La Gaceta de la RSME, Vol. 8.3 (2005), Págs. 637–662

Instantáneas matemáticas

por

Capi Corrales Rodrigáñez

"Al demostrar en una encuesta su escaso interés por la ciencia, la juventud demuestra ser coherente con las orientaciones de los que dirigen la marcha de España",

Joseph Pernau, *ABC Dominical*, abril 2002.

"La mayoría de los alumnos de selectividad suspendió las matemáticas",

El País, 16 de julio de 2003.

Siendo hijos de quienes son hijos, es natural que los jóvenes de hoy no presten atención a las matemáticas. Por un lado, son muchos los adultos a su alrededor que, además de no saber nada de ciencia o matemáticas, no parecen especialmente preocupados ni limitados en su capacidad adquisitiva por esta carencia. Por otro lado, hipnotizados y prisioneros como se les tiene de las músicas de tantos flautistas de Hammelin, pocas son las situaciones que encaran estos jóvenes en su vida cotidiana en las que saber matemáticas o ciencia, o llevar a cabo esfuerzo alguno de razón, sea aparentemente necesario.

Los jóvenes piensan lo que piensan de las matemáticas, porque los adultos pensamos lo que pensamos de las matemáticas. Si a lo largo del siglo XX nadie ponía en duda que las matemáticas deben ocupar un lugar fundamental en la formación del individuo en nuestra cultura, hace tiempo que la corriente mayoritaria de opinión, encabezada por los dirigentes políticos, ha cambiado de dirección. Basta prestar atención a los nuevos planes de estudio, a las horas y medios con los que en ellos cuentan las asignaturas de ciencias con respecto a otras materias, y a la prioridad que a las matemáticas y ciencias en general se da en programas y proyectos culturales, ya sean organizados desde organismos institucionales como desde medios privados o de comunicación.

Aunque muchos todavía no hemos olvidado la relación de las matemáticas con otras manifestaciones de la cultura, a la hora de explicarlo con precisión, fuera de su papel en el desarrollo científico y técnico no somos por lo general capaces de dar más que un par de ideas vagas. Se dice con frecuencia, por ejemplo, que música y matemáticas están muy relacionadas. Pero pocas son las personas capaces de describir con algún detalle tal relación e ir más allá de los pitagóricos y sus trabajos con la escala musical. Lo mismo ocurre cuando hablamos de matemáticas y arquitectura, o matemáticas y pintura. Salen a relucir los maestros del Renacimiento, la perspectiva, la geometría proyectiva y poco más. De hecho, la mayoría de la gente sigue considerando las matemáticas como una disciplina difícil y ajena, algo que es importante para la ciencia y la tecnología, pero cuya influencia ni está a la vista, ni se puede entender con facilidad, ni tiene mucho que ver con los demás componentes de la cultura.

En los últimos años he participado con regularidad como ponente en cursos y ciclos de conferencias relacionando, de una manera u otra, las matemáticas con otros aspectos de nuestra cultura. Y varias veces, ante la insistencia de algunos asistentes, he prometido recoger por escrito alguno de los ejemplos concretos presentados durante el curso de cómo acercarnos a las matemáticas contemporáneas a través de la cultura que nos rodea y, recíprocamente, cómo las matemáticas pueden ayudarnos a disfrutar y conocer nuestra cultura. Cumpliendo esta promesa, pendiente desde hace tanto, me gustaría mencionar a lo largo de estas páginas algunos trabajos y estrategias que, desarrollados en los últimos años en el seno de la comunidad matemática, pueden resultar herramientas útiles tanto a la hora de divulgar conocimientos matemáticos, como a la hora de explicarnos y explicar para qué sirven las matemáticas y porqué muchos pensamos que la calidad con la que miraremos y viviremos el mundo dependerá, en gran medida, de la formación matemática con que cuente nuestra sociedad.

Tengo también una segunda razón, ésta de índole más personal, que me ha llevado a escribir estas páginas. Últimamente son muchos los colegas amigos que me han expresado su desánimo ante la desinformación y falta de interés hacia su labor que encuentran en las aulas y, en general, en la sociedad. Este desánimo puede desembocar en frustración en el caso de aquéllos que se dedican a la enseñanza, que empiezan a hablar con demasiada frecuencia de tirar la toalla y retirarse de las aulas. Esta decisión no sería dramática en sí, el mundo no va a cambiar esencialmente porque haya un puñado menos de profesores de matemáticas por muy buenos que sean, y me consta que muchas de las personas en las que estoy pensando lo son. Pero sí es verdad que hoy en día son muy pocas las personas afortunadas que se dedican profesionalmente a una actividad que les hace disfrutar y que no sólo no daña a nadie sino que además contribuye a que este mundo sea un lugar mejor en el que vivir. Estos amigos míos se encuentran entre esta minoría, y sería triste que tuviesen que dejarla. A ellos van dedicadas estas páginas y muy especialmente la observación que sigue.

Sabemos que la falta de interés por las matemáticas y las ciencias en general, está muy relacionada con el poco entrenamiento en leer, escribir, pensar y razonar a que están sometidos desde hace algunas generaciones los jóvenes, así como la falta de información que tienen sobre el inmenso poder de estas cuatro armas. De entre ellas, durante años se ha considerado que la más difícil de recuperar para la sociedad actual sería la del leer: sólo un milagro conseguiría que niños y jóvenes volviesen a recuperar el placer y el poder de la lectura. Bueno, pues tal milagro ha ocurrido. Así lo describe Fernando Savater en sus memorias ([Sa], p. 324):

"Pero no puedo acabar esta reflexión sin mencionar el verdadero acto mágico, el auténtico milagro llevado a cabo por el aprendiz de brujo Harry Potter. En esta sociedad audiovisual en la que, según algunos, los niños y los jóvenes ya se han olvidado de leer, ha despertado la vieja pasión en miles de neófitos".

En las numerosas entrevistas que se han llevado a cabo intentando entender el "sorprendente milagro", los jóvenes y apasionados lectores de Harry Potter cuentan que lo que más les gusta de los libros de Rowling es que se pueden ver con la imaginación; dicho con otras palabras, son libros que hacen soñar y pensar a la vez. Bueno, pues no olvidemos que una vez se emprende el camino de soñar y pensar simultáneamente, antes o después se llega al País de las Matemáticas. Ciertamente no todos, pero sí una proporción nada despreciable de los actuales lectores disfrutarán estudiando estrellas y planetas, pasarán tiempo a solas hipnotizados con el comportamiento de las abejas y construirán en sus cabezas hermosas estructuras abstractas. Lo malo de los tiempos que nos están tocando vivir no son los jóvenes ni los mayores, sino esa enorme franja de adultos entre los cuarenta y los sesenta años de edad que, deslumbrados por el brillo de las baratijas, han perdido la capacidad de ver. Si los jóvenes están de nuevo leyendo, no hay que temer que necesariamente acaben en similar situación. Simplemente, están mal educados. Démosles tiempo y aguantemos un poco más, descorazonados amigos, que pronto vendrán a llamar a nuestra puerta. Para hacer más amena vuestra espera, he aquí una muestra de mi álbum particular de fotos matemáticas, imágenes que con frecuencia me ayudan a evocar esos momentos de éxtasis y placer que el conocimiento, por somero que sea, de las matemáticas procura. Espero que os haga disfrutar.

Instantáneas 1 y 2

"Imaginar un objeto requiere y da forma a una representación mental del mismo, y este nivel descriptivo abstracto normalmente se pasa por alto, no se discute. Y sin embargo es precisamente este componente abstracto el que con frecuencia se reconoce como el obstáculo esencial cuando personas de distintas culturas intentan comunicarse. Es obvio que las diferentes representaciones de un mismo objeto oscurecen algunas de sus características y realzan otras: la elección de ciertas de ellas supone escoger deliberadamente unas, al tiempo que se descartan otras. Esta representación mental modela, a su vez, las expectativas con que de hecho contemplamos un objeto, porque guía la selección de características que hacemos al observar: la 'mirada' se modela culturalmente".

Laura Tedeschini–Lalli, [TL–1].

