

---

---

## PROGRAMAS INFORMÁTICOS EN MATEMÁTICAS

Sección a cargo de

**Emilio Bujalance**

---

---

La sección en este número está dedicada al programa Mathematica<sup>®</sup>, que junto con Maple son los dos programas de matemática simbólica más extendidos. Ambos son análogos en contenidos y en las respectivas nuevas versiones las mejoras que ofrece uno son establecidas por el otro en la siguiente versión.

La sección esta compuesta por tres artículos. El primero de los artículos "Mathematica<sup>®</sup> en la Enseñanza Secundaria" ha sido escrito por los Profesores numerarios César Beade y Camilo Martínez del IES "Fernando Blanco" de Cee (La Coruña), que llevan trabajando desde hace algunos años en las aplicaciones de Mathematica<sup>®</sup> a la enseñanza secundaria.

El segundo de los artículos "Mathematica<sup>®</sup> en la Enseñanza Universitaria" es de la Profesora Marisa Fernández, Catedrática de la Universidad del País Vasco. Lleva trabajando desde hace años en las aplicaciones de Mathematica<sup>®</sup> a la enseñanza universitaria. Es autora de un libro sobre Geometría Diferencial utilizando Mathematica<sup>®</sup>.

El tercero de los artículos "Investigando en nudos y variedades con la ayuda de Mathematica<sup>®</sup>" de la Profesora María Teresa Lozano, Catedrática de la Universidad de Zaragoza, que lleva utilizando el programa Mathematica<sup>®</sup> en parte de la investigación que ha realizado en los últimos años.

---

---

### Mathematica<sup>®</sup> en la Enseñanza Secundaria

por

**César Beade Franco y Camilo Martínez Ronquete**

#### 1. UN POCO DE HISTORIA

Stephen Wolfram es el creador de Mathematica<sup>®</sup> y es ampliamente reconocido como uno de los mayores renovadores de la informática científica y técnica de hoy en día. Nació en Londres en 1959 y estudió en Oxford y en el Caltech (donde se doctoró a los 20 años).

Habiendo empezado a utilizar ordenadores en 1973, en 1979 empezó la construcción del "SMP" el primer sistema de álgebra informática moderna, que se comercializó en 1981. Luego, después de una brillante carrera académica en el Caltech, Princeton e Illinois, puso en marcha "Investigation Wolfram Inc."

Él mismo empezó el desarrollo de Mathematica® a finales de 1986. La primera versión apareció en Junio de 1988 y su popularidad creció rápidamente. La versión 2 apareció en 1991 y la 3 en 1996.

El concepto visionario de Mathematica® fue crear de una vez un sistema simple que pudiese englobar todos los aspectos variados de la informática técnica de una forma coherente y unificada. La clave del avance intelectual que hizo posible esto fue la invención de un lenguaje simbólico que pudo por primera vez manipular la amplísima gama de objetos que conlleva la informática técnica usando sólo un número bastante pequeño de conceptos primitivos básicos.

## 2. CARACTERÍSTICAS GENERALES Y FUNCIONAMIENTO

Mathematica® requiere:

- |                             |                                       |
|-----------------------------|---------------------------------------|
| * Procesador tipo.          | Intel 80386 o mayor.                  |
| * Sistema operativo.        | Windows 95 o Windows NT 3.51.         |
| * Memoria en el disco duro. | Mínima de 30 MB y 116 MB recomendada. |
| * Memoria RAM.              | Mínima de 8 MB y 16 MB recomendada.   |

Según el uso que se haga del programa éste puede parecer diferentes cosas, así no es fácil dar una definición del mismo. Podemos considerarlo como:

- Calculador de tipo numérico, incluyendo cálculos que usualmente requieren la utilización de funciones, subrutinas o procedimientos especiales. De hecho, la integración numérica, programación lineal, etc. están ya implementadas y no hay más que usarlas directamente.
- Calculador simbólico.
- Lenguaje de programación de alto nivel.
- Procesador de textos, en especial la última versión.

Cuando se inicia el trabajo con Mathematica® nos encontramos con una pantalla así dispuesta (ver Figura 1):

A la izquierda vemos un menú desplegado. A la derecha una paleta con símbolos. Hay en total 7 grupos de paletas que contienen unos 800 símbolos, que facilitan y mejoran la presentación del texto.

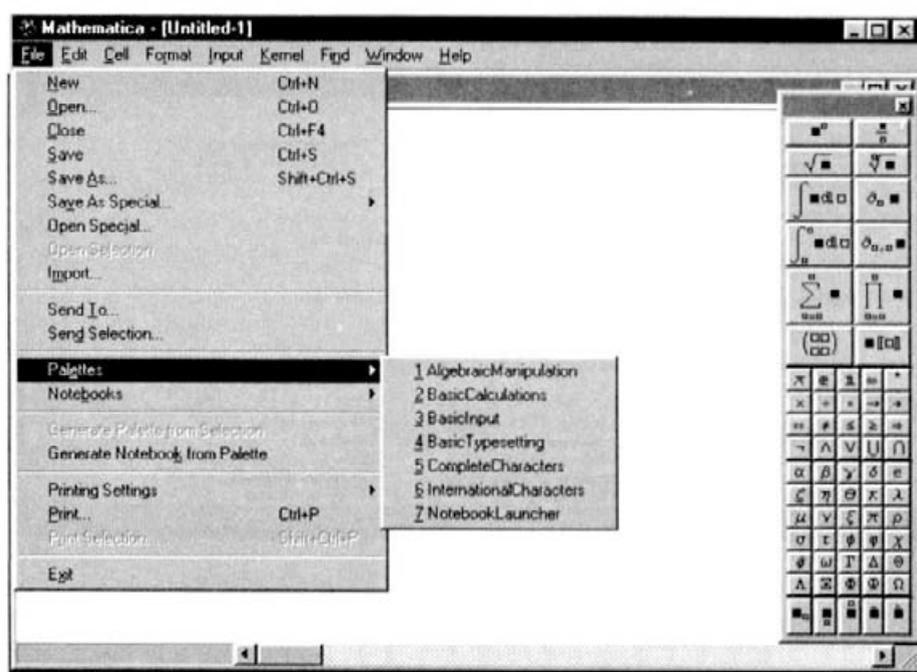


FIGURA 1

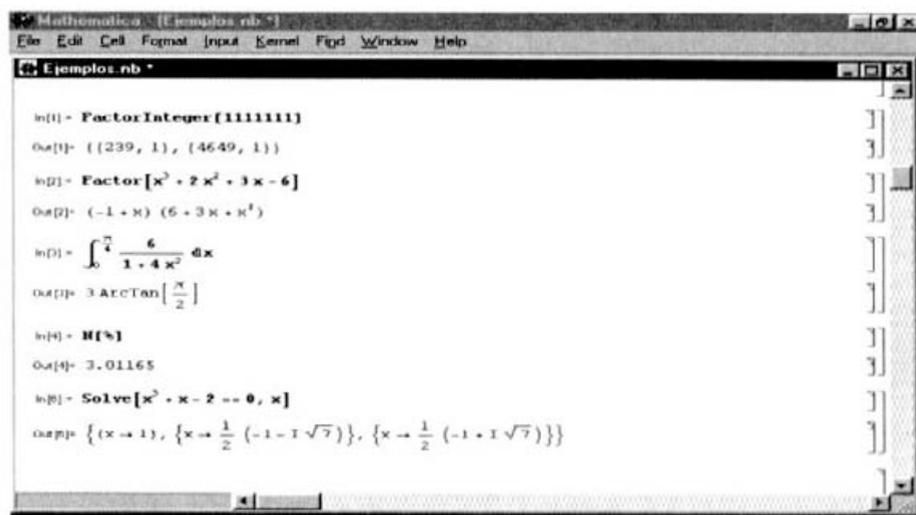


FIGURA 2

En la figura 2 se observan ejemplos de cálculo numérico y simbólico. Podemos comprobar que la sintaxis y la notación son prácticamente las mismas que las usadas de forma habitual en matemáticas.

