HISTORIA

Sección a cargo de

Antonio Durán

Caos y atractores extraños. Dos problemas no lineales en matemáticas

por

Francisco Balibrea Gallego

INTRODUCCIÓN

En el mundo del cine, de la ciencia ficción o quizás en el de la divulgación científica, hemos asistido en los últimos tiempos a un bombardeo incesante en torno a unos cuantos términos provenientes de la literatura científica; términos como **caos, atractores extraños, efecto mariposa, impredecibilidad del tiempo atmosférico,** etc, han estado en boca de muy diferentes protagonistas. De películas como **Chaos** de los hermanos Tavianni, el extravagante profesor de **Parque Jurásico** de Steven Spielberg o el formidable embrollo de la comedia **Efecto Mariposa** de Fernando Colomo. En la literatura encontramos también ejemplos de lo mismo. El cuento **¿El aleteo de una mariposa en Nueva York puede provocar un tifón en Pekín?** está incluído en el libro de cuentos **L'àngelo Nero** (1991) de Antonio Tabucchi, aunque a decir verdad, resulta complicado encontrar relaciones entre el mismo relato y lo que su título significa. En el libro **A Sound of Thunder** de Ray Bradbury se plantea una curiosa historia. La muerte de una mariposa prehistórica, con su consiguiente falta de descendencia, cambia el resultado de la elección presidencial en Estados Unidos, en el momento presente. En la novela **Storm** de George R. Stewart, un metereólogo recuerda el comentario de uno de sus profesores acerca de que, un hombre que estornudara en China podría dar lugar a que la gente tuviera que quitar la nieve con palas en la ciudad de New York.

Los libros dedicados a la divulgación científica también han sido pródigos en estos temas. Se pueden citar algunos de ellos de entre una gran variedad que con mayor o menor fortuna abordan el tema. En la bibliografía se hace una descripción más detallada de los mismos, [L], [St], [P], y [R] por citar sólo alguno de ellos.

Incluso, el asunto ha llegado a las lecciones magistrales de la Universidad de Murcia con motivo de la festividad de Santo Tomás de Aquino (véase la referencia [M]).

Según el Diccionario de la Real Academia Española, la palabra **caos** proviene de la palabra griega $\chi\alpha\sigma\zeta$ (abertura) que originalmente en la **Teogonía** de Hesíodo significaba el espacio vacío infinito que existía antes de todas las cosas del que nacieron Erebo y la Noche, cuyos hijos fueron el Éter y el Día. En latín existe la palabra *chaos* que originalmente se interpretaba (en Ovidio, por ejemplo) como la masa en estado bruto sin modelar, sobre la que el gran arquitecto del mundo introdujo orden y armonía generando el *Cosmos.* Actualmente tanto en inglés como en castellano, la palabra caos (chaos en inglés) tiene dos significados:

(a) Estado amorfo e indefinido que se supone anterior a la constitución del cosmos.
(b) Confusión, desorden.

La finalidad de este trabajo es triple. Por un lado aclarar el origen, la noción y la evolución del término caos, su corazón geométrico que son los atractores extraños y finalmente presentar algunos modelos que provienen de las ciencias experimentales, donde el caos se presenta y que son susceptibles de ser interpretados fácilmente.

La conclusión final que podemos extraer es que las ideas sobre el caos son en realidad ideas que fueron descubiertas en el siglo XIX y puestas de actualidad en los años 70 en el mundo norteamericano de la Física y las Matemáticas con otro nombre y una distinta formulación.

Las ideas sobre los atractores extraños sí que son ideas novedosas de los citados años 70 y han impulsado una forma nueva de abordar un problema muy importante en Física y Matemáticas como es el problema de la **turbulencia** en los fluídos.

Origen y concepto de caos

Aunque pueda haber algún precedente, en cualquier caso poco claro, la primera vez que se usó el término caos en un artículo de Matemáticas, fue en 1975 con la aparición en la revista americana *American Mathematical Monthly* de un artículo con el sugestivo título de *Period three implies chaos* escrito por L. Li y J. Yorke. Aunque el artículo es interesante en sí, sin embargo tuvo mucha transcendencia de cara a la investigación en Matemáticas por el hecho del empleo del término "chaos", aunque el fenómeno estudiado en dicho artículo no coincidía con el que posteriormente se va a identificar con la noción de caos. El artículo se refería al hecho de que si una función continua real de variable real tiene un punto periódico de período 3, entonces tiene puntos periódicos de todos los períodos.

Antes de la aparición del artículo de Li y Yorke, en el mundo de la Física, Metereología, Ingeniería, etc, el término caos se estuvo usando de una forma poco precisa y muy irregular para describir fenómenos caracterizados del siguiente modo, según una descripción heurística del metereólogo E.N. Lorenz:

> Parece apropiado denominar caótico a un sistema físico real, si un modelo del mismo suficientemente realista, del que se haya suprimido la aleatoriedad inherente al mismo, sigue aparentando comportamiento aleatorio.

Lorenz estaba reproduciendo sin saberlo y haciendo alusión además a fenómenos ya considerados y a ideas ya exploradas en el mundo de las Matemáticas en el siglo XIX.

Antes de pasar a un análisis más fino de estas ideas, vamos a hacer algunas precisiones sobre la terminología que estamos empleando y que emplearemos en lo que sigue.

Un *sistema* es algo que tiene partes y que se concibe como una entidad simple. Según esta definición, no todo es un sistema:

(1) Euclides definió un punto como áquello que no tiene partes.
(2) En la mayor parte de las teologías, Dios no tiene partes.
(3) El conjunto vacío tampoco tiene partes.

