Educación

Sección a cargo de

María Luz Callejo

Papel de la didáctica de las matemáticas en la formación de profesores de secundaria

por

Miguel R. Wilhelmi

La pertinencia de la enseñanza de la Didáctica de la Matemática (DM) como disciplina científica en la formación de profesores de secundaria se apoya esencialmente en: la necesidad de ubicar el área de conocimiento DM en el contexto universitario; la incapacidad de muchos profesores de controlar el sistema didáctico (por aplicación irreflexiva de técnicas de enseñanza) y de anticipar las realizaciones efectivas de los estudiantes. Los momentos fundamentales que una enseñanza en DM en un contexto universitario debiera tener: *teórico* (la DM como instrumento de identificación, formalización y sistematización de concepciones, expectativas y modelos de enseñanza y aprendizaje), *práctico* (análisis de situaciones reales, vividas u observadas) y *de innovación educativa* (elaboración fundamentada de propuestas de mejora de la enseñanza y el aprendizaje de un contenido matemático). El discurso se estructura en torno a una innovación educativa (obtención de razones trigonométricas de un ángulo cualquiera) elaborada a partir de dicha formación.

Introducción

Brousseau (2004) señala que la mayor parte de los programas de investigación sobre la enseñanza de las matemáticas, a pesar del grado de sofisticación y complejidad que han alcanzado, separan los dominios del saber y de la enseñanza, confiando, junto a Comenius (1592-1670), en la mayoría de los casos de forma implícita, en la existencia de un único método válido para la enseñanza de todas las materias (en particular, de las matemáticas).

Este planteamiento simplifica el trabajo y la formación de los profesores; en particular, se minimiza el problema de las transformaciones adaptativas del saber necesarias para su enseñanza; llegándose a eludir totalmente en ciertos planteamientos los procesos de *transposición didáctica* (Chevallard, 1991).

En este contexto, se acepta que una buena formación matemática y unos conocimientos básicos en pedagogía y psicología (educativa y cognitiva) son suficientes para abordar con garantías la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato (12-18 años)[1]. Este planteamiento presupone un *modelo espontáneo de profesor* (la enseñanza como un arte producto de la experiencia y de las capacidades innatas) o un modelo de profesor *centrado en el producto*, según el cual "aprender a ser profesor equivale a la adquisición de un 'saber hacer' que se puede reproducir a voluntad según cada ocasión" (Oliveras, 1996, p.95).

Por otro lado, Rico (1997, p.186) describe el perfil promedio del estudiante de último curso de la Licenciatura de Matemáticas[2]. En particular, el estudiante considera que su formación matemática es más que suficiente para ser "profesor de matemáticas" y que lo único que necesita es una colección de reglas, trucos, recomendaciones, esquemas, etc., que le permitan elaborar un "arquetipo de profesor a reproducir". Este planteamiento se refuerza debido al desconocimiento por parte de los estudiantes de la existencia de un campo de investigación denominado Didáctica de las Matemáticas, con sus propios objetivos y métodos, que ha surgido "del interés principal que tienen, no ya los elementos del triángulo didáctico (profesor, matemáticas, alumno), sino esencialmente las condiciones (específicas) que presiden la construcción y la

[1]La política educativa en España ha reforzado esta situación. El Curso de Adaptación Pedagógica (CAP), requisito hasta la fecha para acceder a una plaza de funcionario en la educación secundaria y bachillerato, establece que únicamente un 15% (aprox.) de la formación profesional para profesores de secundaria sea dedicada a las didácticas específicas; incluso, en ciertas universidades, en la aplicación del curso CAP no se contempla ninguna formación didáctica específica, de tal forma que los módulos teóricos se reducen a una formación psicopedagógica. Otra cuestión muy distinta, y de igual manera preocupante, es la evidente desconexión entre los módulos teóricos y las prácticas de enseñanza en los centros de enseñanza media y en los institutos. Prueba de estas y otras deficiencias de la formación CAP es la puesta en marcha por el Ministerio de Educación del TED, que "se organiza en torno a procesos concebidos en dimensiones complementarias: la fundamentación disciplinar científica y su correspondiente dimensión didáctica; la cualificación académica y la dimensión profesionalizadora" (MECD, 2004, p.4716).

[2]En la actualidad, en el contexto español, los profesores de secundaria y bachillerato de matemáticas son licenciados en Matemáticas en su mayoría (y, en menor porcentaje, licenciados en Física, Química, Biología, Arquitectura, Económicas o Ingeniería), que reciben un "reciclaje" en psicopedagogía y didáctica (vía curso CAP y, en el mejor de los casos, en alguna asignatura dentro de la propia Licenciatura). La LOCE "establece (Art. 58.1) la exigencia del TED, además de las titulaciones académicas correspondientes, para impartir docencia en la Educación Secundaria" (MECD, 2004, p.4716).

difusión de los conocimientos matemáticos útiles para los hombres y para sus sociedades" (Brousseau, 2004).

¿Cómo aunar las necesidades (y las expectativas) de los estudiantes en formación y la enseñanza de la DM como disciplina? "La situación actual implica tener que pensar en diferentes transposiciones didácticas del 'conocimiento' de Didáctica de las Matemáticas en función del perfil profesionalizador del título en el que se va tener carga docente. Intentar explicitar las características propias de este proceso requeridas en los diferentes títulos universitarios puede ser una tarea compleja y un reto para los profesores adscritos al Área de conocimiento Didáctica de las Matemáticas de cara al futuro [...] El intentar dar respuesta a estas cuestiones está poniendo de relieve que no existen planteamientos monolíticos detrás de la etiqueta Didáctica de las Matemáticas y, por consiguiente, en la forma de entender y realizar el paso del conocimiento científico en contenido curricular para la docencia". (Llinares, 1997, p. 27).

En la actualidad, en los cursos de pregrado en la mayoría de las universidades, la transposición del conocimiento DM se ha centrado en ciertos aspectos (por orden de importancia): primero, un saber técnico (práctica profesional: preparación de clases, selección de material, métodos de evaluación, etc.); segundo, en una reflexión sobre la figura "profesor de matemáticas" (competencias que garantizan la gestión de conocimiento matemático antes, durante y después de la instrucción); y, por último, en la utilidad de ciertos tópicos teóricos de la disciplina DM para el análisis del *sistema didáctico*[3]. En este contexto, se ha relegado la enseñanza de la DM como disciplina científica, en un sentido fiel y extenso, a los cursos de postgrado (maestría y doctorado)[4].

Aceptando la legitimidad de esta postura, defenderemos la tesis según la cual es pertinente la enseñanza de la DM como disciplina científica en el nivel de pregrado, esto es, como una disciplina que busca producir nociones

[3] *Sistema didáctico*: conjunto *ordenado* de conocimientos, situaciones y agentes (y de las relaciones que se establecen entre ellos) con relación a un determinado saber; en este contexto, el orden viene dado por el *contrato didáctico*. "Se forma un *sistema didáctico* cada vez que algunas personas se enfrentan a una cuestión cuya respuesta no es evidente y deciden hacer algo para resolverla. En este caso, las personas se convierten en *estudiantes* de la cuestión [...] que pueden pedir ayuda a un director de estudio: se constituye de esta forma un *sistema didáctico*, formado [...] por las cuestiones matemáticas [...], los estudiantes y el director de estudio" (Chevallard et al., 196-197). En este contexto, *estudiante* no es necesariamente sinónimo de *alumno*, ni director de estudios sinónimo de *profesor*; los estudiantes pueden ser investigadores y el director de estudio el investigador principal.