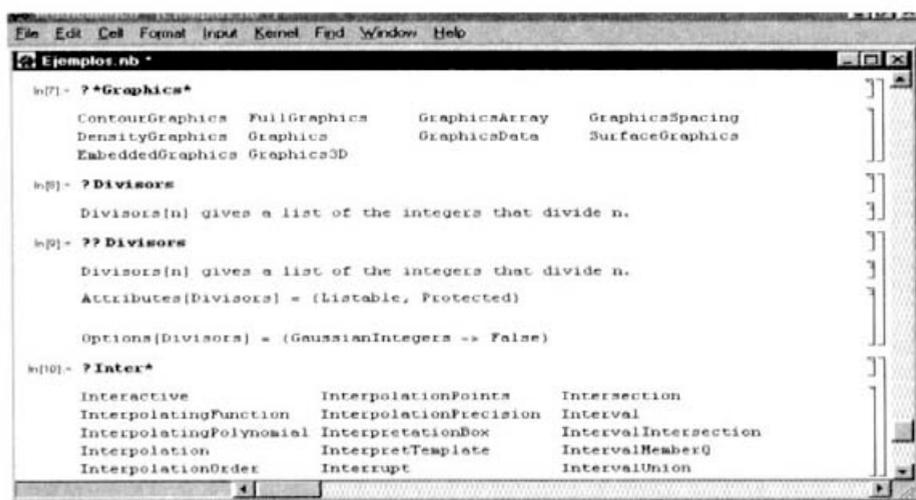


FIGURA 3

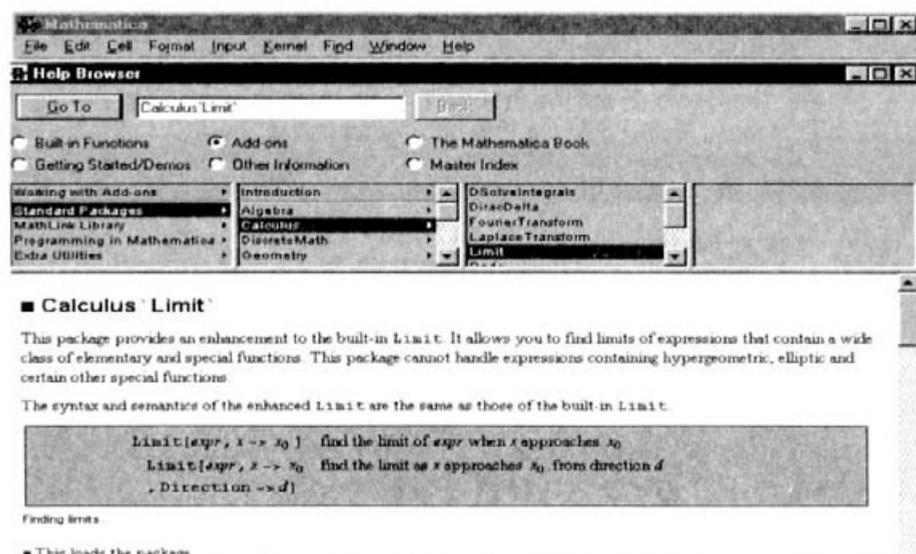


FIGURA 4

Es posible trazar gráficos de forma sencilla. En este terreno el funcionamiento del programa es espectacular tanto en la variedad de posibilidades como en la calidad de sus resultados.

Los ejemplos anteriores dan una idea del funcionamiento a nivel elemental del programa. Por supuesto el número de comandos es muy elevado y abar-

can casi todos los campos de las matemáticas. Muchos son internos y otros externos que deben cargarse previamente para que el comando actúe.

Hay un detalle que facilita grandemente el manejo del programa. Es la posibilidad de pedir ayuda y explicaciones al propio programa. La figura 4 es elocuente.

Esta posibilidad se ve completada con la posibilidad de acceder directamente al propio y muy extenso manual, tanto general como de la librería (packages) que lleva incorporado. Además es posible copiar información de este manual al documento (notebook) en que estamos trabajando.

### 3. APLICACIONES DE MATHEMATICA<sup>®</sup> EN LA SECUNDARIA

#### 3.1. Matemáticas en la secundaria

La secundaria engloba en la actualidad 6 cursos, 4 de ESO y 2 más de Bachillerato con alumnos de edades comprendidas entre 11 años, al comenzar, y 18 o más, al terminar. Así pues no es fácil analizar la utilización del programa en este nivel de enseñanza. Surgen ya varias preguntas:

¿Podemos considerar establecido lo que ha de enseñarse en secundaria y cómo?

¿Es este programa utilizable en la práctica?

¿Estamos ante una herramienta más (una supercalculadora) o por el contrario la enseñanza con este tipo de programa –no olvidemos que interactivo– cambia de manera radical?

Consideremos solamente algunos aspectos de los últimos cursos. ¿Qué enseñar? ¿Cómo hacerlo? El Álgebra Lineal parece indispensable. También la Geometría pues proporciona una visión del mundo en el espacio. No una Geometría demasiado refinada pero sí manipulaciones prácticas. Parece más importante la competencia adquirida que el saber almacenado. Y un equilibrio entre rigor (de menos a más, con la edad del alumno) e intuición.

#### 3.2. Incidencia del programa en la propia enseñanza

En un escenario como éste o parecido irrumpe un programa como Mathematica<sup>®</sup>. De pronto el alumno se encuentra con que puede calcularlo “todo” resolver “todas” las ecuaciones y dibujar “todas” las gráficas en cuestión de segundos y con instrucciones sencillas. Parece magia pero es así y mucho más.

Recordemos el proverbio chino: oigo, olvido; veo, recuerdo; hago, comprendo.

¿Llegarán, por fin, los alumnos al final del proverbio?

En la figura siguiente podemos modificar las gráficas cambiando sólo dos números y obtener rápidamente docenas de ejemplos semejantes, pero con ligeras modificaciones que facilitan la comprensión. Todas estas manipulaciones están al alcance del alumno, con lo que conseguimos llevar a la práctica uno de los principios de la buena docencia: repeticiones, pero no siempre idénticas; presentar muchas veces unas mismas nociones desde distintos ángulos.

