EDUCACIÓN

Sección a cargo de

María Luz Callejo

Cooperación universitaria española

Una iniciativa de colaboración en el desarrollo universitario

por

Ángel Gutiérrez

Es de sobra conocido el auge que ha cobrado en los últimos años el movimiento internacional de creación de Organizaciones No Gubernamentales (ONG's), cuya finalidad es ayudar a paliar problemas de carácter humanitario que se presentan tanto en los países origen de las asociaciones como en diversas regiones del mundo. Algunas de estas asociaciones están integradas por personas de muy diversas procedencias sociales y profesionales, mientras que otras son asociaciones basadas en personas pertenecientes a un único grupo profesional, que aportan su experiencia y conocimientos de su especialidad para ayudar a resolver problemas relacionados con la misma.

Naturalmente, el mundo universitario español no es ajeno a este movimiento de solidaridad. En 1991 se creó Cooperación Universitaria Española (CUES), constituida formalmente en 1993 como una ONG, formada mayoritariamente por profesores universitarios (aproximadamente el 75%) procedentes de 26 universidades, y también por estudiantes universitarios y profesores de enseñanza secundaria. Un alto porcentaje de miembros de CUES son especialistas en diversas áreas de las matemáticas y la estadística, pero también hay ingenieros, médicos, economistas o abogados. En la actualidad CUES cuenta con casi 200 socios. El funcionamiento de la asociación está basado en una Junta Coordinadora formada por un presidente y 22 vocales.

El principal objetivo de CUES es cooperar con universidades y otros centros educativos, al servicio público y sin ánimo de lucro, de países en vías de desarrollo. Por razones obvias de afinidad cultural y lingüística, la actividad de CUES se ha orientado a países de América Latina cuya situación educativa está muy deteriorada, como consecuencia de conflictos bélicos o socio-políticos recientes, y en los cuales hay una demanda masiva de ampliación y actualización de conocimientos en áreas específicas, principalmente la enseñanza de las matemáticas. Dado que es imposible que CUES pueda cubrir dicha demanda, la forma como mejor se puede ayudar al desarrollo en estos países es

aportando nuestra experiencia docente para potenciar la capacitación científica y técnica de grupos de profesionales universitarios que, posteriormente, se encarguen de continuar la tarea a nivel nacional. Para ello, colaboramos con ellos y sus universidades u organizaciones en la creación de una infraestructura académica que les permita poner en marcha programas de formación de profesores que funcionen a largo plazo y de manera autónoma, como nuevas titulaciones universitarias, programas de maestría, cursos de perfeccionamiento de profesorado, etc. El procedimiento habitual es que universidades u otras organizaciones de estos países, interesadas en iniciar un proceso de mejora de la calidad de la enseñanza, se pongan en contacto con CUES para elaborar un proyecto conjunto que cristalice en la firma de un convenio entre CUES y la universidad.

Desde su creación, CUES ha desarrollado diversos proyectos en varios países americanos (Cuba, El Salvador, Guatemala, Nicaragua y Perú) y ha estado en contacto con otras instituciones de Bolivia, Colombia, Ecuador, El Salvador y Perú para estudiar la posibilidad de iniciar proyectos conjuntos. En la actualidad, se está colaborando con la Universidad de El Salvador (San Salvador), la Universidad Nacional San Antonio Abad (Cuzco, Perú) y la Asociación Paidos (Arequipa, Perú). La colaboración con la Universidad de El Salvador (UES) es la más antigua, pues se inició en 1991 y es la que está sirviendo de modelo para la organización de las actividades en los otros lugares mencionados, por lo que la describo con detalle en los párrafos siguientes.

La actividad de CUES en El Salvador se inició en 1991 con la impartición de cursos de capacitación docente conducentes a la obtención de un Diploma de Docencia Universitaria, que se han prolongado hasta 1997, y desde 1994 se ha centrado principalmente en la organización de dos programas de Maestría en la UES, uno en Educación Matemática y otro en Estadística. En estos momentos, está finalizando la actividad de la segunda promoción de ambas maestrías. Cada programa consta de 20 cursos, parte de los cuales son de contenidos matemáticos y el resto de contenidos específicos de didáctica de las matemáticas y estadística, respectivamente. El objetivo de los cursos de matemáticas es garantizar que los alumnos dispondrán de un nivel de conocimientos que les permita seguir adecuadamente los cursos especializados. Para obtener el diploma de Maestro, los estudiantes deben aprobar todos los cursos y, además, realizar una tesis de maestría, dirigida y evaluada por alguno de los profesores españoles de los cursos de la especialidad.

En la primera promoción de las maestrías (1994-96), cada curso constaba de 30 horas. En la segunda promoción (1996-98), cada curso consta de 50 horas, divididas en un módulo teórico y otro práctico de 25 horas cada uno. Los módulos teóricos son impartidos por profesores españoles miembros de CUES, durante estancias de 15 días en San Salvador. Los módulos prácticos son impartidos, siguiendo las directrices de los profesores de los módulos teóricos, por cooperantes españoles (jóvenes licenciados en matemáticas) que han solicitado desplazarse a la UES para realizar este trabajo durante el tiempo de su Prestación Social Sustitutoria. Lo usual es que haya un sólo cooperante en cada maestría, por lo que éstos realizan un enorme esfuerzo ya que deben

impartir una amplia variedad de cursos y, además, actuar como tutores de los estudiantes una vez que los profesores de los módulos teóricos han regresado a España.