El ojo se educa. Y el cómo miramos, la mirada con la que nos enfrentamos a lo que nos rodea, se va forjando a lo largo del tiempo, de la mano, entre otros, de científicos y creadores en general. Cómo miramos condiciona lo que vemos, que a su vez hace que vaya tomando forma una manera nueva de mirar. Al guiarnos a la hora de seleccionar las características en las que fijarnos cuando observamos un objeto, la cultura funciona como unas gafas que llevamos siempre puestas. Ser conscientes de que miramos a través de lentes nos permite cambiarlos a voluntad, ya sea como juego o experimento, para probar qué pasa si miramos de otra manera, ya sea por necesidad, cuando las lentes se nos quedan obsoletas y nos impiden una visión clara.

Todas las disciplinas que buscan conocer, explicar o representar lo que hay alrededor de nosotros van contribuyendo a esta forja de la mirada, pero son probablemente las matemáticas las que de forma más directa dan testimonio de cómo se mira en un momento dado. Cómo seleccionar los aspectos que caracterizan un determinado tipo de objetos, cómo relacionar las distintas formas, cómo identificar comportamientos parecidos, cómo reconocer y describir con precisión las analogías entre las diversas cosas y los diversos fenómenos, es precisamente lo que nos enseñan las matemáticas que todos aprendemos en la escuela. Y llevando puestas esas lentes con las que nos entrenan (o deberían entrenarnos) a mirar en las clases de matemáticas desde la infancia, nos enfrentamos después al mundo que nos rodea. Por eso, en cualquier disciplina y en cualquier época de la cultura occidental, es posible identificar el rastro que la influencia de la mirada matemática ha ido dejando en el desarrollo científico y social de tal cultura.

Veamos dos ejemplos concretos. A través del primero de ellos, extraído de los trabajos de los franceses André Weil (matemático, [We–1]) y Claude Lévi–Strauss (antropólogo, [Le–1]), veremos cómo las matemáticas pueden ser utilizadas por los antropólogos para describir y entender algunos de los comportamientos que analizan. En el segundo, un estudio de campo de la matemática italiana Laura Tedeschini–Lalli ([TL–2]) nos ofrece la posibilidad de entender cómo las matemáticas influyen de manera directa en una elección tan básica como qué sonidos se consideran musicales y cuáles no en nuestra cultura.

En diciembre de 1977, el catedrático de antropología social del Collège de France, Claude Lévi–Strauss, dio una serie de conferencias radiofónicas en la cadena CBC Radio de la Universidad de Toronto bajo el título “Myth and Meaning” ([Le–2]). En ellas explicaba, con ejemplos concretos, las estructuras subyacentes a varios de los mitos de los nativos canadienses.

La posibilidad planteada por Lévi–Strauss de que el pensamiento sea estructural, supuso una manera nueva de colocarse ante los mitos, cuentos y leyendas, una manera que nos permite entender cómo la tradición oral ha contribuido, y aún contribuye, a estructurar nuestros razonamientos cotidianos, esos razonamientos que, pulidos, dan lugar a las matemáticas. Al fin y al cabo, como gustaba decir Albert Einstein, las matemáticas no son más que un refinamiento del pensar cotidiano. Si se tiene en cuenta, además, que es precisamente la búsqueda y construcción de estructuras la actividad más característica de la matemática del siglo XX, no es sorprendente que en los

André Weil y su hermana Simone Weil en 1922

orígenes de los trabajos de Lévi–Strauss en esta dirección, se encuentre su colaboración con André Weil. Este matemático, hermano de la filósofa Simone Weil, fue uno de los miembros fundadores del grupo Bourbaki, y sus trabajos en geometría algebraica y la teoría de los números han tenido una influencia fundamental en la trayectoria seguida por las matemáticas a lo largo del siglo XX.

Cuando Lévi–Strauss y Weil se conocieron en Nueva York en 1943 ([We–2]), el primero llevaba tiempo estudiando, sin llegar a entender, las reglas con las que algunas tribus primitivas –i.e., sin escritura,– decidían sus matrimonios. Al conocer a Weil, le mostró los datos que había acumulado y éste, mediante el uso de reglas de combinatoria, identificó la estructura subyacente a aquellos enlaces matrimoniales, que resultó ser un grupo conmutativo. De esta manera, introduciendo en los estudios antropológicos las matemáticas, una herramienta considerada –aún hoy por muchos– completamente ajena a la disciplina, Lévi–Strauss pudo demostrar que la abstracción es inherente al pensar de todo humano y, así, no es que haya culturas o gentes más abstractas que otras, sino que en distintas culturas la abstracción se utiliza y manifiesta de distintas maneras. Las capacidades intelectuales y las actividades mentales son las mismas, lo que varía es cómo se manifiestan.

La música, pese a ser una de las disciplinas más difíciles y que más horas de dedicación requiere –ya sea para practicarla activamente tocando algún instrumento, ya sea para escucharla y disfrutarla a fondo–, ha llegado a ocupar un lugar predominante en la vida de muchísimas personas. Hace unos años eso no ocurría. Curiosamente, la música es de las pocas disciplinas artísticas que todo el mundo relaciona con las matemáticas. Aunque la mayor parte de nosotros no sepamos exactamente en qué consiste tal relación, la damos por hecha, y a nadie nos extraña leer la expresión “matemáticas y música”. Aunque quizás, siguiendo la sugerencia de Tedeschini–Lalli ([TL–2]), debiésemos decir “matemáticas y músicas”.

Laura Tedeschini Lalli

"Cuando decimos Música y Matemáticas usamos la primera palabra en singular, y la segunda en plural, como si hubiese muchas actividades intelectuales reconocidas como matemáticas y sólo una actividad cultural reconocida como musical. Muchas son las culturas y muchas las músicas".

Ya sea matemáticas y música, ya sea matemáticas y músicas, el hecho es que, pese a que el número de gente que entiende, disfruta o practica la música no deja de crecer, seguimos siendo un país matemáticamente un poquito ignorante. Todos los expertos en estos temas coinciden en que ambas disciplinas están relacionadas; no cabe, pues, duda de que, por un lado, el conocimiento explícito de tal relación ha de resultar de interés para muchos y, por otro, el que su estudio no tenga el peso que merece en los programas básicos de educación es una laguna que antes o después habremos de cubrir.

Empecemos por el principio: ¿Qué es música? ¿Cómo distinguimos la música del ruido? ¿Qué, exactamente, hace que ciertos ruidos sean calificados de musicales mientras que otros, tengan significado o no, sean considerados no musicales? Precisamente sobre la influencia de las matemáticas en estas cuestiones trata el trabajo citado de Tedeschini–Lalli. En él se nos describe en un lenguaje asequible, por qué cuando decimos "sonidos musicales" estamos haciendo una elección culturalmente determinada, y de qué manera esta elección cultural está directamente influenciada por los modelos matemáticos que tradicionalmente subyacen a los análisis de lo que en nuestra cultura llamamos música. Utilizamos modelos matemáticos para estudiar lo que entendemos por música, y a su vez los modelos matemáticos que utilizamos condicionan lo que entendemos por música.

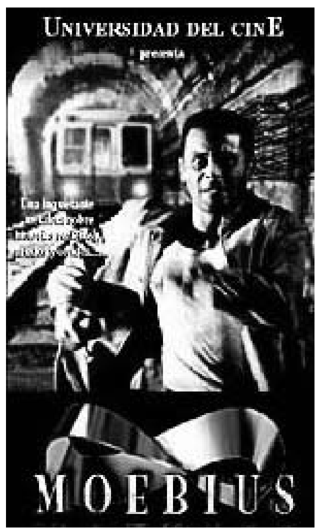
Como nos explica Tedeschini Lalli, todo tratamiento matemático de la música parte de un modelo matemático, y el modelo matemático en que se basan los estudios clásicos es el de la cuerda que vibra. Desde el punto de vista de las vibraciones, también las columnas de aire se comportan como cuerdas vibratorias, y así podríamos decir que cuerdas y columnas de aire son los "instrumentos arquetípicos" de nuestra música, esto es, de nuestra cultura musical. Al haber estado expuestos a ellos durante siglos, nuestros oídos han desarrollado una sensibilidad especial hacia el espectro armónico, por ejemplo, y así la armonía es componente esencial de lo que consideramos musical.

