PREGUNTAS EN BUSCA DE RESPUESTAS

Sección a cargo de

Antonio Sánchez Calle

Progresiones aritméticas en sucesiones de enteros

por

Javier Cilleruelo

Paul Erdős, uno de los más prolíficos, originales e influyentes matemáticos del siglo XX, murió en Varsovia el 20 de septiembre de 1996. Publicó más de 1.500 artículos con más de 500 colaboradores. Erdős poseía un talento especial para proponer nuevos problemas. Para añadir más aliciente a sus ya interesantes problemas acostumbraba a ofrecer premios en metálico por la resolución de cada uno de ellos ([4],[5],[7]). Las cantidades podían variar entre 1 dólar y 10.000 dólares según su dificultad.

La revista *Mathematica Japonica* mantiene los premios para los innumerables problemas de Erdős que siguen sin estar resueltos [1].

La siguiente conjetura era una de sus favoritas.

CONJETURA

Si A es una sucesión de enteros positivos tal que $\sum_{a\in A} 1/a = +\infty$ entonces, para todo entero k, la sucesión A contiene una progresión aritmética de k términos.

Esta conjetura, que Erdős valoraba en 5.000 dólares, ni siquiera se ha logrado demostrar para el caso más sencillo $k = 3$.

Sus consecuencias darán una idea de su dificultad [2].

1. Es conocido que la suma de los inversos de los números primos es infinita. Entonces, si la conjetura fuese cierta, existirían progresiones aritméticas de primos de tantos términos como se quisiera. Esto, sin embargo, tampoco está probado [9].

   Aún más difícil resulta encontrar progresiones aritméticas de primos consecutivos. La de mayor longitud ha sido encontrada recientemente (10 de marzo de 1998) y consta de 10 términos [3].

2. En 1936 Erdős y Turán [6] conjeturaron que si una sucesión de enteros positivos A tiene densidad positiva ($A(x) > cx$ para todo x y para alguna constante $c > 0$, donde $A(x)$ es el número de enteros de la sucesión que son $\leq x$) entonces A contiene progresiones aritméticas arbitrariamente largas. Szemerédi recibió 1.000 dólares de Erdős cuando demostró la conjetura en 1975 [8]. Fue la mayor cantidad pagada por uno de sus problemas y uno de los resultados más notables en la teoría de los números. El teorema de Szemerédi sería una consecuencia inmediata de la conjetura, debido a que la suma de los inversos de una sucesión de densidad positiva es comparable con la serie armónica, cuya suma es infinita.

Referencias

[1] A. ADAM; K. GYÖRY Y A. SÁRKÜZY: *The life and Mathematics of Paul Erdős*, Math. Japonica 46 No. 3 (1997), 517-526.

[2] J. CILLERUELO Y A. CÓRDOBA: *La teoría de los números*, Edit. Mondadori, 1992.

[3] H. DUBNER, A. FORBES, N. LYGEROS, M. MIZONY Y P. ZIMMERMANN: *Ten consecutive primes in arithmetic progression* NMBRTHRY LOG9803.

[4] P. ERDŐS: *On some of my favourite theorems*, Bolyai Math. Soc. Studies 2 (1996), 97-132.

[5] P. ERDŐS: *Some of my favourite problems and results*, The Mathematics of Paul Erdős, vol. I, (R.L. Graham et al., eds.), Algorithms Combinartorics, 13, Springer, 1997, 47-67.

[6] P. ERDŐS Y P. TURÁN: *On certain sequences of integers*, J. London Math. Soc. 11 (1936) 261-264.

[7] R. K. GUY: *Unsolved problems in number theory*, Springer-Verlag, 1981.

[8] E. SZEMERÉDI: *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progresion*, Acta Arith. 27 (1975) 199-245.

[9] S. WEINTRAUB: *Seventeen primes in arithmetic progression*, Math. Comput. 31 (1977) 1030.

* * *

Problemas inversos en ecuaciones en derivadas parciales

por

Bartolomé Barceló y Alberto Ruiz

A principios de siglo Hadamard enunció tres principios para que un problema de ecuaciones en derivadas parciales se considerara bien planteado ("well posed"). Para que el problema corresponda a un modelo físico realista, Hadamard requería que *exista* una *única* solución y que ésta *dependa de manera continua* de los datos. Esto es existencia, unicidad y estabilidad. Los problemas que no cumplían estos requisitos fueron usualmente ignorados por la comunidad matemática y se les llamaba incorrectos o mal planteados ("ill posed").

En general cuando damos una ecuación en derivadas parciales, unos datos frontera y un dominio completamente determinado, el problema de hallar la solución, que podemos llamar problema *directo*, está bien planteado. Sin embargo si parte de los coeficientes de la ecuación o del dominio son desconocidos y debemos determinarlos a partir del conocimiento de las soluciones, el problema está generalmente mal planteado y se les suele conocer con el nombre de *problemas inversos.*

En las últimas décadas numerosos problemas relacionados con la medicina tales como el TAC (tomografía axial computarizada), problemas de geofísica como la determinación de la forma de placas internas de la Tierra o de reservas de petróleo a través de ondas sísmicas o problemas de scattering, radar, etc. han sido tratados con éxito por los ingenieros, gracias en parte al desarrollo de ordenadores de alta velocidad de cálculo. El hecho de que estos métodos funcionen plantea problemas matemáticos serios y en su análisis intervienen la modelización, su estudio matemático y su cálculo numérico.

1. Determinación de la conductividad en el interior de una región por medidas en la frontera (problema de la tomografía eléctrica).