En la organización de la parte científica, la UES ha gestionado el soporte legal para el reconocimiento del título de Maestro otorgado a los estudiantes y ha proporcionado, a través de la Escuela de Matemáticas, la infraestructura para la impartición de los cursos, mientras que CUES se ha responsabilizado del diseño de los cursos, la selección del profesorado para impartirlos y la evaluación académica de los estudiantes. En cuanto a la parte económica, la UES debe cubrir los gastos de estancia de los profesores y los derivados de la gestión administrativa y la difusión de información sobre las maestrías, mientras que CUES se hace responsable de los gastos de viaje entre España y San Salvador, lo cual supone una partida muy importante en los presupuestos de la organización.

Como se puede imaginar fácilmente, la búsqueda de fuentes de financiación para cubrir los gastos derivados de los distintos proyectos de CUES en marcha es la principal tarea, y fuente de preocupaciones, de su equipo directivo. Los ingresos de la organización son, por una parte, las cuotas de los socios y, por otra, las subvenciones recibidas de diversos organismos e instituciones. En algunos casos se trata de subvenciones directas a CUES, como las procedentes del ICMI (International Commission of Mathematical Instruction), el Ayuntamiento de Las Rozas y la SECIPI.

El Ministerio de Justicia colabora mediante la firma de un acuerdo por el que es posible realizar la Prestación Social Sustitutoria trabajando para CUES como auxiliar en la sede de Madrid o como profesor ayudante en alguno de los programas en marcha mencionados antes. Por último, también se reciben subvenciones indirectas de numerosas universidades españolas que se han hecho cargo total o parcialmente del coste de los viajes de sus profesores.

En el último año académico han sido 11 las universidades que han colaborado (en algunos casos ayudando a varios profesores), si bien esta cifra es variable dependiendo de la cantidad de cursos que se impartan a lo largo de cada año. Los primeros resultados con proyección social destacable de la Maestría en Educación Matemática de El Salvador empiezan a verse ya, pues algunos alumnos de la primera promoción están trabajando en el ministerio salvadoreño de educación en un programa de reforma de los curricula de matemáticas de las enseñanzas Primaria y Secundaria, el cual incluye la organización de cursos de capacitación para profesores estatales de estos niveles educativos. La mayoría de los profesores de estos cursos son alumnos de la Maestría en Educación Matemática o miembros de CUES que han colaborado con ellos durante su estancia en San Salvador.

Por otra parte, la amplia experiencia que CUES ha adquirido después de estos años trabajando en El Salvador es muy positiva, aunque no esté exenta de fallos y, por lo tanto, sea mejorable. Dicha experiencia está permitiendo elaborar nuevos proyectos de una forma más realista y teniendo en cuenta variables que antes no habían sido consideradas. Para todos los que hemos participado en alguna de la iniciativas de CUES en los países mencionados

antes, la experiencia ha sido muy interesante, enriquecedora y especial. Por ello, desde CUES esperamos que quienes estén en condiciones de poder ofrecer su colaboración en el futuro, se pongan en contacto con la asociación. Aquellos interesados en tener más información sobre CUES o alguno de sus proyectos pueden visitar su página web `http://www.gti.inf.uc3m.es/cues/cues.htm` o contactar con su equipo directivo en la siguiente dirección:

CUES
Dpto. de Matemáticas; ETSI de Caminos
Universidad Politécnica de Madrid
Ciudad Universitaria s/n
28040 Madrid
Tf.: 91 544 8672, Fax: 91 336 6782
e-mail: `ma10@dumbo.caminos.upm.es`

Ángel Gutiérrez, Dpto. de Didáctica de la Matemática,
Universidad de Valencia
c/ Alcalde Reig, 8. 46006 Valencia
e-mail: `angel.gutierrez@uv.es`

Interaccionar con un programa de construcción matemática[1]

por

Yves Paquelier[2]

Desde hace veinte años el CREEM[3] diseña, realiza y experimenta programas[4] de ordenador para la enseñanza de las matemáticas.

En este artículo, tras presentar la forma de trabajo del CREEM y la evolución de sus producciones en los últimos diez años, señalaremos algunas pistas de reflexión con objeto de comprender mejor cómo se modifican las situaciones

[1] Traducido del francés por María Luz Callejo.

[2] Profesor de matemáticas, ha formado parte del equipo del CREEM (ver presentación en la nota siguiente) desde 1988 hasta 1998.

[3] El CREEM (Centro de Investigación y de Experimentación para la Enseñanza de las Matemáticas) es un laboratorio de investigación que forma parte del equipo de investigación de Didáctica y de Ingeniería Didáctica (equipo del Ministerio de Educación francés) del CNAM (Conservatorio Nacional de las Artes y Oficios) que es un centro de enseñanza superior.

[4] N. de la T.: A lo largo del texto he traducido la palabra francesa *logiciel* por *programa de ordenador* o simplemente *programa*.

de enseñanza cuando se utilizan estos programas en clase de matemáticas. Se trata a la vez de ofrecer referencias para el profesorado que elabora y orienta actividades utilizando estos programas y de forjar, para la investigación didáctica, "herramientas teóricas" que permitan describir los cambios introducidos por el uso de las nuevas tecnologías en la actividad matemática.