[4] Una justificación de este hecho es el intento por minimizar la distancia que existe entre aprender a enseñar en la universidad y aprender a enseñar "en la práctica". Como lo señala Llinares (2002), en la universidad los estudiantes para profesores aprenden un conocimiento profesional útil para la práctica de la enseñanza en un contexto (universitario) diferente de dónde será usado (escuela) para resolver problemas y crear nuevos conocimientos. Entonces, los programas de formación intentan involucrar a los estudiantes en la negociación de las metas de enseñanza, de tal forma que los "programas de formación" y la "formación de los estudiantes" tengan un desarrollo paralelo y cooperativo.

unificadoras (cognitivas, epistemológicas y didácticas); reagrupar saberes, problemas, comportamientos de alumnos; describir clases de situaciones; etc.; de manera que se pueda obtener formas de intervención genérica según los tipos de saberes, problemas, etc., obtenidos[5].

> "La existencia de una técnica se apoya al menos sobre la identificación y el reconocimiento de unas prácticas y de sus resultados canónicos. Una ingeniería soporta las técnicas que propone en un campo científico. La comunicación, la utilización y la reproducción de situaciones producidas precisan del concurso de conocimientos y saberes específicos. De esta manera, la didáctica es el único medio de discriminar un problema no resuelto de ingeniería didáctica, de identificar y de clasificar un trabajo original en un dominio, de precisar sus condiciones de uso y de reproducción, y, por lo tanto, de reconocer y de hacer reconocer las creaciones, las invenciones y los procesos de investigación y de producción científica de los profesores". (Brousseau, 1998, pp. 335–336).

Por otro lado, la aceptación de que la DM sea parte de la formación inicial del profesorado tiene su respaldo en la política educativa actual (MECD, 2004). El Título de Especialización Didáctica (TED) contempla un "periodo académico" que puede quedar vinculado directamente a la formación superior.

> "Es preciso destacar la necesidad de fomentar la configuración del perfil docente en el alumnado durante los estudios de su titulación universitaria; por ello, se hace necesario prestigiar la especialización didáctica, introduciendo factores de mayor rigor académico, adecuación a la realidad social y evaluación sistematizada, tanto en la teoría como en las prácticas docentes" (MECD, 2004, p. 4716).

De esta forma, la DM como disciplina científica constituye un instrumento privilegiado para llevar a cabo la reforma educativa propuesta en la Ley Orgánica de Calidad de la Educación (LOCE), que determina como una función específica de los profesores "la investigación, la experimentación y la mejora continua de los procesos de enseñanza" (MECD, 2002, Art.56, punto h)[6].

[5]Es necesario puntualizar que los repertorios genéricos de situaciones, problemas y comportamientos en general no tienen aplicación directa en la enseñanza.

[6]Las reformas educativas futuras modificarán, con toda probabilidad, los intrumentos de aplicación y desarrollo del principio básico de "investigación, experimentación y mejora"; sin embargo, el principio en sí mismo prevalecerá.

Didáctica de las matemáticas como disciplina científica

La DM es comprendida desde el programa epistemológico (Gascón, 1999) como un campo de investigación que ha tomado cierta distancia con respecto a la acción sobre el sistema educativo[7]; en concreto, no es necesariamente una didáctica normativa, sino más bien una disciplina explicativa de las relaciones dentro del sistema didáctico. Esto choca con el punto de vista clásico, que considera a la DM como un *saber técnico* de aplicación en la enseñanza, esto es, como una colección de recursos (físicos y metodológicos) al alcance del profesor que le permitan realizar una instrucción "satisfactoria".

La diferencia esencial entre la perspectiva clásica en DM y el programa epistemológico es la problematización explícita del saber matemático; el saber matemático pasa de ser transparente, no cuestionado, a ser un *objeto de estudio*. Con otras palabras, no es suficiente seleccionar, secuenciar y temporalizar los contenidos matemáticos que han de ser enseñados, sino que se precisa una modelización expresa del saber matemático, "dado que los modelos epistemológicos usuales no se han construido para responder a los mismos problemas que se plantea la didáctica" (Chevallard *et al.*, 1997, p. 75).

Como formadores, debemos contestar a una pregunta compleja: ¿es pertinente la enseñanza de la DM como disciplina científica, tal y como se comprende en el seno del programa epistemológico, en la formación de profesores de matemáticas de secundaria? No es fácil dar un respuesta convincente. El estudiante en formación, futuro profesor, se ve necesitado de soluciones prácticas inmediatas, relacionadas con la utilización de recursos humanos y materiales, el dominio de aula, conocimientos complementarios de matemáticas, técnicas de análisis de comportamientos (psicológicos y sociales), restricciones institucionales, etc. Por su parte, la DM aporta un conocimiento del funcionamiento del sistema didáctico, pero, "favorece más la crítica de la enseñanza tradicional que soluciones inmediatas" (Artigue, 1995, p. 18). ¿Significa esto que se debe renunciar a la DM como disciplina científica en la formación de los futuros profesores de secundaria en favor de una enseñanza normativa de la misma? Tres razones para la enseñanza de la DM como disciplina científica:

1. *Contexto universitario.* La universidad cumple dos funciones: docencia e investigación. Esta última faceta impone la necesidad de establecer un espacio para la construcción de nuevos conocimientos en DM y para la contribución a la estabilidad de los ya contrastados. Los estudiantes universitarios tienen que ser conscientes de esta necesidad y participar, en la medida de sus posibilidades, en la producción de nuevos conocimientos.

2. *Enseñanza por ostensión.* La restricción de la DM a una colección estereotipada de estrategias metodológicas suele conllevar una enseñanza por osten-

[7]La distancia que toma la DM respecto a la acción dentro del sistema educativo determina una ruptura radical con la metodología investigación-acción: "La investigación-acción proporciona un medio para trabajar que vincula la teoría y la práctica en un todo único: ideas en acción" (Kemmis *et al.*, 1987, p. 10).

sión: el profesor novel aplicará, con más o menos fidelidad, dichas estrategias, pero, en general, será incapaz de tener un control semiótico[8], epistemológico y didáctico de la gestión de la clase. En este contexto, la DM constituye un instrumento de desarrollo de la figura *profesor de matemáticas*, esto es, agente del sistema didáctico capaz de explicitar concepciones de los alumnos; obstáculos; restricciones epistemológicas, cognitivas y didácticas; orientaciones para la construcción de currículos; etc.

3. *Anticipación de realizaciones efectivas*. El carácter explicativo de la DM permite la anticipación de realizaciones efectivas y el control de la validez, pertinencia, adecuación, etc., de experimentaciones de ciertas innovaciones pedagógicas[9], confeccionadas por el profesor, por un equipo de trabajo de la institución a la que éste pertenece o por el Ministerio de Educación.

