

El infinito¹

por

Thomas Jech

Hasta el siglo XIX el estudio del infinito era dominio exclusivo de filósofos y teólogos. Para los matemáticos, aunque el concepto de infinito era crucial en las aplicaciones del cálculo y las series infinitas, el infinito mismo era (parafraseando a Gauss) simplemente “una forma de hablar”. De hecho, los matemáticos del siglo XVIII, a pesar del uso frecuente de sucesiones infinitas y de infinitesimales, no tuvieron una necesidad verdadera de estudiar el concepto de infinito en sí.

El uso creciente de funciones abstractas de variable real o compleja y la emergente teoría de los números reales en el trabajo de Cauchy, Weierstrass y Dedekind, condujo a la necesidad de utilizar el infinito no solo como “una forma de hablar” sino que hubo que introducir en el quehacer matemático el concepto de conjunto infinito.

El primer matemático que estudió los conjuntos como objetos de una teoría matemática fue Bernhard Bolzano en la década de 1840. Dió un argumento filosófico convincente para la existencia de conjuntos infinitos y también fue el primero en formular de forma explícita el concepto de correspondencia uno a uno entre conjuntos. Parece que Bolzano no estaba al tanto de la posibilidad de que existiesen conjuntos infinitos de distintos tamaños y que (como algunos historiadores creen) se imaginaba un universo matemático donde todos los conjuntos infinitos eran numerables. Aunque algunas de sus ideas estaban claramente por delante de su tiempo, él consideraba paradójico el hecho de que el conjunto de los enteros positivos se pueda poner en correspondencia uno a uno con un “subconjunto más pequeño”, un hecho que ya había sido señalado por Galileo siglos antes.

Fue Georg Cantor en la década de 1870 quien se dio cuenta de la importancia de las correspondencias uno a uno y quien se embarcó en un estudio sistemático de los conjuntos abstractos y de los números cardinales y ordinales. También es suya la primera aplicación de los métodos teórico conjuntistas. Concretamente, su demostración “no constructiva” de la existencia de números trascendentes. La importancia de la demostración de Cantor radica en el hecho de que emplea, para su prueba de la no numerabilidad de

¹Este artículo es la traducción al español de: T. Jech, “The infinite”, *Jahrbuch der Kurt Gödel Gesellschaft*, (Wien, 1991) 36–44. Queremos expresar nuestro sincero agradecimiento no sólo a la *Sociedad Kurt Gödel* sino al autor, T. Jech, por habernos concedido su permiso para la traducción, que ha sido realizada por J. M. Almira. También agradecemos al Prof. T. Jech que nos haya concedido la posibilidad de incluir algunas referencias bibliográficas al final del artículo.

$\mathbb{R}$, la idea de que *toda* sucesión acotada creciente de números reales posee una cota superior mínima. Esta asunción está ligada a la concepción de los números reales como cortes de Dedekind en $\mathbb{Q}$, o como límites de sucesiones de Cauchy de números racionales, o como expansiones decimales infinitas. Estos tres posibles enfoques son (en cierto sentido) equivalentes y todos requieren la existencia de conjuntos infinitos arbitrarios de enteros.

Muy pocos matemáticos ponen objeciones a la idea de un conjunto arbitrario de números enteros. Argumentaremos posteriormente que la idea de la existencia de “grandes cardinales”, que algunos matemáticos encuentran discutible (la “tierra de nunca-jamás” en palabras de un detractor) no es conceptualmente distinta de la idea de Cantor, que es inherente a su demostración.

Una pregunta natural que surge de la teoría de números cardinales de Cantor es la siguiente: ¿Existen conjuntos de números reales que son no numerables y tampoco son equivalentes en cardinalidad al conjunto de todos los números reales? La conjetura de que tales conjuntos no existen ha llegado a conocerse como la *Hipótesis del Continuo*. Hilbert le concedió tal importancia a esta cuestión que la colocó en lo más alto de su famosa lista de problemas de 1900.

El problema del continuo ha sido eventualmente resuelto de una forma no tradicional. Se demostró que la hipótesis del continuo no es demostrable ni refutable, siendo por tanto *independiente*.