En estas páginas no nos es posible ni describir en detalle los programas ni citar numerosos ejemplos de experimentaciones. Insistiremos en los puntos específicos que ayudan a iluminar nuestro discurso. Para conocer más profundamente los programas y las experiencias desarrolladas con ellos, remitimos a nuestras publicaciones o a la página web `http://www2.cnam.fr/creem/` que ofrece versiones de demostración, ejemplos de actividades e indicaciones de uso. Asimismo no nos referiremos a otros programas del mismo tipo (Cabri, Kappa, taller de geometría...). Eso no significa que los ignoremos ni que consideremos nuestras producciones como la única respuesta adecuada a la utilización del ordenador en clase de matemáticas. Por el contrario, en este dominio como en el de la informática en general, se conoce bien el daño que puede hacer el monopolio. La coexistencia de múltiples propuestas didácticas mediante diferentes productos, aunque desconcierte a veces al usuario, favorece, gracias a la confrontación de puntos de vista, el avance de la reflexión. Pero esto necesitaría en sí un artículo y dejamos al lector, familiarizado con otros programas, el trabajo de comparar la perspectiva que desarrollamos con la de aquéllos. Pensamos además que algunos conceptos que proponemos pueden arrojar luz sobre el uso de los mismos.

1. De los programas de imágenes[5] a los programas de construcción

1.1. Estilo de trabajo del CREEM

De forma esquemática podemos decir que la integración de la informática en la enseñanza requiere considerar tres dominios: el informático (para el desarrollo de herramientas y de técnicas), la enseñanza (para la experimentación sobre el terreno de las herramientas desarrolladas) y, en la frontera de los anteriores, la didáctica (para la elaboración de las situaciones de aprendizaje y el análisis de las utilizaciones efectivas de los programas). Las investigaciones interdisciplinares son pues necesarias y, además, difíciles de llevar a cabo (Bruillard y Vivet 1994).

Ante esta constatación el equipo del CREEM ha apostado hasta ahora por la "polivalencia" de sus miembros. Cada componente del equipo es, a la vez, profesor (en secundaria o superior), informático y didacta. Como tal participa en todo el proceso que conduce a la realización e integración de los programas: concepción del entorno, realización informática, aplicación en la

[5] N. de la T.: *Imagiciel* es la denominación francesa de lo que he traducido como *programa de imágenes*.

clase, análisis de las experimentaciones, redacción de las guías. El segundo principio de trabajo es la discusión de las producciones de cada uno hasta alcanzar el acuerdo del equipo; este tipo de funcionamiento se parece más al de una escritura colectiva (se podría hablar de "grupo de investigación" como se habla de "grupo literario") que a la colaboración institucional de varios laboratorios[6].

En el desarrollo del proceso que conduce a la introducción en el sistema de enseñanza[7], del objeto didáctico que es el programa, los miembros del equipo del CREEM asumen pues los tres puntos de vista: el de la concepción[8], el del análisis didáctico y el de la enseñanza.

1.2. LOS PROGRAMAS DE IMÁGENES

Hasta hace unos años[9], el CREEM centró sus trabajos en lo que hemos llamado *imagiciels* (programas de imágenes) que podemos definir en pocas palabras como programas que permiten obtener en pantalla imágenes animadas e interactivas, generalmente basadas en dibujos, con finalidades de enseñanza y esto, a menudo en el marco de un uso colectivo. Describamos un ejemplo para dar una idea más precisa:

El programa de imágenes AIRECT propone una familia de funciones afines por intervalos: dado un rectángulo ABCD y un punto I interior al rectángulo, un punto móvil M da la vuelta al rectángulo en el sentido ABCD. Se estudia la función que asocia a la distancia recorrida por M el área barrida por el segmento IM. Una opción permite desplazar M y ver el área sombreada sin trazar la curva de la función; el programa se puede pues utilizar para ayudar a que cada alumno comprenda lo que significa "el área barrida por IM" (figura 1).

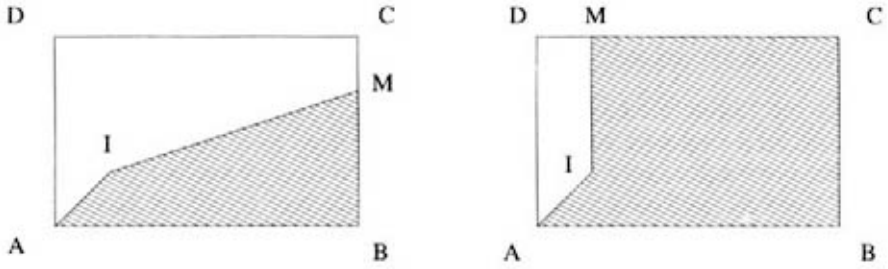

FIGURA 1

[6]Se expone una presentación más detallada del funcionamiento del equipo en CREEM 1992.

[7]Proceso que Nicolas Balacheff denomina "transposición informática".

[8]Esto supone especialmente un trabajo de reflexión sobre la evolución de los materiales, de los lenguajes y de los estandares informáticos (Hocquenghem 1998).