   Dado un dominio Ω si la conductividad en cada punto es $\gamma(x)$, entonces la ecuación estática para el potencial eléctrico $u(x)$ es

   $$\operatorname{div}(\gamma(x)\nabla u) = 0$$

   en Ω. Si imponemos un potencial estático u_0 en la frontera $\partial\Omega$, es decir, una condición de contorno de Dirichlet $u|_{\partial\Omega} = u_0$, entonces la corriente inducida que atraviesa la frontera en un punto x_0 es la derivada en la dirección de la normal $\frac{\partial u}{\partial n}(x_0)$. De este modo se define la aplicación de Dirichlet–Neumann Λ como

$$\Lambda u_0 = \frac{\partial u}{\partial n}$$

donde u es la solución de la ecuación en forma divergencia anterior. La pregunta es: Conocida la aplicación Dirichlet-Neumann Λ, ¿se puede determinar $\gamma(x)$? En particular nos interesa la unicidad, es decir, si Λ determina unívocamente $\gamma(x)$. El problema está sobredeterminado en $\mathbf{R}^n$, $n \geq 3$, esto permite contestar afirmativamente a la unicidad, supuestas ciertas condiciones a priori sobre $\gamma(x)$ (ver [11]). Por ejemplo si $\gamma(x) \in W^{2,p}$, $p > n/2$ se sabe que hay unicidad. También si $\nabla\gamma \in B^{1/2}$, es decir, si hay 3/2 de derivada de γ, (ver [4]). La clase natural de γ sólo requiere una derivada, por lo cual queda abierto el problema si γ tiene menos de 3/2 derivadas.

El problema en dimensión 2 se ha resuelto utilizando la transformación de scattering y el método $\partial, \overline{\partial}$ en scattering debido a Beals, Coifman y otros. Aunque el problema no está sobredeterminado, dicho método permite sacar toda la información a la aplicación Dirichlet–Neumann y probar la unicidad en el plano con la hipótesis natural $\gamma \in C^1$.

El método $\partial, \overline{\partial}$ ha sido utilizado para estudiar ecuaciones en derivadas parciales no lineales vía la transformada de scattering ([3]). En dimensión mayor no se conoce método alguno parecido.

La estabilidad está demostrada en $n \geq 3$, suponiendo suficiente regularidad a priori de $\gamma(x)$ ([1], [2]). La estabilidad probada es muy débil, es de tipo logarítmico. Los métodos de reconstrucción ([10]) no son muy adecuados ya que utilizan funciones que tienen crecimiento exponencial en ciertas direcciones del espacio, lo cual hace muy difícil el tratamiento numérico.

2. Otra gama de problemas inversos son los llamados del obstáculo electromagnético o acústico.

   Supongamos un objeto desconocido Ω al que hacemos incidir una onda plana de frecuencia de tal manera que se obtiene una respuesta estacionaria $u(x)$ que será una solución de la ecuación de Helmholtz en el exterior de Ω

   $$[\Delta + k^2]u = 0 \text{ en } \Omega^c$$

   con dato frontera $u|_{\partial\Omega} = 0$ y condición de radiación para $u^s(x) = u(x) - e^{ikd\cdot x}$

   $$\int_{S_r} |\frac{\partial u}{\partial r} - iku|^2 \, d\sigma \to 0 \qquad r \to \infty$$

La respuesta es $u^s(x;k,d)$ que se puede desarrollar asintóticamente en $|x| \to \infty$ de la forma

$$u^s(x;k,d) = \frac{e^{ikd\cdot x}}{|x|}[u_\infty(\frac{x}{|x|};k,d) + O(\frac{1}{|x|})]$$

la función definida sobre la esfera unidad S^2 $u_\infty(\overline{x};\omega,d)$ se denomina "amplitud de scattering" o "far field pattern".

Se trata de ver que este objeto está determinado por el conocimiento de $u^s(x;k,d)$ para ciertos valores de k y de d. La solución es única si se conoce una cantidad finita de funciones $u^s(x;k,d_i)$ $i = 1\ldots,N$, donde N depende del tamaño de la región en la que sabemos que el objeto está confinado ([6]).

El problema está abierto para una sola dirección de incidencia. Se sabe que hay otro tipo de ondas incidentes cuya respuesta no determina unívocamente el objeto, pero esta onda no es plana sino que se trata de una onda esférica. El objeto en este caso puede ser una bola de distintos radios en un conjunto discreto de números reales.

Referencias

[1] G. Alessandrini: *Stable determination of conductivity by boundary measurements*, Appl. Anal. 27, (1988), 153-172.

[2] G. Alessandrini: *Singular solutions of elliptic equations and the determination of conductivity by boundary measurements*, J. Diff. Equations 84, (1990), 153-172.

[3] R. Beals and R. Coifman: *Multidimensional inverse scattering and nonlinear partial differential equations*, in F. Treves editor, Pseudodifferential operators and applications, vol. 43 of Proceedings of symposia in pure mathematics, 45-70, Amer. Math. Soc.., 1985.

[4] R. Brown, G. Uhlmann: *Uniqueness in the inverse conductivity problem for nonsmooth conductivities in two dimensions*, Comm. in PDE 22, 5-6, (1997), 1009-1027.

[5] D. Colton, R. Ewing: *Inverse Problems in Partial Differential Equations*, Siam 1990.

[6] D. Colton, R. Kress: *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, Springer Verlag 1997.

[7] V. Isakov: *Inverse Problems in Partial Differential Equations*, Springer Verlag 1998.

[8] V. Isakov: *Uniqueness and stability in multidimensional inverse problems*, Inverse Problems 9, (1993), 579-621.

[9] A. Nachman: *Reconstructions from boundary measurements*, Annals of Math. 128, (1988), 531-587.

[10] A. Nachman: *Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem*, Annals of Math. 142, (1995), 71-96.

[11] J. Sylvester, G. Uhlmann: *A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem*, Annals of Math. 125, (1987), 153-169.