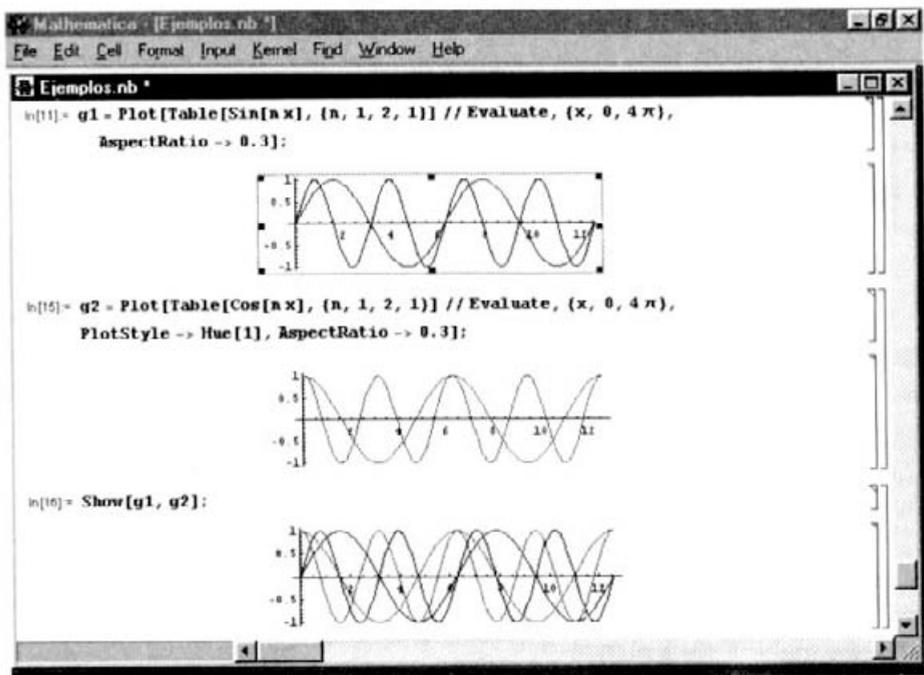


FIGURA 5

### 3.3. Práctica

Se podría considerar una seria objeción la aparente complejidad del programa, fuera del alcance de los alumnos sin bastante experiencia previa en informática. Sin embargo el propio programa "pide" más conocimientos matemáticos a medida que se utiliza. El alumno comienza utilizando comandos sencillos. Cuanto más conoce el programa más matemáticas ha de aprender y recíprocamente a medida que aumentan sus conocimientos mayor rendimiento obtiene del mismo.

Su uso podría seguir aproximadamente la siguiente pauta:

- Uso de comandos internos.
- Llamada a algunos comandos externos (p. ej. gráficas de funciones implícitas).

- Modificación de los anteriores comandos (p. ej. color en los gráficos, cambio de escala, etc.).
- Elaboración de comandos nuevos y archivo de los mismos.

Esto es suficiente para abordar cualquier problema de secundaria. Más aún, debería poner al alumno en disposición de efectuar mediante el programa demostraciones que impliquen Cálculo Vectorial y Geometría Analítica.

En la siguiente figura se observa cómo definir nuevos comandos de cálculo vectorial que no tiene implementados el programa, cómo guardarlos y cómo cargarlos para volver a utilizarlos.

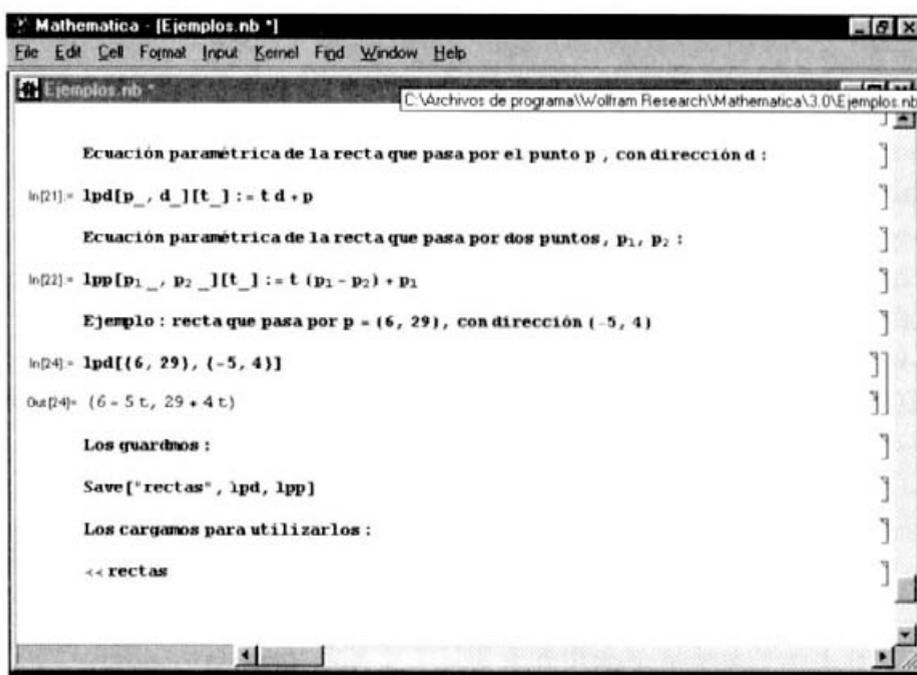


FIGURA 6

El programa permite otras cosas:

- Elaborar un texto con sintaxis tradicional y dentro del mismo insertar las instrucciones y comandos que se desee.
- Ejecutar cada instrucción directamente y modificar texto e instrucciones en cualquier momento para añadir información.
- Agruparlos dejando sólo visible la parte que se desee.
- Elaborar los propios comandos, guardarlos y llamarlos cuando se les precise.

Para terminar unas consideraciones sobre si es o no realista pensar en utilizar Mathematica<sup>®</sup> en secundaria de forma no sólo anecdótica.

Se nos ocurren dos objeciones. En primer lugar una de índole material pues el programa requiere ordenadores con bastante memoria y velocidad para poder aprovechar bien sus posibilidades. Como las clases de secundaria son bastante numerosas (25 a 35 alumnos) sería necesario disponer de una buena aula de informática. Una vez solucionado este inconveniente, ¿podrán los alumnos manejar un programa complejo? No estamos en condiciones de responder convincentemente. Pudiendo adquirir experiencia temprana en programas técnicos se puede suponer que en los últimos cursos (Bachillerato) lo dominen con soltura encontrándose, tal como señalamos, en la necesidad de aprender más matemáticas para aprovechar todas las posibilidades que se les ofrecen. Quien sabe si hasta encontrarían respuesta a la pregunta: ¿ésto para qué sirve?