[9]Esta etapa se terminó con la difusión de una colección (CREEM 1991a, 1991b y 1992) que cubría lo esencial del programa de matemáticas de los cursos (científicos o no) de liceo (alumnos de 15 a 19 años) y parcialmente de los colegios (alumnos de 11 a 14 años) del sistema educativo francés.

Este programa de imágenes ofrece la posibilidad de representar, al mismo tiempo que el área barrida en el rectángulo, el punto de coordenadas (distancia recorrida, área barrida) y, guardando la traza, obtener toda o una parte de la representación gráfica considerada.

Los programas de imágenes[10], en las versiones originales, eran para el usuario, profesor o alumno, productos que se podrían calificar de "cerrados" en el sentido de que se trataba de programas y de documentos destinados a una situación matemática muy precisa, incluso si el área barrida contenía parámetros. La evolución natural nos ha conducido a dar, al profesorado primero y a los alumnos después, la posibilidad de situarse ellos mismos como autores de estos programas. Así hemos realizado programas que generan transformaciones geométricas, funciones, sucesiones, etc. La etapa siguiente ha sido la elaboración de instrumentos más potentes, los programas de construcción. Así han visto la luz (siempre en sistema DOS) Geospace, Geoplan y Geoplan2 (CREEM 1992 y 1994). GeoplanW y GeospacW, que presentamos a continuación, son versiones para Windows muy modificadas con relación a las anteriores.

1.3. Presentación de GeoplanW

GeoplanW es un programa de construcción[11] matemática (PCM en adelante) que funciona sobre Windows y se puede utilizar desde la enseñanza primaria hasta el primer ciclo de la enseñanza superior. Permite definir y manipular objetos geométricos del plano y objetos numéricos, fijos o variables: puntos, rectas, círculos, números, transformaciones, sistemas de referencia, curvas, vectores, funciones numéricas, sucesiones numéricas, etc. Para facilitar la creación de figuras y la utilización de GeoplanW, se pueden realizar diversas acciones: renombrar, modificar el aspecto, proteger, prohibir el acceso, etc. Una variable temporal permite crear animaciones. Los menús se pueden modificar.

A cada instante, GeoplanW ofrece una representación de la figura en la pantalla que está construida con los valores que tienen las variables en ese instante. El usuario tiene la posibilidad de cambiar los valores de las variables libres de la figura. El programa actualiza inmediatamente los valores de todas las variables así como la representación en la pantalla. Cada figura se guarda en forma de un texto que describe los objetos creados y los parámetros del dibujo. Este texto puede verse con cualquier programa de tratamiento de texto. Un editor incorporado a GeoplanW permite modificar una figura trabajando directamente sobre el texto.

---

[10] Resumimos más adelante las reflexiones didácticas realizadas paralelamente a la producción de este paquete a fin de aligerar esta presentación de los programas, pero recordemos que, para nosotros, la evolución de la concepción de los productos es inseparable del análisis didáctico de sus usos.

[11] No nos detenemos en la noción de "programa de construcción" que está ahora ampliamente extendida.

1.4. PRESENTACIÓN DE GEOSPACW

Es un programa de construcción matemática que funciona con Windows y permite crear y representar figuras del espacio. Estas figuras se componen de objetos matemáticos fijos o variables de diferente naturaleza: puntos, rectas, planos, polígonos, poliedros convexos, esferas, conos, cilindros... y también vectores, transformaciones geométricas, variables numéricas, funciones, etc.

La representación de la figura en la pantalla, calculada como en GeoplanW, depende, además, de diferentes parámetros de representación que son elegidos por el programa en la creación de objetos y que puede modificar posteriormente el usuario; estos parámetros conciernen, entre otros, las diferentes "vistas de la figura", la elección de la proyección (ortogonal u oblicua) efectuada para obtener el dibujo en el plano, el carácter opaco o no de ciertos objetos así como las convenciones de dibujo asociadas (con o sin punteado).

Los dibujos de GeoplanW y GeospacW pueden imprimirse, sea directamente a partir del programa, sea tras su importación a programas de tratamiento de texto que lo permiten. En estos dos programas, las creaciones y manipulaciones pueden automatizarse creando nuevas órdenes. Eso permite utilizar GeoplanW y GeospacW como lenguajes de autor de programas de imágenes e ilustra la continuidad con nuestras producciones anteriores.

2. CUATRO MODOS DE INTERACCIÓN CON UN PROGRAMA DE CONSTRUCCIÓN

Si la fase de trabajo con los programas de imágenes nos ha conducido a reflexionar sobre los papeles y las funciones del uso de tales programas en la clase de matemáticas, la experimentación de los PCM, en particular la observación de su utilización individual o por parejas, nos ha llevado a distinguir varios modos de relación entre el usuario y el programa, que describimos brevemente a continuación[12], antes de precisar las complejas relaciones que encierran estos diferentes modos y el interés de delimitarlos.

2.1. INTERACCIÓN CON EL OBJETO-PROGRAMA: APROPIACIÓN

Hemos estudiado este nivel de exploración o familiarización con el programa, particularmente los últimos años, en tanto que autores, para validar y modificar la comunicación con la máquina (nivel de la ergonomía), y en tanto que profesores para conocer cómo podrían ser las primeras sesiones con tales programas.