¿Cómo ponderar las necesidades inmediatas de los futuros profesores y la enseñanza de la DM como disciplina científica? En primer lugar, creemos necesario renunciar a una enseñanza normativa de la DM como disciplina científica, en pro de una *didáctica en acción* (Artigue, 1995), esto es, las nociones fundamentales de la DM y sus aplicaciones deben surgir *en tensión con y al ritmo* de las necesidades concretas que los estudiantes en formación tengan.

No hay que confundir la idea de "didáctica en acción" con la metodología "investigación-acción". La primera presupone el reconocimiento de un campo de conocimiento científico que ha identificado y descrito ciertas nociones (contrato didáctico, variable didáctica, situación, obstáculo, saber, función semiótica, etc.), utiliza ciertos métodos de obtención de datos (entrevistas, test, etc.) y de análisis de estos datos (factorial de correspondencias, implicativo según Gras, etc.), evoluciona por medio de una metodología de investigación (ingeniería didáctica), establece resultados que se someten a la crítica de una comunidad y se desarrolla ordenada y sistemáticamente. Por su parte, la investigación-acción se caracteriza por el trabajo cooperativo de colectivos (*decisión de grupo*) que comparten una misma preocupación temática y se comprometen en la mejora de la efectividad y de la comprensión de sus prácticas (*compromiso con la mejora*). Establece un método de trabajo (trazar un plan, llevarlo a cabo, observar sus consecuencias, reflexionar, reformular el plan; continuando el proceso cíclicamente), pero no explicita la referencia a teoría alguna en el proceso. Como método, la investigación-acción no precisa establecer *a priori* un campo de saber específico de aplicación (es universal en el sentido de

[8]*Semiótica*: teoría general de los signos. Por *control semiótico* entendemos la capacidad de articular las ideas matemáticas con los sistemas de signos en la resolución de problemas.

[9]En general, no se puede decir que las innovaciones sean *didácticas* (esto es, específicas del contenido matemático a enseñar); en muchas ocasiones, conllevan simplemente pautas generales para el control de aula, fomento de la participación y comunicación horizontal profesor-alumno, estrategias de trabajo en grupo, etc. En definitiva, cambios metodológicos aplicables a la práctica docente *independientemente del contenido a enseñar*; en estos casos, el análisis didáctico exigirá discutir la pertinencia de dichas innovaciones con relación al saber que se desea enseñar.

Comenius) ni colectivo al que se refiere (profesores, estudiantes, directores de instituciones educativas, padres, etc.)[10] y, por lo tanto, no existe necesariamente un referente explicativo y justificativo del plan trazado, de las consecuencias que de él se derivan y de las decisiones que el colectivo adopta en la reformulación del plan.

La didáctica en acción se concreta en la enseñanza de la DM como disciplina científica en un contexto universitario (formación de profesores de secundaria) en los siguientes tres momentos:

1. *Teórico.* A partir de conversaciones informales, se va construyendo un esquema que intenta responder a la pregunta *qué significa ser profesor de matemáticas.* La DM es un instrumento de formalización de ciertas concepciones, expectativas y modelos que los estudiantes tienen, heredados de su cultura general, de su formación en psicología (general, evolutiva y educativa) y de su experiencia personal.

2. *Práctico.* Los estudiantes se ven involucrados en una situación con intención didáctica; se comportan como "alumnos", no como "estudiantes de DM" (el profesor de DM es entonces un "profesor de matemáticas"). Luego, ya nuevamente como estudiantes de DM, realizan una descripción de la situación: identifican el papel del profesor y del "alumno"; determinan los conocimientos matemáticos involucrados y los saberes institucionalizados[11]; discriminan los procedimientos, técnicas y teorías matemáticas utilizadas; aislan las *variables didácticas*[12]; destacan las restricciones y rupturas del *contrato didáctico*[13]; describen y evalúan el medio (*milieu*)[14] implementado; etcétera.

---

[10]Esto no significa que la Investigación-Acción sea incompatible con la especificación de un saber y de un colectivo sobre el cual se quiere intervenir. Por ejemplo, cuando un grupo de profesores decide involucrarse en un *proyecto colaborativo* (Climent y Carrillo, 2003) especifican ciertos objetos de saber del currículo que consideran "problemáticos" y, sobre los cuales, van a focalizar su *acción*, *reflexión* y *comunicación*, con la intención de desarrollar un trabajo *autónomo* más eficaz.

[11]*Institucionalización del saber*: proceso por el cual las producciones (estrategias, conocimientos, procesos, etc.) de los alumnos adquieren un estado cultural y social. Junto a la *devolución*, en Teoría de Situaciones (Brousseau, 1998), uno de los principales papeles del profesor. *Devolución*: Acto por el cual el profesor transfiere al alumno la responsabilidad matemática de una situación de aprendizaje y acepta las consecuencias de esta transferencia.

[12]*Variable didáctica*: Valor que el profesor puede manipular (cambiar o fijar) y que determina un cambio en la estrategia de resolución de los alumnos.

[13]*Contrato didáctico*: Conjunto de reglas, generalmente implícitas, que determinan la responsabilidad matemática de profesor y estudiantes con relación a un determinado saber.

[14]Medio (*milieu*): Conjunto de técnicas, procedimientos, tecnologías y significados de objetos matemáticos que pertenecen al bagaje matemático de una sociedad (clase o comunidad científica) y que, por lo tanto, son utilizados de manera rutinaria (eficaz, no problemática) y conjunto de instrumentos materiales o humanos (situaciones, calculadoras, libros de texto, clases, etc.) disponibles para la adaptación de los objetos conocidos a nuevos contextos, la comunicación de resultados matemáticos y la construcción de nuevos objetos matemáticos.

3. *Innovación educativa.* Los estudiantes escogen un tema de su interés del currículo oficial y realizan, con diferentes grados de profundidad: un análisis curricular del mismo; consultas críticas de libros de texto; determinación de aspectos de la enseñanza tradicional no pertinentes en función de ciertos presupuestos; determinación de la existencia de un obstáculo (didáctico, cognitivo o epistemológico); establecimiento de directrices generales de actuación en situaciones concretas de enseñanza y bases de control de significado en el aprendizaje de los alumnos; y, por último, elaboración de una propuesta educativa viable. Todo ello constituye las bases fundamentales de una *innovación educativa*[15].

El proyecto global que se persigue consiste en discriminar, describir y utilizar dispositivos de enseñanza de una noción, proceso o significado matemáticos, específicos tanto de estos objetos matemáticos como de su enseñanza y aprendizaje. Esto no implica renunciar a la búsqueda de métodos generales de control, y de intervención en el *sistema didáctico*. De hecho, "la ambición de estudiar específicamente las condiciones particulares de la comprensión y de la adquisición de cada conocimiento en cada una de las circunstancias donde puede presentarse resulta totalmente extravagante. Esta ambición va en el sentido inverso de toda actividad científica que tiende a abstraer de sus condiciones particulares las relaciones más generales. Así, la actividad científica va al encuentro de la didáctica, que tiende a hacer emerger los métodos comunes en un campo lo más vasto posible de los contenidos a enseñar, con el fin de proyectar la complejidad sobre dos o tres componentes y de esta manera permitir una formación económica de los profesores" (Brousseau, 2004).

