LA OLIMPIADA MATEMÁTICA

Sección a cargo de

María Gaspar

XIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

En el primer avión que voló desde el aeropuerto de Las Américas en Santo Domingo (República Dominicana) tras el paso del huracán Georges, llegó a Madrid, el lunes 28 de septiembre, la delegación española participante en la XIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas. Estaba formada por los estudiantes Ramón José Aliaga, Mario Andrés Montes, María Pé y Jaime Vinuesa, acompañados por los profesores Ceferino Ruiz (Jefe de Delegación) y José Aymerich (Profesor Tutor).

Estaba prevista la participación de 20 de los 22 Estados Iberoamericanos (Guatemala y Paraguay anunciaron que no asistirían), pero el huracán impidió el viaje de las Delegaciones de Puerto Rico y Honduras. El esquema de la Olimpiada Iberoamericana es el mismo que el de la Olimpiada Internacional, salvo que los equipos están formados por un máximo de cuatro estudiantes, y no seis, y también difieren las condiciones de participación. Hay límites de edad (18 años) y de número de participaciones previas en una Iberoamericana (no se puede repetir más de una vez), pero pueden asistir estudiantes que hayan comenzado sus estudios universitarios.

Las inclemencias metereológicas obligaron a modificar el calendario de las pruebas. La primera sesión, en la tarde del día 23, tuvo que terminarse a la luz de las velas.

PROBLEMAS PROPUESTOS

PRIMER DÍA

Problema 1. Se dan 98 puntos sobre una circunferencia. María y José juegan alternadamente de la siguiente manera: cada uno de ellos traza un segmento uniendo dos de los puntos dados que no hayan sido unidos entre sí anteriormente. El juego termina cuando los 98 puntos han sido usados como extremos de un segmento al menos una vez. El vencedor es la persona que realiza el último trazo.

Si José inicia el juego, ¿quién puede asegurarse la victoria?

Media de todos los participantes: 5,55
Media de los estudiantes españoles: 7

Problema 2. La circunferencia inscrita en el triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA y AB en los puntos D, E y F, respectivamente. AD corta a la circunferencia en un segundo punto Q. Demostrar que la recta EQ pasa por el punto medio de AF si, y solamente si, $AC = BC$

Media de todos los participantes: 2,60
Media de los estudiantes españoles: 2,75

Problema 3. Hallar el mínimo número natural n con la siguiente propiedad: entre cualesquiera n números distintos, pertenecientes al conjunto $\{1, 2, ..., 999\}$ se pueden elegir cuatro números diferentes a, b, c, d , tales que $a + 2b + 3c = d$.

Media de todos los participantes: 2,17
Media de los estudiantes españoles: 3,75

Segundo día

Problema 4. Alrededor de una mesa redonda están sentados representantes de n países ($n \geq 2$), de modo que satisfacen la siguiente condición: si dos personas son del mismo país, entonces sus respectivos vecinos de la derecha no pueden ser de un mismo país. Determinar, para cada n, el número máximo de personas que puede haber alrededor de la mesa.

Media de todos los participantes: 5,24
Media de los estudiantes españoles: 6,5

Problema 5. Hallar el máximo valor posible de n para que existan puntos distintos $P_1, P_2, ..., P_n$ en el plano y números reales $r_1, r_2, ..., r_n$ de modo que la distancia entre cualesquiera dos puntos diferentes P_i y P_j sea $r_i + r_j$.

Media de todos los participantes: 3,88
Media de los estudiantes españoles: 6,75

Problema 6. Sea λ la raíz positiva de la ecuación $t^2 - 1998t - 1 = 0$. Se define la sucesión $x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...$ por:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_{n+1} &= [\lambda x_n], \text{ para } n = 0, 1, 2, ... \end{aligned}$$

Hallar el residuo (resto) de la división de x_{1998} por 1998.

Nota: Los corchetes indican parte entera, o sea, $[x]$ es el único entero k tal que $k \leq x < k + 1$.

Media de todos los participantes: 0,77
Media de los estudiantes españoles: 1,25

Los cuatro estudiantes españoles recibieron medalla:
Medalla de Plata: Ramón José Aliaga Varea y Mario Andrés Montes García.
Medalla de Bronce: Jaime Vinuesa del Río y María Pé Pereira.

En la prueba por equipos (formados por cinco estudiantes de diferentes países), Mario Andrés Montes y Jaime Vinuesa formaban parte de los equipos empatados en segundo lugar, por lo que ambos fueron galardonados con el premio y diploma correspondiente a esta fase de la competición.

Respecto a futuras Olimpiadas Iberoamericanas, las sedes ya propuestas son las siguientes:

1999 Cuba (definitivo)	2000 Venezuela (definitivo)
2001 El Salvador (definitivo)	2002 Uruguay (provisional e inseguro)
2003 Argentina (provisional)	2004 Ecuador (provisional)

Cumpliendo lo acordado en Tarazona, España ha presentado su candidatura, en principio para el 2005, aunque mostrando su disposición a adelantarse al 2002 si no se confirmara Uruguay.

Olimpiada Iberoamericana universitaria de Matemáticas

por

María Falk de Losada

María Falk de Losada es responsable de la olimpiada matemática en su país, Colombia, y representante para América Central y del Sur de la *World Federation of Mathematics Competitions*. Por iniciativa suya se convocó la primera Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, celebrada en Paipa (Colombia) en diciembre de 1985. Esta fecha marca un antes y un después para el impulso de la enseñanza de las Matemáticas en los países iberoamericanos.

