

Complejos diferenciales y estabilidad numérica

por

Douglas N. Arnold

Este es el texto de la conferencia pronunciada el día 24 de agosto de 2002 por el profesor Douglas N. Arnold ante el plenario del Congreso Internacional de Matemáticos que tuvo lugar en Pekín, China, del 20 al 28 de agosto de 2002. LA GACETA DE LA RSME quiere agradecer a la Sociedad Matemática China su permiso para la presente traducción y publicación y al profesor Arnold por su interés y supervisión de la propia traducción.

RESUMEN: Complejos diferenciales como el de de Rham desempeñan un papel cada vez más importante en el diseño y en el análisis de métodos numéricos para ecuaciones en derivadas parciales. El diseño de discretizaciones estables de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales a menudo se basa en capturar sutiles aspectos de la estructura del sistema a discretizar. Con frecuencia la estructura geométrico-diferencial capturada por un complejo diferencial ha resultado ser un elemento clave, y un complejo diferencial discreto relacionado con el complejo anterior ha sido esencial. Este nuevo enfoque geométrico está suponiendo una unificación en la forma de entender una variedad de métodos numéricos innovadores que se han ido desarrollando en las últimas décadas y ha abierto el camino para obtener discretizaciones estables de problemas para los que no disponíamos de ellas; parece probable que en el futuro este enfoque nos permita abordar algunos problemas, hoy por hoy intratables, en ecuaciones en derivadas parciales numéricas.

1. INTRODUCCIÓN

A lo largo del siglo XX, las cadenas de complejos, sus propiedades de exactitud y sus diagramas conmutativos han impregnado muchas y diversas ramas de las Matemáticas, principalmente, la Topología Algebraica y la Geometría Diferencial. Recientemente, estas técnicas homológicas han comenzado a desempeñar un importante papel en un área de las Matemáticas con la que en principio no pensaríamos que tuviera relación: el Análisis Numérico. Las aplicaciones más significativas se han dado en el diseño y en el análisis de métodos numéricos para la solución de ecuaciones en derivadas parciales.

Como punto de partida de nuestra presentación, planteamos una cuestión general como es el problema de valores de frontera de la ecuaciones en derivadas parciales en forma de ecuación de operadores. Dado un dato f en un determinado espacio Y , nos interesa hallar la solución u perteneciente a algún espacio X del problema $Lu = f$. Un método numérico se enfrenta a esta cuestión discretizando el problema mediante la construcción de un operador $L_h : X_h \mapsto Y_h$ y de datos $f_h \in Y_h$, para a continuación definir una solución aproximada $u_h \in X_h$ mediante la ecuación $L_h u_h = f_h$. Claro está que este método numérico no tendrá el más mínimo interés a no ser que sea *consistente*, lo que significa que L_h y f_h han de ser aproximaciones, en algún sentido adecuado, de L y f , respectivamente.

Antes de que nos pongamos a hablar de cómo resolver el problema original $Lu = f$, bien mediante métodos numéricos bien con cualquier otro procedimiento, es preciso dilucidar primero si se trata de un problema bien propuesto. Esto es, dado $f \in Y$, ¿existe una única $u \in X$? y, si es así, ¿es cierto que pequeñas variaciones de f inducen cambios pequeños en u ? La cuestión análoga para el método numérico, es decir, si dado $f_h \in Y_h$, la ecuación $L_h u_h = f_h$ determina una única u_h , y si pequeñas variaciones de f_h inducen pequeños cambios en u_h , es la cuestión de *estabilidad* del método numérico. Un paradigma habitual, que puede formalizarse en muchas situaciones concretas, es que un método que es a la vez consistente y estable ha de ser convergente.

El asunto de qué problemas están bien propuestos ocupa un lugar central en la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales. Por supuesto, no todos los problemas están bien propuestos, y las razones que hacen que uno en concreto lo esté suelen descansar en detalles delicados, y de difícil aprehensión, que afectan a la propia estructura de la ecuación. Así, cambios que a primera vista consideraríamos superficiales, como, por ejemplo, en el signo de un coeficiente o en el tipo de condiciones de contorno, pueden transformar un problema bien propuesto en uno que no lo está. Lo mismo le ocurre a la estabilidad de los métodos numéricos, que suele depender de propiedades sutiles y elusivas del esquema numérico. A menudo, la estabilidad es reflejo de alguna porción de la estructura del problema original capturada por el esquema numérico. Sin embargo, ocurre con frecuencia que, para que herede estabilidad, no basta con que el esquema numérico sea cuantitativamente próximo al problema original; es decir, puede muy bien ocurrir que un método consistente para un problema bien propuesto sea inestable. En este artículo nos encontraremos varios ejemplos en los que las propiedades de exactitud de complejos diferenciales discretos y su relación con los complejos diferenciales asociados a las ecuaciones en derivadas parciales constituyen herramientas cruciales para establecer la estabilidad de métodos numéricos. En algunos casos los argumentos homológicos han servido para elucidar o validar métodos que habían sido desarrollados en las últimas décadas, mientras que en otros casos han abierto el camino a discretizaciones estables de problemas para los cuales no se conocían anteriormente métodos útiles. Es muy probable que los métodos homológicos

desempeñen un papel similar en la solución definitiva de algunos formidables problemas abiertos en las ecuaciones en derivadas parciales numéricas, especialmente en problemas de profundo contenido geométrico como, por ejemplo, la relatividad general numérica. Como en otras ramas de las Matemáticas, en el Análisis Numérico los complejos diferenciales sirven a la vez para codificar de manera concisa ciertas estructuras clave y para unificar argumentos que provienen de contextos muy distintos.

En este artículo sólo vamos a discutir métodos de elementos finitos, puesto que son, de entre la amplia batería de métodos numéricos para la solución de las ecuaciones en derivadas parciales, los más accesibles al análisis riguroso y donde más uso han tenido los complejos. Aunque conviene señalar que los complejos también han aparecido recientemente en el estudio de diferencias finitas, volúmenes finitos y en métodos espectrales.

2. ESPACIOS DE ELEMENTOS FINITOS

Un espacio de elementos finitos sobre un dominio Ω es un espacio de funciones que se define a trozos mediante un procedimiento de ensamblaje que procedemos a recordar; consúltese [7]. Para simplificar, nos vamos a restringir aquí a espacios de funciones que a trozos son polinomios determinados a través de una triangulación de un dominio n -dimensional Ω con n -símplices, siendo $n = 2$ ó 3 (de manera que, implícitamente, estamos suponiendo que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es poligonal o que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es poliédrico). Requerimos que a cada símplex T se le haya asignado un espacio de funciones W_T de *funciones de forma* y un conjunto de *grados de libertad*, es decir, un conjunto de funcionales lineales en W_T que constituyen una base del espacio dual. Se supone además que cada grado de libertad está asociado a alguno de los subsímplices, sin restricción en la dimensión, esto es, en dimensión 3, puede tratarse de un vértice, de una arista, de una cara, o del propio tetraedro. Para un subsímplex compartido por dos símplexes en la triangulación, requerimos que haya una correspondencia biunívoca entre los funcionales correspondientes. El espacio de elementos finitos W_h se define ahora como la colección de aquellas funciones definidas en Ω cuya restricción a cada símplex T de la triangulación pertenece a W_T y para la que los grados de libertad correspondientes coinciden cuando dos símplexes comparten un subsímplex.

El ejemplo más sencillo de espacio de elementos finitos es el que se obtiene eligiendo como W_T a las funciones constantes y tomando como único grado de libertad en T al momento de orden cero: $\phi \mapsto \int_T \phi(x) dx$ (que está asociado al propio T). El espacio de elementos finitos que así resulta es simplemente el espacio de las funciones constantes a trozos respecto de la triangulación dada.

De forma similar podíamos haber escogido $W_T = \mathbb{P}_1(T)$ (donde por $\mathbb{P}_p(T)$ denotamos el espacio de las funciones polinómicas de grado a lo sumo p) y haber seleccionado como grados de libertad los momentos de grado cero y también los de grado 1, $\phi \mapsto \int_T \phi(x) x_i dx$. Aquí, de nuevo, todos los grados

de libertad se asocian al propio T . En esta ocasión, el espacio de elementos finitos consta de todas las funciones lineales a trozos. Por supuesto, estas construcciones se extienden a grados superiores.

Un espacio de elementos finitos constituido por funciones lineales a trozos, pero más habitual que el anterior, es aquel en que de nuevo escogemos $W_T = \mathbb{P}_1(T)$, pero en el que ahora tomamos como grados de libertad a las evaluaciones en vértices, es decir, a las aplicaciones $\phi \mapsto \phi(v)$, una por cada vértice v . En este caso, tras el ensamblaje, el espacio de elementos finitos que resulta consta de todas las funciones *continuas* lineales a trozos. En general, podemos escoger $W_T = \mathbb{P}_p(T)$, con un $p \geq 1$, y asociar a cada vértice el grado de libertad mediante evaluación que acabamos de mencionar, a cada arista los momentos (integrando sobre la arista) de orden a lo sumo $p - 2$, a cada cara los momentos (integrando sobre la cara) de orden a lo sumo $p - 3$ y a cada tetraedro los momentos de orden a lo sumo $p - 4$. El espacio de elementos finitos que así resulta se denomina *espacio de elementos finitos de Lagrange* de grado p y consta de todas las funciones continuas que a trozos son polinomios de grado a lo sumo p . La figura 1 nos muestra una malla en un dominio de dimensión 2 y una función típica entre las del espacio de elementos finitos de Lagrange con respecto a esta malla.