[12] Pensamos que esta distinción de cuatro modos de interacción puede aplicarse al uso de todo tipo de herramienta informática que tenga un mínimo de interacción. No tenemos aquí espacio para ilustrarlo pero el lector podrá divertirse aplicando la clasificación que sigue a un objeto elemental como el teléfono o más sofisticado como un tratamiento de texto.

En este tipo de interacción, el usuario explora el programa, se bloquea con cuestiones de sintaxis o de comunicación, se pierde a veces en la arborescencia de los menús, etc. Esto lo conocen bien todos los usuarios de programas informáticos.

2.2. Interacción con la herramienta-programa: producción

Dada una situación matemática (tangentes a un círculo pasando por un punto dado, suma de dos funciones, cilindro de volumen máximo inscrito en un cono...), se trata de construir una figura[13] que permita explorar la situación. Se plantea entonces la cuestión de elegir los objetos que se van a crear, definir sus relaciones, optar por uno u otro parámetro de visualización... En resumen, de hacer un uso pertinente del PCM. ¿Cómo estructurar entonces esta utilización pasando de un uso empírico "para ver" (multiplicación de los objetos y de las figuras, focalización en aspectos de forma o de color...) al desarrollo de un proyecto de experimentación? ¿Cuáles son las actividades que pueden ayudar al usuario a tener un mayor dominio del programa en tanto que instrumento de exploración de situaciones matemáticas? A la inversa, ¿cuáles son los problemas matemáticos para los que la utilización de los PCM está poco o nada adaptada? ¿Existen "problemas-PCM" generados por la utilización de estos programas y que son de poco interés, incluso de un efecto nefasto, para el aprendizaje de las matemáticas? Tales cuestiones conviene planteárselas en este nivel de interacción.

2.3. Interacción con el objeto-figura: reflexión

Una de las características de los PCM, la interactividad, es la "devolución" o respuesta permanente que recibe el usuario tras cada una de sus acciones, en forma de dibujo de la figura o de diversos datos y mensajes. Interpretar esas respuestas, anticiparlas, utilizarlas para continuar la creación de la figura, es una de las tareas del usuario en el curso de la interacción antes descrita. Pero esta "lectura de la figura" supone otro modo de relación entre el PCM y el usuario, el de la reflexión sobre el objeto-figura.

La dificultad, en este contexto, consiste en comprender que es la misma herramienta, el PCM, la que permite construir figuras e interrogarlas mediante cálculos de medidas, búsqueda de intersecciones, creaciones auxiliares, curvas u objetos geométricos, etc. Es por tanto el carácter reflexivo de todo acto de conocimiento que es así "puesto en escena" por el uso del programa.

Pero la toma de conciencia del trabajo de reflexión sobre la figura que hay que desarrollar no es evidentemente inmediata y los diferentes medios de implementarla exigen un aprendizaje. Junto a los mensajes previstos y a las herramientas presentadas en el PCM, hemos tratado de crear otros entornos en los que otro programa analiza, modifica, anima la figura realizada, utilizando el

[13] Es este un punto que a menudo se oculta en las investigaciones sobre el tema, como si el descubrimiento técnico del programa por parte del usuario viniera dado.

PCM como "medio de comunicación" entre él y el usuario. Estos productos son Trabajos Prácticos Matemáticos[14] (TPM, en adelante) en los que la figura no es más que uno de los elementos de la comunicación con la máquina mediante el cuál el usuario realiza ciertas tareas, responde a algunas cuestiones y el programa valida o invalida su respuesta, ilustrando así cómo una figura se puede comprobar o interrogar.

2.4. INTERACCIÓN CON LA HERRAMIENTA-FIGURA: COMUNICACIÓN

En entornos como los PCM, la figura aparece a la vez como objeto y como medio para un diálogo. El modo de relación se enriquece entonces, para el usuario, con una dimensión suplementaria: la realización de figuras para comunicarse a otros (programa, profesor, alumnos o consigo mismo en otro momento), el resultado de las investigaciones. El PCM se convierte entonces en instrumento de presentación, de confrontación, de discusión, pero también de memorización de conjeturas o de resultados de una investigación.

2.5. RELACIONES ENTRE LOS MODOS DE INTERACCIÓN

Si se admite la pertinencia de las distinciones anteriores, también se aceptará que en la realidad las cosas se presentan de manera más compleja, más imbricada. Los cuatro modos de interacción no están en efecto jerarquizados en cuatro niveles y no constituyen cuatro momentos claramente separados en el proceso de un PCM. En cualquier momento el usuario puede enfrentarse a un problema relevante de uno cualquiera de estos modos de interacción, incluso si la parte correspondiente de cada uno de ellos depende de la actividad propuesta y del nivel de familiarización con el programa. Más aún, una misma dificultad encontrada por un alumno puede deberse a la vez a varios tipos de interacciones.