A continuación, mostraremos cómo un conjunto reducido de nociones didácticas generales permiten describir algunos problemas de construcción y comunicación del saber "razones trigonométricas de ángulos notables", determinando pautas para la elaboración de un *sistema de prácticas institucionales* (Godino, 2003) que permita la introducción y desarrollo de las nociones y procesos fundamentales de la trigonometría que se enseña en el nivel secundario. La descripción no es exhaustiva, se ajusta a la puesta en marcha del plan de formación en DM como disciplina científica en un contexto universitario; en concreto, en la construcción de la innovación educativa motivo de discusión en las siguientes secciones han participado un grupo de estudiantes del cuarto año (19-21 años) de la carrera profesional de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura (Perú).

[15]Esta formación de base, que culmina con la elaboración de proyectos educativos viables y de innovación, es coherente con las medidas de apoyo al profesorado que propone la LOCE (MECD, 2002); en particular con "el reconocimiento de la labor del profesorado atendiendo [...] a la implantación de planes que supongan innovación educativa" (Art. 62, punto c) y a la posibilidad de que los profesores disfruten "de licencias retribuidas con el fin de estimular la realización de actividades de formación y de investigación e innovación educativas" (Art. 62, punto d).

Antes de ello, es preciso contestar a una cuestión fundamental: ¿es pertinente plantear un análisis en un contexto español y ejemplificarlo con una experimentación en un contexto peruano, teniendo en cuenta las diferencias culturales, sociales y universitarias de estos dos contextos? El sistema educativo peruano contempla la formación específica de profesores de matemáticas para secundaria. Esta formación abarca la enseñanza de nociones, procesos y significados de Análisis Matemático, Geometría Proyectiva, Álgebra Lineal, etc. en un nivel equiparable a los primeros cursos universitarios de una licenciatura de ciencias en España. Este contexto matemático posibilita abordar el objetivo esencial de la formación profesional que hemos apuntado: propiciar espacios de reflexión sobre los objetos matemáticos y sobre los significados personales e institucionales atribuidos a dichos objetos de cara a la enseñanza y aprendizaje de los mismos. De esta forma, el grupo de estudiantes seleccionado es representativo de un colectivo interesado en problematizar su conocimiento *de* y *sobre* (Climent y Carrillo, 2003) las matemáticas y, por lo tanto, de abordar el objetivo de *desarrollo profesional* que deseamos ejemplificar.

Breve análisis de la enseñanza actual de "razones trigonométricos de ángulos notables" y sus consecuencias

Esquemáticamente, la aplicación de las propuestas educativas actuales (MEC, 1992; DINESST, 2003; NCTM, 1989, 2001) para la enseñanza de la trigonometría en la secundaria obligatoria sigue las siguientes pautas: se introducen las razones trigonométricas (seno, coseno, tangente); se determinan dichas razones para una serie de ángulos notables (0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270° y 360°); se calculan las razones trigonométricas de otros ángulos y se demuestran relaciones trigonométricas *complejas* a partir de relaciones trigonométricas (seno y coseno de un ángulo suma, de un ángulo doble o mitad, leyes de senos y de cosenos, etc.); se determinan triángulos rectángulos conocida la longitud de alguno de sus lados y la amplitud de alguno de sus ángulos; y, por último, se resuelven problemas *donde sea necesario utilizar triángulos*.

Una vez que los estudiantes han descrito este esquema de enseñanza, se apoyan en ciertas nociones generales identificadas *a priori* en el análisis teórico (primer momento de la didáctica en acción) para describir de forma técnica (no totalmente empírica) dicha enseñanza. De esta forma, las nociones teóricas se particularizan al proceso de enseñanza y aprendizaje del saber "razones trigonométricas de ángulos notables". Algunos aspectos resaltados por los estudiantes son:

1. *Dicotomía "valores aproximados - valores exactos"*. Los instrumentos tecnológicos que es preciso conocer para determinar las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera son complejos. En muchos casos, para ampliar el conjunto dado de ángulos notables, el profesor introduce magistralmente las razones trigonométricas de otros ángulos; por ejemplo, las razones trigonométricas (aproximadas) de los ángulos de 37° y de 53° se obtienen a partir de un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5. Sin embargo, no se especifica el origen de este triángulo ni el hecho de que los valores para las razones trigonométricas que así se obtienen sean aproximados.

2. *Desplazamiento del foco de atención en la enseñanza.* Una justificación para la introducción ostensiva de razones trigonométricas de *nuevos ángulos notables* (por ejemplo, 37° y 53°), es la incapacidad del sistema educativo de producir medios de enseñanza pertinentes para la introducción de las nociones fundamentales de la trigonometría plana; entonces, como no es posible preservar el fundamento epistemológico, se tramita *a la baja* el proyecto de enseñanza: se limita el número de técnicas a enseñar y las justificaciones de éstas se reducen a la mínima expresión. Para completar el *espacio vacío*, se sustituye el objeto original de estudio por el aprendizaje de una colección mayor de ángulos notables y listas de ejercicios donde es preciso determinar razones trigonométricas de ángulos *complejos*.

3. *Atomización.* La reducción de las tecnologías (justificaciones de las técnicas) lleva consigo un aprendizaje por *repetición*: los alumnos reproducen gestos rituales que no pueden justificar ni enmarcar dentro de una teoría; en este contexto, el *buen* estudiante es aquel que mimetiza dichos gestos en el tiempo destinado a ello. La consecuencia de este tipo de enseñanza es el aislamiento de las técnicas, de tal forma que los alumnos no son capaces de utilizarlas en contextos diferentes a los que las originaron. Casi irremediablemente, el destino final de las técnicas es el olvido. Así, por ejemplo, el procedimiento de obtención de las fórmulas del ángulo doble y del ángulo mitad a partir de las fórmulas de las razones trigonométricas del ángulo suma es olvidada, así como las relaciones entre las diferentes razones trigonométricas; de hecho, en la enseñanza desde un punto analítico de las funciones trigonométricas, que es posterior en el currículo, suele ser necesaria nuevamente la introducción de nociones y procedimientos de la trigonometría plana elemental.

4. *Responsabilidad matemática de los alumnos.* Se postula que el trabajo del alumno consiste en reproducir las técnicas que el profesor le enseña; un alumno aprende si *practica bastante*: memoriza las razones trigonométricas de los ángulos notables y utiliza eficazmente las fórmulas (ángulo suma, doble, mitad, etc.), identifica el seno y el coseno en un triángulo, demuestra identidades trigonométricas, etc. Sin embargo, en paralelo a estas técnicas, no se enseñan medios de control de la actividad: los estudiantes producen resultados de los cuales no se hacen responsables: "*profe*, ¿está bien?".

5. *Algebrización.* La enseñanza de la trigonometría plana ha focalizado su atención en las manipulaciones simbólico-formales de relaciones trigonométricas; el álgebra es el aparato tecnológico privilegiado. De hecho, no hay un trabajo previo de estimación de resultados o un estudio numérico de comportamiento de las razones trigonométricas (que, eventualmente, podría realizarse con el uso de una calculadora científica); tampoco se estudian las razones *seno*, *coseno* y *tangente* funcionalmente y el análisis geométrico se centra en una colección de ideogramas supuestos *transparentes*[16] y algunos conocimientos básicos (teorema de Pitágoras, perpendicular a una recta pasando por un punto, altura de un triángulo, etc.); no se realizan aproximaciones explícitas al seno o a la tangente para ángulos pequeños ($\operatorname{sen}(x) \approx x$ y $\tan(x) \approx x$, si $x \approx 0$), justificadas por medio de la Teoría de límites; etc.