Es costumbre asociar a estos espacios de elementos finitos diagramas mnemotécnicos en los que se representa a un único elemento de T con un símbolo para cada grado de libertad.

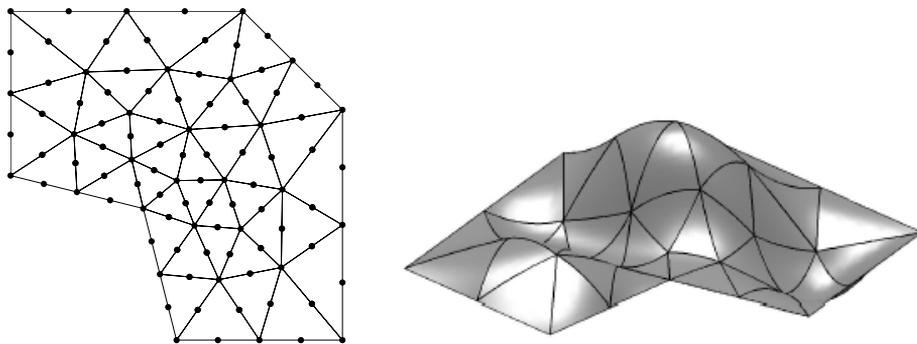


Figura 1: Una malla en la que se ha marcado la ubicación de los grados de libertad para los elementos finitos de Lagrange de grado 2 y una función elemento finito típica.

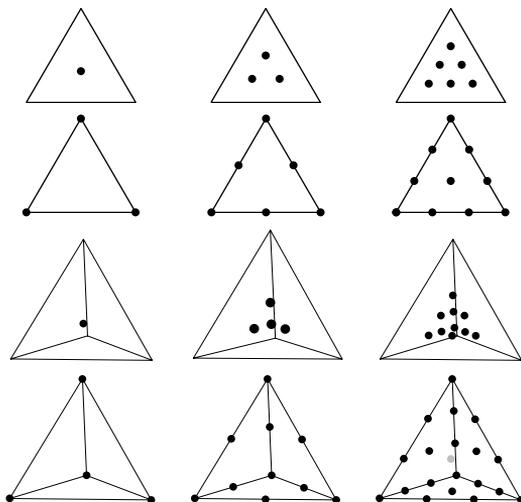


Figura 2: Diagramas de elementos. En la primera fila: elementos discontinuos de grados 0, 1 y 2 en dos dimensiones. En la segunda fila: elementos de Lagrange de grados 1, 2, y 3 en dos dimensiones. En la tercera y cuarta filas: los correspondientes elementos en tres dimensiones.

A continuación vamos a describir algunos espacios de elementos finitos que pueden usarse para aproximar funciones con valores vectoriales. Por razones de brevedad nos vamos a limitar a describir el caso de tres dimensiones, pero al mismo tiempo proporcionaremos los correspondientes diagramas para dimensiones 2 y 3. Podríamos, por supuesto, tomar productos cartesianos de 3 copias de uno de los espacios que hemos considerado más arriba, por ejemplo, los diagramas de elementos que se muestran en la parte izquierda de la figura 3 hacen referencia a campos vectoriales lineales a trozos en 2 y 3 dimensiones. Los espacios más interesantes son los espacios de *elementos cara* y *de elementos arista*, que, en sus aspectos esenciales, fueron concebidos por Raviart y Thomas [12] para dos dimensiones y por Nedelec [10] para 3 dimensiones. Para el orden inferior, los elementos cara toman como funciones de forma a los campos vectoriales del tipo $p(x) = a + bx$ donde $a \in \mathbb{R}^3$, $b \in \mathbb{R}$ y $x = (x_1, x_2, x_3)$, que constituyen un espacio de dimensión 4 del espacio de 12 dimensiones $\mathbb{P}_1(T, \mathbb{R}^3)$ de los campos vectoriales polinómicos de grado a lo sumo 1. Como grados de libertad se toman los momentos de orden 0 de las componentes normales a lo largo de las caras de codimensión 1, $p \mapsto \int_c p(x) \cdot n_c dx$ donde c es una cara y n_c es unitario y normal a la cara c . Los correspondientes diagramas de elementos se muestran en la columna intermedia de la figura 3. En este caso de orden inferior, las funciones de forma de los elementos de arista son los campos vectoriales polinómicos de la forma $p(x) = a + b \times x$ donde $a, b \in \mathbb{R}^3$, que constituyen un espacio de dimensión 6 de $\mathbb{P}_1(T, \mathbb{R}^3)$. Los grados de libertad son los momentos de orden 0 a lo largo de la arista de la componente tangente a la arista, $p \mapsto \int_a p(x) \cdot t_a dx$, como se indica en la parte derecha de la figura 3.

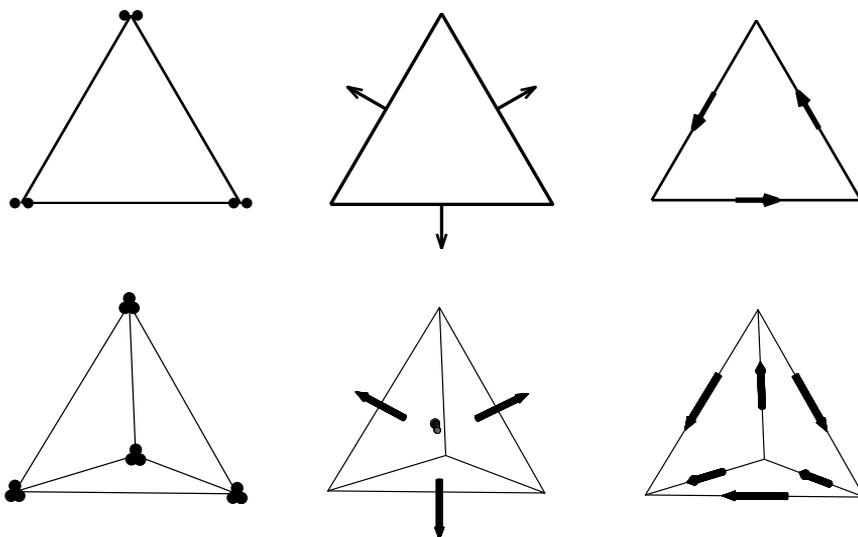


Figura 3: Diagramas de elementos finitos con campos vectoriales de 2 y 3 dimensiones. Los puntos múltiples se usan como marcadores para indicar la evaluación de todas las componentes de un campo vectorial. Las flechas se usan para momentos normales en subsímplices de codimensión 1 y para componentes tangentes sobre las aristas. A la izquierda: campos continuos lineales a trozos. En el centro: elementos cara de orden inferior. A la derecha: elementos arista de orden inferior.

Cada uno de estos espacios puede generalizarse a cualquier orden superior. Para el siguiente espacio de caras de orden superior, las funciones de forma son del tipo $p(x) = a(x) + b(x)x$ donde $a \in \mathbb{P}_1(T, \mathbb{R}^3)$ y $b \in \mathbb{P}_1(T)$, que es un polinomio lineal a valores escalares. Esto nos da un subespacio de $\mathbb{P}_2(T, \mathbb{R}^3)$ de dimensión 15, y los grados de libertad son los momentos de grado a lo sumo 1 de la componente normal a lo largo de las caras y los momentos de orden 0 a lo largo de todas las componentes del tetraedro. Este elemento se indica en la parte izquierda de la figura 4. Para el segundo espacio de aristas de orden inferior, las funciones de forma son del tipo $p(x) = a(x) + b(x) \times x$ con $a, b \in \mathbb{P}_1(T, \mathbb{R}^3)$, que constituyen un espacio de dimensión 20. Los grados de libertad son los momentos tangenciales de grado a lo sumo 1 sobre las aristas (dos por cada arista) y los momentos tangenciales de grado 0 sobre las caras (dos por cara). Este elemento se representa en la parte derecha de la figura 4.

La elección de las funciones de forma y los grados de libertad determinan la diferenciabilidad de las funciones que pertenecen al espacio ensamblado de elementos finitos. Por ejemplo, los elementos finitos de Lagrange de cualquier grado pertenecen al espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ de funciones de $L^2(\Omega)$ que tienen derivadas parciales distribucionales que también pertenecen a $L^2(\Omega)$ (e incluso a $L^\infty(\Omega)$). De hecho, la primera derivada parcial distribucional de una función continua y derivable a trozos coincide con su derivada calculada

a trozos y por tanto pertenece a L^2 . Por consiguiente, los grados de libertad que hemos impuesto al construir los elementos finitos de Lagrange bastan para garantizar que el espacio ensamblado de elementos finitos cumple $W_h \subset H^1(\Omega)$. De hecho, aún más es cierto: para los elementos finitos de Lagrange con funciones de forma $W_T = \mathbb{P}_p(T)$, se tiene que

$$W_h = \left\{ u \in H^1(\Omega) \mid u|_T \in W_T \text{ para todos los s\u00edmplices } T \text{ de la triangulaci\u00f3n} \right\}$$

Esto significa, en cierto sentido, que los grados de libertad imponen exactamente la continuidad que se precisa para pertenecer a H^1 , ni m\u00e1s ni menos.