Sin embargo la mayor parte de las cosas pueden ser vistas como sistemas de muy diferentes tipos: el sistema solar, el sistema capitalista, el sistema métrico-decimal, el sistema financiero, el sistema económico mundial, el sistema cardiovascular, etc. En Matemáticas, es interesante recoger la opinión de Wittgenstein [Hi] sobre los sistemas matemáticos:

> Un sistema matemático es un mundo. En Matemáticas no podemos hablar de sistemas en general, sino únicamente de la idea de estar *dentro* de un sistema.

Los teoremas de Gödel pueden interpretarse como una formulación precisa del significado de Wittgenstein. En realidad un sistema se identifica como la colección de todos sus estados concebibles.

Un *sistema dinámico* es uno que cambia con el tiempo. Lo que cambia en realidad es el estado del sistema. A tal respecto, el sistema capitalista es dinámico (según Marx), mientras que el sistema métrico-decimal es no dinámico.

Aunque más adelante lo definiremos con más precisión, un sistema dinámico en el sentido matemático, viene descrito por su espacio de estados junto con una regla llamada la *dinámica* del sistema que permita determinar el estado que corresponde a un tiempo futuro dado, partiendo del estado del sistema en el tiempo presente. Desde las más antiguas civilizaciones hasta la relatividad general, el sistema dinámico más importante ha sido el cosmos y el problema crucial, el de encontrar su dinámica.

Tradicionalmente, en Física y también en Matemáticas, los sistemas se han clasificado en dos grandes grupos:

(1) Sistemas *lineales*.
(2) Sistemas *no lineales*.

Un sistema dinámico es lineal cuando su dinámica es conocida, de tal forma que el conocimiento del estado actual del mismo hace que se pueda conocer el estado en cualquier otro instante futuro o pasado. Dicho sistema se puede formular mediante una ecuación diferencial ordinaria o en derivadas parciales, ecuación en diferencias finitas, ecuación integral o sistemas de ecuaciones combinación de las anteriores, pero siempre lineales. Esto significa desde un punto de vista físico, que la respuesta a una suma de efectos, es la suma de las respuestas a cada uno de ellos. La segunda ley de Newton $F = ma$ es un buen ejemplo de tales linealidades.

Los sistemas no lineales son áquellos que no presentan tal comportamiento, pero si se conoce el estado actual del sistema y una ecuación (de cualquiera de los tipos señalados anteriormente) no lineal que lo modeliza, también se podrá conocer el estado que el sistema alcanzará en el futuro.

Tanto para sistemas lineales como no lineales, si el sistema está modelado por una ecuación diferencial o en diferencias finitas, se denomina *sistema determinista*, es decir, existe una forma de determinar su comportamiento futuro dadas unas determinadas condiciones iniciales. En tales circunstancias se puede esperar un comportamiento regular y predecible del sistema.

Pero ésto no resulta ser exactamente así y ya Poincaré en 1892 descubrió que algunos sistemas derivados de la Mecánica, cuya evolución en el tiempo está gobernada por las ecuaciones de Hamilton, no siguen el comportamiento regular anteriormente considerado, sino que por el contrario el comportamiento futuro es completamente impredecible. En esencia ésto significa que si el estado de un punto evoluciona de una forma regular con el tiempo, es de esperar que un punto próximo al anterior lo haga de una forma parecida. Lo que posteriormente se llamó comportamiento *irregular* o *caótico* es precisamente el que puntos próximos en el instante actual, puedan tener comportamientos muy dispares en instantes futuros.

Desgraciadamente, en el mundo de la Física y de las Matemáticas, ésto fue considerado como una simple curiosidad hasta que unos 70 años después, hacia 1963, Lorenz encontró un sistema de tres ecuaciones diferenciales no lineales bastante sencillo cuyas trayectorias verifican la anterior condición de impredecibilidad futura.

En años recientes, debido sobre todo a la ayuda de resultados teóricos nuevos, a las posibilidades de cálculo que ofrecen los modernos ordenadores y a técnicas experimentales más sofisticadas, se ha encontrado que lejos de ser una curiosidad, el fenómeno de impredecibilidad de los sistemas se presenta frecuentemente en la naturaleza y con notables consecuencias en muchas ramas de la ciencia. Sobre todo en Física, el fenómeno de la impredecibilidad se ha bautizado con el sugestivo nombre de *caos determinista*.

Ahora podemos presentar algunos sistemas no lineales que presentan el caos determinista:

- el péndulo forzado,
- los fluidos cerca de la aparición de la turbulencia,
- los láseres,

- muchos problemas en Óptica no lineal,
- uniones de Josephson,
- algunas reacciones químicas,
- el problema clásico de los *n-cuerpos* (en particular el de los tres cuerpos),
- aceleradores de partículas,
- plasmas sometidos a ondas no lineales interactivas,
- modelos biológicos en dinámica de poblaciones,
- células del corazón sometidas a excitación exterior,...

Aquí conviene hacer notar un hecho importante; la no linealidad es una condición necesaria pero no suficiente para la presencia del caos determinista.

Aunque existe probablemente una prehistoria de todas las ideas que hemos mencionado, nosotros y para centrar las nociones, vamos a seguir la actividad de tres científicos franceses del siglo XIX.

Jacques Hadamard (1868–1963)
Pierre Duhem (1861–1916)
Henri Poincaré (1854–1912)

Nuestros antepasados habían descubierto hace mucho tiempo que el futuro es muy difícil, si no imposible, de predecir. Pero lo que es más reciente es el descubrimiento del hecho y su demostración matemática de que en algunos sistemas, una pequeña variación en el punto inicial donde empezamos a considerar la evolución del mismo, conducen a grandes cambios en la evolución posterior, por lo que cualquier posibilidad de predicción resulta completamente imposible. Este hecho fue observado por Hadamard en [H].