A partir de este tipo de análisis, en el momento práctico, se plantea la necesidad de construcción de una *transposición didáctica* en torno al problema *ángulos notables*, esto es, aislar las técnicas y justificaciones de aquellas que permitan determinar para un conjunto de ángulos ($1°$, $2°$, $3°$, etc.) sus razones trigonométricas, seleccionar cuáles tendrán que ser enseñadas y realizar el conjunto de transposiciones adaptativas necesarias para que se conviertan en objeto de enseñanza:

Objeto de saber → Objeto a enseñar → Objeto de enseñanza

Este proceso viene marcado por la explicitación de una *cuestión generatriz* (Chevallard, 1999), que determina la "dirección" que tomará el proceso de estudio y cuya respuesta se presume crucial para la construcción y comunicación de un sistema de prácticas institucionales; de hecho, se acepta que dicha cuestión representa la formalización de la *razón de ser* del estudio que se pretende abordar. La cuestión generatriz en la que se involucran los estudiantes y el profesor es el cálculo de las razones trigonométricas de cualquier ángulo k^{o} ($k \in \mathbb{N}$).

En la siguiente sección se muestra el producto del proceso de estudio seguido. Los pasos que se indican no se alcanzan de una vez por todas: ciertos gestos, tareas y técnicas son "descubiertas" varias veces en el seno del grupo. La respuesta de la cuestión generatriz es el resultado de *reflexiones personales* (demostrar para interpretar o contrastar una conjetura), de *discusiones matemáticas* (demostrar para convencer a un compañero) y de un continuo *proceso de descontextualización y despersonalización* de los conocimientos que se van incorporando al universo matemático del grupo. Los estudiantes tienen a su cargo la formulación y validación de proposiciones; el profesor actúa de director de estudio (en una posición similar a la de un investigador principal en una comunidad de matemáticos).

[16]Fregona (1995) ha estudiado las figuras planas como "medio" en la enseñanza de la geometría. Su estudio teórico muestra cómo se produce la ilusión de la transparencia: el profesor "ve" en un objeto lo que desea enseñar y, entonces, el alumno "sentado ahí, ve la misma cosa". Lacasta (1995) ha constatado este fenómeno cuando el "medio material" es el gráfico cartesiano de funciones.

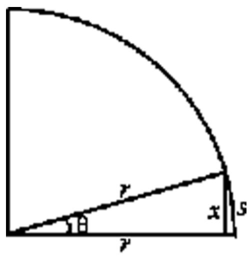
CÁLCULO DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE CUALQUIER ÁNGULO k° ($k \in \mathbb{N}$)

Para responder a la cuestión generatriz, los estudiantes reducen, en primera instancia, el universo de estudio, delimitando un conjunto suficiente de datos que es preciso obtener. Para determinar las razones trigonométricas (*seno*, *coseno* y *tangente*) de cualquier ángulo k° ($k \in \mathbb{N}$), es suficiente conocer los cosenos de los ángulos entre 1° y 15°. En primer lugar, es fácil justificar[17] que el estudio puede reducirse al cálculo de las razones trigonométricas del seno o del coseno entre 0º y 45º. En segundo lugar, utilizando un triángulo equilátero, se determinan las razones trigonométricas del ángulo de 30° y, por la fórmula del ángulo mitad, se determina el ángulo de 15°.

Teniendo en cuenta estas restricciones, si se determina el ángulo de 1°, por las fórmulas del ángulo doble, triple, suma, etc., se pueden determinar todos los ángulos de la forma k° ($k \in \mathbb{N}$). De esta forma, la cuestión generatriz se reformula: determinación de las razones trigonométricas del ángulo de 1º. Esta reducción permite afinar las acciones; el proceso de estudio se focaliza en una cuestión mínima. La respuesta a esta *cuestión mínima*, enmarcada en el conjunto de restricciones debídamente fundamentadas, representa la obtención de una respuesta a la cuestión generatriz (no reducida) planteada. El progreso en el proceso de estudio obedece a leyes económicas que se manifiestan al estudiante mismo y no a criterios escolares o autoritarios impuestos por el profesor. Los estudiantes obtienen las razones trigonométricas de 1° de forma exacta y aproximada:

[17] Los pasos que hay que dar son:

- A partir de la fórmula fundamental de la trigonometría ($\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1$), es suficiente determinar el seno o el coseno, para tener determinada la otra razón trigonométrica.
- La función coseno es periódica de periodo $2p$ (360° en sistema sexagesimal), por lo que es suficiente determinar las razones trigonométricas entre 0° y 360°.
- Por la relación entre las razones trigonométricas entre ángulos suplementarios ($x+y = 180^\circ$) y complementarios ($x + y = 90^\circ$), el universo de estudio se reduce a los ángulos entre 0° y 45°.



- *Aproximada.* La longitud de arco de circunferencia s se determina mediante la fórmula $s = \Theta \cdot r$. Si Θ es pequeño se puede aproximar s por x y, por lo tanto, se puede asumir que $\mathrm{sen}(\Theta) = s/r$. De esta manera, en la circunferencia unidad, se tiene ($\pi \approx 3,1415922654$) (véase nota a pie de página[18]):

$$\mathrm{sen}(1^\circ) \approx \frac{\pi}{180} \approx 0,0174532925$$

$$\cos(1^\circ) \approx \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{180}\right)^2} \approx 0,9998476797$$

- *Exacta.* Para calcular las razones trigonométricas del ángulo de 1° es necesario seguir los siguientes pasos:

1. Se determina las razones trigonométricas del ángulo de 18°, teniendo en cuenta que los ángulos $(2 \times 18)^\circ = 36^\circ$ y $(3 \cdot 18)^\circ = 54^\circ$ son complementarios:

$$\cos(2 \cdot 18^\circ) = \mathrm{sen}(3 \cdot 18^\circ) \Rightarrow 4\mathrm{sen}^2(18^\circ) + 2\mathrm{sen}(18^\circ) - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \mathrm{sen}(18^o) & = & \frac{\sqrt{5}-1}{4} \\ \cos(18^o) & = & \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \end{cases}$$

2. Se determinan las razones trigonométricas del ángulo de 3°:

$$\begin{aligned} \cos(3^\circ) &= \cos(18^\circ - 15^\circ) \\ &= \frac{\sqrt{10 - 5\sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{20 + 4\sqrt{5} + 10\sqrt{3} + 2\sqrt{15}}}{8} \end{aligned}$$

3. El coseno de 1° se determina como una solución de ($x = \cos(1^\circ), c = \cos(3^\circ)$):

$$4x^3 - 3x - c = 0$$

[18] Es posible obtener mejores aproximaciones al seno y coseno del ángulo de 1°. De hecho, en la transposición didáctica realizada, se ha mostrado también que las fórmulas:

$$\tan(k^o) \approx \frac{7k}{401}; \cos(k^o) \approx \frac{401}{\sqrt{401^2 + 49k^2}}; \mathrm{sen}(k^o) \approx \frac{7k}{\sqrt{401^2 + 49k^2}}$$

permiten obtener aproximaciones *suficientemente buenas*, para los ángulos $0^\circ \leq k^\circ \leq 15^\circ$, $k \in \mathbb{N}$. La obtención de estas fórmulas se basa, de igual manera, en el hecho de que si Θ es pequeño se puede aproximar s por x.