Para demostrar que un enunciado matemático es independiente uno debe especificar un sistema de postulados, los axiomas de la teoría, que luego demuestra son insuficientes para refutar el enunciado. Por ejemplo, el postulado de las paralelas es independiente del resto de los postulados de Euclides. La demostración de consistencia se realiza exhibiendo *modelos* (como el modelo de Bolyai-Lobachevsky de Geometría no Euclídea). Es por tanto claro que la afirmación de que la hipótesis del continuo es independiente requiere que especifiquemos el sistema axiomático.

Existe una razón de mayor peso para la axiomatización de la teoría de conjuntos. Excepto unas pocas excepciones sin importancia, todos los argumentos y conceptos matemáticos se pueden, en principio, reducir a conceptos y enunciados formalizados en el lenguaje de la teoría de conjuntos. Así, un sistema axiomático para la teoría de conjuntos es de hecho un sistema axiomático para todas las matemáticas.

La axiomatización de la teoría de conjuntos basada en la “definición” de Cantor de conjunto resulta ser inconsistente por razones bastante triviales. (La idea es considerar como conjuntos todos los objetos que verifican una “propiedad” arbitraria. Este enfoque es claramente insostenible, como queda ejemplificado por el “conjunto”

$$\{a : a \notin a\},$$

cuya existencia implica una contradicción lógica).

Desde la década de 1920, el sistema axiomático para la teoría de conjuntos que ha sido ampliamente aceptado es la teoría axiomática de Zermelo-Fraenkel

(ZF). Consta de varios axiomas (y esquemas axiomáticos) que abarcan todos los usos de los conjuntos en matemáticas. Esta teoría axiomática es aceptada casi universalmente como el fundamento lógico de las matemáticas actuales.

La mayoría de los axiomas de Zermelo-Fraenkel son principios constructivos que simplemente formalizan ciertas manipulaciones con conjuntos. Las dos excepciones notables son *el axioma del infinito* y *el axioma de elección*.

El axioma del infinito postula la existencia de un conjunto infinito o, lo que es equivalente, la existencia del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales. Este axioma es, por supuesto, la esencia de la teoría de conjuntos. Si reemplazamos el axioma del infinito por su negación, obtenemos una teoría equivalente a la *aritmética de Peano*, la teoría axiomática de la teoría elemental de números.

Históricamente, el axioma más importante de ZF es el axioma de elección. A diferencia de los otros axiomas, es altamente no constructivo, ya que postula la existencia de funciones de elección sin proporcionar ninguna descripción concreta de tales funciones. Fue introducido por Zermelo en su demostración de la *buena ordenación*, y es equivalente al principio que garantiza que *todo conjunto* puede ser bien ordenado. Como parece imposible definir un buen orden para el conjunto $\mathbb{R}$, entre otros, este principio sufrió una violenta oposición por algunos matemáticos de la primera mitad de este siglo².

Algunas de las objeciones son bastante comprensibles a la luz de consecuencias del axioma de elección como la descomposición paradójica de Banach-Tarski de la bola unidad. Debería observarse que el axioma de elección es independiente del resto de axiomas de ZF (gracias al trabajo de Gödel y Cohen), lo que coloca la teoría de conjuntos en una situación bastante similar a la de la Geometría, Euclídea versus No-Euclídea. Desde el punto de vista formalista, no hay diferencia entre aceptar o no el axioma de elección. A la vista de su utilidad para el álgebra y el análisis, la opinión que prevalece es en favor del axioma. (Me gustaría hacer notar que incluso una afirmación tan inocua como que “la unión de un conjunto numerable de conjuntos numerables es numerable” requiere utilizar el axioma de elección).

Es de estos axiomas de Zermelo-Fraenkel de los que se ha probado la independencia de la hipótesis de continuo. Primero, en 1938, Kurt Gödel construyó un modelo de la teoría de conjuntos (el “universo construible”) en el que la hipótesis del continuo se satisface. El modelo de Gödel es canónico. Es el menor modelo posible, al cual debe contener cualquier otro modelo (que contenga todos los ordinales). En 1963, Paul Cohen descubrió un método para construir “extensiones genéricas” de los modelos de teoría de conjuntos, incluyendo modelos en los que la hipótesis del continuo no se satisface. El método de Cohen resultó ser bastante general y derivó en cierto número de demostraciones de independencia. Sucede que varias conjeturas en diferentes áreas de las matemáticas no se pueden decidir sobre la base de los axiomas de

²El autor se refiere, por supuesto, al S. XX, ya que el artículo fue publicado originalmente en 1991. (N. del Traductor).