El sistema considerado por Hadamard era una especie de billar alabeado, al que denominaremos *el billar de Hadamard* y en el que la mesa del mismo se ha sustituído por una *superficie con curvatura negativa* en todos sus puntos. Realmente lo que interesa considerar es el movimiento que tendría un punto ideal que estuviera ligado a dicha superficie y que se moviera por la misma sin rozamiento. De esta forma el *billar de Hadamard* constituye la materialización de lo que se conoce técnicamente por *flujo geodésico* sobre la superficie de curvatura negativa.

El siguiente teorema (demostrado primeramente por Lobatchevsky para superficies de curvatura negativa constante como la esfera o la pseudoesfera, fue extendido por Hadamard a superficies de curvatura negativa en todos sus puntos, aunque no necesariamente constante) se puede enunciar en el lenguaje actual de las variedades riemanianas diferenciables.

Teorema 1 *Sea V una variedad riemaniana compacta y conexa de curvatura negativa. Entonces el flujo geodésico en el espacio tangente en cada punto a la variedad es un C-flujo.*

Una demostración de este teorema se puede encontrar, por ejemplo en [AA]. C-flujo significa que las órbitas del sistema son altamente inestables en el sentido de que dos órbitas que tengan datos iniciales próximos se separan exponencialmente con el tiempo.

La misma propiedad que tiene el billar de Hadamard, fue demostrada en los años 70 por el matemático soviético Jakob Sinai para el caso de un *billar plano con obstáculos convexos* [S].

Para tener una idea sencilla del fenómeno que ocurre en el billar de Sinai podemos utilizar la máquina de bolas de la Figura 1. Dos bolas que se lancen con aproximadamente la misma dirección y velocidad pueden tener trayectorias muy dispares, como se observa en dicha figura. Dicha disparidad es debida a la presencia de los obstáculos en el billar.

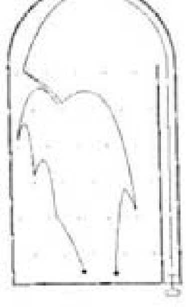

FIGURA 1. *Máquina de bolas que ilustra el fenómeno que se presenta en el billar de Sinai*

En la época en que se conocieron los trabajos de Hadamard, uno de los que entendieron las repercusiones filosóficas de los mismos fue el físico y filósofo francés Pierre Duhem. Como curiosidad, a Duhem se le debe la publicación de un trabajo considerable que tituló: *El Sistema del Mundo, Historia de las Doctrinas Cosmológicas de Platón a Copérnico* en diez volúmenes. En uno de estos volúmenes publicado en 1906, introdujo un apartado bajo el título de: *Ejemplo de una Deducción Matemática que nunca debe utilizarse*. En este apartado, Duhem se refería al cálculo de trayectorias sobre el billar de Hadamard. Tal trayectoria "nunca debe utilizarse", ya que cualquier pequeña incertidumbre que necesariamente está presente en la condición inicial, da lugar a una gran incertidumbre en la trayectoria calculada si se espera el tiempo suficiente, y ésto convierte a la predicción en algo sin ningún valor.

En *Ciencia y Método*, publicado en 1908, el gran matemático Henri Poincaré hace uso de algunas observaciones que él mismo había realizado tiempo antes al estudiar las órbitas de cuerpos materiales en el espacio tridimensional en el modelo conocido como *el problema de los tres cuerpos*, que no es otra cosa que un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales que representan los movimientos resultantes de tres cuerpos sometidos a las fuerzas gravitatorias ejercidas entre ellos.

En este modelo, existen puntos fijos en los que las **variedades estables e inestables** de los mismos (conjuntos de puntos cuyas órbitas cuando el tiempo crece, tienden al punto fijo o puntos cuyas órbitas "proceden"de los mismos) se cortaban. Poincaré descubrió que cuando este fenómeno ocurre, las órbitas que pasan cerca de los puntos de intersección se comportan de una forma muy complicada. Tal punto de intersección se denomina un **punto homoclínico** del punto fijo. La órbita que pasa por un punto homoclínico se denomina una **órbita homoclínica**. Cualquier órbita homoclínica tiende hacia el punto fijo tanto para valores del tiempo hacia adelante como hacia atrás.

Estas observaciones, propiciaron el que en el citado "Ciencia y Método", Poincaré discutiera el problema de la impredecibilidad del movimiento de ciertos sistemas mecánicos, aunque no de una forma técnica. Llega a la conclusión de que el **azar** y el **determinismo** se pueden hacer compatibles precisamente por la impredecibilidad a largo plazo. Poincaré lo explica del siguiente modo:

> Una causa muy pequeña, que se nos escapa, determina un efecto considerable que no podemos prever, y entonces decimos que dicho efecto se debe al azar.

Poincaré conocía lo útiles que son las probabilidades en la discusión del mundo físico y quería saber cuáles eran las fuentes del azar. Sus reflexiones le dieron varias respuestas. Uno de tales mecanismos o fuentes posibles era el de la inestabilidad de las órbitas.

Discutió dos ejemplos destacados de inestabilidad:

(1) Un gas que está compuesto de numerosas moléculas que se mueven a gran velocidad en todas las direcciones y que experimentan numerosos choques entre sí. Estos choques, según Poincaré, dan lugar a **sensibilidad a las condiciones iniciales** (esta terminología no fue empleada por Poincaré sino la de impredecibilidad del moviento). La situación es análoga a la de la bola de billar chocando con un obstáculo convexo. La impredecibilidad del movimiento de las partículas en el gas justifica una descripción probabilista del mismo.