Que se obtiene a partir del desarrollo de $\cos(3^\circ) = \cos(2 \cdot 1^\circ + 1^\circ)$ o, más en general, a partir de la fórmula general del coseno del ángulo triple. La ecuación de tercer grado se resuelve algebraicamente por la fórmula general de ecuaciones polinómicas de tercer grado[19], obteniéndose:

$$\operatorname{sen}(1^\circ) \approx 0,0174524064$$

$$\cos(1^\circ) \approx 0,9998476952$$

A partir del breve análisis de la enseñanza actual de la trigonometría plana (sección 3) y del estudio sobre el cálculo de las razones trigonométricas que acabamos de mostrar, los estudiantes fueron capaces de explicitar un proyecto de *innovación educativa*. No podemos hablar de *investigación*, a pesar de que la innovación se ha puesto parcialmente en práctica (en el marco de la práctica profesional y en grupos de trabajo autónomos) validándose los supuestos enunciados, puesto que queda pendiente enclavar el estudio dentro de un marco teórico concreto que permita analizarlo y relacionarlo con otras investigaciones sobre el mismo tema; en definitiva, contribuir a la construcción de un cuerpo de conocimientos ordenado y sistemático (objetivo general de toda investigación). Este trabajo no puede ser realizado por los estudiantes, pues no disponen de la suficiente formación matemática y didáctica.

Innovación educativa y enseñanza: el caso de las razones trigonométricas de los ángulos notables

Una vez elaborada la organización matemática en torno al cálculo de las razones trigonométricas de un ángulo k° cualquiera ($k \in \mathbb{N}$), los estudiantes están en disposión de: por un lado, explicitar la pertinencia de un proyecto de innovación basado en dicha organización; por otro lado, establecer las tareas, técnicas, tecnologías y teorías que pueden ser abordadas (teniendo en cuenta

[19]Se conocen fórmulas para la resolución de una ecuación de primer y segundo grado; por factorización, método de Ruffini, etc., es posible resolver algunas ecuaciones polinómicas de grado superior a 3. Además, se conocen fórmulas de resolución de ecuaciones de 3 y 4 grado (del estilo de la conocida para las ecuaciones de segundo grado). En concreto, se puede demostrar que toda ecuación cúbica de la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ puede ser reducida a la forma $x^3 + px + q = 0$, cuyas soluciones se obtienen mediante la fórmula de Cardano (1501-1576) - Tartaglia (1499?-1557):

$$x = \sqrt{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}^{\,3} + \sqrt{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}^{\,3}$$

Para una discusión detallada de este tópico puede consultarse un manual de álgebra; por ejemplo, el clásico *Elementos de análisis algebraico*, de J. Rey Pastor (1961).

las restricciones cognitivas de los alumnos); y, por último, determinar *a priori* pautas generales de gestión del proceso de estudio que se llevará a cabo.

En el caso que nos ocupa, el análisis sobre la enseñanza actual de la trigonometría y sus consecuencias permite a los estudiantes fundamentar la pertinencia del proyecto de innovación esbozado, puesto que les posibilita explicitar una enseñanza que: 1) equilibre el peso atribuido a las técnicas de resolución de problemas y el peso atribuido al proceso discursivo de construcción de objetos matemáticos; 2) favorezca la conexión matemática trigonometría-análisis (en particular, noción de equivalencia de funciones en torno a un punto); y 3) destaque la importancia de la comparación y de la aproximación en los procesos matemáticos. De esta forma la innovación educativa modifica el modo de introducir y desarrollar las nociones y procesos básicos de la trigonometría plana en la educación secundaria obligatoria (claro está, con el objetivo de lograr una mejora en el aprendizaje del tópico).

Por otro lado, en la práctica, el proceso de cálculo de las razones trigonométricas no puede ser enseñado en secundaria tal y como ha sido construido, teniendo en cuenta las restricciones cognitivas de los alumnos a los que iría dirigido el proyecto de innovación. Su implementación sería demasiado costosa o, incluso, inviable. De esta forma, los estudiantes determinan que un camino de actuación en la enseñanza de la trigonometría plana, teniendo en cuenta las restricciones institucionales y el proyecto global de enseñanza, podría ser:

1. Se determina una aproximación de las razones trigonométricas del ángulo de 1° (no es pertinente la enseñanza de la fórmula general de ecuaciones polinómicas de tercer grado en el nivel secundario).

2. Se determinan los ángulos de 2° $(1^\circ + 1^\circ)$, 3° (valor exacto), 4° $(3^\circ + 1^\circ)$, etc. De esta forma, utilizando valores aproximados y exactos, según el caso, se construye una tabla (ver anexo) para las razones trigonométricas de los ángulos $0^\circ - 15^\circ$, junto con ángulos notables (30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270°, 360°).

   Este trabajo implica, en particular la puesta en marcha de las fórmulas elementales de la trigonometría plana y es un campo para su rutinización y dominio.

3. Una vez construida la tabla, ésta podrá ser utilizada en la resolución de problemas; de tal forma que se focalice la atención no en el manejo técnico sino en la capacidad de adaptación de los conocimientos a contextos diferentes y en el significado de las nociones introducidas (tomando distancia de la manipulación exclusivamente simbólica de relaciones trigonométricas)[20]. Por ejemplo, construcción *punto a punto* de las funciones trigonométricas (y descripción de su comportamiento), análisis del

[20]Antes de la utilización de la tabla como instrumento de trabajo, será necesario evaluar los conocimientos de los alumnos con relación a la construcción de la misma (pasos 1 y 2 del proceso descrito). De hecho, la construcción de la tabla implica la *puesta en marcha de*

comportamiento de las funciones trigonométricas en torno a 0 ($\text{sen}(x) \approx x$; $\cos(x) \approx 1 - x^2/2$; $\tan(x) \approx x$), modelización de situaciones reales (medición del ángulo de incidencia del sol a una determinada hora, altura de un poste de luz a partir de la longitud de su sombra, etc.).

De hecho, la tabla puede ser comprendida como una calculadora: las fórmulas juegan el papel de "teclas"; los valores numéricos del coseno, seno y tangente, de "botones numéricos". La utilización de la tabla permite una reflexión sobre el uso de los instrumentos de cálculo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; en particular, valorar su *pertinencia* en un determinado contexto matemático de uso. La noción de pertinencia es central (García et al., 1995), puesto que en la actualidad hay una *ilusión de transparencia* respecto a lo que los programas pueden hacer y a lo que los estudiantes pueden aprender con ellos.

Por último, como hemos señalado, la actuación en el sistema didáctico no se controla únicamente mediante la selección y secuencia de contenidos, es necesario además determinar condiciones de viabilidad para llevar a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje: explicitar el contrato didáctico hipotético (que determine la responsabilidad del profesor y de los estudiantes) y construir un medio didáctico (atendiendo a las limitaciones temporales y de recursos, humanos y materiales), que, en particular, posibilite la evolución de dicho contrato didáctico.