Así cuando un alumno, queriendo trazar la altura de un triángulo ABC, crea la perpendicular a BC que pasa por A y quiere llamarla AH, el programa lo rechaza porque "el segundo carácter de AH es incorrecto", mensaje que no comprende el alumno. Este "error" que consiste en querer crear simultáneamente la perpendicular y su intersección con BC imaginando que, por la letra elegida, el programa colocará el punto H "en su sitio", se encuentra con frecuencia. Sólo en parte es un problema de comunicación con la máquina (nivel al que responde el programa) y revela más bien una cuestión de fondo sobre la relación entre los elementos de la figura a construir. Y cuando, en un segundo momento, el mismo alumno crea H como "punto libre" y después la perpendicular, no comprende por qué "el programa no desplaza el punto H al pie de la altura ya que es libre", es el significado mismo de la noción de "punto

[14] Un primer TPM se adjunta con GeospacW (CREEM 1988) y se refiere a los problemas de intersección en el espacio (programa Interesp). Ya existen otros sobre la homotecia. Hay también otros productos, aún no publicados, como "libros animados" (bajo *tool-book*) que permiten abordar tal o cual noción como la representación de objetos del espacio.

libre" y la interpretación de lo que pasa en la pantalla lo que está en juego. Se podrían multiplicar los ejemplos elementales del mismo tipo.

¿Qué concluir entonces de una tal imbricación de los modos de relación con el programa? ¿Cuál es la utilidad de la distinción de los cuatro modos antes expuestos si, en la práctica, todo está estrechamente ligado? Lejos de conducir al pesimismo o de invitar a contentarse con la ilusión de un aprendizaje "natural" del uso de un PCM, esta "rejilla de análisis" permite interpretar fenómenos complejos. Permite al profesor elegir "en directo" el nivel de respuesta que le parece más apropiado; ofrece al autor de los programas pistas para mejorar entornos de programas que favorezcan la comprensión de las herramientas; invita al didacta a construir situaciones que permitan responder a los diferentes niveles de dificultad.

Finalmente pone en evidencia, para toda persona que quiera reflexionar sobre la enseñanza de las matemáticas, la relación rica y compleja que existe entre el uso de tales herramientas y el conocimiento matemático en sí mismo. Este es el punto que quisiéramos abordar para concluir.

3. Programas de construcción y actividad matemática

3.1. Papeles y funciones de los programas de imágenes

La elaboración y utilización de programas de imágenes nos ha llevado a reflexionar sobre la naturaleza y los papeles de las representaciones gráficas utilizadas (cf. Callejo 1994), así como sobre la función de tales programas en la dinámica de una sesión de enseñanza y más globalmente en el proceso de aprendizaje de las Matemáticas. Hemos pues delimitado las nociones siguientes:

- el triple papel de los programas de imágenes: ilustración de situaciones, exploración para hacer conjeturas, reflexión sobre el significado de las representaciones en matemáticas,
- la doble función de mediación que asume el programa de imágenes: entre el alumno y los objetos matemáticos por una parte, entre el alumno y otra persona (los otros alumnos, el profesor...) por otra; en particular por su carácter esencial de objeto colectivo que permite a cada uno intervenir, dialogando así a través del programa de imágenes,
- la relación compleja y rica entre el uso de los programas de imágenes y la temporalidad del proceso de aprendizaje: el tiempo corto de la "película" en la animación de la imagen, el tiempo medio del "teatro" en los acontecimientos matemáticos que propicia en la clase, el tiempo largo de la "historia" por la memoria de imagen (individual o colectiva) que permite construir[15].

[15] Para una interpretación detallada e ilustrada de estos diferentes aspectos remitimos a las publicaciones de esta etapa (Monnet y Paquelier 1992, Paquelier 1994).

3.2. PROBLEMÁTICA DE CIERTOS SABERES

El hecho de que el uso de estos programas enriquece o modifica la idea que nos hacemos de ciertas nociones, es un fenómeno que habíamos ya constatado con los programas de imágenes. La noción de función, por ejemplo, gracias al programa citado en el ejemplo, que propone la exploración de funciones de origen geométrico, puede ser parcialmente desligada[16] de su única asociación a una fórmula algebraica ("una función es $f(x)$"). Se podrían citar otros muchos ejemplos.

Los PCM, situando al usuario en posición de autor de figuras, acentúan este fenómeno y permiten poner en evidencia ciertas confusiones a menudo implícitas cuando se usa lápiz y papel. Querríamos citar brevemente dos dominios esenciales en los que dicha problemática interviene[17].

1. Figura y dibujo, noción de variable geométrica

Concibiendo y experimentando GeoplanW, hemos tenido que precisar ciertas distinciones que al principio, como a otros creadores, se nos habían escapado. Así designamos figura al conjunto formado por los objetos creados y las relaciones eventuales entre ellos. Esta figura se describe por un texto que se puede consultar pulsando "recordar"[18]. En un instante dado, cada objeto de la figura (punto, segmento, variable numérica, función, etc), si es válido, tiene un valor que puede verse en el "texto de la figura". Se puede pues hablar de valor de un objeto y el conjunto de los valores de los objetos, en un instante dado, constituye el valor de la figura. El valor de la parte dibujable de la figura, con las elecciones hechas con relación a la representación (colores, tipo de trazo,...) constituye el dibujo de la figura.

Esta distinción entre figura y dibujo, entre objeto y valor del objeto, no es tan elemental como parece. Porque justamente el interés de un PCM es poder cambiar los valores de una variable y, cuando se hace mediante manipulación directa con el ratón, de un punto por ejemplo, se dice que se "desplaza el punto", mientras que de hecho se modifica el valor de una variable del punto. Eso aparece especialmente cuando un objeto no tiene valor al crearlo o tras una manipulación (los puntos de intersección entre un círculo y una recta por ejemplo). Llamamos válido, en un instante dado, un objeto cuyo valor existe. Estas precisiones no son sólo terminológicas, pues revelan distinciones a menudo implícitas cuando se usa papel y lápiz, que plantean numerosos problemas a los alumnos. Consideremos por ejemplo los problemas llamados de "construcción" que en el mejor de los casos tratan de "puntos variables",

[16] Al menos en una fase de introducción del concepto porque "los malos hábitos" vuelven rápidamente.