(2) El segundo ejemplo concierne a la Metereología. Tambíen en este ejemplo existe sensibilidad a las condiciones iniciales. Por otra parte, nuestro conocimiento de las condiciones iniciales es siempre algo impreciso, y ello explica la poca fiabilidad de las previsiones del tiempo atmosférico que se pueden realizar. Esto ocurría al final del siglo XIX, pero actualmente parece que las cosas en este terreno no han mejorado sustancialmente. Así, como no podemos prever cómo se van a suceder los fenómenos metereológicos, pensamos que su sucesión tiene lugar al azar.

Hay que poner de manifiesto que el esfuerzo realizado por Poincaré para tratar de entender cuáles son las fuentes del azar, tiene mucha relación con el ambiente científico que se vivía a finales del siglo XIX. En esta época, muchos físicos y químicos negaban el que la materia estuviera compuesta de átomos y de moléculas. Otros habían aceptado ya mucho tiempo atrás, el que en un litro de cualquier gas, había un número enormemente grande de moléculas que se movían a gran velocidad en todos los sentidos y que chocaban en el más espantoso de los desórdenes. Este desorden se puede cuantificar como la suma de mucho azar en un volumen pequeño. Pero ¿cuánto azar? La pregunta tiene sentido y podemos responderla gracias a la *Mecánica Estadística*, creada hacia 1900 por el austríaco Ludwig Boltzmann y el americano J. Williard Gibbs. La contestación a la pregunta es que la cantidad de azar presente en un pequeño volumen de un gas viene dada por la **entropía** de ese volumen de gas.

Lo que resulta interesante, es que actualmente tenemos medios de determinar con precisión estas entropías. La conclusión es que, en cierto modo, se consigue domesticar el azar y convertirlo en imprescindible para la comprensión de la estructura de la materia.

Aunque no en los términos usados por la Mecánica Estadística, la noción de entropía fue introducida en 1850 por el físico alemán Clausius y ha tenido una curiosa evolución en la historia de los Sistemas Dinámicos que merece comentar, aunque solo sea brevemente.

Usando las ideas de Boltzmann y Gibss, el ingeniero americano Claude Shannon creó en 1948, lo que hoy conocemos como *Teoría de la Información* introduciendo una nueva noción de entropía, extensión de las anteriores. Más adelante, con las ideas de la Teoría de la Información, el matemático soviético A.N. Kolmogorov introdujo en el contexto de los Sistemas Dinámicos, la noción de **entropía métrica** que se extendió en los años 70 a la de **entropía topológica** y que actualmente es usada en Sistemas Dinámicos como una medida del grado de complejidad de los mismos.

ALGUNAS DEFINICIONES Y TERMINOLOGÍA

Todas estas ideas cuya génesis hemos repasado, fueron consideradas por el mundo matemático a partir sobre todo de los años 70 por dos razones; por lo sugestivas que son y por el ambiente científico general que impulsó a analizarlas en un marco teórico adecuado.

Para entender su evolución actual, vamos a introducir las definiciones de **Sistema Dinámico, Sensibilidad a las Condiciones Iniciales y Caos** que son el marco al que nos referíamos.

Llamaremos **Sistema Dinámico** a una terna (X,G,ϕ) que consiste en un *espacio de fases o espacio de estados* X (que puede ser un espacio topológico, o métrico o una variedad con alguna estructura diferencial), un semigrupo de escalares G o *conjunto de tiempos* (generalmente un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$) y el *flujo del sistema* ϕ que es una aplicación de $G\times X$ en X verificando las siguientes propiedades:

(1) ϕ es una aplicación continua.

(2) $\phi(0,x) = x$ para todo $x \in X$.

(3) $\phi(t,\phi(s,x)) = \phi(t+s,x)$ para todo $t,s \in G$ y todo $x \in X$.

Si $G = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ó $G = \mathbb{Z}$ (respectivamente $G = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ó $G = \mathbb{R}$) tenemos un **Sistema Dinámico Discreto** o un **Sistema Dinámico Continuo.** Es evidente que puede haber sistemas que no sean de ninguno de los tipos anteriores.

En cualquier caso dado $x \in X$, la función $\phi(t,x)$ ó $\phi_x(t)$ con $t \in G$ es una *solución* del sistema dinámico y su imagen la denominaremos la *órbita asociada* a tal solución.

Un sistema discreto puede venir dado por una función continua $f : X \to X$, en tal caso es $\phi(n,x) = f^n(x)$ donde $f^n(x) = f \circ f^{n-1}(x)$ para $n \geq 1$ y $f^0(x)$ quiere decir la *Identidad* en X.

Los sistemas dinámicos discretos más interesantes desde el punto de vista de las aplicaciones son aquellos en los que $X = I^m$ con $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ y f una función continua en I^m. Ejemplos de estos sistemas nos los proporcionan las *Ecuaciones en Diferencias Finitas* y modelos que provienen de la *Dinámica de Poblaciones*.

(1) $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$, para $x_n \in [0,1]$ y $0 \leq \lambda \leq 4$

(2) $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_{n-1})$, para $x \in [0,1]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Estos dos últimos ejemplos se denominan las *curvas logísticas uni* y *bidimensionales*.