¿Qué entenderían por música oídos expuestos a otros modelos? Con esta pregunta in mente, Tedeschini Lalli construye un juguete musical teórico –un modelo musical matemático distinto de los clásicos–, lo describe, lo analiza y deduce matemáticamente qué noción de lo que es musical y no es musical tendría un pueblo expuesto a este instrumento durante siglos. Hasta aquí un experimento teórico sin más. Lo verdaderamente interesante surge cuando tras haber encontrado en el sudoeste asiático unas gentes que durante siglos han hecho música con y para instrumentos que casan con el modelo teórico por ella construido, Tedeschini Lalli compara lo que esta cultura define como musical y no musical con las predicciones matemáticas y encuentra que ambas definiciones concuerdan. ¿Casualidad o regla general?

Trabajos como éste sugieren que las conexiones entre lo que una cultura elige como "musical" y los modelos matemáticos, explícitos o no (y en el caso de la cultura europea sí son explícitos) que subyacen a la construcción y análisis de su música y sus instrumentos, es directa y condicionante en ambas direcciones. ¡Ya me hubiese gustado a mí conocer esta historia cuando, de adolescente, discutía con mi hermana sobre si el sonido emitido por los Rolling Stones era música o no era música!

Instantáneas 3 y 4

De todos los personajes cinematográficos que encarnan a matemáticos sólo hay dos que me han resultado verdaderamente atractivos y con cabezas lo suficientemente sexy: el John Nash encarnado por Russell Crowe de "Una mente maravillosa" (Ron Howard, Universal Pictures 2002) y el Daniel Pratt de Guillermo Angelelli en "Moebius" (Gustavo Mosquera, producción independiente, Buenos Aires 1996). El primero listísimo y valentísimo, el segundo listísimo y guapísimo (por fin un matemático encarnado por un actor no sólo no feo, sino de hecho guapo).



En "Una mente maravillosa" nuestro héroe es valiente, pero no a la manera de los personajes de John Wayne o Charlton Heston, que mucha sangre fría para los puñetazos y los tiros pero luego resultaban ser unos cobardicas *peterpanes* a los que aterrorizaba crecer y mirarse por dentro. John Nash es valiente a la manera de los hombres de verdad, capaz de bucear hacia dentro sin paralizarse, hasta alcanzar el límite de sí mismo, hasta llegar a esa frontera donde no se sabe si estamos viendo o inventando, creando o fantaseando, donde el vértigo lo mismo produce pánico que vibración de éxtasis, donde la única manera de convivir con la incertidumbre sin dejarse paralizar por la duda es, como decía Bertrand Russel, utilizando la cabeza. Y Nash, que es matemático, la utiliza para hacer matemáticas. También en una frontera entre realidad y fantasía, aunque bien distinta de la habitada por Nash, termina trabajando la cabeza del guapo Pratt.

La primera de las películas, una superproducción de Hollywood a todo color, promocionada a bombo y platillo; la segunda cinta, rodada en blanco y negro por un profesor de la Escuela de Cine de Buenos Aires y sus alumnos con cuatro perras, una cámara manual comprada en el rastro y mucho talento. Ambas batiendo, en sus territorios correspondientes, récords de audiencias y premios; y eso que en ambos casos las matemáticas son un personaje más de la historia, se habla de ellas, se las explica y se las usa.

Hay una escena graciosa en la película de Howard. Cuatro amigos están tomando una cerveza en un bar cuando entran cuatro mujeres, tres de ellas muy atractivas, la cuarta despampanante. De inmediato la atención de tres de los varones se centra en la bella y en cómo ligársela. El cuarto, Nash, estudiante de doctorado de matemáticas, les observa hacer y analiza sus dinámicas. Al cabo, se vuelve hacia sus compañeros y en voz baja les dice: *"Si vuestro objetivo es ligar esta noche, así no lo conseguiréis. Los tres os estáis lanzando a por la misma mujer, y esa estrategia no tiene buena salida para ninguno de vosotros, no habrá ganador. Ella, ante tanta opción, no va a saber a cuál elegir, y acabará alejándose. Para cuando os deis cuenta de que no se va a decidir por ninguno y os volváis a las otras tres, ellas, sintiéndose segundo plato, os* *rechazarán. Si por el contrario, desde el primer momento ignoráis a la guapa y os centráis en las amigas, ligaréis todos".*

Con esta escena, el director pretende introducirnos en la teoría de juegos no cooperativos desarrollada por John Nash en su tesis doctoral de 1950, por la que se le concedió el premio Nobel en economía en 1994. Un juego no cooperativo es una situación de competición abierta entre varios jugadores –personas, comunidades, países, sociedades...– y las condiciones son tales que no hay posibilidad de acuerdos vinculantes previos entre las partes, ya sea porque no pueden o porque no quieren cooperar entre ellos. Cada cual ha de decidir por sí mismo, y sin comunicarse con los demás, la estrategia de acción que le reportará mayor posibilidad de beneficio, y todos los jugadores eligen simultáneamente. John Nash construyó un modelo matemático para estudiar esta situación en el que se parte de tres hipótesis iniciales: todos los jugadores son racionales, todos conocen y entienden perfectamente las reglas del juego y todos cuentan con información completa sobre los objetivos de los otros jugadores. Ni que decir tiene que en la realidad rara vez se dan todas estas condiciones, pero eso suele pasar con todos los modelos construidos a partir de teorías matemáticas que intentan reproducir situaciones concretas de la vida real, lo que no es obstáculo para que estos modelos resulten muy útiles como herramienta para analizar, entender y predecir el desarrollo de estas situaciones.

Como parte de su tesis doctoral en la Universidad de Princeton, Nash demostró ([Na]) que en toda situación de juego no cooperativo existe un punto de equilibrio en el juego, esto es, una elección de estrategias de los jugadores que es la más plausible. La mera descripción del modelo matemático con el que estudiar estas situaciones, así como la introducción de la noción de equilibrio son ya de por sí contribuciones valiosísimas de Nash a la teoría de juegos y la economía, y a las ciencias sociales en general, como escribe Federico Valenciano ([Va]).

> *"En cuanto a la noción de equilibrio, su aportación fundamental, es de nuevo lo más destacable la capacidad de Nash para captar los elementos esenciales de una situación y darles forma precisa en un modelo simple y claro. En este caso para ir al grano y formular en términos absolutamente nítidos el problema básico que entraña la interacción racional: el resultado de acciones racionales en una situación de interdependencia estratégica en la que todos los participantes, igualmente racionales, comparten la información que se incluye en el modelo, debería ser un equilibrio. Si no es así es que alguien no ha hecho lo mejor que podía hacer, lo que no es consistente con la idea de racionalidad".*

La teoría de Nash no nos dice que el punto de equilibrio sea único, ni óptimo, ni deseable, sólo que existe, y que es la situación que con mayor probabilidad va a darse; dicho con otras palabras, hallar el punto de equilibrio de Nash permite a un individuo racional predecir el comportamiento de los otros individuos racionales y, en función de él, hacer su elección.

En su descripción clara y detallada del trabajo de Nash, Valenciano nos explica las dos aportaciones básicas de Nash (su solución al problema del regateo –¿qué valor puede tener para un individuo racional, enfrentarse a otro individuo racional en una situación de regateo, esto es, una situación en la que ambos pueden beneficiarse de la cooperación siempre y cuando logren ponerse de acuerdo?– y su ya mencionada noción de equilibrio no cooperativo), y lo hace de tal manera que el lector pueda apreciar la manera original y directa de pensar de Nash.

> *"En las dos contribuciones brevemente glosadas en las páginas anteriores, hay que insistir en un aspecto que ya se ha comentado en relación con el problema de regateo: la simplicidad de la construcción formal. En ambos casos el genio matemático de Nash se muestra no en la complejidad técnica de los recursos formales puestos en juego, sino en la frescura y capacidad de abstracción para captar lo esencial de una situación y expresarlo con claridad, simplicidad y rigor"* ([Va]).

Un ejemplo curioso que ilustra lo mucho que mejorarían nuestras condiciones de vida si todas estas teorías matemáticas dejasen de ser enseñadas exclusivamente en las escuelas privadas de economía más caras y elitistas del mundo, y pasasen a formar parte de los planes de estudio de todas las escuelas y colegios (públicos y privados) del mundo, es el de los experimentos llevados a cabo con grupos de reclusos en instituciones penitenciarias. A través de pequeñas conferencias, e incluso de mensajes regulares a través de los sistemas de megafonía, se les insiste constantemente en que las estrategias que a la larga producen el mayor provecho individual son las que a la corta producen el mayor provecho colectivo. Vamos, que les están entrenando el discurrir, y dándoles información sobre lo que ya se sabe sobre estrategias de acción gracias a la teoría de juegos. Y parece ser que funciona. Este ejemplo y otros muchos de la utilidad de la teoría de juegos para mejorar la vida cotidiana en las situaciones más diversas pueden encontrarse sin más que introducirse en las páginas de cualquier buscador de internet.