Así, por ejemplo, en la situación de las razones trigonométricas, los estudiantes se plantean determinar: si la calculadora es o no un medio material pertinente para comprobar los resultados que se obtengan o si se establecen otros instrumentos de control; si el medio implementado contempla situaciones de formulación y validación que permitan aceptar o rechazar los resultados que se obtengan; si, en el análisis local de las funciones trigonométricas, se utilizará el medio material "gráfico cartesiano de funciones" o se tabularán las funciones en torno a 0; ¿cómo se introduce el valor aproximado de π (con el uso de una calculadora, se ha calculado con anterioridad –por un método empírico, geométrico o probabilístico– y se admite como dato, lo introduce el profesor, se calcula, ...)?; ¿quién es el principal agente en cada una de las fases descritas con anterioridad?; ¿bajo qué condiciones es factible que el profesor pueda ejercer la devolución?; ¿qué técnicas y procedimientos se institucionalizarán y cómo gestionará el profesor la construcción y el uso de la tabla de valores?; ¿es el parámetro "ángulo" susceptible de ser utilizado como variable didáctica?; etc.

los saberes a enseñar; aún más, es un vehículo muy bien adaptado para la enseñanza de los contenidos fundamentales de la trigonometría plana en la secundaria obligatoria.

Síntesis, comentarios finales e implicaciones

Hemos razonado la pertinencia de la enseñanza de la DM como disciplina científica en la formación inicial de profesores de secundaria, explicitando lineamientos generales para dicha asignatura. El objetivo no ha sido describir la asignatura, sino aportar un punto de vista científico a su enseñanza; en particular, mostrar el interés de una enseñanza no exclusivamente normativa, cuyo único fin es la práctica profesional. La DM tiene interés por sí misma dentro de la formación de profesores.

Reclamamos entonces un espacio en el programa de formación de profesores de secundaria para la DM equiparable al que gozan el Análisis Matemático o el Álgebra Lineal, por ejemplo. El reconocimiento de la DM como área de conocimiento en España (desde 1984) y otros lugares del mundo ha equiparado administrativamente dicha disciplina con el resto de áreas de matemáticas, lo cual no ha supuesto una nivelación ni cultural ni social (en el ámbito matemático[21] y fuera de él); en particular, no se ha concedido un papel equiparable al resto de áreas de conocimiento al área Didáctica de la Matemática en la construcción de los nuevos planes de la licenciatura de matemáticas en las distintas universidades. De hecho, "muchos responsables de política científica de nuestro país no han tomado nota todavía de que la Didáctica de la Matemática no es una recién llegada al panorama científico, y tampoco es, ni mucho menos, una invención administrativa" (Recio et al., 2003).

La enseñanza de DM como disciplina didáctica nos ha permitido introducir a los estudiantes en esta nueva área de conocimiento. La didáctica en acción que hemos planteado nos ha permitido introducir de manera contextualizada un conjunto de nociones fundamentales en DM, que posibilitan un discurso coherente y comprensible en la clase y fuera de ella (en todas las innovaciones que se van abordando), lo cual supone un paso necesario para la adscripción a una ciencia: ser partícipe de su vocabulario. En particular, el uso pertinente de este vocabulario ha permitido la organización de la experiencia personal y grupal en torno a él, así como un referente teórico para la fundamentación de instrumentos para la mejora de la enseñanza y del aprendizaje y su valoración crítica. Sin embargo, el manejo de vocabulario no es suficiente para el desarrollo de una investigación. Las limitaciones de conocimientos matemáticos y didácticos de los estudiantes han difuminado la frontera entre una innovación y una investigación. No era el propósito formar investigadores en DM, sino destacar el interés y la utilidad de la DM en la formación de profesores de secundaria.

[21] "Quiero lanzar una súplica a aquellos de entre nosotros que tienen el poder de impulsar la investigación en didáctica: no disuadáis a todos los jóvenes matemáticos con talento que están preparados para pagar el precio de una orientación hacia la didáctica. Y cuando ellos han hecho los esfuerzos considerables exigidos por una segunda adaptación a problemas muy variados y difíciles [aquellos de la didáctica], no les retiréis su pertenencia al mundo de los matemáticos". (Brousseau, 2004).

Como resultado de un curso de DM como disciplina científica, se ha mostrado un proyecto de innovación educativa en torno a la introducción de las nociones y procesos básicos de la trigonometría plana en la educación secundaria, que ha incluido la construcción de una tabla de valores numéricos de las funciones trigonométricas (ver anexo). Esta innovación educativa nos ha permitido ejemplificar un trabajo sistemático dentro del marco la enseñanza en DM que hemos propuesto: los estudiantes han realizado diversos trabajos monográficos, todos estructurados de manera similar. Estos trabajos han cumplido una triple función: una, instrumento de evaluación de la evolución del conocimiento DM en la clase; otra, instrumento de evaluación de los estudiantes; y, por último, determinación de pautas para la introducción de nuevos medios materiales (calculadoras, programas de ordenador, juegos, etc.) y material bibliográfico adicional (artículos, libros de didáctica y de texto, páginas de Internet, etc.), según la propuesta de innovación y la profundidad de los trabajos realizados por los distintos grupos de estudiantes.

Por otro lado, la enseñanza de DM como disciplina científica ha tenido algunas implicaciones indirectas en la concepción que los estudiantes tenían sobre las matemáticas y sobre la DM. Respecto a las matemáticas, los estudiantes hacen evolucionar un planteamiento realista (estático) hacia uno pragmático (dinámico); el ser y el hacer son comprendidos como proyecciones de "lo factible" y "lo construible"; la verdad objetiva se transforma en "certeza fundamentada"; etc. Hay, en resumen, una tendencia clara a relativizar las nociones y procesos matemáticos a contextos de uso y a estados de conocimiento matemáticos.

Respecto a la DM, se abandona la identificación de la DM con un saber normativo y técnico para la docencia. Se separa claramente el dominio de conocimiento de la DM respecto del dominio de conocimiento de la pedagogía, de la psicología cognitiva y educativa, de la teoría del currículum, de la programación y evaluación. Los estudiantes aceptan entonces como núcleo firme de la DM la problematización del saber matemático: las necesarias adaptaciones que es preciso realizar para su enseñanza y la importancia de la descontextualización del saber en la fase final del proceso de estudio.

RECONOCIMIENTOS

Trabajo realizado en el marco del proyecto: Impacto de las nuevas tecnologías en la construcción y comunicación del significado de objetos matemáticos en bachillerato, Resolución nº1.109/2003 de 13-octubre de la UPNA. Agradezco a J.D. Godino los comentarios a la versión original.