(3) Modelos discretos de evolución de las *epidemias*:

$$x_{n+1} = (1 - x_n)(1 - e^{-\alpha x_n}), \quad x \in [0,1] \text{ y } \alpha \in \mathbb{R}$$
$$x_{n+1} = (1 - x_n - x_{n-1} - x_{n-2})(1 - e^{-\alpha x_n})$$

También pueden existir sistemas discretos donde X esté formado por un número finito o numerable de elementos. Tales sistemas se suelen denominar *redes neuronales, autómatas, etc* y plantean interesantes problemas combinatoriales y de Matemática Discreta.

Algunas ecuaciones en derivadas parciales pueden engendrar sistemas dinámicos continuos. Un ejemplo sencillo de tal situación nos lo proporciona la *ecuación del calor* en una dimensión espacial y con condiciones de contorno.

Pero los ejemplos más interesantes de sistemas dinámicos continuos son los sistemas de ecuaciones diferenciales autónomas, es decir, un sistema de la forma

$$\dot{x} = f(x) \text{ donde } f \in C^r(\Omega) \text{ y } \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ es un conjunto abierto}$$

A partir de ahora cuando nos refiramos a un sistema dinámico continuo se tratará de un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales cuyo flujo será representado por $\phi(t,x)$ que es una función que contiene toda la información sobre la evolución del sistema.

Consideremos ahora sistemas dinámicos continuos y discretos en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (respectivamente en un compacto $X \subset \mathbb{R}^n$). En los años 70, el matemático americano J. Guckenheimer acuñó la terminología *dependencia sensible a las condiciones iniciales*.

Sean los sistemas dinámicos

$$\dot{x} = f(x) \quad (g : X \to X)$$

Supondremos que $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto invariante por el flujo de estos sistemas, es decir, $\phi(t, \Lambda) \subset \Lambda$ para todo $t > 0$ (respectivamente $g^n(\Lambda) \subset \Lambda$ para todo $n \geq 0$). Decimos entonces que el sistema $\dot{x} = f(x)$ (resp. $g : X \to X$) presenta *dependencia sensible a las condiciones iniciales en* Λ, si existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $x \in \Lambda$ y cada entorno de $x, U(x)$, existe $y \in U$ y $t > 0$ (resp. $n \geq 0$) verificando la condición:

$$|\phi(t, x) - \phi(t, y)| > \varepsilon,$$

o respectivamente,

$$|g^n(x) - g^n(y)| > \varepsilon.$$

En 1989, el matemático americano R. Devaney formuló la siguiente definición:

El sistema $\dot{x} = f(x)$ (resp. $g : X \to X$) es *caótico* en un conjunto compacto $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ si se verifican las dos condiciones siguientes:

(1) El sistema $\dot{x} = f(x)$ (resp. $g : X \to X$) tiene dependencia a las condiciones iniciales en Λ.

(2) El sistema es *topológicamente transitivo* en Λ. Topológicamente transitivo significa que para cada dos subconjuntos abiertos y no vacíos de Λ, U *y* V existe $t_0 > 0$ (resp. $n_0 > 0$) tal que $\phi(t_0, U) \subset V$ (resp. $g^{n_0}(U) \subset V$).

Esta última definición no es seguida en la actualidad al pie de la letra y otras definiciones de *sistemas caóticos* han aparecido, sobre todo en el mundo de la Física. Sin embargo, la anterior definición de Devaney puede ser considerada como la formalización matemática de las ideas cuyo origen hemos establecido.

Para tratar de hacerse entender, en una conferencia pronunciada en Washington en 1972, el metereólogo Lorenz introdujo la metáfora del **efecto mariposa** para tratar de explicar el porqué el tiempo atmosférico no es predecible bajo ciertas condiciones, es decir, los modelos aproximados de las ecuaciones de la predicción del mismo, tienen dependencia sensible a las condiciones iniciales: "el aleteo de una mariposa en Brasil, ¿podría provocar un tornado en Texas?". La imagen es sugestiva en cuanto a su descripción, pero no es muy comprensible su significado.

Finalizaremos esta sección introduciendo un ejemplo paradigmático de sistema dinámico caótico y que se ha usado muy frecuentemente para decidir la caoticidad o no de otros sistemas.

Sea S un conjunto formado por N símbolos, en particular podemos pensar en los números $0, 1, 2, ..., N - 1$. Consideremos ahora el conjunto de todas las *bisucesiones* que se puedan construir con los números anteriores. El resultado es un conjunto que representaremos por Σ^N que puede verse como un producto cartesiano infinito de copias de S.

$$\Sigma^N = \prod_{i=-\infty}^{+\infty} S_i \text{ donde } S_i = S \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}$$

Un punto $s \in \Sigma^N$ estará representado por la bisucesión

$$s = \{....s_{-n}...s_{-1}s_0.s_1s_2....s_n....\}.$$

Si es

$$\overline{s} = \{....\overline{s}_{-n}...\overline{s}_{-1}\overline{s}_0.\overline{s}_1...\overline{s}_n...\}$$

podemos definir en Σ^N una métrica d dada por:

$$d(s,\overline{s}) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{|\ s_i - \overline{s}_i\ |}{1+ |\ s_i - \overline{s}_i\ |}$$

Entonces el espacio (Σ^N, d) resulta ser un espacio métrico compacto, totalmente desconectado y perfecto (de hecho un conjunto *tipo Cantor).*

Definimos sobre dicho espacio la aplicación *shift:*

$$\sigma : \Sigma^N \to \Sigma^N$$

como $\sigma(....s_{-1}s_0.s_{1,}s_2...) = (...s_{-1}s_0s_1.s_2...)$

Se pueden comprobar las siguientes propiedades:

(1) $\sigma(\Sigma^N) = \Sigma^N$

(2) σ es una aplicación continua.