[17] Los dos puntos siguientes son resúmenes muy restringidos de distinciones complejas y a menudo difíciles de explicitar. Para una aproximación más rigurosa remitimos a la publicación de los PCM (CREEM 1997 y 1998) cuyos documentos contienen precisiones sobre el tema.

[18] N. de la T.: *Rappels* en GeosplanW.

de "puntos que describen una recta" y que, en cualquier caso, se considera normal que la construcción deba "resistir a toda variación de los objetos variables". Examinemos igualmente expresiones conocidas como "sea un triángulo cualquiera", "sea un círculo dado", que designan objetos no representables en el papel y cuyo significado es a menudo "vago" para el alumno.

En su interacción con un PCM como GeoplanW, el usuario es confrontado muy pronto con estas nociones: ¿hay que elegir un "punto libre" o un "punto fijo"?, ¿el círculo y la recta serán siempre tangentes si desplazo el centro del círculo? Si eso es una dificultad en la utilización del PCM, también es la ocasión, nos parece, de "poner sobre la mesa" distinciones de conceptos que a menudo se quedan en la sombra. Se puede representar un "triángulo cualquiera"(conjunto de tres puntos libres) con GeoplanW[19].

Es posible hacerse una idea de lo que es una construcción que "resiste los cambios de valor de los objetos"... Esto es a menudo costoso en cuanto a tiempo y necesita situaciones específicas de aprendizaje de estas nociones, con el uso de una terminología precisa, pero el provecho de ganar en comprensión de la naturaleza de los objetos matemáticos tiene este precio.

2. Representación de los objetos del espacio

El análisis del uso de los programas de imágenes ya había permitido poner en evidencia que uno de los papeles de estos programas era reflexionar sobre la representación de los objetos matemáticos (sea por su complejidad, sea por su carácter potencialmente engañoso); el usuario es conducido poco a poco a explicitar sus reglas de representación utilizadas. Con los PCM el fenómeno se agranda debido a las decisiones que el usuario debe tomar como autor de imágenes y con GeoespacW, por los problemas que origina la representación plana de objetos del espacio; este trabajo de reflexión es central.

Si con GeoplanW se puede identificar, en general sin problema, lo que se ve en la pantalla con una aproximación material del valor de la parte dibujable de la figura (figura 2), con GeoespacW eso no es ya posible.

El valor de la parte dibujable de la figura es, en efecto, una parte de $\mathbb{R}^3$ que decidimos llamar la maqueta virtual[20] de la figura y lo que aparece en la pantalla (el dibujo) es la representación plana de esta maqueta virtual, según la elección del programa (proyección ortogonal u oblicua, "rotación" de la maqueta...) sobre el plano de la pantalla. En GeospacW, hay pues la figura, la maqueta virtual y el dibujo.

[19] E incluso un "triángulo isósceles" cualquiera.

[20] La palabra "maqueta" quiere señalar que no se trata de un objeto plano y la palabra "virtual" recuerda que este "objeto geométrico" no existe más que en la memoria del ordenador (en términos de coordenadas en $\mathbb{R}^3$).

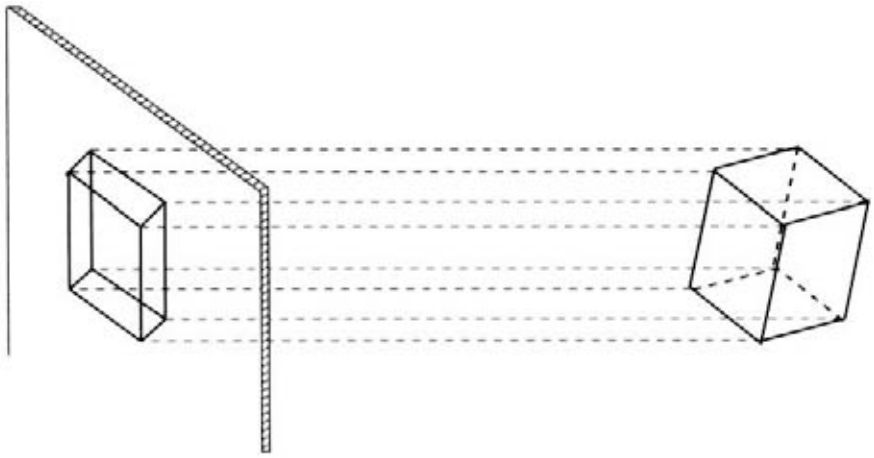

FIGURA 2

Ciertamente esta terminología no es fácil de acotar ni de utilizar. Pero es sin embargo indispensable si se quiere comprender "lo que hace el programa". Es además el mismo uso del programa lo que nos conduce a ella cuando se hace "girar el cubo" (con el ratón o con las flechas), cuando se hace "variar el dibujo", etc. El PCM es pues a la vez la ocasión y el medio de cuestionar el modo de representación de los objetos del espacio, siguiendo el proceso autorreflexivo antes señalado. Se puede ir hasta "representar la representación" creando la figura (con su maqueta y su dibujo) de la proyección de un objeto del espacio[21].