En 1950 A.J. Deutsch publicó en la revista interna de la Universidad de Boston el cuento corto, "Un metro llamado Möbius" (más tarde recogido en la antología [Fa] de relatos matemáticos). La trama es sencilla: el tren 68 de la línea de metro Cambridge-Dorchester desaparece lleno de gente, y la compañía metropolitana de la ciudad de Boston encarga a un joven estudiante de topología que investigue las causas. El joven protagonista descubre que los sucesivos añadidos de vías y líneas habían complicado la red subterránea hasta el punto de que surge en él un bucle sin fin, una banda de Möbius en la que el tren desaparecido estaba condenado a viajar eternamente. Una banda de Möbius es una superficie muy sencilla que puede construirse sin más que tomar una tira larga de papel, girar uno de sus extremos ciento ochenta grados hasta darle media vuelta, y pegarlo con el otro. El resultado es una figura parecida a un anillo plano pero con un bucle y con una sola cara, sin interior ni exterior, no orientable, y así, si deslizamos el dedo a lo largo de la banda desde cualquier punto, al regresar a él la habremos recorrido entera.

Mosquera toma como base el cuento de Deutsch, traslada la historia, ambientada en el Boston de los años cincuenta, a su ciudad natal de Buenos aires y convierte la red metropolitana bonarenense en un laberinto de túneles, que, no por azar, tiene una estación denominada *Borges* cuyo vigilante es ciego ([Mo]). La búsqueda del tren desaparecido por el joven matemático Pratt (otra referencia bibliográfica, esta vez a Hugo Pratt, creador de Corto Maltés: *Tango*), inevitablemente nos lleva a pensar en la terrible historia de los desaparecidos durante la dictadura militar. Como en el relato original, la solución al enigma está en la topología: la aparición de una banda de Möbius en la red metropolitana. Sólo que en este caso tal aparición no es fortuita, sino que ha sido conscientemente diseñada por el viejo maestro de Pratt, también matemático. Pero no desvelemos el final de la historia, pues merece la pena ver la espléndida película de Mosquera.

Guillermo Mosquera

August Ferdinand Möbius nació en 1790 y murió en 1868. Como relata el historiador de las matemáticas John Fauvel ([Fau–1]), en el curso de la vida de Möebius la profesión matemática en Alemania experimentó una transformación drástica: mientras que en 1790 resultaba difícil encontrar un matemático alemán de talla internacional, en 1868 Alemania era ya el centro de trabajo y entrenamiento de muchos de los matemáticos más notorios del mundo, cuya enseñanza e investigación tenía enorme influencia en la actividad matemática del resto del mundo. Muchos son los factores que contribuyeron a este cambio, que tuvo lugar en todos los aspectos de la sociedad alemana y convirtió en pocos años un puñado de estados prácticamente independientes en un imperio unido bajo el poder político y militar de Prusia. Desde el punto de vista de las matemáticas, el proceso ha sido cuidadosamente analizado, descrito y documentado en *Möbius and his band: mathematics and astronomy in nineteenth century germany* ([Fa–2]), uno de los mejores libros de un trozo pequeño de la historia de las matemáticas que conozco.

Quizás lo más interesante para nosotros ahora, sea que la revolución que tuvo lugar en el seno de la comunidad europea de habla alemana a finales del siglo XIX fue una revolución, llamada por algunos neohumanista, que se llevó a cabo desde el sistema educativo a todos sus niveles, y en la que las

August Ferdinand Moebius (1790–1868)

matemáticas, consideradas por los neohumanistas como base insustituible del pensamiento racional y analítico, ocuparon un lugar esencial. En 1806 las tropas francesas vencieron a Prusia y Sajonia; esta derrota, que tuvo un efecto tremendamente traumático en la población de Alemania, curiosamente llevó a un renacimiento de la cultura alemana y a que se renovase la educación y la vida intelectual ([Fau–1] y [Sc]). Hundidos y confundidos, los alemanes decidieron estudiar y aprender, y llevaron a cabo una planeada reforma de la sociedad a través de la educación bajo el lema de Selbstätigkeit, la independencia económica y cultural del individuo. El sistema educativo pasó a convertirse en el eje alrededor del cual se estructuraba el resto de la sociedad, y a los profesores de enseñanza secundaria se les profesionalizó y se les dio un alto prestigio social, disminuyéndoles el número de clases a dar, dotándoles de medios y exigiéndoles combinar la labor en el aula con la investigación, que llevaban a cabo en estrecha colaboración con sus colegas universitarios. De hecho, muchos de los matemáticos alemanes más notorios –Kummer, por ejemplo,– comenzaron su trabajo investigador cuando eran profesores de Instituto. La reforma llegó también a las aulas universitarias, las clases se convirtieron en más científicas y menos dogmáticas y surgió el modelo de seminario, en el que una vez a la semana se ofrecía una alternativa al método usual de aprender escuchando pasivamente al profesor. En el caso de las matemáticas, de los seminarios surgieron magníficos profesores e investigadores.

La profesionalización de los profesores, la institucionalización de las matemáticas como disciplina independiente y el apoyo económico a las nuevas publicaciones desde el Ministerio de Educación –como, por ejemplo, el *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, fundado por Crelle en 1826 y subvencionado por el Ministerio prusiano–, son algunos de los factores que contribuyeron a que en menos de cincuenta años la comunidad matemática alemana ocupase un lugar privilegiado en el mundo. Entre sus miembros estaba Möbius, cuya producción matemática fue lenta, constante y de gran calidad. Descubrió la banda que lleva su nombre, y que es su contribución más famosa, con sesenta y ocho años de edad en 1858 (Johann Benedict Listing la había descubierto independientemente unos meses antes), como consecuencia de una investigación en la geometría de los poliedros que preparaba para presentar a un premio de la Academia de París.

Así pues, a finales del siglo dieciocho la sociedad alemana, derrotada y en crisis, decide estudiar y educarse, un proyecto en el que se da prioridad al conocimiento de las matemáticas; esto tiene como consecuencia un florecimiento de la actividad matemática en Alemania, que a su vez acaba revertiendo en beneficio de esa sociedad ya no derrotada, sino en pleno esplendor, a principios del siglo diecinueve. Un recorrido de ida y vuelta a través de Möbius y su banda que cambió completamente la realidad alemana, y que explica con mucha claridad Milagros Izquierdo ([Iz]). En julio de 2003, Izquierdo, matemática española residente en Suecia, dió una conferencia sobre la banda de Möbius en el curso de verano "Arte y Matemáticas" organizado en Pontevedra por Antonio Costa, profesor de matemáticas de la UNED. En las notas que acompañaban a su ponencia Izquierdo, que lleva años rastreando bandas de Möbius en el arte, la literatura, la industria y la arquitectura, escribe,

> *"La propiedad más interesante de la banda de Möbius en relación con el arte es que no es orientable; dicho con otras palabras, que sólo tiene una cara. Este hecho la ha convertido en uno de los objetos matemáticos más usados fuera del ámbito de las matemáticas: la banda de Möbius ha inspirado a artistas y tiene aplicaciones prácticas en la industria para ampliar la duración de cintas de vídeo, o para reducir el desgaste en cintas transportadoras".*

Las esculturas de Max Bill, los cuentos de A.J. Deutcsh (*A subway named Möbius*, 1950), Lewis Carroll (*Sylvia y Bruno*, 1889) o Juan José Arreola (*Botella de Klein*, 1971) y las composiciones de Nicolas Slonimsky (*Möbius Strip Tease*, 1965, canon para dos voces en el que la música está escrita sobre una partitura rectangular con la que se construye una banda de Möbius que gira interminablemente sobre las cabezas de los cantantes), Alexandr Radvilovich (*Möbus Band*, 1999) o Arnold Schoenberg (*Style and Idea*) son algunos de los tesoros que esconden bandas de Möbius que Izquierdo nos descubre y describe. De entre todos ellos, resultan especialmente inesperados y sugerentes los que vienen de la arquitectura; son estupendos, por ejemplo, los diseños del arquitecto Carlo H. Séquin, así como su descripción de las dificultades que plantea la construcción de edificios con una sola cara([Se]).