(3) La aplicación σ tiene un número numerable de órbitas periódicas. Los períodos de estas órbitas recorren todos los números naturales.

(4) σ tiene una órbita densa, es decir, pasa cerca (en el sentido de la distancia d) de todas las órbitas del sistema dinámico definido por σ.

(5) σ es topológicamente transitiva en Σ^N.

(6) σ presenta dependencia sensible a las condiciones iniciales en Σ^N.

(7) El sistema dinámico (Σ^N, d) es caótico en todo Σ^N.

Históricamente, tal sistema dinámico se ha conocido con el nombre de *shift de Bernouilli*. Una materialización del mismo consiste en considerar $S = \{0, 1\}$ y realizar el lanzamiento de una moneda al aire, anotando sucesivamente los resultados obtenidos (un cero si sale cara y un uno si sale cruz).

En la *Teoría de la Probabilidad*, este modelo es un ejemplo de lo que técnicamente se conoce como un *proceso estacionario*.

ATRACTORES EXTRAÑOS

Cuando un sistema es caótico, el conjunto del estado de fases donde se presenta el fenómeno de dependencia sensible a las condiciones iniciales puede venir acompañado de otras condiciones adicionales, por ejemplo, que sea un *conjunto atractor* para todas o para la mayor parte de las trayectorias del sistema.

En tales situaciones, es habitual que dicha porción del espacio de fases tenga una estructura geométrica y topológica muy complicada y como consecuencia una dinámica de alto grado de complejidad. Estos conjuntos fueron denominados **atractores extraños** debido a que tienen una estructura y una apariencia "extraña".

El primero que habló de estas estructuras fue el ya citado metereólogo americano del Instituto Tecnológico de Massachussetts, Edward N. Lorenz. Este metereólogo estaba interesado en el conocimiento en profundidad de la convección atmosférica. El fenómeno es como sigue: el sol calienta el suelo y las capas inferiores de la atmósfera se vuelven más calientes y menos densas que las capas superiores. Esto desencadena un movimiento ascendente del aire caliente y ligero, mientras que el aire frío y denso desciende. Estos movientos son el fundamento de la *convección*. Considerando el aire como un fluído, su estado en cada instante de tiempo puede ser representado por un punto del estado de fases que debe ser tomado de dimensión infinita, ya que se necesitarían infinitas variables para poder explicar los citados estados. En lugar de estudiar la evolución temporal de estas infinitas variables, Lorenz usó unas ecuaciones debidas a Boussinesq que describen el flujo de un fluído situado en una situación convectiva. Truncando hasta ciertos órdenes tales ecuaciones, Lorenz simplificó las cosas y redujo el problema al estudio de una evolución temporal en tres dimensiones. Obtuvo un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias con parámetros:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -ax + ay \\ \dot{y} = bx - y - xz \\ \dot{z} = -cz + xy \end{array} \right.$$

Con ayuda del ordenador y usando el método de Runge-Kutta de cuarto orden para la resolución del citado sistema, para unos determinados valores de los parámetros, Lorenz obtuvo figuras semejantes a la Figura 2, que desde entonces se conocen como *atractores de Lorenz.*

En la Figura 2 se ha representado gráficamente la evolución de la trayectoria de un solo punto que pertenece al atractor. Hay que insistir en que no se representa todo el atractor sino únicamente parte de una de sus trayectorias, donde además se han suprimido los primeros puntos. En el caso de la figura se han tomado los valores

$$a = 10, \quad b = 28, \quad c = 8/3.$$

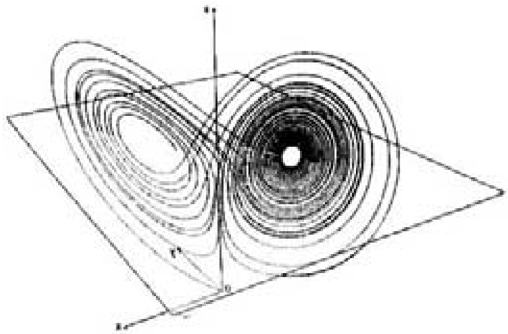

Figura 2. *Evolución de la órbita de un punto perteneciente al atractor*

La evolución temporal estudiada por Lorenz no es una descripción realista de la convección atmosférica. Sin embargo, su estudio dio un fuerte argumento a favor de la impredecibilidad de los movimientos atmosféricos. Todo el mundo sabe por la experiencia que, las predicciones a largo plazo de los metereólogos profesionales y de sus representantes en los medios de comunicación, los "hombres y mujeres del tiempo", deben tomarse con gran reserva. Lo que Lorenz mostró ahora fue que los errores en las predicciones de sus colegas tenían una excusa válida: la sensibilidad a las condiciones iniciales. Ya hemos citado que Poincaré, mucho tiempo antes había hecho una observación similar.

Desde la aparición de las ecuaciones de Lorenz, otros muchos sistemas de ecuaciones diferenciales han aparecido relacionados con muchos otros modelos, conteniendo aparentemente atractores extraños. De momento el sistema más sencillo es el propuesto por Otto Rössler de Tügingen que modeliza la reacción química de Belousov-Zhabotinsky que es la oxidación de malonato mediante bromato en presencia de iones metálicos. Dichas ecuaciones son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + \alpha y \\ \dot{z} = \alpha + xz - \mu z \end{array} \right.$$

La Figura 3 representa una órbita de este posible atractor para los valores

$$\alpha = 0.2, \qquad \mu = 5.7$$

Estos ejemplos y otros que describiremos más adelante, hacen necesario que introduzcamos algunas definiciones para precisar la terminogía de la que estamos hablando.