## Bibliografía

- [1] BLACHMAN, N.: *Mathematica<sup>®</sup>, un enfoque práctico*, Ariel, 1993.
- [2] CASTILLO, E.: *Mathematica<sup>®</sup>*, Paraninfo, 1995.
- [3] PÉREZ, C.: *Cálculo simbólico y numérico con Mathematica<sup>®</sup>*, Ed RA-MA, 1995.
- [4] WOLFRAM, S.: *The Mathematica<sup>®</sup> book*, Cambridge University Press, 1966.
- [5] YOCCOZ, J. C.: *La enseñanza de las matemáticas*, Rev. Investigación y Ciencia, Agosto 1996.

César Beade Franco y Camilo Martínez Ronquete  
I.E.S. Fernando Blanco, Cee, La Coruña

---

## Mathematica® en la Enseñanza Universitaria

por

Marisa Fernández

Desde hace más de veinte años, la utilización de la informática en la enseñanza universitaria de las matemáticas viene siendo habitual en la docencia de determinadas materias, tales como el análisis numérico o la estadística. En las demás disciplinas (por ejemplo, en ecuaciones diferenciales o en geometría) su uso ha sido prácticamente irrelevante hasta el comienzo de la presente década, debido a la falta de software pedagógicamente adecuado. El software hasta entonces disponible no facilitaba la visualización. Además, los lenguajes de programación que se utilizaban eran tan complicados que el uso de los ordenadores desviaba la atención del alumno del contenido matemático del tema, en lugar de ayudarle a conseguir una pronta familiaridad y mejor comprensión del mismo.

Esta situación ha comenzado a cambiar al poder disponer de potentes programas de software matemático que realizan cálculo simbólico, cálculo numérico y representaciones gráficas. De entre ellos, Mathematica® es uno de los más extendidos y de mayor reconocimiento por su utilidad, tanto en la docencia como en la investigación. No obstante, en la actualidad, se echa en falta la existencia de un software que no precise de mucho estudio para conocerlo a fondo y que integre todas las posibilidades. Sin embargo, hardware y software van evolucionando constantemente y no se sabe con certeza lo que habrá en el futuro. Por ejemplo, la versión 3.5 de Mathematica® se cree que estará disponible a finales del presente año.

En general, los programas informáticos que realizan manipulación simbólica tienen un lenguaje interno de programación relativamente sencillo y una extraordinaria capacidad de resolución numérica. Estas prestaciones permiten al usuario definir sin dificultad sus propios programas para realizar cálculos repetitivos y obtener con sorprendente facilidad resultados que manualmente serían muy complicados o excesivamente tediosos.

Mathematica® también posee una elevada capacidad de resolución gráfica. Utilizando este programa se pueden obtener con rapidez y gran precisión representaciones gráficas de curvas y superficies. Además, como se mostrará más adelante, este programa permite representar gráficamente la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias sin necesidad de determinar previamente la expresión explícita de la solución [5]; es decir, resuelve gráficamente el sistema. Esta prestación de Mathematica® resulta muy útil especialmente cuando la expresión de la solución es complicada.

Manejando convenientemente los comandos gráficos de Mathematica<sup>®</sup> se puede realizar la representación gráfica de las curvas planas conocidas clásicamente: cicloides, epicicloides, hipocicloides, cardioides, lemniscatas de Bernoulli, cisoide de Diocles, clotoides, y un largo etcétera; se puede obtener la gráfica de las curvas y las superficies en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$  ya conocidas en el pasado, tales como las hélices, la curva de Viviani, la silla del mono, el helicoides, la catenoide etc., y de otras definidas recientemente como la superficie de Costa [2,3]. Además, permite conocer gráficamente las funciones geométricas estándar, tales como la curvatura o la torsión de una curva en el espacio, la curvatura de Gauss o la curvatura media de una superficie [1,4].

En lo que sigue, se resaltaré la capacidad gráfica de Mathematica<sup>®</sup>. En primer lugar, se mostrará la ventaja de utilizar este programa al tratar de visualizar una superficie. Se debe recordar que una superficie parametrizada en  $\mathbb{R}^3$  es una aplicación diferenciable  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , siendo  $U$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$ ; se reserva el nombre de superficie a la imagen  $S$  de  $U$  por la aplicación  $x$ , y se dice que  $x$  es una parametrización de  $S$ . (Una superficie puede admitir distintas parametrizaciones).

Se considera ahora una de las superficies minimales ya conocida en el siglo pasado; a saber, la superficie de Enneper definida por:

$$x(u, v) = \left( u - \frac{u^3}{3} + uv^2, -v + \frac{v^3}{3} - vu^2, u^2 - v^2 \right).$$

Una representación gráfica de ella, cuando  $u$  y  $v$  recorren el intervalo  $(-2, 2)$ , es:

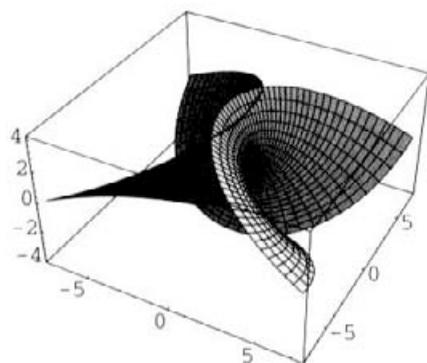


FIGURA 1

A pesar de que la parametrización utilizada para definir la superficie de Enneper es muy sencilla, dicha superficie es bastante complicada debido a que tiene autointersecciones como se puede notar en la parte superior de la figura 1. Asimismo, en la parte superior de esta figura se aprecia la existencia de un

posible agujero y parece asomarse un segundo agujero en la mitad de la superficie. Se puede utilizar Mathematica<sup>®</sup> para observar la superficie de Enneper desde distintos puntos del espacio para llegar a comprender su forma. Las tres gráficas siguientes que se obtienen al girar la figura 1 son muy ilustrativas:

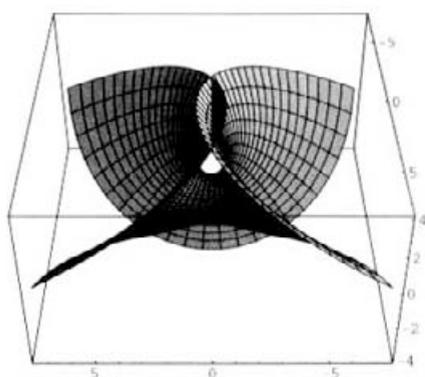


FIGURA 2

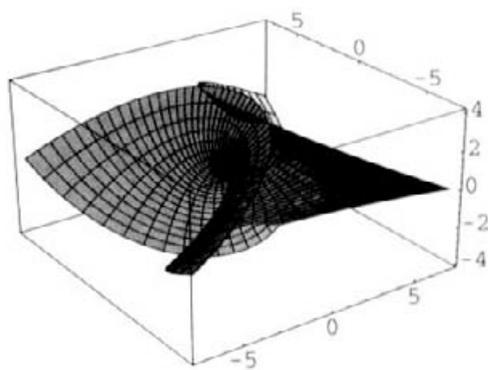


FIGURA 3

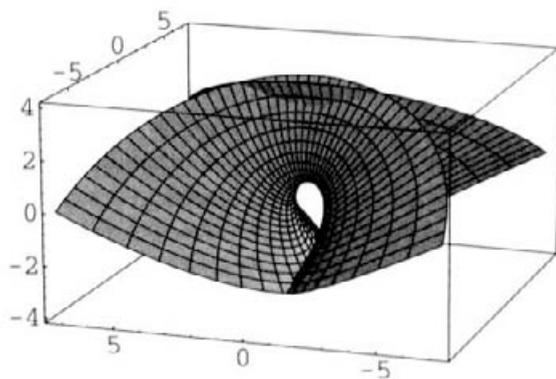


FIGURA 4

Las figuras 2 y 4 muestran que la superficie de Enneper tiene exactamente dos agujeros como ya se sospechaba a la vista de la figura 1, aunque allí no se advertían con tanta claridad. La siguiente gráfica es la figura 1 vista desde arriba (ver figura 5).