Zermelo-Fraenkel, y han sido demostradas independientes mediante el método de Cohen. (Además de la hipótesis del continuo, mencionamos el Problema de Suslin, la Conjetura de Borel, el Problema de Whitehead, y la Conjetura de Kaplansky).

A la vista de la aparente incompletitud de los axiomas de Zermelo-Fraenkel, una sugerencia razonable surge por sí misma, la de encontrar un sistema completo de axiomas, en el que todo enunciado de las matemáticas se pueda decidir formalmente. Este era el llamado *Programa de Hilbert*. Los dos *Teoremas de Incompletitud* de Gödel fueron un disparo mortal contra este programa.

El Primer Teorema de Incompletitud demuestra, efectivamente, que no hay esperanza para una axiomatización completa de las matemáticas. Establece que toda teoría axiomática que incluya la aritmética básica es incompleta (si es consistente). En particular, tanto la aritmética de Peano como la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel son incompletas y permanecerán incompletas incluso si añadimos más axiomas.

La demostración de Gödel del Teorema de Incompletitud proporciona una afirmación indecidible pero, a diferencia de lo que sucede con la Hipótesis del Continuo en teoría de conjuntos, el enunciado de Gödel no es particularmente significativo. Proporciona el punto de partida para la búsqueda de enunciados sencillos de comprender en el lenguaje de la aritmética que sean independientes de la aritmética de Peano. Tales enunciados se han encontrado, por Harrington y Paris. Sus ejemplos son principios combinatorios, expresables en el lenguaje de la aritmética, y verdaderos (i.e., demostrables en teoría de conjuntos) pero indemostrables en la aritmética de Peano. Queda por ver si alguna de las conjeturas que aún están por demostrar en teoría elemental de números podrían quizás ser ejemplos de enunciados indecidibles.

El Segundo Teorema de Incompletitud ensombrece todas las esperanzas de que el axioma del infinito se pueda justificar jamás por medios elementales. El teorema establece que en toda teoría axiomática que incluya la aritmética de Peano, la afirmación de que la misma teoría es consistente³, es indemostrable (si la teoría es consistente). Por tanto, la aritmética de Peano no puede demostrar su propia consistencia, y tampoco puede hacerlo la teoría de Zermelo-Fraenkel. Por otra parte, el axioma del infinito proporciona, en teoría de conjuntos, una forma para demostrar la consistencia de la Aritmética (o, de la teoría de conjuntos, excluyendo el axioma del infinito).

Utilizando el conjunto infinito $\mathbb{N}$ uno puede definir las operaciones usuales $+$ y $\cdot$, obteniendo un modelo de la aritmética de Peano y, por tanto, demostrando su consistencia. Como la aritmética de Peano (o la teoría de los conjuntos finitos, a la que es equivalente) no puede demostrar su propia consistencia, y la teoría de conjuntos lo hace, es consecuencia del Segundo Teorema de Gödel que el axioma del infinito no puede ser demostrado consistente respecto a los

³Esto se puede enunciar aproximadamente del siguiente modo: No existe una sucesión finita de afirmaciones que constituyan una demostración formal de una contradicción.

otros axiomas de Zermelo-Fraenkel. Por tanto, nuestra aceptación de la existencia de conjuntos infinitos, incluso de conjuntos infinitos de enteros, es un acto de fe. Fe en que la teoría de conjuntos no es contradictoria.

La teoría de números cardinales iniciada por Cantor hace aproximadamente 100 años, demostró ser inusualmente rica y profunda. Mientras las operaciones básicas de la aritmética de cardinales, adición y multiplicación, siguen reglas muy sencillas, la exponenciación de cardinales es una teoría matemática interesante. Ya la Hipótesis del Continuo es un problema sobre exponenciación de cardinales. Como el cardinal de $\mathbb{R}$ es $2^{\aleph_0}$, donde $\aleph_0$ es el cardinal de $\mathbb{N}$, la Hipótesis del Continuo puede enunciarse como $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, donde $\aleph_1$ es el menor cardinal no numerable que existe.