En el contexto de los sistemas dinámicos tanto continuos como discretos introducidos con anterioridad, un conjunto cerrado e invariante $A \subset \mathbb{R}^n$ del espacio de fases se denomina un **conjunto atrayente** si se verifica que existe algún entorno U del conjunto A tal que:

(1) Para cada $x \in U$ y todo $t \geq 0$ es $\phi(t,x) \in U$ y $\lim_{t \to \infty} \phi(t,x) = A$, es decir, la trayectoria que pasa por cualquier punto de U "acaba" en el conjunto A y ya no lo abandona.

(2) Para cada $x \in U$ y todo $n \geq 0$ es $g^n(x) \in U$ y $\lim_{n \to \infty} g^n(x) = A$

La **base de atracción** de A es el conjunto definido del siguiente modo:

$$\bigcup_{t \leq 0} \phi(t,U) \text{ ó } \bigcup_{n \leq 0} g^n(U)$$

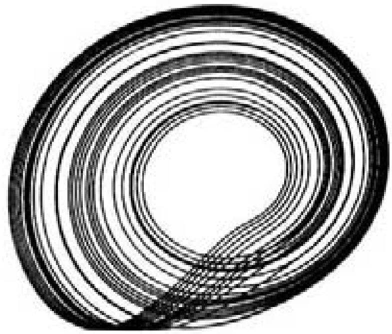

FIGURA 3. *Órbita de un punto del atractor de Rössler.*

Finalmente, un conjunto A se denomina **atractor** si verifica las dos condiciones siguientes:

(1) es *atrayente*,
(2) es *topológicamente transitivo*.

El siguiente ejemplo tomado del libro de Guckenheimer-Holmes [GH] permite distinguir entre estas nociones:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

En este ejemplo, existen tres puntos fijos $(0,0), (+1,0)$ y $(-1,0)$. El primero es un *punto de silla* y los otros dos son puntos *sumidero*, (ésto se decide calculando la diferencial de la función que define el sistema en los tres puntos y luego viendo el signo que toman en los mismos los valores propios de dicha diferencial).

Se puede comprobar fácilmente usando las ecuaciones del sistema, que cualquier elipse que contenga a los citados tres puntos es un "conjunto que atrapa" a todas las órbitas que comiencen en puntos de la misma. El intervalo $[-1,1]$ es una *región atrayente* y únicamente los puntos $(-1,0)$ y $(+1,0)$ son *atractores*.

Denominaremos **atractor extraño** a un *atractor* donde el sistema se comporte como *caótico*, es decir, donde en el mismo exista sensibilidad a las condiciones iniciales.

Comprobar que un determinado sistema dinámico posee un *atractor extraño* es complicado y son conocidos pocos ejemplos donde de una forma rigurosa se haya probado que poseen dicho atractor. Los que hemos llamado atractores de Lorenz y de Rössler son un buen ejemplo de lo dicho, ya que su existencia ha sido sugerida de una forma computacional o heurística, pero no rigurosa. De momento, el problema de probar la existencia de atractores extraños en sistemas dinámicos, es un problema matemático de primera magnitud en esta teoría.

Citaremos a continuación unos pocos ejemplos donde la prueba de su existencia ha sido posible.

(1) El sistema dinámico discreto dado por la curva logística

$$g(x) = ax(1-x) \;\; para \;\; 0 \leq a \leq 4$$

posee para ciertos valores del parámetro a atractores extraños. Esto ha sido probado por Jacobson (1981), Misiurewicz (1981), Johnson (1987), Guckenheimer-Johnson (1989) y Benedicks-Carleson (1991).

(2) Plykin (1974), Nemytskii-Stepanov (1989) y Newhouse (1980) han construído ejemplos de sistemas de tres ecuaciones autónomas poseyendo conjuntos atrayentes hiperbólicos que son caóticos. Sin embargo, se trata de conjuntos que no son atractores extraños y además dichos ejemplos son artificiales.

(3) Sistemas similares al presentado por Lorenz han sido propuestos por Sinai-Vul (1981), Afraimovich-Bykov-Silnikov (1983), Rychlik (1987), Robinson (1988). En todos los casos no se ha conseguido demostrar la presencia de los atractores extraños.

(4) En 1976, generalizando un modelo de la Mecánica Celeste, el modelo de Hénon-Heiles, ([He]), el astrónomo francés M. Hénon propuso el siguiente sistema dinámico discreto bidimensional

$$H_{a,b}(x,y) = (1 - ax^2 + y, bx)$$

donde a y b son dos parámetros. Para los valores $a = 1.4$ y $b = 0.3$ obtuvo la imagen, en el ordenador, en el conjunto de fases del sistema, con la extraña forma que se puede apreciar en las figura 4 al que denominó un atractor extraño que tiene el sistema dado. Dicha figura ha sido obtenida para el punto inicial (0,0), usando Runge-Kutta de cuarto orden y una iteración de unos 10.000 puntos.

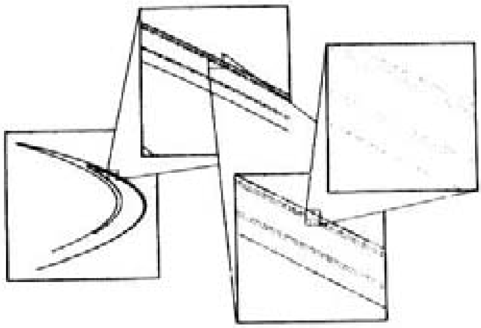

FIGURA 4. *Atractor de Hénon*

Posteriormente, dicho atractor se ha conocido por el *atractor de Hénon*. Hasta el momento actual y para los valores citados de los parámetros, no se ha demostrado rigurosamente que dicho atractor exista. En 1992, los matemáticos suecos, Benedicks y Carleson lo han hecho pero para valores $a = 0.4$ y b próximo a cero.