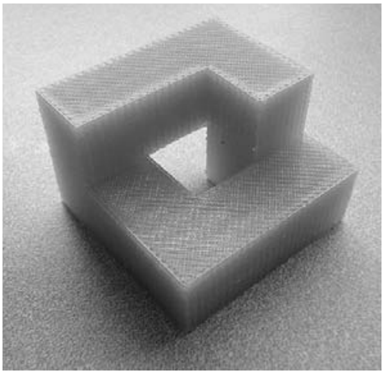
Max Bill (1908-1994), Kontinuität, 1986, Granito (183" x 182 2/3" x 163"), frente al Deutsche Bank de Frankfurt

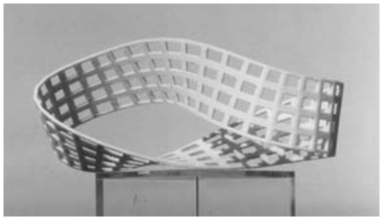
INSTANTÁNEAS 5 Y 6

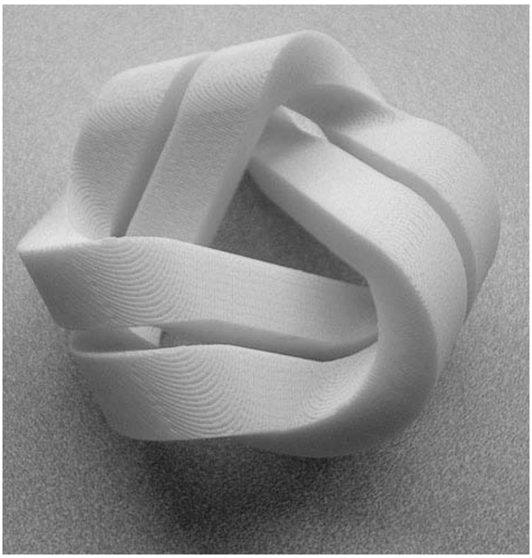
> *"La función de la razón es apoyar el arte de la vida".*
> A.N. Whitehead, en *La función de la razón.*

> *"Hay muchos factores que se oponen a la felicidad. Una de las cosas que se oponen a la felicidad es la preocupación, y a este respecto debo decir que a medida que he ido envejeciendo me he sentido más feliz. Me preocupo mucho menos y he ideado un plan muy útil con respecto a la preocupación que consiste en pensar:* Vamos a ver, ¿qué es lo peor que puede ocurrir? y luego: Bueno, en el fondo dentro de cien años no será tan terrible; probablemente no tendrá la menor importancia. *Cuando logramos convencernos de ello dejamos de preocuparnos tanto. La preocupación procede de no querer afrontar las posibilidades desagradables".*
> Bertrand Russell en una entrevista con W. Wyatt, 1968.

En 1998, a los ochenta y nueve años de edad, la neurobióloga italiana Rita Levi–Montalcini, que obtuvo el Premio Nobel de Medicina en 1986 por el descubrimiento del Factor de Crecimiento Nervioso (conocido como NGF, el *Nerve Growth–Factor* es esencial en la exploración de los mecanismos que rigen el funcionamiento del sistema nervioso y, en última instancia, del cerebro humano) escribió "El as en la manga". En este delicioso libro, la profesora Levi–Montalcini nos explica que, a diferencia de lo que ocurre con otras funciones







Dos esculturas de Carlo H. Séquin:
Moebius Prism (1999), FDM ambar, (1.5” diam), Escher’s Moebius Band II (2001),FDM amarillo, (7” largo y 3” ancho) y Split Moebius Band (1999), FDM amarillo, (3” diam).

fisiológicas y en contra de lo que solemos creer, el cerebro puede seguir funcionando perfectamente incluso a una edad avanzada. En efecto, la neurobiología moderna parece que demuestra que, gracias a la plasticidad neuronal, el cerebro contrarresta la pérdida de células que ocurre con la edad aumentando las ramificaciones en las restantes y utilizando circuitos neuronales alternativos.

> *"Hasta hace pocas décadas, los estudiosos del sistema nervioso estaban de acuerdo con lo que afirmara Ramón y Cajal a principios del siglo XX: ...* las vías nerviosas son fijas, acabadas e inalterables. Todo puede morir, nada puede ser regenerado... *Esto ha dejado de ser un dogma cuando se ha demostrado que los componentes del sistema nervioso periférico y central no están fijados de un modo irreversible en el programa genético, y se adaptan a estímulos ambientales de gran alcance, no sólo en el periodo inicial del desarrollo, terminada la diferenciación, sino también en la fase senil, lo cual es mucho más notable. En la especie humana esta propiedad es fundamental tanto para la restauración de las funciones somáticas como de las que están en el origen de las actividades mentales"*, ([LM], págs. 58–59).

Rita
Levi–Montalcini
(1909–)

Y más adelante nos dice,

> *"En el juego de la vida el as es la capacidad de utilizar las propias actividades mentales y psíquicas, sobre todo en la fase senil... Aunque en el pasado teóricamente todos los individuos de la especie humana los poseían, sólo un número muy reducido estaba en condiciones de utilizarlo.*
>
> *Hoy, en vísperas del tercer milenio, este privilegio está al alcance de todos los ciudadanos de los países democráticos con gran desarrollo industrial y cultural.*
>
> *Pero el uso de esta carta está limitado por factores extrínsecos e intrínsecos ... La causa de carácter intrínseco es la falta de previsión en la juventud y la edad adulta, que impide tener una*

preparación para ejercer actividades alternativas durante la vejez. Esto es debido a que procuramos quitarnos de la cabeza la idea de que algún día deberemos enfrentarnos personalmente a la etapa más temida de la vida, la vejez. Además, el concepto que suele prevalecer es la decadencia de las funciones cerebrales y mentales, algo que haría inútil toda preparación.

Esta opinión parecía avalada por el hecho de que las neuronas (células perennes, incapaces de reproducirse) van muriendo, en un proceso que hoy llamamos muerte programada. Se cree que a partir de los sesenta o setenta años esta disminución numérica es del orden de cientos de miles de células diarias. Una pérdida considerable, que aparentemente haría imposible la actividad creativa a una edad avanzada. Pero si tenemos en cuenta el elevadísimo número de células nerviosas que componen el cerebro, esa pérdida no es tan importante. En realidad el número de células que se pierden en un envejecimiento normal no es tan elevado como se suele creer... Las células que permanecen pueden aumentar sus ramificaciones dendríticas y fortalecer los circuitos cerebrales a nivel sináptico. En la edad senil se sigue manteniendo esa capacidad del cerebro de Homo sapiens, la misma que tenía en etapas anteriores, y a la que se refiere el matemático E. De Giorgi como ... la capacidad de pensar el infinito, aún reconociendo en las limitaciones de cada cual la propia finitud*”.*

Cuando encaramos el tema de la vejez solemos mezclar la falta de información, el miedo a la muerte y las ideas preconcebidas, advierte Levi–Montalcini, y eso nos impide aprender a afrontarla con lucidez y utilizar de la mejor manera posible las herramientas con las que contamos para ello: el cerebro y la mente. Conocer la relación que existe entre el cerebro y la mente es el problema número uno en la neurobiología, y se sabe que la actividad creativa es clave en esta relación. Por eso, la creatividad, especialmente en los ámbitos artísticos y científicos, ha sido y es ampliamente estudiada por los neurobiólogos. Las conclusiones a las que han llegado son sorprendentes:

“La creatividad –cualquiera que sea la manera de entenderla– es máxima en el periodo de desarrollo pleno de las actividades mentales, disminuye en las décadas siguientes y decae poco a poco en la edad senil, pero puede cobrar nuevos bríos en este último periodo vital. Esta propiedad de las actividades cerebro–mentales no se limita a personajes fuera de lo común... sino que es propia de todos los miembros de la especie humana cuyas condiciones ambientales favorables permitan y no inhiban esta facultad”, ([LM], pág. 77).

Los neurobiólogos nos cuentan que si no sólo queremos que nuestra cabeza se mantenga en forma y funcione en la vejez, sino de hecho suplir con ella el desgaste físico de nuestro organismo propio del envejecimiento, no nos queda más remedio que ejercitar la capacidad creativa del cerebro a lo largo de toda la vida. Y nos hablan de dos herramientas especialmente efectivas en este entrenamiento mental: la ciencia y el arte. Me gustaría terminar describiendo algunos ejemplos concretos de ejercicios teóricos que, como *gimnasia de la mente*, pueden llevarse a cabo con las matemáticas y el arte.