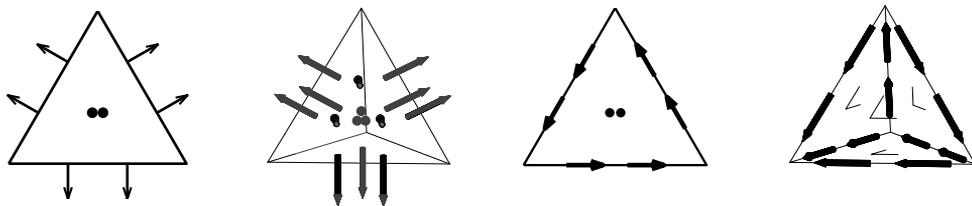


Figura 4: Elementos cara (a la izquierda) y arista (a la derecha) del segundo orden m\u00e1s bajo en dos y tres dimensiones.

Por otro lado, y como contraste, los espacios de funciones discontinuas polin\u00f3micas a trozos son subconjuntos de $L^2(\Omega)$, pero no de $H^1(\Omega)$, puesto que en sus primeras derivadas distribucionales intervienen distribuciones con soporte en las fronteras entre elementos, y, por tanto, no pertenecen a $L^2(\Omega)$.

Para los elementos finitos con valores vectoriales hay m\u00e1s posibilidades. Los espacios de caras y aristas contienen funciones discontinuas, y, por tanto, no est\u00e1n contenidos en $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Sin embargo, en los campos vectoriales que pertenecen a uno de los espacios de caras, la componente normal del campo vectorial no salta cuando cruzamos una frontera entre elementos, y esto implica, a trav\u00e9s de la integraci\u00f3n por partes, que la divergencia distribucional de la funci\u00f3n coincide con la divergencia calculada a trozos. De manera que el espacio de caras pertenece a $H(\text{div}, \Omega)$, el espacio de campos vectoriales en L^2 sobre Ω cuya divergencia pertenece a L^2 . De hecho, en estos espacios los grados de libertad imponen exactamente la continuidad de $H(\text{div})$, ni m\u00e1s ni menos. Se puede demostrar que en los espacios de aristas las componentes tangenciales de un campo vectorial no saltan cuando cruzamos fronteras entre elementos, y esto implica que las funciones arista pertenecen a $H(\text{rot}, \Omega)$, el espacio de campos vectoriales en L^2 cuyo rotacional pertenecen a L^2 . De nuevo, los grados de libertad imponen exactamente la continuidad que se necesita para incluirlos en $H(\text{rot})$.

3. COMPLEJOS DIFERENCIALES DISCRETOS

En cualquier variedad diferenciable Ω se puede definir el complejo de de Rham

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \wedge^0(\Omega) \xrightarrow{d} \wedge^1(\Omega) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \wedge^n(\Omega) \rightarrow 0.$$

En la expresión anterior, $\wedge^k(\Omega)$ denota el espacio de las k -formas en Ω , esto es, para cada $\omega \in \wedge^k(\Omega)$ y $x \in \Omega$, $\omega(x)$ es una forma k -lineal alternante definida sobre el espacio tangente $T_x\Omega$. Los operadores $d : \wedge^k(\Omega) \rightarrow \wedge^{k+1}(\Omega)$ denotan diferenciación exterior. Este es un complejo porque la composición de dos diferenciaciones siempre se anula, y si la variedad es topológicamente trivial, entonces el complejo es exacto.

Si Ω es un dominio en \mathbb{R}^3 , podemos identificar el espacio tangente a cualquiera de sus puntos con \mathbb{R}^3 . A través del producto escalar euclídeo, podemos identificar el espacio de las aplicaciones lineales sobre \mathbb{R}^3 con el propio \mathbb{R}^3 , lo que a su vez permite identificar a $\wedge^1(\Omega)$ con el espacio $C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$ de los campos vectoriales diferenciables definidos sobre Ω . Además, el espacio de las formas bilineales alternantes sobre \mathbb{R}^3 se puede identificar con \mathbb{R}^3 asociándole a cada vector u la aplicación bilineal alternante $(v, w) \mapsto \det(u|v|w)$, que supone así una identificación de $\wedge^2(\Omega)$ con \mathbb{R}^3 . Finalmente, las únicas aplicaciones trilineales alternantes sobre \mathbb{R}^3 son los múltiplos de la aplicación determinante $(u, v, w) \mapsto c \det(u|v|w)$, de forma que podemos identificar $\wedge^3(\Omega)$ con $C^\infty(\Omega)$. En términos de estos campos *proxy*, el complejo de de Rham se expresa en la forma:

$$\mathbb{R} \hookrightarrow C^\infty(\Omega) \xrightarrow{\text{grad}} C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3) \xrightarrow{\text{rot}} C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3) \xrightarrow{\text{div}} C^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow 0. \quad (3.1)$$

Alternativamente, podemos considerar formas en L^2 y la sucesión queda

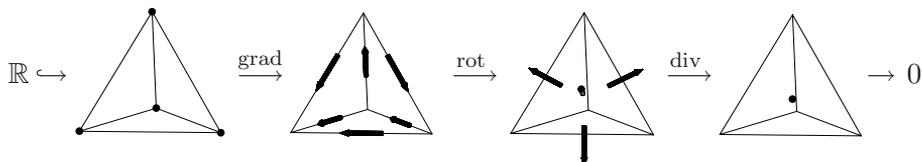
$$\mathbb{R} \hookrightarrow H^1(\Omega) \xrightarrow{\text{grad}} H(\text{rot}, \Omega) \xrightarrow{\text{rot}} H(\text{div}, \Omega) \xrightarrow{\text{div}} L^2(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow 0$$

Los espacios de elementos finitos que hemos construido más arriba nos permiten formar análogos discretos del complejo de de Rham. Dada una triangulación cualquiera del dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, denotemos por W_h el espacio de elementos finitos continuos lineales a trozos, por Q_h el espacio de elementos arista de orden inferior, por S_h el espacio de elementos cara de orden inferior, y por V_h el espacio de las funciones constantes a trozos. Entonces $\text{grad}(W_h) \subset Q_h$ (puesto que Q_h contiene todos los campos vectoriales constantes a trozos que pertenecen a $H(\text{rot})$ y el gradiente de un campo continuo lineal a trozos es una tal función), $\text{rot}(Q_h) \subset S_h$ (puesto que S_h contiene todos los campos vectoriales constantes a trozos que pertenecen a $H(\text{rot})$), y $\text{div}(S_h) \subset V_h$. De manera que tenemos un complejo diferencial discreto

$$\mathbb{R} \hookrightarrow W_h \xrightarrow{\text{grad}} Q_h \xrightarrow{\text{rot}} S_h \xrightarrow{\text{div}} V_h \rightarrow 0 \quad (3.2)$$

Este complejo diferencial es capaz de capturar la topología del dominio Ω tan eficazmente como lo hace el propio complejo de de Rham. En particular, si el dominio es topológicamente trivial, la sucesión es exacta.

Conviene abreviar el enunciado anterior usando los diagramas de elementos que hemos introducido más arriba. Así por ejemplo diremos que la sucesión que sigue es exacta



Lo que quiere decir que si ensamblamos los espacios de elementos finitos $W_h, Q_h, S_h,$ y V_h usando los elementos finitos que se indican y una triangulación de un dominio topológicamente trivial, entonces el complejo diferencial discreto (3.2) es exacto.

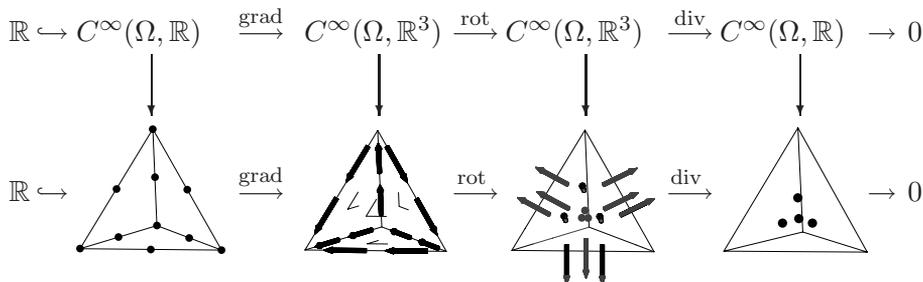
Hay otra relación importante entre el complejo de de Rham (3.1) y el complejo discreto (3.2). Los grados de libertad definitorios determinan proyecciones $\Pi_h^W : C^\infty(\Omega) \rightarrow W_h, \Pi_h^Q : C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3) \rightarrow Q_h,$ y así sucesivamente. De hecho, Π_h^W es el operador usual de interpolación, Π_h^V es la proyección L^2 sobre el espacio de las funciones constantes a trozos y las proyecciones Π_h^Q y Π_h^S sobre los elementos arista y cara quedan determinadas al exigir que se mantengan los momentos apropiados. Se puede comprobar, usando el teorema de Stokes, que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{R} \hookrightarrow C^\infty(\Omega, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\text{grad}} & C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{rot}} & C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3) \rightarrow 0 \\
 \downarrow \Pi_h^W & & \downarrow \Pi_h^Q & & \downarrow \Pi_h^S & & \downarrow \Pi_h^V \\
 \mathbb{R} \hookrightarrow W_h & \xrightarrow{\text{grad}} & Q_h & \xrightarrow{\text{rot}} & S_h & \xrightarrow{\text{div}} & V_h \rightarrow 0
 \end{array} \tag{3.3}$$

Los elementos finitos que aparecen en ese diagrama, con un grado de libertad por cada vértice para $W_h,$ por cada arista para $Q_h,$ por cada cara para S_h y por cada símplex para cada V_h son muy geométricos. De hecho, si recordamos las identificaciones entre campos y formas diferenciables, podemos ver estos espacios como espacios de formas diferenciables a trozos. A decir verdad, Whitney [13] construyó por primera vez estos espacios en este contexto, sin tener en mente relación alguna con elementos finitos o métodos numéricos. Los espacios se fueron reinventando uno a uno como espacios de elementos finitos para ir respondiendo a las necesidades que iban surgiendo en diversos problemas numéricos, y las propiedades que quedan recogidas en el diagrama

conmutativo de más arriba se fueron redescubriendo lentamente según se iban necesitando para analizar los métodos numéricos resultantes. Bossavit [5] estableció por primera vez la conexión entre elementos finitos de aristas y caras de orden bajo y formas de Whitney.

