba y Argentina) de la IMO en un país hispanoamericano ha ofrecido una oportunidad para la participación por primera vez, o incluso la reincorporación, de varios países latinoamericanos como es el caso de Costa Rica, El Salvador, Bolivia o Guatemala, sin necesidad de enviar observadores en ediciones anteriores tal y como indica la normativa en una lectura rigurosa. Eso explica el significativo aumento del número de países participantes, llegándose a la cantidad de 93. Desafortunadamente los mongoles y los uzbecos no pudieron asistir por problemas de última hora con sus visados, por lo que la cifra se redujo en la práctica a 91. Por otra parte, Nigeria participó como observador, sin equipo, con intención de incorporarse en futuras ediciones.

Durante tres días, antes de la llegada de los estudiantes, el Jurado confeccionó la prueba seleccionando los problemas entre una lista de 27. Para asegurar la confidencialidad, el Jurado permanece aislado. En este caso, realmente lo estaba: en un hotel en una playa solitaria sin comunicaciones con el exterior. En la noche del día 11, víspera de la ceremonia de apertura, por fin quedaron expuestas, para su examen y aprobación por el Jurado, las versiones de los problemas en los más de 50 idiomas maternos de los estudiantes participantes, que ese mismo día llegaban a Mérida. El día 13 llegó la hora de la verdad con la primera sesión de resolución de problemas. Como siempre, tres problemas y cuatro horas y media. Durante la primera media hora, se pueden hacer llegar al Jurado preguntas por escrito. Éste las responde, también por escrito después de, en ocasiones, grandes debates. Desafortunadamente, el servicio de fax sufrió una avería, lo que alargó la entrega de respuestas hasta tres horas.

Al siguiente día, y ya sin problemas de comunicación, tuvo lugar la segunda, y última, sesión con los siguientes tres problemas. Terminada la misma, se concluyó el aislamiento del Jurado y comenzaron los dos días de intenso trabajo de las coordinaciones. Si es preciso robando horas al sueño, se lee, se desenmarañan y se entienden las respuestas de los participantes, para posteriormente defenderlas delante de un tribunal de coordinación.

En ese momento llegó la noticia de la visita del huracán Emily. Primero parecía algo sin importancia, pero poco a poco las fotos de satélite confirmaban el aumento de su fuerza y el paso de su trayectoria justo sobre la ciudad de Mérida. Las autoridades del estado organizaron la preparación de refugios y ordenaron la alerta roja. Los organizadores de la IMO, por su parte, tuvieron que acomodarse a esta situación, tan novedosa en una olimpiada matemática internacional, modificando el programa consecuentemente. Es sin duda un mérito de la organización el manejar esta situación estando en juego una verdadera torre de Babel habitada por unas 1000 personas, la mayoría menores de edad. En particular, los estudiantes fueron sacados de sus habitaciones y colocados en un improvisado refugio dentro de sus hoteles. Sin embargo, lo que parecía una situación tensa fue vivida por ellos como una verdadera fiesta de pijamas, un campamento internacional y una oportunidad única de disfrutar la compañía del resto de los participantes. Afortunadamente, la fuerza final de Emily se redujo notablemente al entrar a tierra firme y no se produjo ningún percance grave. Sin embargo, la experiencia vivida no será fácil de borrar y posiblemente se recordará y será revivida en ediciones próximas de la IMO.

He aquí los problemas que se propusieron. Como siempre, cada problema vale 7 puntos y cada sesión se desarrolla en cuatro horas y media.

## Primer día, miércoles 13 de julio de 2005

**Problema 1.** (Propuesto por Rumanía)
Se eligen seis puntos en los lados de un triángulo equilátero $ABC$: $A_1$ y $A_2$ en $BC$, $B_1$ y $B_2$ en $CA$, $C_1$ y $C_2$ en $AB$. Estos puntos son los vértices de un hexágono convexo $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ cuyos lados son todos iguales. Demuestre que las rectas $A_1B_2$, $B_1C_2$ y $C_1A_2$ son concurrentes.

**Problema 2.** (Propuesto por los Países Bajos)
Sea $a_1, a_2, \ldots$ una sucesión de enteros que tiene infinitos términos positivos e infinitos términos negativos. Supongamos que para cada entero positivo $n$, los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tienen $n$ restos distintos al ser divididos entre $n$. Demuestre que cada entero se encuentra exactamente una vez en la sucesión.