A continuación, se utilizará Mathematica<sup>®</sup> en el tratamiento clásico de curvas planas.

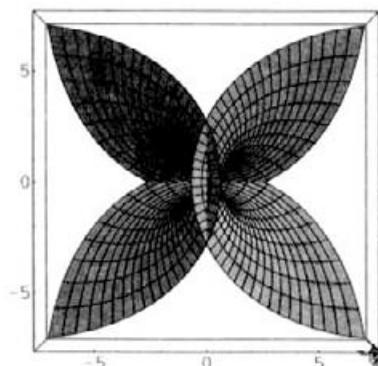


FIGURA 5

Sea  $(a, b)$  un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ . Una aplicación  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ , diferenciable en  $(a, b)$  y tal que su primera derivada  $\alpha' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  es distinta de cero en cada punto de  $(a, b)$ , define la curva plana  $C$  imagen del intervalo  $(a, b)$  por  $\alpha$ ; esta curva no tiene picos (por ejemplo, una recta o una circunferencia) y se dice que es regular. La aplicación  $\alpha$  se denomina curva parametrizada plana regular y se dice que es una parametrización regular de  $C$ .

No siempre es fácil comprobar si dos curvas parametrizadas planas definen la misma curva a excepción de su posición en el plano. Surge pues la necesidad de caracterizar una curva plana por alguna relación que sea independiente de la parametrización elegida. La función que permite tal caracterización es la curvatura de la curva.

Intuitivamente, la curvatura de una curva plana mide la variación del vector tangente a lo largo de la curva. Esa función es constante e igual a cero para una recta. En general, sea  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva parametrizada regular, siendo  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  para cada punto  $t$  del intervalo  $(a, b)$ . La curvatura de  $\alpha$  es la función  $\kappa : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}},$$

para todo  $t$  en  $(a, b)$ . Esta es la fórmula de la curvatura que aparece en la mayoría de los textos y se debe a Newton. Utilizando Mathematica<sup>®</sup> se puede definir un programa que permite calcular la curvatura de cualquier curva parametrizada regular, así como representarla gráficamente [1,4]. En particular, permite comprobar que la curvatura de una circunferencia de radio  $r$  es constante y coincide con  $1/r$  si la circunferencia se recorre (de acuerdo con la parametrización que se utilice) en sentido contrario al de las agujas del reloj; mientras que la curvatura de la circunferencia es  $-1/r$  si el sentido de

recorrido es el de las agujas del reloj. Una interpretación geométrica similar se puede hacer del hecho de que la curvatura de una curva plana sea positiva o negativa.

Se supone ahora que la curva parametrizada  $\alpha$  tiene velocidad unitaria, es decir,  $\|\alpha'\|^2 = (x')^2 + (y')^2 = 1$ . Entonces, si  $t_0$  y  $t_1$  son dos puntos del intervalo  $(a, b)$ , la longitud del arco con extremos  $\alpha(t_0)$  y  $\alpha(t_1)$  coincide con la longitud del intervalo  $(t_0, t_1)$ , esto es, el valor absoluto  $|t_1 - t_0|$ . En este caso, se dice que  $t$  es el parámetro longitud de arco y se suele denotar por  $s$ . De la definición dada de  $\kappa$  se sigue que la función  $|\kappa|$  valor absoluto de  $\kappa$  coincide con la función  $\|\alpha''\|$  norma de  $\alpha''$ . Esto explica la descripción intuitiva de la curvatura realizada al comienzo del párrafo anterior.

También si  $\alpha$  tiene velocidad unitaria, para cada  $s$  en  $(a, b)$ , el vector  $\alpha'(s)$  se puede expresar por  $\alpha'(s) = (\cos(\theta(s)), \text{sen}(\theta(s)))$  donde  $\theta(s)$  es el ángulo que debe girar, en sentido contrario al de las agujas del reloj, el vector unitario en la dirección del eje horizontal para coincidir con el vector  $\alpha'(s)$ . Si la curvatura  $\kappa$  es continua a trozos, la función  $\theta = \theta(s)$  es derivable y de la fórmula dada para  $\kappa$  se obtiene que la curvatura es la variación de la función  $\theta = \theta(s)$ , es decir,  $\kappa(s) = \theta'(s)$ .

Ahora es fácil comprender que la curvatura permite clasificar, salvo isometrías del plano, las curvas parametrizadas planas con velocidad unitaria. Por tanto, distingue las curvas planas regulares salvo su imagen por una isometría. En concreto, si  $\kappa : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua a trozos, el teorema fundamental de la teoría local de curvas planas establece que una curva parametrizada  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ , con velocidad unitaria y curvatura  $\kappa$  está dada por:

$$\begin{cases} \alpha(s) = \left( \int \cos \theta(s) ds + c_1, \int \text{sen} \theta(s) ds + c_2 \right), \\ \theta(s) = \int \kappa(s) ds + \theta_0, \end{cases}$$

donde  $c_1$ ,  $c_2$  y  $\theta_0$  son constantes de integración. Un cambio de la constante  $\theta_0$  representa una rotación de la curva, y un cambio de  $c_1$  o  $c_2$  define una traslación de la curva. Además, si  $\beta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  es otra curva parametrizada, con velocidad unitaria y curvatura  $\kappa$ , existe una isometría  $F$  del plano que transforma  $\alpha$  en  $\beta$ ; es decir,  $F$  es tal que  $F \circ \alpha = \beta$ . Este teorema explica el hecho de que clásicamente se definiese una curva plana por medio de su curvatura, también denominada ecuación natural o intrínseca de la curva.