Hay enunciados análogos válidos para elementos finitos de Lagrange de orden superior, de caras, de aristas, o discontinuos. Por ejemplo, el siguiente diagrama conmuta y tiene filas exactas:



Veremos muchos otros complejos diferenciales discretos a lo largo de este artículo.

4. ESTABILIDAD DE LOS MÉTODOS DE GALERKIN

Consideremos primero la solución del problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson en un dominio Ω de \mathbb{R}^n :

$$-\Delta u = f \text{ en } \Omega, \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega$$

La solución se puede caracterizar como minimizador del funcional de energía

$$\mathcal{E}(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\text{grad } u(x)|^2 dx - \int_{\Omega} f(x)u(x) dx$$

sobre el espacio de Sobolev $\overset{\circ}{H}^1(\Omega)$ (que consta de todas las funciones de $H^1(\Omega)$ que se anulan en la frontera $\partial\Omega$), o como solución del siguiente problema débil:

$$\int_{\Omega} \text{grad } u(x) \cdot \text{grad } v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx, \quad \text{para todas las } v \in \overset{\circ}{H}^1(\Omega).$$

Podemos definir una solución aproximada u_h a través de la minimización de la integral de Dirichlet sobre un espacio de dimensión finita W_h de $\overset{\circ}{H}^1(\Omega)$; este

es el método clásico de Ritz. Equivalentemente, podemos usar el método de Galerkin, en el que $u_h \in W_h$ queda determinada por las ecuaciones

$$\int_{\Omega} \text{grad } u_h(x) \cdot \text{grad } v(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) \, dx, \quad \text{para todas las } v \in W_h.$$

Tras elegir una base en W_h , este planteamiento nos conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas lineales que permiten computar u_h .

Denotemos por T_h el operador de solución discreta $f \mapsto u_h$. Se puede comprobar sin dificultad que T_h es un operador lineal acotado (por una constante que depende sólo del dominio Ω) del espacio $H^{-1}(\Omega) := \overset{\circ}{H}{}^{-1}(\Omega)^*$ al espacio $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ (y, en particular, no se incrementa si se enriquece el espacio W_h). Esto significa que el método de Galerkin es *estable*. Como consecuencia se obtiene la llamada *estimación de cuasioptimalidad*

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq c \inf_{v \in W_h} \|u - v\|_{H^1} \quad (4.4)$$

para una cierta constante c que depende sólo del dominio Ω . Nótese como no es necesario imponer ninguna restricción sobre el espacio W_h para que se cumpla la desigualdad anterior. Para un problema elíptico coercitivo el método de Galerkin es siempre estable y la convergencia depende sólo de las propiedades de aproximación del subespacio. Como elección natural de W_h podemos tomar el espacio de elementos finitos de Lagrange de un cierto grado p definido con respecto a una malla simplicial regular en el que sus elementos tienen un tamaño máximo h ; en este caso el método de Galerkin no es más que un método estándar de elementos finitos, en el que la cota del lado derecho de la acotación (4.4) es $O(h^p)$ siempre y cuando u sea suficientemente diferenciable.

Consideremos a continuación el correspondiente problema de autovalores que se origina cuando se pretende determinar las frecuencias fundamentales de un tambor. Es decir, buscamos ondas estacionarias $w(x, t)$ que sean solución de la ecuación de ondas en un cierto dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ que se anulan en la frontera. Si suponemos que tanto la tensión como la densidad de la membrana del tambor son la unidad, estas soluciones tienen la forma $w(x, t) = \alpha \cos(t\sqrt{\lambda})u(x) + \beta \text{sen}(t\sqrt{\lambda})u(x)$ donde α y β son constantes y u y λ satisfacen el problema de autovalores

$$-\Delta u = \lambda u \text{ en } \Omega, \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Los autovalores λ forman una sucesión de números positivos que tienden a infinito. Los números $\sqrt{\lambda}/(2\pi)$ son las frecuencias fundamentales del tambor y las funciones u dan los modos fundamentales correspondientes.

Los autovalores y las autofunciones se caracterizan en términos variacionales como los valores críticos y los puntos críticos del cociente de Rayleigh

$$\mathcal{R}(u) = \frac{\int_{\Omega} |\text{grad } u(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx}$$

que está definido para u no nulas pertenecientes al espacio de Sobolev $\overset{\circ}{H}^1(\Omega)$. El método clásico de Rayleigh-Ritz para aproximar las soluciones de problemas de autovalores determina autovalores λ_h y autofunciones u_h como valores y puntos críticos de la restricción de \mathcal{R} a los elementos no nulos de algún subespacio de dimensión finita W_h de $\overset{\circ}{H}^1(\Omega)$. De forma equivalente, podemos escribir el problema de autovalores en forma débil: hállese $\lambda \in \mathbb{R}$ y una $u \in \overset{\circ}{H}^1(\Omega)$ no nula, tal que

$$\int_{\Omega} \text{grad } u(x) \cdot \text{grad } v(x) dx = \lambda \int_{\Omega} u(x) v(x) dx \quad \text{para todas las } v \in \overset{\circ}{H}^1(\Omega). \quad (4.5)$$

La aproximación de Galerkin del problema de autovalores, que es equivalente al método de Rayleigh-Ritz, busca un $\lambda_h \in \mathbb{R}$ y una $u_h \in W_h$ no nula tal que

$$\int_{\Omega} \text{grad } u_h(x) \cdot \text{grad } v(x) dx = \lambda_h \int_{\Omega} u_h(x) v(x) dx \quad \text{para todas las } v \in W_h. \quad (4.6)$$

A continuación vamos a discutir la convergencia de este método. Denotemos por λ el j -ésimo autovalor del problema (4.5). Para no complicar la discusión vamos a suponer que λ es un autovalor simple, de manera que la autofunción correspondiente u queda completamente determinada, salvo por el signo, si imponemos la normalización $\|u\|_{H^1} = 1$. De forma similar, denotamos por λ_h y u_h el j -ésimo autovalor de (4.6). Se puede demostrar (para resultados más generales, recomendamos el lector que consulte, por ejemplo, [3]) que existe una constante c tal que

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq c \inf_{v \in W_h} \|u - v\|_{H^1}, \quad |\lambda - \lambda_h| \leq c \|u - u_h\|_{H^1}^2. \quad (4.7)$$

Resumiendo, la aproximación de la autofunción es cuasióptima y el error en el autovalor está acotado por el cuadrado. Una vez más no hay restricción alguna sobre el espacio W_h .

La figura 5 describe los resultados obtenidos en la computación de los autovalores del laplaciano en un dominio elíptico de excentricidad 3 mediante elementos finitos de Lagrange de grado 1.

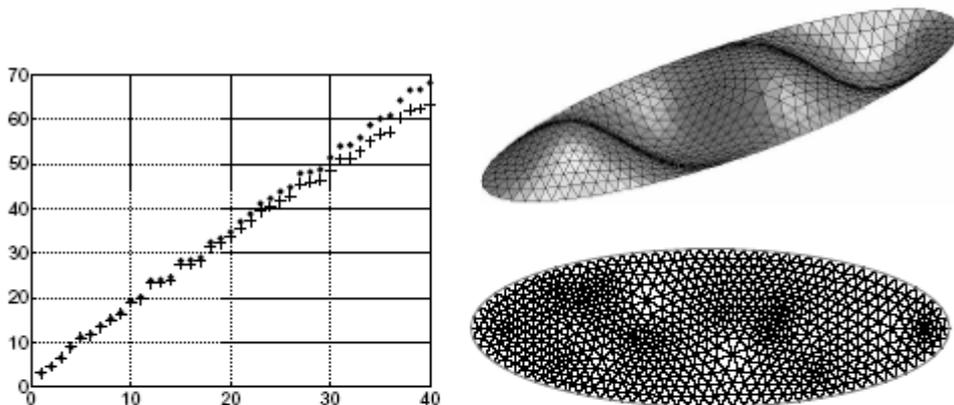


Figura 5: La gráfica de puntos nos muestra los primeros 40 autovalores computado con elementos finitos lineales a trozos con respecto a la triangulación (•) en contra-posición con los autovalores exactos (+). La superficie nos muestra las autofunciones computadas asociadas al cuarto autovalor. La malla tiene 737 vértices, de los cuales 641 son interiores, y 1376 triángulos.