Un problema central de la moderna teoría de conjuntos es describir el desarrollo de la función cardinal $2^{\aleph_\alpha}$. Una consecuencia del trabajo que siguió al descubrimiento de Cohen fue la solución de este problema para *cardinales regulares* $\aleph_\alpha$ (Teorema de Easton): el resultado dice que, sujetos a ciertas restricciones triviales, el valor de $2^{\aleph_\alpha}$ para $\aleph_\alpha$ regular, es bastante arbitrario. En contraste al Teorema de Easton, el problema del cálculo de $2^{\aleph_\alpha}$ para $\aleph_\alpha$ singular (el *Problema de los Cardinales Singulares*), está muy lejos de ser resuelto, a pesar de algunos espectaculares resultados (Silver, Magidor, Shelah).

El número cardinal de un conjunto A se dice *singular* si A es unión de un número menor de conjuntos menores, i.e., $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ donde tanto I como cada A_i tienen cardinalidad menor que A . Los cardinales que no son singulares se llaman *regulares*. Por ejemplo, $\aleph_0$ es regular: el conjunto $\mathbb{N}$ no es unión finita de conjuntos finitos. Por otra parte, el cardinal $\aleph_\omega = \{\aleph_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ es singular, ya que es límite de una sucesión numerable de cardinales menores.

Esto nos lleva al tema más importante de la teoría de conjuntos actual: los *grandes cardinales*. Cuando consideramos un cardinal límite típico, i.e., un cardinal $\aleph_\alpha$, cuyo índice α es un ordinal límite, como $\aleph_\omega, \aleph_{\omega_1}, \aleph_{\omega_2+\omega}$, etc., observamos que dicho cardinal es singular. Sin embargo, como ya observó Hausdorff hace unos 70 años, no es inconcebible que un cardinal límite sea regular. Hausdorff llamó *inaccesibles* a estos cardinales. Los cardinales inaccesibles, si existen, tienen que ser extremadamente grandes, mucho mayores que los cardinales que aparecen en la práctica matemática ordinaria. Además su existencia es indemostrable en Zermelo-Fraenkel.

El hecho de que no se pueda demostrar la existencia de los cardinales inaccesibles es una manifestación del Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel. Si suponemos que existe un cardinal inaccesible entonces podemos demostrar que la teoría de conjuntos es consistente. La situación es análoga a la demostración de la consistencia de la teoría de conjuntos finitos a partir del axioma del infinito. Así pues, aceptar los cardinales inaccesibles constituye un acto de fe similar a aceptar los conjuntos infinitos.

El argumento más frecuente contra el estudio de los grandes cardinales presentado por los no especialistas es que los conjuntos en cuestión son tan grandes que no tienen importancia en los problemas que surgen en las matemáticas “dominantes”. (De ahí la etiqueta de “la tierra de nunca-jamás”). Este argu-

mento no es convincente si consideramos los numerosos descubrimientos que han probado una amplia evidencia de una estrecha relación entre los grandes cardinales y varios problemas matemáticos. Un caso importante es el *problema de la medida*. Concretamente, consideremos la cuestión de si la medida de Lebesgue se puede extender a una medida σ -aditiva definida sobre todos los subconjuntos de la recta real. Gracias al trabajo de Ulam y Solovay, esta cuestión es equiconsistente con la existencia de cierto gran cardinal, llamado *medible*. Y todo cardinal medible es inaccesible y, de hecho, su existencia es un postulado considerablemente más fuerte que la existencia de inaccesibles.

La relación entre los cardinales medibles versus inaccesibles es prototípica en el bestiario de los grandes cardinales. Para empezar, todo cardinal medible es inaccesible. En segundo lugar, el menor cardinal inaccesible no es medible y, de hecho, todo cardinal medible tiene por debajo un conjunto cofinal de inaccesibles. Y en tercer lugar (apelando al Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel), la consistencia de la existencia de un cardinal medible es indemostrable en la teoría que postula la existencia de cardinales inaccesibles. La teoría de los grandes cardinales nos conduce a una plétora de grandes cardinales que están más o menos dispuestos en cierta jerarquía para la cual podemos afirmar que la relación entre dos tipos distintos de grandes cardinales es análoga a la relación descrita anteriormente entre los cardinales medibles e inaccesibles.