**Problema 3.** (Propuesto por Corea)
Sean $x, y, z$ números reales positivos tales que $xyz \geq 1$.
Demuestre que

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0.$$

## Segundo día, jueves 14 de julio de 2005

**Problema 4.** (Propuesto por Polonia)
Consideremos la sucesión infinita $a_1, a_2, \ldots$ definida por

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Determine todos los enteros positivos que son primos relativos (coprimos) con todos los términos de la sucesión.

**Problema 5.** (Propuesto por Polonia)
Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo que tiene los lados $BC$ y $AD$ iguales y no paralelos. Sean $E$ y $F$ puntos en los lados $BC$ y $AD$, respectivamente, que son distintos de los vértices y satisfacen $BE = DF$. Las rectas $AC$ y $BD$ se cortan en $P$, las rectas $BD$ y $EF$ se cortan en $Q$, las rectas $EF$ y $AC$ se cortan en $R$. Consideremos todos los triángulos $PQR$ que se forman cuando $E$ y $F$ varían. Demuestre que las circunferencias circunscritas a esos triángulos tienen en común otro punto además de $P$.

**Problema 6.** (Propuesto por Rumanía)
En una competencia de matemáticas se propusieron 6 problemas a los estudiantes. Cada par de problemas fue resuelto por más de $\frac{2}{5}$ de los estudiantes. Nadie resolvió los 6 problemas. Demuestre que hay al menos 2 estudiantes tales que cada uno tiene exactamente 5 problemas resueltos.

La participación española estuvo representada por Miguel Teixidó Román, de Lérida; Elisa Lorenzo García, de Madrid; Javier de la Nuez González, de Madrid; Pau Labarta Bajo, de Barcelona; Hugo Fernández Hervás, de Madrid y Marc Viñals Pérez, de Gerona. Elisa consiguió una medalla de bronce y Javier y Hugo, sendas menciones honoríficas. Y aunque se trate de una competición individual, la posición de España dentro del medallero se sitúa en el lugar 58.

La naturaleza de los problemas de esta edición hice que hasta 16 estudiantes obtuviesen la puntuación máxima de 42 puntos. Además el corte para la obtención de la medalla de oro se situó en 35 puntos, más alta de lo habitual, mientras que el corte correspondiente para la medalla de bronce, en 12 puntos, fue relativamente bajo. Se puede deducir que los problemas presentados tuvieron, en cierta medida, un perfil más técnico que beneficiaba a un tipo de estudiante sobre-entrenado respecto sobre el resto: obsérvese, por ejemplo, el problema tercero. A continuación, se adjunta la tabla de frecuencias de puntuaciones por problema, sobre un número total de 513 participantes, entre ellos 41 mujeres.

| Puntos | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 208 | 96 | 423 | 90 | 287 | 325 |
| 1 | 58 | 202 | 23 | 147 | 37 | 39 |
| 2 | 65 | 13 | 3 | 29 | 30 | 57 |
| 3 | 20 | 7 | 0 | 0 | 16 | 13 |
| 4 | 5 | 11 | 0 | 0 | 4 | 15 |
| 5 | 11 | 7 | 0 | 3 | 6 | 2 |
| 6 | 5 | 2 | 9 | 6 | 8 | 6 |
| 7 | 141 | 175 | 55 | 238 | 125 | 56 |
| Media: | 2,61 | 3,05 | 0,91 | 3,75 | 2,17 | 1,35 |

El año próximo, la Olimpiada Internacional tendrá lugar en Eslovenia. A continuación, la sede será Vietnam y después... ¡nos toca a nosotros! Próximamente se decidirá la ciudad que albergará en España la 49 Olimpiada Internacional de Matemáticas.