Cada vez hay más información sobre cómo aprender a enfrentarnos con el inevitable deterioro físico de nuestro organismo –montar en bici, nadar, pasear, hacer yoga, coser, jugar al golf...–. ¿Por qué, entonces, no tomamos las mismas precauciones con respecto al evitable deterioro mental? Durante muchos años pensé que el hecho de que en el tema de la cabeza sigamos funcionando en base a supersticiones, se debía al tremendo impacto en nuestra sociedad de las ideas de los neurobiólogos de principios del siglo XX, como Ramón y Cajal. Luego llegué a los Estados Unidos a hacer un doctorado en matemáticas, y comprobé con estupefacción que la comunidad matemática estadounidense está presa del mito que nos dice que la actividad matemática es una actividad mental propia, exclusivamente, de la juventud. ¿Cómo es posible que la evidencia empírica no baste para tirar por tierra esta creencia, y que gentes tan listas crean a pies juntillas semejante estupidez? El número de personas dedicadas a la investigación matemática que han hecho un trabajo tan válido antes de los treinta como después de los cuarenta, sumado al de quienes han llevado a cabo su mejor labor en la segunda mitad de su vida, iguala, si no supera, el de quienes pasados los treinta han dejado de producir. Sin embargo, se siguen tomando por ciertas las palabras de G.H. Hardy ([Ha]):

> *"Ningún matemático debe olvidar que las matemáticas, más que cualquier otro arte o ciencia, son un asunto de jóvenes".*

¿Cómo es que siguen pesando más las palabras de Hardy –matemático inglés de principios del siglo XX, tan influenciado por las ideas de sus coetáneos biólogos como por sus condiciones de vida– y la figura de Isaac Newton, que los ejemplos de Carl F. Gauss, August F. Möbius, Karl T.W. Weierstrass, Felix Hausdorff, Emmy Noether y André Weil, o los más actuales de Jean-Pierre Serre, Barry Mazur, Andrew Wiles, Ken Ribet, Marie-France Vigneras, Carl Pomerance, H.W. Lenstra, Pierrette Cassou-Nogues, Serge Lang o Pilar Bayer, por citar sólo algunos nombres y sólo de la teoría de los números? Nunca he logrado entenderlo.

Salvo en el caso de Gauss, que abandonó voluntariamente la actividad investigadora a los cincuenta años, el resto de matemáticos que Hardy menciona para avalar su teoría son hombres que murieron jóvenes, en plena actividad profesional, y nunca sabremos si la hubiesen continuado o no de haber seguido con vida. Galois murió a los ventiún años, Abel a los veintisiete, Ramanujan a los treinta y tres, y Riemann a los cuarenta.

Al ser mujer, esta es una cuestión a la que siempre he prestado atención, pues desde el primer momento he formado parte de un colectivo que no casaba con la descripción de Hardy. El estilo de vida que aún impera en nuestras sociedades y la maternidad hacen que muchas mujeres matemáticas lleven a cabo sus trabajos más importantes ya de adultas, o bien que tengan un periodo inicial verdaderamente brillante, reduzcan su actividad científica para tener hijos o cuidar de sus mayores, y retomen de nuevo la investigación con excelentes resultados pasados los cuarenta años. Y hay también muchas mujeres matemáticas que han mantenido el mismo nivel de actividad a lo largo de toda su vida profesional, como fue el caso de Emmy Noether. Caer en la cuenta ya desde estudiante de que había muchas excepciones a la supuesta regla formulada por Hardy, me ha hecho prestar atención cuidadosa a la cuestión de la edad a lo largo de mi vida como profesional de la matemática, y la conclusión a la que he llegado es que las palabras de Hardy no son más que una opinión bastante subjetiva. No se trata en absoluto de la descripción de una regla general: la mayor parte de los matemáticos varones –únicos sobre los que habla Hardy y, por ello, únicos a los que yo me referiré en estas líneas– mantienen una actividad investigadora activa toda su vida.

Excepcionalmente alguno de los grandes sabios matemáticos ha comenzado su carrera ya de adulto, pasados los cuarenta, como es el caso de Weierstrass o Hausdorff. Pero lo usual es que empiecen de jóvenes y lleven a cabo trabajos de calidad a lo largo de toda su vida. Hay otro tipo de excepciones, formada por aquellos que consiguen resultados importantísimos en su juventud y luego paran. La mayor parte de estos matemáticos trabajan en combinatoria y cuentas, le ponen mucho entusiasmo de jóvenes, y luego se aburren y lo dejan; los menos, provienen de campos más teóricos, y por lo que yo veo, el que paren en un momento dado es absolutamente normal y predecible. Son hombres que han pasado su primera juventud totalmente aislados, y durante muchos años han puesto toda su atención en las matemáticas; de repente consiguen un resultado fundamental, y esto les abre de la noche a la mañana las puertas del mundo exterior, un mundo que hasta el momento desconocían. No es de extrañar que algunos decidan adentrarse en el universo mortal que acaban de descubrir. Han pasado tanta carencia de experiencias no mentales, que ahora todas les parecen pocas. Pero los unos y los otros, los que empiezan tarde y los que abandonan pronto, son casos excepcionales. Lo usual, y aquí vuelvo a hablar tanto de hombres como de mujeres, es mantener el mismo ritmo toda la vida, tanto entre matemáticos con un motorazo Ferrari en la cabeza, como los que no contamos más que con el motorcillo de un Seat.

En cualquier caso, yo tuve la suerte de contar siempre con amigos también fuera de la comunidad matemática, y uno de ellos (sin saber que con ello alimentaba mis inclinaciones heréticas hacia el dogma de la necesaria juventud para hacer matemáticas) me regaló hace muchos años un ejemplar de los "Apuntes para un tratado de cocotología" de Miguel de Unamuno ([U]). Lo que no aprendí de mis maestros y amigos matemáticos lo aprendí con aquel libro: las matemáticas son también un juego de viejos, como lo era la afición de mi abuelo por hacer pajaritas de papel mientras disolvía en la boca un caramelo de La Pajarita, aquella tienda situada en la Puerta del Sol de Madrid. Don Miguel, adelantándose a los descubrimientos científicos, estaba convencido de que la cabeza, como el cuerpo, hay que seguir moviéndola incluso de viejo, y sabía que ninguna herramienta mueve tanto la cabeza como las matemáticas. Ahora bien, él era un hombre de letras. ¿Qué tienen en común los hombres de letras con geómetras y topólogos? Sin duda alguna, el uso del papel, debió pensar Unamuno –en aquel entonces no había ordenadores–; así es que, ¿qué mejor manera para llevar hasta el hogar del jubilado la geometría y la topología que a lomos de una pajarita?

La cocotología de España y el *origami* del Japón son ejemplos de papiroflexia, el arte de hacer figuras reconocibles utilizando papel plegado. Para entender cómo y qué tipo de matemáticas surgen en la papiroflexia hay dos caminos: ponerse a doblar figuritas, o leer los textos escritos por expertos. En julio de 2003, y durante el curso de verano ya mencionado "Arte y matemáticas", José Ignacio Royo Prieto, profesor del Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Santiago de Compostela, dio una espléndida conferencia sobre las matemáticas de la papiroflexia. En las notas con las que acompañó su ponencia ([Ro]), Royo Prieto nos explica de forma clara, precisa, rigurosa y muy entretenida, tres aspectos de la matemática a la que nos lleva el vuelo de las pajaritas: la papiroflexia modular –que construye poliedros–, la geometría plana de los puntos que se pueden construir doblando papel y la manera en la que los mejores plegadores del mundo utilizan las matemáticas para diseñar sus modelos.