(5) En el mundo de la Electrónica, existe un circuito que se conoce como el **circuito de Chua** que ha proporcionado todo un arsenal de interesantes sistemas de tres ecuaciones diferenciales con varios parámetros donde los fenómenos no lineales son muy fuertes y donde se ha conjeturado la existencia de muchos atractores extraños de diferentes geometrías. Este sistema viene dado por

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = k\alpha(y - x - h(x)) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = k(x - y + z) \\[2ex] \dfrac{dz}{dt} = k(-\beta y - \gamma z) \end{array}\right.$$

donde α, β y γ son parámetros físicos del circuito,

$$k = \left\{\begin{array}{ll} 1, & \text{si } 1/\alpha > 0 \\ -1, & \text{si } 1/\alpha < 0 \end{array}\right.$$

y

$$h(x) = m_1 x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)\{|\, x + 1\,| - |\, x - 1\,|\}$$

es la ecuación del diodo que forma parte del circuito

La Figura 5 es una representación de alguno de los atractores extraños obtenidos computacionalmente a partir de las ecuaciones del circuito de Chua.

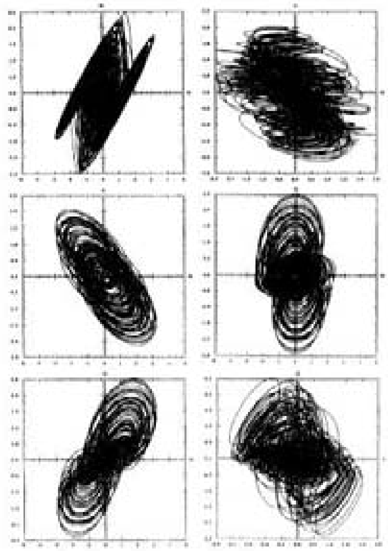

FIGURA 5. *Atractores extraños de Chua.*

Como un comentario final hay que destacar un artículo publicado en 1971 por los físico-matemáticos Ruelle y Takens: *On the nature of turbulence* [RT], que aunque contiene algunas ideas desarrolladas previamente por Poincaré y Lorenz (ya analizadas anteriormente en este mismo artículo) sobre la Meteorología, pretendía arrojar luz sobre el problema general de la turbulencia hidrodinámica. En este artículo se afirmaba que los flujos turbulentos *no* se pueden describir mediante la superposición de infinitos *modos* de movimiento (como proponían Landau y Hopf) sino mediante la aparición de *atractores extraños.*

Esto ha constituído un modo nuevo y original de enfrentarse al duro problema de intentar entender en qué consiste la turbulencia y está presente en todos los libros actuales de Hidrodinámica.

Otro detalle interesante se refiere a la geometría de los atractores extraños. Desde luego no son curvas o superficies lisas en el sentido de la existencia de la derivabilidad, sino que se suele tratar de objetos de *dimensión de Hausdorff* no entera, a los que Benôit Mandelbrot bautizó con el nombre de **fractales.** Pero ésto constituye un asunto de suficiente complicación para merecer un tratamiento aparte.

Bibliografía

[AA] ARNOLD, V. I., AVEZ, A.: "Ergodic Problems of Classical Mechanics", *Addisson-Wesley. Advanced Book Classics*, 1989.

[G] GLEICK, J.: "Caos. La Creación de una Nueva Ciencia", *Seix-Barral*, 1989.

[GH] GUCKENHEIMER, J., HOLMES, P.: "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields", *Springer-Verlag*, 1983.

[H] HADAMARD, J.: "Les Surfaces à Courbures Opposées et leurs Lignes Géodésiques", *J. Math. Pures et Appliquées*, **4** 1899, p. 27-73.

[He] HÉNON, M.: "A Two Dimensional Mapping with a Strange Attractor", *Comm. Math. Physics*, **50** 1976, p. 69-77.

[Hi] HIRSCH, M.: "The Dynamical Systems Approach to Differential Equations", *Bulletin of the Amer. Math. Soc.*, **11** Number 1, 1984, p. 1-64.

[L] LORENZ, E.: "La Esencia del Caos", *Círculo de Lectores*, 1995.

[M] MUÑOZ, CORTÉS M.: "Summa versus Encyclopediam", *Lección Magistral en Santo Tomás de Aquino, (1996). Servicio de Publicaciones. Universidad de Murcia.*

[P] PRIGOGINE, I.: "Las Leyes del Caos", *Drakontos*, 1997.

[R] RUELLE, D.: "Hasard et Chaos", *Éditions Odile Jacob*, 1991.

[RT] RUELLE, D., TAKENS, F.: "On the Nature of Turbulence", *Comm. Math. Phys.*, **20**, 1971, p. 167-192; 23, (1971), p.p. 343-344.

[S] SINAI, J.: "On the Concept of Entropy of a Dynamical System", *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **124**, 1959, p. 768-776 (En ruso).

[St] STEWART, I.: "¿Juega Dios a los Dados?", *Drakontos*, 1991.

Francisco Balibrea Gallego.
Departamento de Matemáticas, Campus de Espinardo.
Universidad de Murcia
30100 Murcia
e-mail: `balibrea@fcu.um.es`