Anexo: Tabla de valores de las funciones trigonométricas

Ángulo	Cálculo	Seno	Coseno	Tangente
$0°$	exacto	0	1	0
$1°$	aproximado	$0,0174532925$	$0,9998476797$	$0,0174559514$
$2°$	$1° + 1°$	$0,0349012681$	$0,9993907652$	$0,0349225441$
$3°$	exacto $(18° - 15°)$	$0,0523359562$	$0,9986295348$	$0,0524077792$
$4°$	$3° + 1°$	$0,0697573578$	$0,9975639884$	$0,0699277025$
$5°$	$6° - 1°$	$0,0871548599$	$0,9961947753$	$0,0874877705$
$6°$	exacto $(2 \times 3°)$	$0,1045284633$	$0,9945218954$	$0,1051042353$
$7°$	$6° + 1°$	$0,1218702230$	$0,9925460436$	$0,1227854605$
$8°$	$9° - 1°$	$0,1391722234$	$0,9902681921$	$0,1405399310$
$9°$	exacto $(18°/2)$	$0,1564344650$	$0,9876883406$	$0,1583844403$
$10°$	$9° + 1°$	$0,1736490504$	$0,9848075991$	$0,1763278945$
$11°$	$12° - 1°$	$0,1908081254$	$0,9816273525$	$0,1943793894$
$12°$	exacto $(2 \times 6°)$	$0,2079116908$	$0,9781476007$	$0,2125565617$
$13°$	$12° + 1°$	$0,2249519178$	$0,9743698654$	$0,2308691246$
$14°$	$15° - 1°$	$0,2419210357$	$0,9702959407$	$0,2493270615$
$15°$	exacto $(30°/2)$	$0,2588190451$	$0,9659258263$	$0,2679491924$
$18°$	exacto	$0,3090169944$	$0,9510565163$	$0,3249196962$
$30°$	exacto	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$45°$	exacto	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$60°$	exacto	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$90°$	exacto	1	0	no existe
$180°$	exacto	0	-1	0
$270°$	exacto	-1	0	no existe
$360°$	exacto	0	1	0

Fórmula fundamental:

$$\cos^2(x) + \mathrm{sen}^2(x) = 1$$

Seno y coseno de una suma*:

$$\mathrm{sen}(x+y) = \mathrm{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\mathrm{sen}(y), \quad \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \mathrm{sen}(x)\mathrm{sen}(y)$$

Ángulo doble:

$$\mathrm{sen}(2x) = 2\mathrm{sen}(x)\cos(x), \quad \cos(2x) = \cos 2(x) - \mathrm{sen} 2(x)$$

* Para obtener el seno y el coseno de una resta suficiente tener en cuenta que $-y = +(-y)$, esto es, restar "y" es equivalente a sumar "$-y$" (sumar el opuesto de y). Es conveniente seguir este razonamiento y no utilizar las escrituras tradicionales: $\mathrm{sen}(x \pm y) = \mathrm{sen}(x)\cos(y) \pm \cos(x)\mathrm{sen}(y)$; $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \pm \mathrm{sen}(x)\mathrm{sen}(y)$.

REFERENCIAS

[1] M. ARTIGUE, El lugar de la didáctica en la formación de profesores. En P. Gómez (Ed.). Ingeniería didáctica en educación matemática. (pp. 7-23). Bogotá: Una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.

[2] G. BROUSSEAU, L'emergence d'une sciece de la didactique des mathématiques: motifs et enjeux. Rédaction d'une intervention orale au CS ADIREM, 2004.

[3] G. BROUSSEAU, . Théorie des Situations Didactiques. Grenoble, FRA: La Pensée Sauvage, Recherche en Didactique des Mathématiques, 1998.

[4] Y. CHEVALLARD, L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherche en Didactique des Mathématiques, **19** 1999 (2) 221–266.

[5] Y. CHEVALLARD, M. BOSCH, Y J. GASCÓN, Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. Barcelona, ESP: Horsori, ICE-Universitat de Barcelona, 1997.

[6] Y. CHEVALLARD, La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires, AIQUE, 1991.

[7] N. CLIMENT Y J. CARRILLO, El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional. Una experiencia en Matemáticas con maestras. Enseñanza de las Ciencias, 21(3), 387-404. 2003

[8] DINESST, Nueva secundaria (comunicación en la Web). Lima: Autor. De `http://www.minedu.gob.pe/dinesst/` (revisado en septiembre 2003).

[9] D. FREGONA, Les figures planes comme "milieu" dans l'enseignement de la géométrie: interactions, contrats et transpositions didactiques, thèse. Bordeaux, FRA, Université Bordeaux I, 1995.

[10] A. GARCÍA, A. MARTÍNEZ, Y R. MIÑANO, Nuevas tecnologías y enseñanza de las matemáticas. Madrid, Síntesis, 1995.

[11] J. GASCÓN, "Didactique fondamentale versus Advanced Mathematical Thinkings: ¿Dos programas de investigación incomensurables?". Actes Xè Université d´été de Didactique des Mathematiques, Tomo II. (pp. 152-170) Houlage, FRA: ARDM, Université Bordeaux I, 1999.

[12] J.D. GODINO, Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática. Granada, ESP: Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, 2003.

[13] E. LACASTA, Les graphiques cartésiens de fonctions dans l'enseignement secondaire des mathématiques: illusions et contrôles, thèse. Bordeaux, FRA: Université Bordeaux I, 1995.

[14] S. LLINARES, Área de conocimiento Didáctica de las Matemáticas: ampliando responsabilidades docentes. En C.F. Abraira y A. de Francisco (coor.) La formación inicial de los profesores de primaria y secundaria en el área de Didáctica de

las Matemáticas, Actas del II Simposio sobre el currículum en la formación de profesores en el área de Didáctica de las Matemáticas. (pp. 25-28) León, ESP: Departamento de Matemáticas, Facultad de Educación, Universidad de León, 1997.

[15] S. Llinares, Participation and reification in learning to teach: the role of knowledge and beliefs. Chapter 12, en G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.). Beliefs: A hidden variable in mathematics education? Dordrecht, HOL: Kluwer, 2002.

[16] S. Kemmis y R. McTaggart, Cómo planificar la investigación-acción. Barcelona, ESP, Laertes, 1992.

[17] MECD, "Real Decreto 118/2004, de 23 de enero, por el que se regula el título de Especialización Didáctica". Boletín Oficial del Estado, nº30 (4 febrero 2004). Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2004.

[18] MECD, "Ley Orgánica 10/2002, de 23 de diciembre, de Calidad de la Educación". Boletín Oficial del Estado, nº307 (24 diciembre 2002). Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2002.

[19] MECD, Diseño curricular base para secundaria. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 1992.

[20] NCTM, Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática. Sevilla, ESP: Sociedad andaluza de educación matemática THALES, 1991.

[21] M.L. Oliveras, Etnomatemáticas. Formación de profesores e innovación curricular. Granada, ESP, Comares, 1996.

[22] T. Recio y M.J. González-López, "Reflexiones sobre la calidad en didáctica de la matemática", comunicación presentada en el VII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Granada, ESP: Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de CC. de la Educación, Universidad de Granada, 20003.

[23] L. Rico, Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de secundaria en Didáctica de la Matemática. En C.F. Abraira y A. de Francisco (coor.) La formación inicial de los profesores de primaria y secundaria en el área de Didáctica de las Matemáticas, Actas del II Simposio sobre el currículum en la formación de profesores en el área de Didáctica de las Matemáticas. (pp. 183-194) León, ESP: Departamento de Matemáticas, Facultad de Educación, Universdidad de León, 1997.

Miguel R. Wihelmi
Universidad Pública de Navarra
Correo electrónico: `miguelr.wihelmi@unavarra.es`