Tal situación es ciertamente un caso límite[22] y hemos propuesto en la guía que acompaña al programa varias actividades que permitan abordar progresivamente estas cuestiones. Necesitaríamos más espacio para describirlas y analizarlas.

El punto esencial sobre el que queremos insistir es que, en este caso como en el de la noción de "variable geométrica", el PCM permite mostrar los problemas más claramente que el lápiz y el papel y ofrece niveles de descripción de imágenes que permiten distinguir lo que antes estaba confundido.

3.3. LA FIGURA, OBJETO DE REFERENCIA

Uno de los aspectos esenciales que se desprende de los análisis precedentes es que, más allá de la diversidad de las formas de uso de los problemas aborda-

[21] Esta "representación de la representación" nos recuerda el análisis ya clásico que Michel Foucault (1966) hace del célebre cuadro de Las Meninas de Velázquez.

[22] Nosotros lo hemos experimentado en clases completas con alumnos de 16 años, y la discusión que ha permitido una descripción común de la figura, primero confusa, ha sido luego la ocasión de precisar bien los puntos sobre la representación de los objetos del espacio.

dos, lo que caracteriza la figura de un PCM es su capacidad de ser utililizada como objeto de referencia de la actividad matemática. Objeto colectivo que necesita una interpretación común del grupo clase y favorece así la precisión de los conceptos. Objeto común sobre el que cada uno puede intervenir en la exploración de una situación matemática y que permite a cada alumno proponer a los otros una conjetura para debatir, creando así un evento matemático en la historia de la clase. Objeto mensaje que ofrece a cada autor de imagen, la posibilidad de comunicar una idea, una solución y le obliga pues a explicitar "lo que se quiere decir". Objeto permanente que se puede integrar a informes[23], diarios y sobre el cual se puede volver, constituyendo así una verdadera "memoria de aprendizaje". Es lo que algunos investigadores llaman un *collecticiel* (Flores y Winograd 1989).

Nuestros trabajos actuales sobre la integración de dichas figuras (y no solamente de dibujos) en páginas de texto (en Word por ejemplo) o en páginas `htm` (por internet o intranet) son prolongaciones de aplicaciones de esta concepción.

4. Conclusión

Hemos intentado, en estas páginas, mostrar el interés que puede tener utilizar PCM, para enriquecer y dar más sentido a la actividad matemática en la clase. Sin subestimar las dificultades y las cuestiones aún abiertas, hemos querido ofrecer una perspectiva para que el profesor, el usuario, el didacta, tenga referencias y continúe el análisis y la experimentación de esta herramienta. Pese al carácter reductor y esquemático de una presentación breve, esperamos haber despertado en el lector las ganas de continuar la exploración y así prolongar el debate y la investigación en este dominio.

Bibliografía

[1] Balacheff, N.: "La transposition informatique. Note sur un nouveau problème pour la didactique", *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, (1994) 364-370, La Pensée Sauvage, Grenoble.

[2] Bruillard, E., Vivet M.: "Concevoir des EIAO pour des situations scolaires, approche méthodologique", *Recherche en didactique des Mathématiques* (1994) 14/1.2, 275-304, La Pensée Sauvage, Grenoble.

[3] Callejo, M. L.: "Representaciones gráficas en la resolución de problemas geométricos", *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, (1994) **2**, pp. 91-101.

[4] Creem: "Images logicielles mathématiques en seconde", *CRDP de Poitiers*, 1991a.

[5] Creem: "Mathématiques avec images logicielles en classe de seconde", *Hachette, Paris*, 1991b.

[23] Hemos adjuntado dichos documentos en los programas de trabajos prácticos matemáticos.

[6] CREEM: "Activités mathématiques avec imagiciels (premières, terminales)", *5 volúmenes, CRDP de Poitiers*, 1992.

[7] CREEM: "Activités mathématiques avec imagiciels: GEOPLAN version 2", *CRDP de Poitiers*, 1994.

[8] CREEM: "GeoplanW, logiciel de construction mathématique", *CRDP de Champagne-Ardenne*, 1997.

[9] CREEM: "GeospacW, logiciel de construction mathématique dans léspace", *CRDP de Champagne-Ardenne*, 1998.

[10] FLORES, F., WINOGRAD T.: "L'intelligence artificielle en question", *PUF, París*, 1989.

[11] FOUCAULT, M.: "Les mots et les choses", *Gallimard, París*, 1966.

[12] HOCQUENGHEM, S.: "Nouvelles technologies et enseignement des mathématiques", *(en prensa)*.

[13] MONNET, F., PAQUELIER, Y.: "Imagiciels, approche expérimentale en Mathématiques", *Aster*, **14**, 181-214, INRP, París.

[14] PAQUELIER, Y.: "Utilisation collective de représentations graphiques assistées par ordinateur en classe de mathématiques: quelle réflexion pour quel usage?", *Actes des 46-ème rencontres de la CIEAEM Toulouse, Francia.*

Yves Paquelier. Liceo Francés. Avenida Madroños s/n.
28043 Madrid.