Para determinar una curva parametrizada  $\alpha$  con curvatura  $\kappa$  (al menos, continua a trozos) basta resolver las dos ecuaciones anteriores o el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \alpha'(s) = (\cos\theta(s), \operatorname{sen}\theta(s)), \\ \theta'(s) = \kappa(s). \end{cases} \quad (1)$$

La elevada capacidad de resolución gráfica que tiene Mathematica® y que se ha mencionado al principio se pone ahora de manifiesto. En efecto, se puede definir un programa [1,4] que permite realizar la representación gráfica de una curva parametrizada plana con curvatura  $\kappa$  prefijada, sin necesidad de entrar en los detalles de la solución numérica del sistema (1). En particular, permite conocer gráficamente la curva con curvatura  $\kappa$  aún cuando la solución de ese sistema sea muy complicada. Por ejemplo, las curvas de Lehr [7] son las curvas planas con curvatura:

$$\kappa(s) = a + b \cos(cs),$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números reales. Por consiguiente, cada curva de Lehr está definida por tres constantes:  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Las curvas de Lehr en las que  $c = 0$  tienen curvatura constante  $\kappa = a + b$  y, por tanto, son rectas o circunferencias. Para las curvas de Lehr en las que  $c \neq 0$ , del sistema (1) se sigue que la función  $\theta = \theta(s)$ , solución de la segunda ecuación, es

$$\theta(s) = as + \frac{b}{c} \operatorname{sen}(cs) + d,$$

siendo  $d$  una constante de integración. Ahora es fácil describir la primera derivada  $\alpha'$  de una parametrización  $\alpha$  de una curva de Lehr; de hecho,  $\alpha'$  debe verificar la primera ecuación de (1), esta es,

$$\alpha'(s) = \left( \cos\left(as + \frac{b}{c} \operatorname{sen}(cs) + d\right), \operatorname{sen}\left(as + \frac{b}{c} \operatorname{sen}(cs) + d\right) \right).$$

La integración de esta función conduce a funciones muy complicadas; a saber, las funciones de Lommel, las cuales son generalizaciones de las funciones de Bessel. Sin embargo, esas curvas se pueden representar gráficamente. Por ejemplo, salvo isometrías del plano, la curva de Lehr con curvatura  $\kappa(s) = 10 - 25 \cos s$  es:

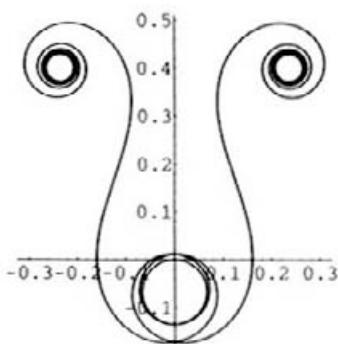


FIGURA 6

La curva de Lehr con curvatura  $\kappa(s) = 1 + 8 \cos(10s)$  es:

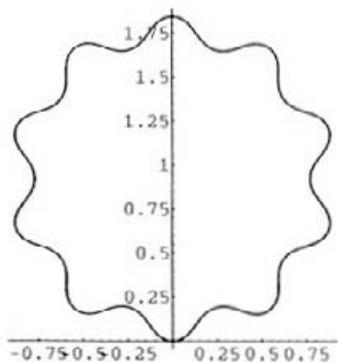


FIGURA 7

y la curva de Lehr con curvatura  $\kappa(s) = 1 + 15 \cos(5s)$  es:

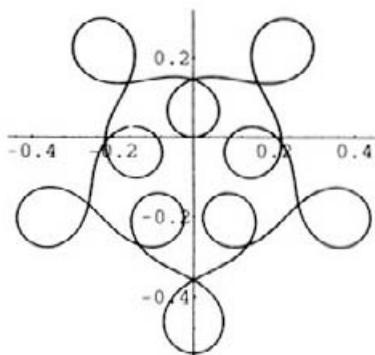


FIGURA 8

Las figuras 6, 7 y 8 ponen de manifiesto que según sean los valores de los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  que definen una curva de Lehr, esta curva puede ser

cerrada o no. Recientemente en [6], han sido estudiadas las relaciones que deben existir entre  $a$ ,  $b$  y  $c$  para que la curva de Lehr sea cerrada.

Las prestaciones de Mathematica<sup>®</sup> hacen que este programa se considere una herramienta útil en la docencia del álgebra lineal, el cálculo en una y en varias variables, las ecuaciones diferenciales ordinarias o la geometría diferencial de curvas y superficies entre otras, así como en el estudio de materias de otras ciencias. Existen varios libros de texto publicados en diferentes idiomas, los primeros datan de 1991-92, y desde esa época han aparecido un significativo número. En ellos, se complementa la parte teórica con ejercicios prácticos resueltos con Mathematica<sup>®</sup> y se presentan programas para el estudio de los diferentes temas. Se puede acceder a través de internet a la página web: <http://www.wolfram.com/bookstore> en la que se encuentran listas de libros que utilizan este programa.

Para el tratamiento de problemas de control, mercantiles, financieros, óptica, sistemas mecánicos, análisis de datos, señales y sistemas, e ingeniería eléctrica se puede consultar la siguiente página: <http://www.wolfram.com/applications>. Programas que han sido definidos utilizando Mathematica<sup>®</sup> se encuentran disponibles en la página: <http://www.mathsource.com>.

Para profesores puede ser de interés la página: <http://www.wolfram.com/education>, y para estudiantes la página: <http://www.integrals.com>. Además, existen algunas páginas web en las que se hallan ejemplos educativos e ilustrativos; entre ellas destaca la de A. Gray: <http://bianchi.umd.edu>.

## Bibliografía

- [1] CORDERO, L. A., FERNÁNDEZ, M. Y GRAY, A.: *Geometría diferencial de curvas y superficies con Mathematica<sup>®</sup>*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1995.
- [2] COSTA, C. J.: Example of a complete minimal immersion in  $\mathbb{R}^3$  of genus one and three embedded ends, *Bol. Soc. Brasil Math.* 15, págs. 47-54, 1984.
- [3] FERGUSON, H., GRAY, A., MARKVORSEN, S.: Costa's Minimal Surface via Mathematica<sup>®</sup>, *Mathematica<sup>®</sup> in Education and Research*, Vol. 5 No. 1, págs. 5-10, Winter 1996.
- [4] GRAY, A.: *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica<sup>®</sup>*, Segunda Edición, CRC Press, 1998.
- [5] GRAY, A., MEZZINO, M., PINSKY, M.: *Ordinary Differential Equations via Mathematica<sup>®</sup>*, Springer-Verlag, 1998.
- [6] GRAY, A.: Lehr Curves, en preparación.
- [7] LEHR, E.: Über die Kurven, deren Krümmung eine periodische Funktion des Bogens ist, Tesis Doctoral, Technischen Hochschule München, 1932.
- [8] WOLFRAM, S.: Mathematica<sup>®</sup>, Segunda Edición, Addison-Wesley, *The Advanced Book Program*, Redwood City, CA, 1990.