Los grandes cardinales investigados en teoría de conjuntos surgen, bien generalizando propiedades de otros grandes cardinales o analizando problemas en otras áreas de las matemáticas, fundamentalmente la teoría de la medida, la teoría de modelos o la combinatoria. La evidencia más convincente para [la existencia de] los grandes cardinales proviene, sin embargo, de la *teoría descriptiva de conjuntos*, el estudio de conjuntos de números reales con buenas propiedades.

Cuando investigamos diferentes propiedades de los conjuntos de números reales, como la medibilidad de Lebesgue, es útil distinguir entre conjuntos arbitrarios y aquellos conjuntos que son definibles. Los conjuntos definibles se pueden ordenar en una jerarquía natural: conjuntos de Borel, analíticos, proyectivos, etc. (Notemos, de paso, que la hipótesis de que los conjuntos proyectivos son medibles de Lebesgue es equiconsistente con la existencia de cardinales inaccesibles). La herramienta principal de los teóricos de conjuntos descriptivos es la *determinación de los juegos infinitos*. Uno de los éxitos de la teoría de conjuntos moderna fue la demostración de que la jerarquía de los axiomas que surgen de la determinación (variando la complejidad del conjunto de beneficios) se corresponde muy estrechamente con la jerarquía de los axiomas de los grandes cardinales. Estos resultados han vinculado de forma muy intrincada los grandes cardinales con las propiedades de los conjuntos de números reales.

Como consecuencia del Teorema de Gödel, nunca será posible demostrar la consistencia de los grandes cardinales. Y no podemos, por supuesto, excluir la posibilidad de que [la existencia de] alguno de los grandes cardinales pueda resultar ser inconsistente. Ante el apremio por generalizar varias propiedades

de los grandes cardinales, en los años 70 fue propuesto cierto axioma y posteriormente fue refutado (un resultado de Kunen). No parece, sin embargo, que un destino similar aguarde a otros axiomas de [la teoría de los] grandes cardinales. Para empezar, estos axiomas han sido estudiados durante años sin llegar a contradicciones. Además, la teoría nos conduce a una elegante teoría de la estructura del universo conjuntista que, a diferencia del modelo de Gödel de los conjuntos constructibles, admite modelos para los grandes cardinales. En segundo lugar, las propiedades de los grandes cardinales aparecen en áreas que aparentemente no están relacionadas. Ya mencionamos la teoría descriptiva de conjuntos. Debería observarse también que el Problema de los Cardinales Singulares está muy ligado a la teoría de grandes cardinales.

Para concluir este discurso me gustaría resaltar lo siguiente. La afirmación de que la existencia de algún gran cardinal (digamos, medible o supercompacto o cualquier otro) es consistente, se puede expresar en el lenguaje de la aritmética. Por tanto, tenemos una sentencia aritmética que es indemostrable en la teoría de conjuntos incluso bajo la suposición de que el gran cardinal en cuestión existe, aunque es demostrable bajo la hipótesis de que exista algún gran cardinal mayor. Por supuesto, esta sentencia aritmética no posee un significado transparente, pero no es inconcebible que en el futuro se pueda descubrir una afirmación de este tipo con un significado claro (en analogía al resultado de Harrington-Paris para la aritmética de Peano). Por tanto, se puede concebir que uno pueda formular una conjetura de la teoría elemental de números o de las matemáticas finitas, que sería demostrable bajo la hipótesis de [la existencia de] algún cardinal muy grande, pero no sin ella.

Aunque todo esto es muy especulativo, deseo mencionar un resultado reciente de Richard Laver. Utilizando la hipótesis de un gran cardinal justo un poco más débil que la refutada por Kunen, Laver da un procedimiento para decidir el problema de las palabras para el álgebra libre con un generador y una operación binaria distributiva por la izquierda. De modo que aquí tenemos un problema de las matemáticas finitas para el cual la única solución conocida utiliza uno de los mayores grandes cardinales que los teóricos de conjuntos han inventado.

REFERENCIAS

- [1] G. CANTOR, *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin: Springer-Verlag (1932).
- [2] P. COHEN, *Set theory and the continuum hypothesis*, New York: Benjamin. (1966)
- [3] W.B. EASTON, Powers of regular cardinals, *Annals of Mathematical Logic*, **1** (1970) 139–178.
- [4] P. C. EKLOF, Whitehead's problem is undecidable, *Amer. Math. Monthly* **83** (1976) 10, 775–788.
- [5] K. GÖDEL *The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis*, Ann. Math. Studies, 3, Princeton, 1940.