Las disertaciones de mi abuelo sobre cocotología tenían lugar en el curso de larguísimos paseos durante los cuales con frecuencia declamaba en voz alta poemas de Rubén Darío. Yo sobrellevaba la vergüenza de ir a su lado haciendo como que no le conocía e intentando decidir qué golosina elegiría en La Pajarita, La Violeta, Lhardy, Casa Mira o Juncal cuando acabase aquel tormento, pues mi abuelo, que, aunque estuviese como una cabra, de tonto no tenía un pelo, sabía muy bien qué prometerme para mantenerme a su vera. Desde Casa Mira, unas veces retrocedíamos de nuevo hasta la Plaza de Canalejas, bajábamos por la calle de Alcalá hasta Cibeles, y desde allí nos dirigíamos a Juncal. Otras veces seguíamos por la Carrera de San Jerónimo hacia abajo hasta la Plaza de Neptuno, y entrábamos al Museo del Prado a ver *La Anunciación* de Fra Angelico, uno de nuestros amores compartidos.

Aquellos paseos con mi abuelo crearon en mí el hábito de visitar el Museo del Prado al menos dos veces al mes, costumbre que mantuve mientras era estudiante en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid. Fue durante aquellos años de estudiante que caí en la cuenta de que cuando recorremos un museo de pintura –el Museo del Prado por ejemplo– y miramos los cuadros hechos en los diversos períodos teniendo *in mente* las matemáticas que se hacían en ese momento, surge un claro paralelismo entre las trayectorias seguidas por matemáticos y pintores en sus descripciones del mundo que nos rodea. Este trazo común que encontramos en la mirada matemática y la mirada pictórica, nos permite a veces utilizar la pintura para ilustrar la evolución de un concepto matemático determinado, o llegar a entender la estrategia seguida en la resolución de un problema matemático específico. También puede servirnos para, de manera recíproca, mirar cuadros concretos y entender por qué fueron pintados como fueron pintados. Veamos algunos ejemplos de estas maneras de mirar.

“Espacio y tiempo. Términos usados en filosofía para describir la estructura de la naturaleza. A veces son descritos como contenedores en los que ocurren todos los sucesos y procesos naturales, y a veces como relaciones que conectan tales sucesos”. (Enciclopedia Collier’s).

La segunda frase en esta definición nos dice que espacio y tiempo son unas veces concebidos como contenedores, y otras como relaciones. Curiosamente, estas dos palabras, “contenedor” y “relación” describen, respectivamente, la idea de espacio que encontramos en el siglo XVIII, cuando la noción de espacio se menciona explícitamente por primera vez en matemáticas, y la idea de espacio en las matemáticas contemporáneas.

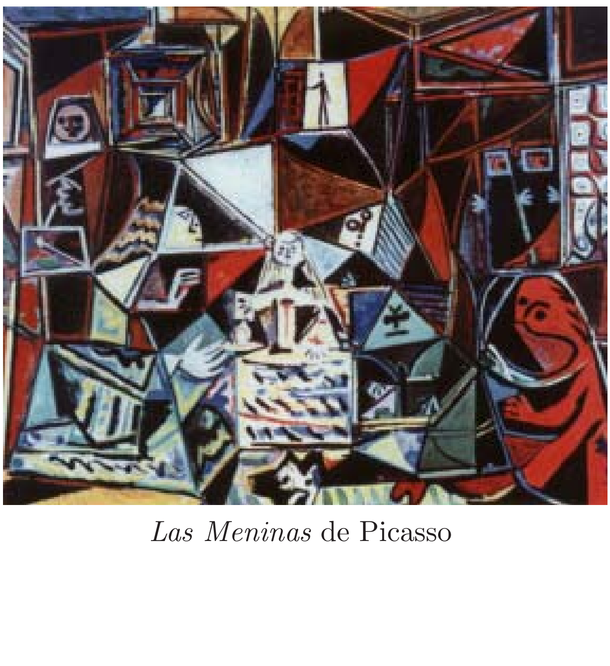
La primera noción matemática de espacio reflejaba cómo se concebía hace dos siglos el espacio físico, el espacio donde tienen lugar los fenómenos físicos. En aquel entonces, los matemáticos asociaban las nociones de espacio y Universo físico y creían, como todavía muchos creen hoy, que el modelo que describe el espacio como una enorme caja de zapatos donde flotan como bolas de navidad los objetos, es una reproducción exacta del universo que nos rodea.

Hoy en día, sin embargo, en matemáticas se describe un espacio (para empezar ya no es “el espacio” sino “un espacio”) como una entidad abstracta que consta de dos cosas: un conjunto cualquiera de objetos y una red de relaciones entre estos objetos. Se podría decir que antaño, el espacio entre dos personas era la parte del enorme ámbito cúbico que las separaba, mientras que hoy, sería el fruto de las relaciones que pueda haber entre ellas.

El salto de la caja a la red en el imaginario matemático del espacio, refleja un enorme cambio en la manera de mirar el mundo, física y conceptualmente, que de hecho podemos reconocer en todos los ámbitos de nuestra cultura. Es sorprendente y hermoso reconocerlo en el proceso seguido por los pintores, un proceso que nos lleva, por ejemplo, desde el espacio cúbico impecablemente representado en *Las meninas* de Velázquez (1656, Museo del Prado, Madrid) hasta el espacio red de relaciones de *Las meninas* de Picasso (1957, Museo Picasso, Barcelona).

En el lienzo de Velázquez el espacio entre las distintas figuras es un contenedor cúbico externo a ellas, parte de la habitación en la que la escena tiene lugar. Una habitación que tal y como está representada en el cuadro, no cambiaría nada si las personas retratadas no estuviesen en ella. Sin embargo, el espacio entre estas mismas figuras en el cuadro de Picasso es una red formada por las relaciones visuales y de posición entre ellas: la manera en la que cada persona ve a la otra y la posición en la que cada una de ellas está colocada respecto a la otra, da lugar a la red de triángulos y rectángulos que como estructura espacial conecta unas con otras. La escena está compuesta por múltiples relaciones locales que Picasso representa mediante una estructura espacial formada por figuras geométricas básicas como triángulos y rectángulos. Podríamos sacar a las personas de la escena pintada por Velázquez sin necesi-

Las Meninas de Velázquez



Las Meninas de Picasso

dad de cambiar el resto de la habitación, mientras que si hiciésemos lo mismo en el lienzo de Picasso, habría que pintar de nuevo todo el cuadro. (Un estudio más detallado de la evolución del concepto de espacio en matemáticas y pintura puede encontrarse en [Co–1] y [Co–2]).

Acabamos de comprobar cómo *Las meninas* de Velázquez y *Las meninas* de Picasso pueden ser utilizadas para ilustrar la evolución seguida por la noción matemática de "espacio" entre los siglos XVII y XX. En su análisis del cuadro de Pablo Picasso, *Maya con muñeca*, Laura Tedeschini–Lalli y tres de sus alumnas en la Escuela de Arquitectura de la Universidad de Roma Tres ([CMS–1], [CMS–2], [TL–3]), desarrollaron el método complementario: mirar un cuadro como quien mira un teorema escrito sobre una pizarra y, sin prestar atención más que a lo que se ve en el lienzo, y sin más herramientas que las matemáticas del momento, intentar entender por qué el cuadro fue pintado como fue pintado.

El año 2000, último año del siglo veinte, fue nombrado por la UNESCO Año Internacional de las Matemáticas. Con este motivo presenté un pequeño ensayo a una convocatoria del Consejo Social de la Universidad Complutense de Madrid, "Un paseo por el siglo veinte de la mano de Fermat y Picasso" ([Co–3]). ¿Por qué Fermat, por qué Picasso? Porque la solución de Andrew Wiles al Último Teorema de Fermat, el problema matemático más conocido, recorre antológicamente las distintas herramientas matemáticas de la teoría de los números desarrolladas en el siglo XX, y porque la obra de Picasso, el pintor español más notorio, recorre antológicamente las distintas herramientas pictóricas desarrolladas en el siglo XX. Esta característica común al trabajo de Wiles y de Picasso me permitió construir un puente mental entre la pintura y la matemática del siglo XX. Utilizando los cuadros de Picasso como ventanas a través de las cuales mirar, e introduciendo algunas voces amigas como binoculares[1], analicé y describí la estrategia seguida por Andrew Wiles para demostrar el famoso teorema matemático.