Vamos ahora a considerar el problema análogo de la computación de las frecuencias resonantes de una cavidad electromagnética que ocupa una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. En este caso queremos hallar la onda estacionaria que es solución de las ecuaciones de Maxwell. Si tomamos a 1 como valor de la permitividad eléctrica y de la permeabilidad magnética y suponemos una cavidad sin pérdida y de conductividad perfecta en su frontera, nos resulta el siguiente problema de autovalores para el campo eléctrico: hállese un campo no nulo $E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\text{rot rot } E = \lambda E, \quad \text{div } E = 0 \text{ en } \Omega, \quad E \times n = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \tag{4.8}$$

De nuevo tenemos un problema elíptico de autovalores y los autovalores forman una sucesión de números positivos que tiende a infinito. La condición sobre la divergencia es casi redundante en este problema de autovalores, porque si $\text{rot rot } E = \lambda E$ para un $\lambda > 0$, entonces $\text{div } E = \lambda^{-1} \text{div rot rot } E = 0$, puesto que la divergencia de un rotacional se anula. Por consiguiente, el problema de autovalores

$$\text{rot rot } E = \lambda E \text{ en } \Omega, \quad E \times n = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \tag{4.9}$$

tiene los mismos autovalores y autofunciones que (4.8), salvo que (4.8) admite además a $\lambda = 0$ como autovalor, y el autoespacio correspondiente a ese autovalor es de dimensión infinita (pues contiene los gradientes de todas las funciones diferenciables en la frontera de Ω). Los autovalores y autofunciones

son ahora los puntos y valores críticos del cociente de Rayleigh

$$\mathcal{R}(E) = \frac{\int_{\Omega} |\operatorname{rot} E(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} |E(x)|^2 dx}$$

sobre el espacio de todos los campos no nulos E en $\overset{\circ}{H}(\operatorname{rot}, \Omega)$, que se define como el espacio de todas aquellas campos para los que las dos integrales anteriores existen y son finitas y cuyas componentes tangenciales se anulan en toda la frontera (esto es, $E \times n = 0$ en $\partial\Omega$).

En la figura 6 se muestran los resultados de aproximar una versión de dimensión 2 del problema de autovalores usando el método de Rayleigh-Ritz o, equivalentemente, el método de Galerkin con campos vectoriales continuos y lineales a trozos sobre Ω cuyas componentes tangenciales se anulan en la frontera (el primer elemento se representa en la figura 3). Como dominio Ω hemos tomado un cuadrado de lado π , caso en el que sabemos que los autovalores no nulos son de la forma $\lambda = m^2 + n^2$ con $0 \leq m, n \in \mathbb{Z}$, con m o n no nulo, y que las correspondientes autofunciones son $E = (\operatorname{sen}(my), \operatorname{sen}(nx))$. En la malla dibujada, el espacio de elementos finitos tiene dimensión 290, y hemos hallado que 73 de los 290 autovalores computados se encuentran entre 0 y 10 y que no muestran tendencia a acumularse en los enteros 1, 1, 2, 4, 4, 5, 5, 8, 9, 9 que son los verdaderos autovalores entre 0 y 10. La conclusión es que este método es inútil: ¡los autovalores computados no se parecen en nada a los verdaderos autovalores! Ciertamente, el análogo de (4.7) no se cumple.

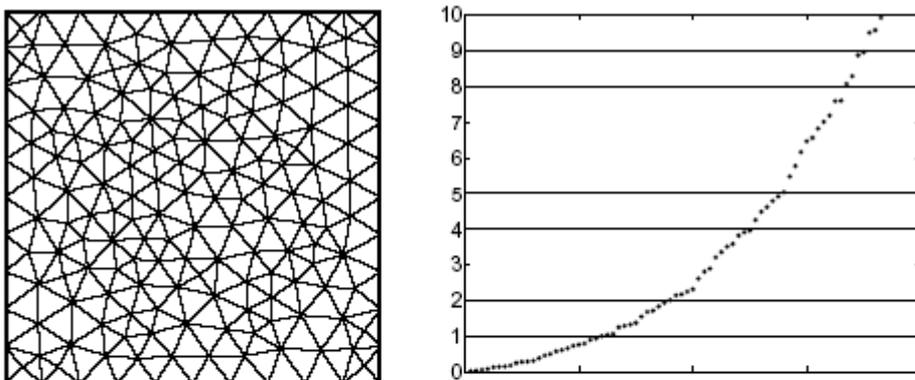


Figura 6: La gráfica muestra los primeros 73 autovalores computados con elementos finitos lineales a trozos para el problema de la cavidad resonante con respecto a la mala que se acompaña. No tienen nada que ver con los autovalores exactos 1, 1, 2, 4, 4, ... que se indican con las líneas horizontales.

Si, por el contrario, elegimos como espacio de elementos finitos a los elementos de aristas de orden inferior (figura 3, ángulo superior derecho), obtenemos resultados muy diferentes. Usando la misma malla, el espacio de elementos finitos de aristas tiene dimensión 472. Resulta entonces que 145 de los autovalores computados son 0 (tras redondeo), y que los autovalores siguientes son 0.9998, 0.9999, 3.9968, 4.0013, . . . , lo que supone una excelente aproximación de los verdaderos autovalores. Consúltese la figura 7.

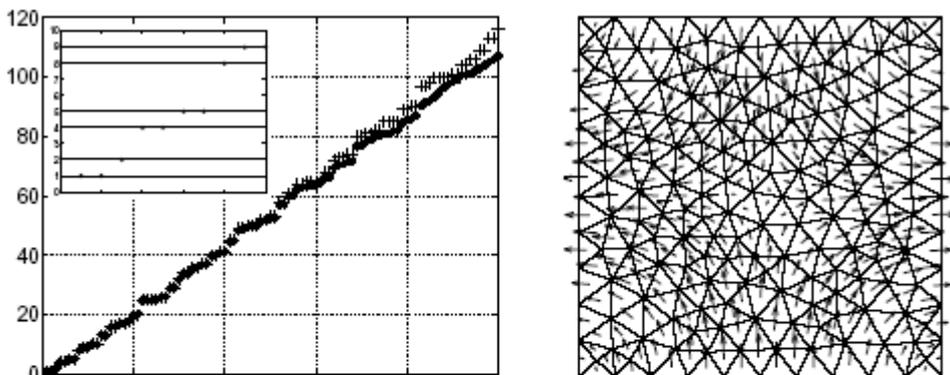


Figura 7: El primer gráfico nos muestra los primeros 100 autovalores positivos para la cavidad resonante en el cuadrado computados con elementos arista de orden inferior usando la malla de la figura 6. El error en los primeros 54 autovalores no supera el 2%. El recorte que se incluye se centra en los 10 primeros autovalores en los que el error es inferior al 0,25%. El segundo gráfico nos muestra el campo vectorial asociado al tercer autovalor positivo.

Esta sorprendente diferencia entre el comportamiento de los elementos finitos continuos lineales a trozos y los elementos aristas en el problema de la cavidad resonante es una cuestión de estabilidad. Volveremos a este asunto más adelante, una vez que hayamos examinado la cuestión de la estabilidad en un contexto más sencillo.

5. ESTABILIDAD DE PLANTEAMIENTOS MIXTOS

Vamos a considerar ahora el problema de Dirichlet

$$-\operatorname{div} C \operatorname{grad} u = f \text{ en } \Omega, \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega,$$

donde Ω es un dominio de \mathbb{R}^3 y el coeficiente C es una matriz simétrica definida positiva en cada punto de Ω . Podemos, de nuevo, caracterizar u como un minimizador del funcional de energía

$$u \mapsto \frac{1}{2} \int C \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} u \, dx - \int f u \, dx$$

para luego usar el método de Ritz. Este procedimiento siempre es estable.

Sin embargo, para ciertos propósitos es preferible trabajar con el sistema de primer orden equivalente

$$\sigma = C \operatorname{grad} u, \quad -\operatorname{div} \sigma = f. \quad (5.10)$$

El par (σ, u) queda caracterizado en términos variacionales como el único punto crítico del funcional

$$\mathcal{L}(\sigma, u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} C^{-1} \sigma \cdot \sigma + u \operatorname{div} \sigma \right) dx - \int_{\Omega} f u dx \quad (5.11)$$

sobre $H(\operatorname{div}, \Omega) \times L^2(\Omega)$. Obsérvese que (σ, u) es un punto de silla de \mathcal{L} , no un extremo. A las discretizaciones numéricas que se basan en principios variacionales de punto de silla se les denomina *métodos mixtos*.

Vale la pena interpretar el sistema (5.10) en el lenguaje de las formas diferenciales, porque nos va a aportar nuevas perspectivas. La función u es una 0-forma, y la operación $u \mapsto \operatorname{grad} u$ es simplemente la diferenciación exterior. El campo vectorial σ representa a una 2-forma y la operación $\sigma \mapsto \operatorname{div} \sigma$ es, de nuevo, la diferenciación exterior. La carga f representa una 3-forma. Como $\operatorname{grad} u$ se identifica con una 1-forma, la operación sobre formas diferenciales que corresponde a la operación de multiplicación por C debe llevar 1-formas en 2-formas. De hecho, si desentrañamos las identificaciones, nos damos cuenta de que la multiplicación por C corresponde a una operación estrella de Hodge. Una operación estrella de Hodge define un isomorfismo de $\wedge^k(\Omega)$ sobre $\wedge^{3-k}(\Omega)$. Para poder determinar uno de esos operadores en concreto, hemos de definir un producto interior sobre el espacio tangente de \mathbb{R}^3 de cada punto de Ω . Ese es precisamente el papel de la matriz definida positiva C . Una gran parte de las ecuaciones en derivadas parciales de la Física Matemática admiten interpretaciones similares en términos de formas diferenciales. Consúltese la referencia [9] para una discusión de estas interpretaciones en un contexto de discretización.