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad del País Vasco  
Lejona (Vizcaya) e-mail: [mtpferol@lg.ehu.es](mailto:mtpferol@lg.ehu.es)

## Investigando en nudos y variedades con la ayuda de Mathematica®

por

María Teresa Lozano

La existencia del ordenador, y en particular de programas que permiten hacer cálculo simbólico y representaciones gráficas, ha dado una nueva orientación a la manera de hacer investigación en matemáticas. Es evidente que la potencia, y velocidad de cálculo de los ordenadores permite realizar operaciones que una persona jamás podría concluir, y desde luego eliminan la posibilidad de cometer pequeños errores aleatorios que pueden alterar sustancialmente el resultado. Por esta razón, hoy en día es posible estudiar con detalle muchos ejemplos concretos de una familia de objetos matemáticos que interese investigar. Este estudio de casos particulares indica el tipo de resultados que se pueden esperar en un contexto general. Sin embargo, esto no evita que el investigador tenga que trabajar también en la forma tradicional enunciando y demostrando teoremas. La diferencia está en que ahora tiene a su disposición esta potente herramienta que aumenta su capacidad de cálculo y visualización, y le permite presentar además aplicaciones imposibles de realizar sin su ayuda.

En esta nota trataré de reflejar cómo hemos utilizado el programa Mathematica® en parte de la investigación que he realizado en los últimos años, en colaboración con H. Hilden y J.M. Montesinos.

En primer lugar voy a situar nuestro tema de investigación dentro del panorama de las Matemáticas.

Probablemente los espacios topológicos más interesantes y con mayor campo de aplicación son las variedades. Una variedad de dimensión  $n$  es un espacio topológico localmente homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . El principal problema en el estudio de variedades es su clasificación topológica (a menos de homeomorfismo). Se conoce la clasificación completa de variedades de dimensión 1 (líneas) y de dimensión 2 (superficies). El problema de la clasificación de variedades de dimensión 3 es hoy en día un activo campo de investigación.

Otro problema importante en topología es la clasificación de encajes de unas variedades en otras, por ejemplo la clasificación de nudos y enlaces, que son encajes de circunferencias en la esfera  $S^3$ .

Ambos problemas están relacionados. De hecho algunos de los procedimientos que existen para construir todas las variedades de dimensión 3 orientables y cerradas, involucran nudos y enlaces en  $S^3$ , por ejemplo cirugía en

un enlace de la esfera  $S^3$ , o espacio recubridor de  $S^3$  ramificado sobre un enlace. Estos procedimientos no resuelven todavía el problema de clasificación porque en todos ellos existen repeticiones, es decir distintas cirugías o distintos espacios recubridores pueden dar lugar a una misma variedad.

Para avanzar en la resolución de problemas de clasificación de nudos, enlaces y variedades, se utilizan invariantes. En la investigación de nuevos invariantes se ha de tener siempre en cuenta que son especialmente útiles aquellos invariantes que sean calculables y que tengan suficiente capacidad de distinción. La Topología Algebraica, que surgió de la necesidad de encontrar este tipo de invariantes, proporciona algunos *invariantes algebraicos* interesantes, aunque ninguno de ellos puede distinguir espacios del mismo tipo de homotopía. Recientemente, debido a los trabajos realizados en los últimos veinte años por Thurston y otros geómetras, ha tomado gran importancia la investigación y el cálculo de los llamados *invariantes geométricos*. Estos están asociados a las estructuras hiperbólicas existentes en el complemento de nudos y enlaces (con cierta singularidad en el enlace) y por tanto en las variedades hiperbólicas obtenidas a partir de ellos. Se deduce del Teorema de Rigidez de Mostov, que asegura la unicidad de tales estructuras, que estos *invariantes* son *topológicos*, es decir, son invariantes que distinguen variedades salvo homeomorfismo.

Nosotros hemos utilizado Mathematica<sup>®</sup>, para investigar y calcular algunos invariantes de este tipo. Hemos utilizado Mathematica<sup>®</sup> para realizar cálculo simbólico, cálculo numérico, representaciones gráficas en dimensión 2 y 3, y como lenguaje de programación para implementar algoritmos.

Concretamente: Sea  $K$  un nudo hiperbólico en la esfera  $S^3$ . Eso significa que el exterior del nudo,  $N_0$ , es un variedad de dimensión 3 con una única estructura Riemanniana completa de curvatura constante negativa, es decir una variedad hiperbólica. Por tanto su espacio recubridor universal es el espacio hiperbólico  $H^3$ , y su grupo fundamental,  $G(K)$ , que es el grupo del nudo, actúa en  $H^3$ , como un grupo discreto de isometrías, dando como cociente  $N_0$ . Esta estructura corresponde a una representación discreta de  $G(K)$  en el grupo de matrices  $PSL(2, \mathbb{C})$  isomorfo al grupo de isometrías directas de  $H^3$ . Toda representación de  $G(K)$  en  $PSL(2, \mathbb{C})$ , que envíen los meridianos del nudo a giros de ángulo  $\alpha$ , para  $\alpha$  entre 0 y cierto valor  $\alpha_h$ , corresponden a una estructura hiperbólica en  $S^3$  que tiene al nudo como línea singular, puesto que el ángulo alrededor de  $K$  mide  $\alpha$  en lugar de  $2\pi$ , como sucede en cualquier línea regular. Esta estructura se denomina variedad cónica y la designamos por  $(S^3, K_\alpha)$ .

Citaré a continuación, a modo de ejemplo, como hemos utilizado el programa Mathematica<sup>®</sup> en tres tipos de resultados relativos a estas variedades cónicas.

1.- Las representaciones correspondientes son puntos de una variedad algebraica conocida como *la curva de trazas del nudo*. Utilizando **cálculo simbólico** con Mathematica® hemos **implementado un algoritmo** que, entre otras cosas, calcula un polinomio que define la curva de trazas de cualquier nudo o enlace racional,  $p/q$  [1]. El grupo de un enlace o nudo racional tiene una presentación con dos generadores  $(a,b)$  y una relación, que se calcula algorítmicamente a partir de los números  $p$  y  $q$ . Hemos programado una fórmula recursiva basada esencialmente en la siguiente propiedad de las trazas de matrices de  $SL(2, \mathbb{C})$ :

$$\text{traza}(AB) = \text{traza}(A)\text{traza}(B) - \text{traza}(AB^{-1})$$

fórmula que se deduce fácilmente de la conocida ecuación de Hamilton:  $A^2 - \text{traza}(A)A + I = 0$ . Las variables utilizadas en la curva de trazas han sido las siguientes:  $x = \text{traza}(\rho(a^2))$ ,  $z = \text{traza}(\rho(ab))$ , donde  $\rho : G(K) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$  es la representación asociada.

La curva de trazas del nudo  $p/q$  depende de la presentación del grupo elegida, pero su discriminante, que es un polinomio  $h(x)$ , es un *invariante polinómico del nudo* fácilmente calculable con Mathematica®. El valor  $\alpha_h$ , es una raíz del polinomio  $h(x)$ , lo que prueba que  $\alpha_h$  es un número algebraico, es el llamado límite de hiperbolicidad. El invariante  $h(x)$  es un ejemplo de invariante geométrico obtenido usando cálculo simbólico, uno de los aspectos que ofrece el programa Mathematica®. Reproducimos aquí, a modo de ejemplo, la parte (simplificada) del algoritmo que lo calcula.