Desde su inicio en 1938, la competencia William Lowell Putnam de matemáticas ha tenido un sustancial impacto en el área de las matemáticas en Estados Unidos y Canadá. Es un digno rival de la clásica Olimpiada Tripos, de

Cambridge, o de la prestigiosa Eotvos de Hungría. Si hay diferentes causas para explicar la notable expansión de la investigación matemática en los últimos años, creo que una de ellas es el desafío ofrecido por la competencia Putnam, que ha llevado a excelentes estudiantes universitarios a comprometerse de una manera seria con las matemáticas.

Tras el éxito de la primera Olimpiada Universitaria Colombiana de matemáticas, en la que participaron mas de 200 estudiantes de unas veinticinco Universidades de todo el país, nos decidimos a convocar la Primera Olimpiada Iberoamericana Universitaria de Matemáticas. Entre sus objetivos se incluían:

- Impulsar la investigación y el pensamiento creativo entre los estudiantes universitarios de los países iberoamericanos en el ámbito de sus estudios universitarios.

- Dar continuidad a la formación matemática e investigadora de los alumnos que han participado en las Olimpiadas Matemáticas de Bachillerato para que estén en plena capacidad de ocupar un lugar de importancia en el desarrollo científico y tecnológico de sus respectivos países.

- Crear oportunidades de intercambio de información sobre programas de estudio y enseñanza universitaria de la matemática en los países iberoamericanos.

En las bases se señala que la Olimpiada se llevará a cabo anualmente el tercer jueves de septiembre en cada uno de los países participantes. La Olimpiada consiste en una única prueba de siete problemas, con una duración de cinco horas.

Todos los países de la región iberoamericana son elegibles para participar en la OIMU. Quienes soliciten la categoría de miembro deben contar con el patrocinio de una apropiada entidad educativa/matemática de su país.

El único requisito para participar es no poseer ninguna titulación universitaria, y estar matriculado en alguna universidad en calidad de estudiante de una carrera de pregrado.

La Olimpiada se realiza por correspondencia. En cada país puede participar cualquier número de estudiantes. Sin embargo, una vez realizada la prueba, se permite relacionar en el formulario de resultados que se envía al coordinador central, los detalles y resultados, ordenados por puntuaciones, de un máximo de diez de estos estudiantes, que se convierten así en los representantes oficiales del país. Para asegurar una calificación homogénea de las pruebas, se envían también al coordinador central los exámenes de los concursantes que en cada país ocuparon los lugares $1^{\underline{o}}$, $3^{\underline{o}}$ y $7^{\underline{o}}$.

Los problemas propuestos en la primera OIMU han sido los siguientes:

Problema 1. (4 puntos) Las integrales definidas entre 0 y 1 de los cuadrados de las funciones reales continuas $f(x)$ y $g(x)$ son iguales a 1. Demuestre que existe un número real c tal que

$$f(c) + g(c) \leq 2.$$

Problema 2. (5 puntos) En un plano se encuentra una elipse E con semiejes a y b. Se consideran los triángulos inscritos en E tales que al menos uno de sus lados es paralelo a uno de los ejes de E. Encuentre el lugar geométrico de los baricentros de tales triángulos y calcule su área.

Problema 3. (6 puntos) Los divisores positivos de un número entero positivo n están escritos en orden creciente a partir del número 1

$$1 = d_1 < d_2 < d_3 < \dots < n$$

Encontrar el número n si se sabe que

$$\begin{aligned} &\text{i)} \quad n = d_{13} + d_{14} + d_{15}, \qquad \text{y} \\ &\text{ii)} \quad (d_5 + 1)^3 = d_{15} + 1 \end{aligned}$$

Problema 4. (6 puntos) Cuatro círculos de radio 1 con centros en los puntos A, B, C, D se encuentran en el plano de forma que cada círculo es tangente a dos de los otros. Un quinto círculo pasa por los centros de dos de los círculos y es tangente a los otros dos. Encuentre los valores que puede tomar el área del cuadrilátero $ABCD$.

Problema 5. (7 puntos) Una sucesión de polinomios $f_0 = 1$, $f_1 = 1 + x, \dots,$ $f_n(x)$ se define por recurrencia como sigue:

$$(k+1)f_{k+1}(x) - (x+1)f_k(x) + (x-k)f_{k-1}(x) = 0 \text{ para } k = 1, 2, \dots.$$

Demuestre que $f_k(k) = 2^k$ para cualquier $k \geq 0$.

Problema 6. (7 puntos) Se considera la siguiente ecuación diferencial:

$$3(3 + x^2)\frac{dx}{dt} = 2(1 + x^2)^2 e^{-t^2}.$$

Si $x(0) \leq 1$, demuestre que existe $M > 0$ tal que $|x(t)| < M$ para cualquier valor de $t \geq 0$.

Problema 7. (8 puntos) Hace mucho, mucho tiempo, cuando el mundo era plano y tenía forma de disco, la gente vivía en paz y no había fronteras. En algún momento empezó una guerra mundial y aparecieron estados cuyas fronteras estaban definidas por n líneas rectas que se movían, cada una paralela a sí misma con velocidades constantes (cada una con su propia velocidad). Además las líneas no podían cambiar su dirección. Algunos estados originales desaparecieron (un estado desaparece si y solo si su área se convierte en cero) y en el transcurso del tiempo, otros estados pudieron surgir.

En un momento determinado, los jefes de los estados existentes acordaron terminar la guerra y crearon una Organización de Naciones Unidas, y todas las fronteras cesaron de moverse. La ONU contó el número total de estados destruidos y los existentes y obtuvo un total de k. Demuestre que

$$k \leq \frac{n^3 + 5n}{6} + 1.$$

¿Puede obtenerse la igualdad?

Inés María Falk de Losada, Olimpiada Matemática Colombiana,
Universidad Nacional de Colombia, Carrera 38, 58A77 Bogotá, Colombia.
e-mail: `mariadel@venus.uanarino.edu.co`