Una aproximación natural a la discretización del principio variacional mixto comienza por elegir los subespacios $S_h \subset H(\operatorname{div}, \Omega)$, $V_h \subset L^2(\Omega)$ para luego buscar un punto crítico $(\sigma_h, u_h) \in S_h \times V_h$. Este enfoque es, por supuesto, equivalente a un método de Galerkin y conduce a un sistema de ecuaciones lineales algebraicas. Sin embargo, en este caso, la *estabilidad no es automática*. Puede ocurrir que el sistema discreto sea singular, o con mayor frecuencia, que la norma del operador de solución discreta crezca sin cota según se va refinando la malla.

En un artículo fundamental, Brezzi [6] estableció dos condiciones que conjuntamente resultan suficientes (y también esencialmente necesarias) para la estabilidad. El teorema de Brezzi vale para una amplia clase de problemas de punto de silla, pero, por simplicidad, vamos a enunciar las condiciones de estabilidad para el problema de punto de silla asociado al funcional (5.11).

(S1) Existe $\gamma_1 > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} C^{-1}\tau \cdot \tau \, dx \geq \gamma_1 \|\tau\|_{H(\text{div})}^2.$$

para todas las $\tau \in S_h$ tales que $\int \text{div } \tau v \, dx = 0$ para todos los $v \in V_h$.

(S2) Existe $\gamma_2 > 0$ tal que para todo $v \in V_h$ hay un $\tau \in S_h$ no nulo que cumple

$$\int_{\Omega} v \text{div } \tau \, dx \geq \gamma_2 \|v\|_{L^2(\Omega)} \|\tau\|_{H(\text{div})}.$$

TEOREMA (BREZZI) *Si se satisfacen las condiciones de estabilidad (S1) y (S2), entonces el operador \mathcal{L} admite en $S_h \times V_h$ un único punto crítico, el operador de solución $f \mapsto (\sigma_h, u_h)$ está acotado $L^2(\Omega) \rightarrow H(\text{div}, \Omega) \times L^2(\Omega)$, y además se cumple la acotación cuasióptima*

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{H(\text{div})} + \|u - u_h\|_{L^2} \leq c \inf_{(\tau, v) \in S_h \times V_h} \left(\|\sigma - \tau\|_{H(\text{div})} + \|u - v\|_{L^2} \right)$$

con una constante c que depende de γ_1 y γ_2 .

Las condiciones de estabilidad de Brezzi restringen severamente la elección de los espacios de elementos finitos mixtos S_h y V_h . La condición (S1) se cumple si las funciones $\tau \in S_h$, que como se ha indicado tienen divergencia ortogonal a V_h , son de divergencia cero. (De hecho, en la práctica, sólo se consigue divergencia ortogonal a V_h si se tiene divergencia cero). Esta condición se cumple ciertamente si $\text{div } S_h \subset V_h$, y por eso esa inclusión se adopta como principio de diseño de los espacios de elementos finitos mixtos. Por otro lado, para garantizar la condición (S2) lo más sencillo es que se cumpla que $\text{div } S_h \supset V_h$, porque en este caso, dada $v \in V_h$, podemos elegir $\tau \in S_h$ con $\text{div } \tau = v$, de manera que $\int_{\Omega} v \text{div } \tau \, dx = \|v\|_{L^2}^2$, y la segunda condición se cumple en cuanto aseguremos que $\|\tau\|_{H(\text{div})} \leq \gamma_2^{-1} \|v\|_{L^2}$. En suma, necesitamos saber que *div* lleva S_h sobre V_h y que *div* $|_{S_h}$ admite una inversa a un lado acotada.

Los elementos cara de Raviart-Thomas y Nedelec se diseñaron para que se cumplieran ambas condiciones. Para ser más específicos, denotemos de nuevo por S_h el espacio de los elementos cara de orden más bajo (cuyo diagrama de elementos mostramos en el centro de la segunda fila de la figura 3), y sea V_h el espacio de las funciones que son constantes a trozos.¹ Sabemos que $S_h \subset H(\text{div}, \Omega)$ y que por tanto estos elementos son admisibles para el principio

¹Puede quizás sorprender que busquemos u_h en V_h , un espacio de 3-formas discretas, y no en un espacio de 0-formas, habida cuenta de que u es una 0-forma. La resolución es a través de un operador estrella de Hodge, esta vez formado con respecto al producto interior euclídeo de \mathbb{R}^3 . En el método mixto, u_h es una 3-forma discreta que aproxima la imagen de u bajo este operador estrella.

variacional mixto. Además tenemos que $\text{div } S_h \subset V_h$, de manera que se cumple la condición (S1).

Para comprobar que se cumple la condición (S2), hacemos referencia al diagrama conmutativo (3.3). Dada $v \in V_h$, podemos resolver la ecuación de Poisson $\Delta\phi = v$ y tomamos $\sigma = \text{grad}\phi$ para así obtener una función con $\text{div } \sigma = v$ y $\|\sigma\|_{H^1} \leq C\|v\|_{L^2}$. Sea ahora $\tau = \Pi_h^S \sigma \in S_h$. Entonces

$$\text{div } \tau = \text{div } \Pi_h^S \sigma = \Pi_h^V \text{div } \sigma = \Pi_h^V v = v,$$

donde hemos usado la conmutatividad y que $v \in V_h$. Además, $\|\tau\|_{H(\text{div})} \leq c\|\sigma\|_{H^1} \leq c'\|v\|_{L^2}$, donde hemos usado la acotación de Π_h^S sobre $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Esto nos muestra que $\text{div } V_h = S_h$ y establece una cota de la inversa a un lado, y por tanto se verifica (S2). Desde luego, este mismo argumento demuestra también la estabilidad de un método mixto que se base en elementos cara de orden superior.

Vemos así que la estabilidad del método mixto de elementos finitos depende de las propiedades de los espacios V_h y S_h que se codifica en la esquina superior derecha del diagrama conmutativo (3.3).

Regresemos al problema de autovalores de la cavidad resonante (4.9) para explorar el método de Galerkin: hállese $\lambda_h \in \mathbb{R}, 0 \neq E_h \in Q_h$ tal que

$$\int_{\Omega} \text{rot } E_h \cdot \text{rot } F \, dx = \lambda_h \int_{\Omega} E_h \cdot F \, dx, \quad \text{para todo } F \in Q_h \quad (5.12)$$

Hemos visto que si $Q_h \subset \circ H(\text{rot}, \Omega)$ se toma como el espacio de elementos aristas, este método da buenos resultados en el sentido de que los autovalores positivos del problema discreto son buenas aproximaciones de los autovalores positivos del problema continuo. Sin embargo, la elección sencilla de elementos finitos de Lagrange no da buenos resultados. Pasamos ahora a explicar por qué funcionan tan bien los elementos arista basados en cuadrado medio del diagrama conmutativo (3.3). Siguiendo a Boffi y otros [4], ponemos $P_h = \text{rot } Q_h$ e introducimos el siguiente problema de autovalores mixto y discreto: hállese $\lambda_h \in \mathbb{R}, 0 \neq (E_h, p_h) \in Q_h \times P_h$ tal que

$$\int_{\Omega} E_h \cdot F \, dx + \int_{\Omega} \text{rot } F \cdot p_h \, dx \quad \text{para toda } F \in Q_h, \quad (5.13)$$

$$\int_{\Omega} \text{rot } E_h \cdot q \, dx = -\lambda \int_{\Omega} p_h \cdot q \, dx \quad \text{para toda } q \in P_h. \quad (5.14)$$

Resulta entonces sencillo verificar que si λ_h, E_h es una solución de (5.12) con $\lambda_h > 0$, entonces $\lambda_h, (E_h, \lambda_h^{-1} \text{rot } E_h)$ es una solución de (5.13), y si $\lambda_h, (E_h, p_h)$ es una solución de (5.13) entonces $\lambda_h > 0$ y λ_h, E_h es una solución

de (5.12). En resumen, los dos problemas son equivalentes excepto en que el primero admite un autovalor nulo que la formulación mixta elimina. Como se explica en [4], la precisión del problema mixto de autovalores descansa en la estabilidad del correspondiente problema mixto original. Este es un problema de punto de silla del tipo estudiado por Brezzi, de manera que la estabilidad también depende de condiciones análogas a (S1) y (S2). La demostración de estas condiciones en el caso de que Q_h sea el espacio de elementos cara se desprende, como en la verificación anterior de estabilidad, de las propiedades de sobreyectividad y conmutatividad codificadas en el diagrama (3.3).

El diagrama puede también utilizarse para explicar el autoespacio nulo que se computa con elementos arista. Recuérdese que en el caso de la malla que se muestra en la figura 6, este espacio tiene dimensión 145. De hecho, este autoespacio es simplemente el espacio nulo del operador *rot* cuando se restringe a Q_h . Refiriendo de nuevo al diagrama conmutativo (3.3), este es el gradiente del espacio W_h de elementos de Lagrange lineales que se anulan en la frontera. Su dimensión es, por consiguiente, exactamente el número de nodos interiores de la malla.