- [6] K. HRBACEK, T. JECH, *Introduction to Set Theory*, New York: Marcel Dekker, Inc. (1999)
- [7] <http://plato.stanford.edu/entries/set-theory>
- [8] [http://www.math.hawaii.edu/ dale/godel/godel.html](http://www.math.hawaii.edu/dale/godel/godel.html)
- [9] T. JECH, *Set theory. The third millennium edition, revised and expanded*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [10] T. JECH, On Gödel's second incompleteness theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.* **121** (1994) 1, 311–313.
- [11] T. JECH, The infinite. *Jahrbuch der Kurt Gödel Gesellschaft* (Wien, 1991) 36–44.
- [12] T. JECH, *The axiom of choice*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 75. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1973
- [13] T. JECH, *Lectures in set theory, with particular emphasis on the method of forcing*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 217. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.
- [14] T. JECH, Non-provability of Souslin's hypothesis, *Comment. Math. Univ. Carolinae* **8** (1967) 291–305.
- [15] R. JENSEN, The fine structure of the constructible hierarchy, *Ann. Math. Logic*, **4** (1972) 229–308.
- [16] R. LAVER, On the consistency of Borel's conjecture. *Acta Math.* **137** (1976) 3–4, 151–169.
- [17] R. LAVER, The left distributive law and the freeness of an algebra of elementary embeddings. *Adv. Math.* **91** (1992) 2, 209–231.
- [18] D. MARTIN, J. STEEL, A proof of projective determinacy, *J. Amer. Math. Soc.* **2** (1989) 71–125.
- [19] J. PARIS, L. HARRINGTON, A mathematical incompleteness in Peano Arithmetic, *Handbook of Mathematical Logic* (J. Bairwise, ed.) North-Holland, Amsterdam (1977) 1133–1142.
- [20] M. E. RUDIN, Souslin's conjecture, *Amer. Math. Monthly* **76** (1969) 1113–1119.
- [21] D. SCOTT, Measurable cardinals and constructible sets, *Bull. Acad. Pol. Sci.* **9** (1961) 521–524.
- [22] S. SHELAH, Infinite abelian groups, Whitehead problem and some constructions. *Israel J. Math.* **18** (1974), 243–256.

- [23] S. ULAM, Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre, Fund. Math., 16 (1930) 140-150.

Thomas Jech
Mathematical Institute, AS CR
Žitná 25 CZ - 115 67 Praha 1
Czech Republic
Correo electrónico: jech@math.cas.cz

Traducido del inglés por J. M. Almira (Universidad de Jaén).

NOTA SOBRE EL AUTOR:

El Profesor Thomas Jech nació en Praga y se graduó en la Charles University, donde defendió su tesis doctoral, “The axiom of Choice”, bajo la dirección del Profesor P. Vopenka en 1966. En 1973 publicó una monografía sobre este tema (ver [1]) que actualmente se considera un clásico. También ha publicado dos monografías sobre la técnica de *forcing* (ver [2] y [3]), una introducción a la teoría de conjuntos (con K. Hrbacek) (ver [5]) y la monografía enciclopédica [4]. Es co-editor de *Annals of Pure and Applied Logic* desde 1986. Contribuye a la edición de una página *web* sobre Teoría de Conjuntos (<http://plato.stanford.edu/entries/set-theory>, mantenida por la *Stanford Encyclopedia*) que contiene abundante información muy útil para toda persona interesada en la teoría de conjuntos y materias relacionadas. También es interesante su página personal, (<http://www.math.cas.cz/~jech/>) que contiene información detallada sobre su investigación (incluyendo numerosos artículos que se pueden bajar de la red) y un bonito conjunto de fotos de Praga y otros hermosos lugares del mundo.



- [1] T. JECH, *The axiom of choice*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 75. North-Holland Publishing Co., Amsterdam London; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1973
- [2] T. JECH, *Lectures in set theory, with particular emphasis on the method of forcing*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 217. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.
- [3] T. JECH, *Multiple forcing*. Cambridge Tracts in Mathematics, 88. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [4] T. JECH, *Set theory. The third millennium edition, revised and expanded*, Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [5] K. HRBACEK, T. JECH, *Introduction to Set Theory*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.