## Anexo: Resultados de los países participantes

| País | Ptos | O | P | B | MH |
|---|---|---|---|---|---|
| Albania | 44 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| Alemania | 163 | 1 | 3 | 2 | 0 |
| Arabia Saudí | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Argentina | 65 | 0 | 1 | 2 | 0 |
| Armenia | 82 | 0 | 0 | 5 | 0 |
| Australia | 117 | 0 | 0 | 6 | 0 |
| Austria | 74 | 0 | 0 | 2 | 3 |
| Azerbaiján | 59 | 0 | 0 | 2 | 3 |
| Bangladesh | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Bélgica | 74 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| Bielorrusia | 136 | 1 | 2 | 1 | 0 |
| Bosnia Herzegovina | 49 | 0 | 0 | 2 | 1 |
| Brasil | 82 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| Bulgaria | 173 | 2 | 3 | 1 | 0 |
| Canadá | 132 | 1 | 2 | 2 | 0 |
| China | 235 | 5 | 1 | 0 | 0 |
| Chipre | 14 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| Colombia | 105 | 0 | 2 | 2 | 0 |
| Corea | 200 | 3 | 3 | 0 | 0 |
| Costa Rica | 37 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| Croacia | 82 | 0 | 1 | 2 | 2 |
| Cuba | 54 | 0 | 0 | 3 | 1 |
| Dinamarca | 69 | 0 | 0 | 4 | 0 |
| Ecuador | 17 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| El Salvador | 25 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| Eslovaquia | 131 | 0 | 4 | 2 | 0 |
| Eslovenia | 49 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| España | 46 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| Estados Unidos | 213 | 4 | 2 | 0 | 0 |
| Estonia | 68 | 0 | 0 | 3 | 0 |
| Filipinas | 30 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| Finlandia | 49 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| Francia | 83 | 0 | 0 | 4 | 2 |
| Georgia | 80 | 0 | 0 | 4 | 1 |
| Grecia | 58 | 0 | 0 | 2 | 1 |
| Guatemala | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Hong Kong | 138 | 1 | 3 | 1 | 0 |
| Hungría | 181 | 2 | 3 | 2 | 0 |
| India | 81 | 0 | 1 | 1 | 3 |
| Indonesia | 70 | 0 | 0 | 3 | 0 |
| Irán | 201 | 3 | 3 | 0 | 0 |
| Irlanda | 55 | 0 | 1 | 0 | 0 |

| **País** | **Ptos** | **O** | **P** | **B** | **MH** |
|---|---|---|---|---|---|
| Islandia | 23 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| Israel | 99 | 0 | 2 | 2 | 1 |
| Italia | 120 | 0 | 2 | 4 | 0 |
| Japón | 188 | 3 | 1 | 2 | 0 |
| Kazjastán | 112 | 0 | 2 | 3 | 1 |
| Kirguistán | 46 | 0 | 0 | 2 | 1 |
| Kuwait | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Letonia | 62 | 0 | 0 | 2 | 1 |
| Liechtenstein | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Lituania | 53 | 0 | 0 | 1 | 3 |
| Luxemburgo | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| Macao | 38 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| Macedonia | 50 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| Malasia | 15 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Marruecos | 18 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| Méjico | 91 | 0 | 0 | 4 | 2 |
| Moldavia | 130 | 1 | 2 | 2 | 0 |
| Mozambique | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Noruega | 38 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| Nueva Zelanda | 77 | 0 | 1 | 2 | 2 |
| Países Bajos | 62 | 0 | 0 | 2 | 2 |
| Paraguay | 12 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Perú | 104 | 0 | 0 | 6 | 0 |
| Polonia | 105 | 0 | 1 | 5 | 0 |
| Portugal | 21 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| Puerto Rico | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Reino Unido | 159 | 1 | 3 | 2 | 0 |
| República Checa | 139 | 1 | 2 | 2 | 0 |
| Rumanía | 191 | 4 | 1 | 1 | 0 |
| Rusia | 212 | 4 | 2 | 0 | 0 |
| Serbia y Montenegro | 75 | 0 | 0 | 3 | 1 |
| Singapur | 145 | 0 | 4 | 2 | 0 |
| Sri Lanka | 32 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Sudáfrica | 39 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| Suecia | 42 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| Suiza | 70 | 0 | 1 | 1 | 3 |
| Tailandia | 128 | 0 | 4 | 2 | 0 |
| Taiwán | 190 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| Trinidad Tobago | 13 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Túnez | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Turkmenistán | 18 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| Turquía | 130 | 0 | 4 | 1 | 1 |
| Ucrania | 181 | 2 | 2 | 2 | 0 |
| Uruguay | 37 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Venezuela | 15 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| Vietnam | 143 | 0 | 3 | 3 | 0 |