6. EL COMPLEJO DE ELASTICIDAD

Sea \mathbb{S} el espacio de matrices simétricas 3×3 . Dada una densidad de carga volumétrica $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, el sistema de elasticidad linealizada determina el campo de desplazamiento $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ y el campo de tensión $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{S}$ inducido en el dominio elástico Ω mediante las ecuaciones

$$\sigma = C\epsilon u, \quad -\operatorname{div} \sigma = f,$$

junto con condiciones de frontera como $u = 0$ sobre $\partial\Omega$. Aquí ϵu es la parte simétrica de la matriz $\operatorname{grad} u$, y el tensor de elasticidad $C : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ es un operador lineal simétrico definido positivo que describe el particular material elástico a estudio y que, posiblemente, varíe de punto a punto.

La solución (σ, u) puede caracterizarse en términos variacionales como un punto de silla del funcional de Hellinger-Reissner

$$\mathcal{L}(\sigma, u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} C^{-1} \sigma : \sigma + u \cdot \operatorname{div} \sigma \right) dx - \int_{\Omega} f \cdot u dx \quad (6.15)$$

sobre $H(\operatorname{div}, \Omega, \mathbb{S}) \times L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ (en otros términos, se busca σ en el espacio de funciones que tiene cuadrado integrable, toman como valores a matrices simétricas y cuya divergencia por filas también tiene cuadrado integrable y se busca u entre todas los campos integrales de cuadrado integrable).

En los métodos mixto de elementos finitos es necesario especificar subespacios de elementos finitos $S_h \subset H(\operatorname{div}, \Omega, \mathbb{S})$ y $V_h \subset L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ y restringir el dominio del problema variacional. Por supuesto, si queremos que el método mixto

sea estable debemos diseñar cuidadosamente los espacios: se deben cumplir los análogos de las condiciones de estabilidad (S1) y (S2). Como el funcional (6.15) es bastante parecido a (5.11) podría esperarse que se pudieran adaptar al caso de elasticidad los elementos finitos mixtos desarrollados para este último (es decir, los elementos cara para σ y los elementos discontinuos para u). Pero, en realidad, el requisito de simetría del tensor de tensión y el que hallamos reemplazado el gradiente por el gradiente simétrico han alterado significativamente la estructura. Durante cuarenta años, comenzando en los años sesenta, la búsqueda de elementos finitos mixtos para la elasticidad no produjo resultado alguno con elementos finitos estables formado con funciones de forma polinomiales.

Usando complejos discretos diferenciales, R. Winther y el autor han desarrollado recientemente los primeros elementos de ese tipo para problemas de elasticidad en dos dimensiones [1]. (El caso de dimensión 3 permanece abierto). En elasticidad, no se pueden interpretar de manera natural los campos de desplazamiento y de tensión como formas diferenciales, y por tanto, el complejo relevante no es el complejo de de Rham. De hecho, en 3 dimensiones, el complejo relevante es el *complejo de elasticidad*:

$$\mathbb{T} \hookrightarrow C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3) \xrightarrow{\epsilon} C^\infty(\Omega, \mathbb{S}) \xrightarrow{J} C^\infty(\Omega, \mathbb{S}) \xrightarrow{\text{div}} C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3) \rightarrow 0.$$

El operador J es un *operador diferencial de segundo orden* que actúa sobre un campo matricial simétrico reemplazando primero cada fila por su rotacional para, a continuación, substituir cada columna por su rotacional para así obtener otro campo matricial simétrico. El espacio solución \mathbb{T} es el espacio de dimensión 6 de los movimientos rígidos, el mismo espacio de polinomios lineales $a + b \times x$ que apareció como el espacio de funciones de forma para los elementos arista de orden inferior. Si el dominio Ω es topológicamente trivial, este complejo es exacto. Aunque en él interviene un operador de segundo orden, y parece bien distinto del complejo de de Rham, Eastwood [8] ha señalado recientemente cómo se puede derivar del complejo de de Rham mediante una construcción general que se conoce como la resolución de Bernstein-Gelfand-Gelfand.

En dos dimensiones, el complejo de elasticidad tiene la forma

$$\mathbb{P}_1 \hookrightarrow C^\infty(\Omega) \xrightarrow{J} C^\infty(\Omega, \mathbb{S}) \xrightarrow{\text{div}} C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2) \rightarrow 0.$$

donde ahora el operador diferencial de segundo orden es

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & -\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \end{pmatrix}$$

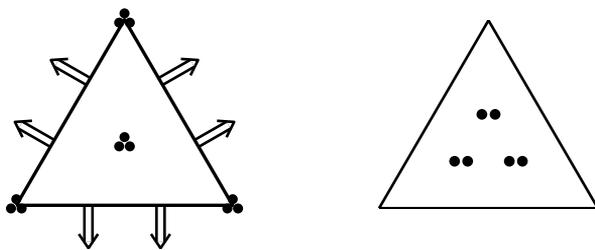


Figura 8: Diagrama de elementos para los nuevos elementos finitos mixtos para elasticidad, caso de orden inferior.

En el caso de orden inferior, los elementos finitos que se introdujeron en [1], y cuyos diagrama de elementos se muestran en la figura 8, usan campos vectoriales discontinuos lineales a trozos para el campo de desplazamiento y un espacio de funciones polinómicas a trozos para el campo de tensión y que describiremos a continuación. Las funciones de forma sobre un triángulo arbitrario T viene dadas por

$$S_T = \{ \tau \in \mathbb{P}_3(T, \mathbb{S}) \mid \text{div } \tau \in \mathbb{P}_1(T, \mathbb{R}^2) \}$$

que es un espacio de 24 dimensiones que consta de todos los campos de matrices cuadráticas simétricas junto con los campos cúbicos de divergencia cero. Los grados de libertad son

- los valores de las 3 componentes de $\tau(x)$ en cada vértice x de T (9 grados de libertad)
- los valores de los momentos de grado 0 y 1 de las dos componentes de τn sobre cada arista A de T (12 grados de libertad)
- el valor de las tres componentes del momento de grado 0 de τ sobre T (3 grados de libertad)

Obsérvese que estos grados de libertad son suficientes para asegurar la continuidad de τn a través de elementos cara y constituye, por tanto, un subespacio de $H(\text{div}, \Omega, \mathbb{S})$ de elementos finitos. La continuidad no es suficiente, sin embargo, para la inclusión en $H(\text{div})$. Los grados de libertad fuerzan además la continuidad en los vértices, que no se requiere para ser miembro de $H(\text{div})$. Por diversas razones, será útil disponer de un método mixto de elementos finitos para elasticidad que no use grados de libertad en los vértices. Pero, como señalaremos más adelante, esto no es posible si nos restringimos a funciones de forma polinomiales.

Para tener elementos finitos bien definidos, debemos verificar que los 24 grados de libertad forman una base del espacio dual de S_T . Incluimos a continuación esta comprobación porque nos permite ilustrar un aspecto del papel que desempeña el complejo de elasticidad. Puesto que $\dim S_T = 24$, sólo necesitamos demostrar que si para un τ todos los grados de libertad se anulan,

entonces ese $\tau = 0$. Ahora bien τn varía cúbicamente a lo largo de cada arista, se anula en los puntos extremos, y tiene momentos nulos de grado 0 y 1. Por consiguiente $\tau n \equiv 0$. Si ponemos $v = \operatorname{div} \tau$, un campo vectorial lineal sobre T , al integrar por partes obtenemos

$$\int_T v^2 dx = - \int_T \tau : \epsilon v dx + \int_{\partial T} \tau n \cdot v ds = 0$$

puesto que las integrales tanto de τ como de τn se anulan. Por consiguiente, τ tiene divergencia nula. Como el complejo de elasticidad es exacto, se tiene que $\tau = Jq$ para alguna función diferenciable q . Además $q \in \mathbb{P}_5(T)$, puesto que todas las segundas derivadas parciales de q pertenecen a $\mathbb{P}_3(T)$. Si ahora ajustamos con un elemento de $\mathbb{P}_1(T)$ (el espacio nulo de J), podemos suponer que q se anula en los vértices. Ahora bien $\frac{\partial^2 q}{\partial s^2} = \tau n \cdot n = 0$ en cada arista y, consecuentemente, q se ha de anular sobre todo ∂T . Esto implica que el gradiente de q también se anula en los vértices. Como $\partial^2 q / \partial s \partial n = -\tau n \cdot t = 0$ sobre cada arista (donde t es un vector unitario tangente a la arista), podemos concluir que $\partial q / \partial n$ se anula idénticamente sobre ∂T también. Puesto que q tiene grado a lo sumo 5, se debe anular idénticamente.