Epílogo

> *"En condiciones normales las capacidades mentales, y entre ellas la de la creatividad en todos los campos del conocimiento humano, están reforzadas por el uso continuo de las funciones cerebrales y el interés incesante por lo que nos rodea, ya sea el mundo inorgánico o el orgánico, y en particular por asuntos dirigidos a mejorar la calidad de vida a escala global, en un momento tan crítico como el que se perfila en el umbral del tercer milenio"*.
>
> Rita Levi–Montalcini, [LM]

[1]Por un desafortunado error, en la edición que de este trabajo hizo el Consejo Social de la UCM ([Co-3]) la voz de L. Tedeschini-Lalli, aparece recogida pero no reconocida. Tanto la referencia a los atlas geográficos de la p. 58, como el juego cinematográfico de imágenes de la p. 78 están extraídos de una versión preliminar del trabajo ([TL-3]) de Tedeschini-Lalli, por lo que debieran aparecer entre comillas y debidamente referenciados.

"La cuestión principal para mí no es tanto explicar que dos teoremas no son lo mismo, o que la ciencia y el arte son empresas muy distintas, sino por qué el problema de sus semejanzas y diferencias se debería discutir como tal. ¿Por qué, como planteaba al comienzo de este artículo, habría de pensar alguien que el arte y la ciencia, el arte visual y las matemáticas, son diferentes o similares? La pregunta tiene dos caras. Una está ligada a la construcción misma del arte y la ciencia como diferentes en primer lugar, un prerrequisito necesario para considerar cualquiera de ellos como "el paraíso" perdido del otro, y la dicotomía como una laguna mortal de nuestra civilización. La otra es la valoración de la identidad en vez de la diferencia.

Ambos aspectos son profundamente políticos. El problema de "las mujeres y la ciencia", entre otros, debería hacernos particularmente sensibles a los efectos de un dualismo crudo, incluso cuando el discurso es de reconciliación. En algunos casos, el tratar de borrar límites (inexistentes) nos hace pronunciar las palabras que dieron origen a estos límites, nos fuerza a repetir los gestos que los fortalecieron. Las ciencias y las artes no son lo mismo, pero tampoco lo son las matemáticas y la física, la biología y la química o la pintura y la arquitectura. Como no lo son la física de la cola de pegar y la teoría cuántica de campos, o la música de cámara y la ópera. ¿Por qué deberíamos separar estos temas en dos categorías puras, incluso si después sugerimos un marco para unirlas? ¿Para llenar entonces una con emociones y otra con razón? ¿Una con poder y la otra con convicción? Y por cierto ¿de qué manera? Tales clichés apoyan el status quo.

De nuevo, escoger el enfatizar la identidad más que la diferencia, o al revés, no es una elección políticamente neutral. Cuando los algebristas franceses del siglo dieciséis escogieron consolidar su empresa humanística inventando un antepasado griego, Diofanto, para su disciplina, el álgebra, al tiempo que se distanciaban de sus inmediatos predecesores e inspiradores, los matemáticos islámicos, estaban simultáneamente muy comprometidos con los complicados asuntos de las leyes romana y francesa y la constitución de un estado moderno. Es de esperar que las representaciones colectivas también jueguen un papel decisivo en nuestro deseo de reconciliar dos culturas que obstinadamente construimos como separadas en el proceso".

Catherine Goldstein ([Go]).

Referencias

[CMS–1] A. Carlini. A. Marinelli y V. Sabatini, *Locale/globale* en "Spazi matematici e spazio pittorico, exposición; Facultad de Arquitectura de la Universidad Roma Tre, dicembre 1997. Michele Furnari, comisario.

[CMS–2] A. Carlini. A. Marinelli y V. Sabatini, *Local/global*, en Biennale Internazionale dei giovani architetti. Exposición con motivo del Premio Internacional de Arquitectura "Sarajevo 2000", Roma, Mattatoio, junio 1999.

[Co–1] Capi Corrales Rodrigáñez, *Contando el espacio*, ediciones despacio–mobcoop ediciones, Madrid 2000.

[Co–2] Capi Corrales Rodrigáñez, *Del espacio como contenedor al espacio como red*, en [Em–1], 123–138.

[Co–3] Capi Corrales Rodrigáñez, *Un paseo por el siglo XX de la mano de Fermat y Picasso*, Consejo Social Universidad Complutense de Madrid 2001.

[Co–4] Capi Corrales Rodrigáñez, *Buceando en las matemáticas*, Boletín de la Institución Libre de Enseñanza 44 (2001), 7–21.

[Go] Catherine Goldstein, *Las matemáticas, la escritura y las artes visuales*, en Conectando Creaciones, Centro Galego de Arte Contemporáneo 2000, 289–321.

[Ha] G.H. Hardy, *Apología de un matemático* (1940), Nívola 1999.

[Em–1] Michele Emmer, ed., *Matematica e Cultura 2000*, Springer–Verlag Italia 2000.

[Em–2] Michele Emmer, ed., *Matematica e Cultura 2001*, Springer–Verlag Italia 2001.

[Em–3] Michele Emmer, *Il nastro di Moebius: dall'arte al cinema*, en [Em–1], 147–152.

[Fa] Cifton Fadiman, *Fantasia Mathematica*, Simon & Schuster 1958.

[Fau–1] John Fauvel, *A Saxon mathematician*, en [Fau–2], 1–19.

[Fau–2] John Fauvel, Raymond Flood y Robin Wilson eds., *Möbius and his band: mathematics and astronomy in nineteenth century Germany*, Oxford U.P. 1993.

[He] Linda D. Henderson, *The Fourth Dimension and Non–Euclidean Geometry* in Modern Art, Princeton UP, 1983.

[Ib] Raúl Ibáñez, *Un paseo por la Geometría y Topología*, notas para el curso 1999–2000, Universidad del País Vasco 1999.

[Iz] Milagros Izquierdo, *La banda de Möbius*, notas para una conferencia dada durante el curso Arte y Matemáticas organizado por Antonio Costa, UNED, Pontevedra 2003.

[Le–1] CLAUDE LÉVI–STRAUSS, *Las estructuras elementales del parentesco*, Paidós 1969.

[Le–2] CLAUDE LÉVI–STRAUSS, *Myth and Meaning*, University of Toronto Press 1978.

[LM] RITA LEVI MONTALCINI, *El as en la manga; los dones reservados a la vejez*, Crítica 1999.

[Mo] GUSTAVO MOSQUERA, *Alcune riflessioni sulla creazione di "Moebius"*, en [Em–1], 153–158.

[Na] JOHN NASH, *Non–cooperative games*, Ann. Math. 54 (1951), 286–295.

[Ro] JOSÉ IGNACIO ROYO PRIETO, *Matematicas y Papiroflexia*, Sigma 21 (2002), 175–192.
`http://www.berrikuntza.net/edukia/matematika/sigmaaldizkaria/sigma_21/11-MATEM.PDF`

[Sa] FERNANDO SAVATER, *Mira por dónde. Autobiografía razonada*, Taurus 2003.

[Sc] GERT SCHUBRING, *The German mathematical community*, en [Fau–2], 21–33.

[Se] CARLO H. SEQUIN, *A Moebius Building for CS*, notas para un curso dado en la primavera de 1995,
`www.cs.berkeley.edu/ sequin/moebius/moebius.html`

[TL–1] LAURA TEDESCHINI LALLI, *Mira a tu alrededor a medida que avanzas: Lentes abstractas, encrucijadas concretas*, en [Co–1], 9–11.

[TL–2] LAURA TEDESCHINI LALLI, *Matematica e Musiche: un modello per gli strumenti musicali di bronzo*, en [Em–1], 273–284. Vídeo complementario: L. Tedechini Lalli, Forgiare i Suoni, Universitá Roma Tre.

[TL–3] LAURA TEDESCHINI LALLI, *Locale/globale: guardare Picasso con sguardo "riemanniano"* en [Em–2], 223–237.

[U] MIGUEL DE UNAMUNO, *Apuntes para un tratado de cocotología*, Biblioteca Almacenes Generales de Papel, 1969.

[Va] FEDERICO VALENCIANO, *J.F. Nash: Un matemático Nobel de Economía*, LA GACETA DE LA RSME, Vol. 5, 3 (2002), 578–587.

[We–1] ANDRÉ WEIL, *Sur l'ètude algébrique de certains types de lois de mariage*, apéndice a la primera parte de [Le–1], 278–285; también en André Weil, *Ouvres Scientifiques* [1949–a], Springer–Verlag, 1980, 279–285.

[We–2] ANDRÉ WEIL, *Recuerdos de un aprendizaje*, Nívola 2003.

Capi Corrales Rodrigáñez
Departamento de Álgebra
Universidad Complutense de Madrid
Correo Electrónico: `capi_corrales@mat.ucm.es`