Denotemos por $\Pi_h^S : C^\infty(\Omega, \mathbb{S}) \rightarrow S_h$ la proyección ortogonal asociada a los grados de libertad suministrados, y por $\Pi_h^V : C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2) \rightarrow V_h$ la proyección L^2 . Para cualesquiera triángulo T , $\tau \in C^\infty(\Omega, \mathbb{S})$, y $v \in \mathbb{P}_1(\Omega, \mathbb{R}^2)$, tenemos

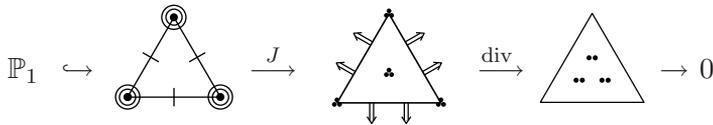
$$\int_T \operatorname{div} (\tau - \Pi_h^S \tau) \cdot v dx = - \int_T (\tau - \Pi_h^S \tau) : \epsilon v dx + \int_T (\tau - \Pi_h^S \tau) n \cdot v ds.$$

Los grados de libertad que intervienen en la definición de Π_h^S aseguran que el lado derecho se anula, y como consecuencia se deduce la conmutatividad $\operatorname{div} \Pi_h^S \tau = \Pi_h^V \operatorname{div} \tau$ que es esencial para la estabilidad. (A decir verdad, aquí aparece una dificultad técnica y es que, tal y como se ha definido, Π_h^S no está acotado en $H^1(\Omega, \mathbb{S})$, Consúltense [1] para ver como se resuelve esta dificultad). Obsérvese que por sus mismas definiciones, $\operatorname{div} S_h \subset V_h$ y, usando la conmutatividad, tenemos que $\operatorname{div} S_h = V_h$, es decir, $S_h \xrightarrow{\operatorname{div}} V_h \rightarrow 0$ es exacta. Para completar este enfoque en un análogo discreto del complejo de elasticidad, definimos Y_h como la imagen inversa de S_H bajo J , para que así Y_h sea exactamente el espacio de los polinomios de grado 5 que son C^1 a trozos y que, además, son C^2 en los vértices de la malla. De hecho, este es un espacio de elementos finitos bien conocido y al que se denomina espacio de Hermite o de Argyris de quinto grado, que se desarrolló para resolver ecuaciones en derivadas parciales de cuarto orden (para los que se requiere la inclusión en $H^2(\Omega)$ y, por consiguiente, la continuidad C^1). Las funciones de forma son de $\mathbb{P}_5(T)$ y los 21 grados de libertad son los valores de las funciones y de todas sus primeras y segundas derivadas parciales en los vértices y las integrales de las

derivadas normales a lo largo de las aristas. Tenemos entonces un *complejo de elasticidad discreto*

$$\mathbb{P}_1 \hookrightarrow Y_h \xrightarrow{J} S_h \xrightarrow{\text{div}} V_h \rightarrow 0.$$

o, en diagrama,



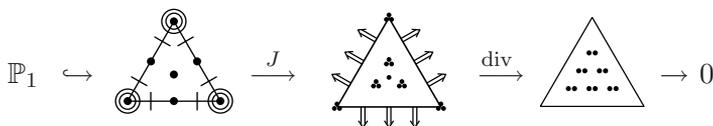
Además, esta sucesión es exacta y se empareja con la sucesión de elasticidad bidimensional a través de un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{P}_1 & \hookrightarrow & C^\infty(\Omega) & \xrightarrow{J} & C^\infty(\Omega, \mathbb{S}) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \Pi_h^Y & & \downarrow \Pi_h^S & & \downarrow \Pi_h^V \\ \mathbb{P}_1 & \hookrightarrow & Y_h & \xrightarrow{J} & S_h & \xrightarrow{\text{div}} & V_h \rightarrow 0 \end{array}$$

La parte derecha de este diagrama codifica toda la información necesaria para establecer la estabilidad de nuestro método mixto de elementos finitos.

Los elementos finitos de Hermite de quinto orden aparecen de manera natural a partir de nuestros elementos finitos mixtos para completar el diagrama conmutativo. Si no se hubieran conocido estos elementos finitos desde hace tiempo, podíamos haber usado el procedimiento descrito para pergeñar un espacio de elementos finitos contenido en $H^2(\Omega)$. De hecho, tras un cuidadoso análisis podemos darnos cuenta de que cualquier esquema estable de elementos finitos mixto para elasticidad dará lugar a un espacio de elementos finitos con funciones de forma polinomiales contenidas en $H^2(\Omega)$. Sin embargo, es bien sabido que esos espacios son complicados y difíciles de construir. De hecho, se puede demostrar que un espacio de elementos finitos en H^2 debe utilizar funciones de forma de grado al menos 5 y las evaluaciones de las primeras y segundas derivadas parciales en los vértices deben encontrarse entre los grados de libertad [14]. Esto ayuda a explicar porque ha sido tan difícil diseñar elementos finitos mixtos para elasticidad. En particular, se puede establecer de manera rigurosa que los elementos de tensión deben involucrar polinomios de grado 3, y que las evaluaciones en los vértices son grados de libertad inevitables.

Además de los elementos que acabamos de describir, en [1] se introducen también elementos de orden superior. Podemos entender los elementos de orden superior como los dos últimos elementos en el siguiente complejo de elasticidad discreto



También podemos simplificar ligeramente los elementos de orden inferior. Para ello se reduce el espacio de desplazamiento de campos vectoriales lineales a trozos a movimientos rígidos a trozos, y se reemplaza el espacio de tensión con la imagen inversa por la operación de divergencia del espacio de desplazamiento reducido. Esto nos conduce a los elementos estables que se muestran en la siguiente sucesión exacta:

$$\mathbb{P}_1 \hookrightarrow \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \quad | \\ \diagdown \quad \diagup \\ \circ \end{array} \xrightarrow{J} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} \xrightarrow{\text{div}} \begin{array}{c} \triangle \\ \diagdown \quad \diagup \\ \rightarrow \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \rightarrow 0$$

La ineludible complejidad de los elementos finitos de H^2 lleva con frecuencia a los interesados en resolver ecuaciones de orden 4 a recurrir a elementos finitos disconformes aproximando H^2 . Esto significa que el espacio de elementos finitos no pertenece a H^2 , en el sentido de que las funciones o las derivadas normales pueden tener saltos al cruzar fronteras de elementos, pero los espacios se diseñan para que los saltos sean suficientemente pequeños en algún sentido (por ejemplo, en media). El análisis de error es más complicado para elementos disconformes porque, además de propiedades de estabilidad y aproximación de los elementos finitos, se ha de estudiar el *error de consistencia* que generan los saltos en los elementos finitos. En [2], Winther y el autor investigaron la posibilidad de elementos finitos mixtos disconformes para la elasticidad, que, sin embargo, son estables y convergentes, y desarrollaron dos de estos elementos, que se relacionan con elementos H^2 disconformes a través de complejos de elasticidad discretos disconformes, y que se representan esquemáticamente a continuación:

$$\mathbb{P}_1 \hookrightarrow \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \quad | \\ \diagdown \quad \diagup \\ \circ \end{array} \xrightarrow{J} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} \xrightarrow{\text{div}} \begin{array}{c} \triangle \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \rightarrow 0$$

$$\mathbb{P}_1 \hookrightarrow \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \quad | \\ \diagdown \quad \diagup \\ \circ \end{array} \xrightarrow{J} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} \xrightarrow{\text{div}} \begin{array}{c} \triangle \\ \diagdown \quad \diagup \\ \rightarrow \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \rightarrow 0$$

En ambos casos, el espacio de funciones de forma para la tensión se ubica entre $\mathbb{P}_1(T, \mathbb{S})$ y $\mathbb{P}_2(T, \mathbb{S})$. Los elementos finitos disconformes H^2 que se representan en estos diagramas se desarrollaron en [11] para ciertos problemas de cuarto orden. Obsérvese que los elementos mixtos disconformes para elasticidad son significativamente más simples que los ortodoxos (y, en particular, no precisan grados de libertad asociados a sus vértices).

REFERENCIAS

- [1] D.N. ARNOLD & R. WINTHER, Mixed finite elements for elasticity, *Numer. Math.*, **92** (2001), 401–419.
- [2] D.N. ARNOLD & R. WINTHER, Nonconforming mixed finite elements for elasticity, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, en prensa.
- [3] I. BABUSKA, & J. OSBORN, Eigenvalue Problems, in; *Handbook of Numerical Analysis*, vol. II, P.G. Carliet & J.J. Lions, eds. Elsevier, 1991, 641–788.
- [4] D. BOFFI, P. FERNANDES, L. GASTALDI & I. PERUGIA, Computational models of electromagnetic resonators: analysis of edge element approximation, *SIAM J. Numer. Anal.*, **36** (1999), 1264–1290.
- [5] A. BOSSAVIT, Whitney forms: a class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetics, *IEEE Proc. A*, **135** (1988), 493–500.
- [6] F. BREZZI, On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from Lagrange multipliers, *Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle Sér. Rouge Anal. Numér.*, **8** (1974), 129–151.
- [7] P.G. CIARLET, *The finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, 1978.
- [8] M. EASTWOOD, A complex from linear elasticity, *Rend. Circ. Mat. palermo (2) Suppl.*, **63** (2000), 23–29.
- [9] R. HIPTMAIR, Finite elements in computational electromagnetism, *Acta Numerica*, **11** (2000), 237–340.
- [10] J.-C. NEDELEC, Mixed finite elements in \mathbb{R}^3 , *Numer. Math.*, **50** (1980), 315–341.
- [11] T.K. NILSEN, X.C. TAI & R. WINTHER, A robust nonconforming H^2 -element, *Math. Comput.*, **70** (2001), 489–505.
- [12] P.A. RAVIART & J.M. THOMAS, A mixed finite element method for second order elliptic problems, Springer Lecture Notes in Mathematics vol. 606, Springer Verlag, 1977, 292–315.
- [13] H. WHITNEY, *Geometric Integration Theory*, Princeton University Press, 1957.

- [14] A. ZENISEK, A general theorem on triangular $C^{(n)}$ finite elements, *Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle Sér. Rouge Anal. Numér.*, **8** (1974), 119–127.

Douglas N. Arnold
Institute for Mathematics and its Applications
University of Minnesota
400 Church St. S. E.
Minneapolis, MN 55455
Estados Unidos de América
Correo-electrónico: arnold@ima.umn.edu

Traducción de Carmelo Alonso Torres