#### Datos del nudo

**p =**

**q =**

**n = (p-1)/2;**

**Table[p-Mod[q\*i,2p],{i,1,p-1}];**

**e = Table[%[[i]]/Abs[%[[i]]],{i,1,p-1}]**

**t = Table[e[[n-i+1]]\*e[[n-i+2]],{i,1,n}]**

**n = .**

### Fórmula de recurrencia para calcular la curva de trazas

$$r[0] = 1;$$

$$r[1] = (z-1);$$

$$r[2] = 1-2*t[[2]]+x-t[[2]]*x-2*z+t[[2]]*z-x*z/2+ t[[2]]*x*z/2+z^2;$$

$$r[n_] := r[n] = \text{Expand}[(-t[[n]]*r[n-3] + (-t[[n]] + ((1-t[[n]])/2) x + t[[n]] z)*r[n-2] + (-1+z-((1-t[[n]])/2) x)*r[n-1] ]$$

### Curva de trazas

$$n = (p-1)/2;$$

$$r = r[n]$$

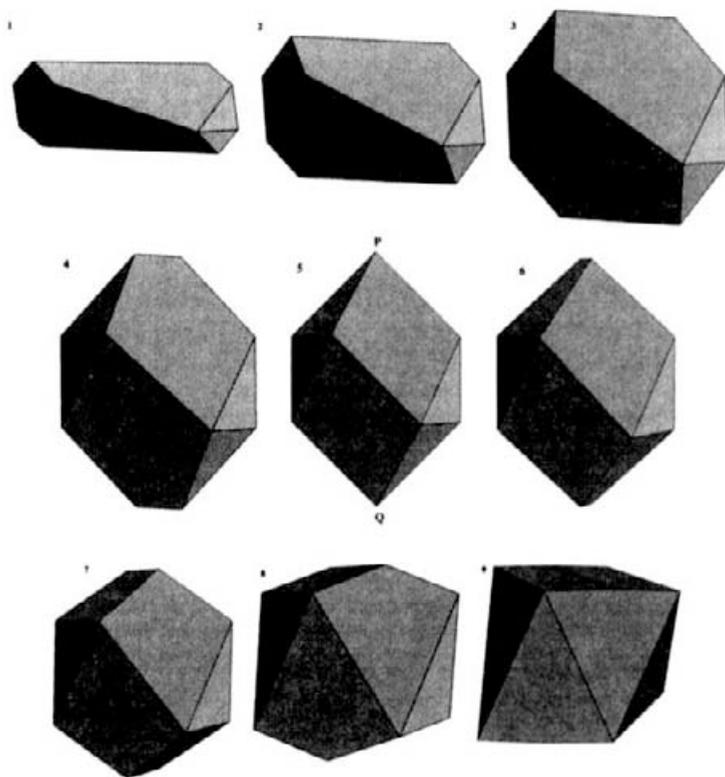
$$\text{Factor}[r]$$

### h-polinomio

$$\text{hpol} = \text{Factor}[\text{Resultant}[\text{Expand}[D[r],z], r,z]]$$

2.- Por otra parte, una variedad hiperbólica cónica se obtiene a partir de un poliedro del espacio hiperbólico  $H^3$ , identificando pares de caras mediante isometrías de  $H^3$ . Cuando se dispone de una familia de variedades cónicas, dependiente de un parámetro, por ejemplo  $\{(S^3, K_\alpha) | \alpha_h > \alpha > 0\}$ , la **visualización de los poliedros hiperbólicos** correspondientes a los miembros de la familia permite conocer algunos aspectos interesantes, como su tipo combinatorio, simetrías, situación en los valores límite del parámetro. El estudio realizado en [2] con el nudo racional  $5/3$ , conocido como nudo de Saboya, nudo lasca o nudo "ocho", es un ejemplo de este tipo de investigación. Partiendo del poliedro euclideo para el valor  $\alpha_h$  se obtiene los correspondientes a todas las variedades cónicas del nudo de Saboya. Para el valor 0 del ángulo, el tipo combinatorio cambia. En este momento se obtiene un poliedro con dos vértices ideales,  $P$  y  $Q$  que da la estructura completa en el complemento del nudo. Gracias a este estudio, que podemos calificar como gráfico, observamos que la familia continúa mas allá del ángulo cero. Demostramos entonces con rigor que se produce un fenómeno, denominado cirugía espontánea, tras el

que los poliedros corresponden a una nueva familia de variedades hiperbólicas cónicas con soporte la variedad  $M$ , obtenida al hacer cirugía cero en el nudo de Saboya, en lugar de  $S^3$ .



La figura muestra algunos poliedros de estas familias. Los 5 primeros corresponden a estructuras cónicas en  $S^3$  con singularidad el nudo de Saboya y ángulos:  $\frac{2\pi}{3}$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{\pi}{4}$  y cero, los restantes corresponden a estructuras cónicas en la variedad  $M$ , con singularidad el ánima de la cirugía, y ángulos:  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$ ,  $\frac{3\pi}{2}$ , y casi  $2\pi$ . Se observa que en los cuatro primeros se trata de un poliedro con 4 pentágonos y 8 triángulos, en los que las arista superior e inferior (que se proyectan en la singularidad) disminuyen en longitud hasta reducirse cada una de ellas a un punto ( $P$  y  $Q$ ) en el poliedro que ocupa el quinto lugar, que tiene 4 cuadriláteros y 8 triángulos. Es el momento de la cirugía espontánea. Después vuelven a aparecer otras dos aristas en lugar de  $P$  y  $Q$ , pero como intersección de las otras dos caras, que pasan de triángulos a cuadriláteros. Los últimos cuatro poliedros tienen entonces 8 cuadriláteros y 4 triángulos. Mathematica<sup>®</sup> permite ver cada poliedro desde cualquier punto de vista [4], o realizar una animación donde se observa la transformación de los poliedros al variar el ángulo.

3.- Dos importantes invariantes geométricos de las variedades hiperbólicas son el volumen y el invariante de Chern-Simons, que se definen también para variedades hiperbólicas cónicas. El volumen de la variedad es el volumen del poliedro hiperbólico del que procede, y el invariante Chern-Simons está relacionado con el giro que se produce en el pegado de las caras. La existencia de fórmulas que relacionan la diferencial de ambos invariantes con funciones continuas asociadas a la singularidad, como son su longitud y giro, permite utilizar **cálculo numérico** para obtener su valor [3].

Estos ejemplos constituyen sólo una pequeña muestra de la enorme cantidad de posibilidades que ofrece Mathematica®. Si algún investigador decide explorar entre sus funciones y paquetes, seguro que en poco tiempo encontrará una utilidad insospechada de este programa en su trabajo.

## Bibliografía

- [1] HILDEN, H. M., LOZANO, M. T., MONTESINOS-AMILIBIA, J. M.: On the arithmetic 2-bridge knots and link orbifolds and a new knot invariant. *Journal of Knots Theory and Its Ramifications* **4**, 1995, 81-114.
- [2] HILDEN, H. M., LOZANO, M. T., MONTESINOS-AMILIBIA, J. M.: On a remarkable polyhedron geometrizing the Figure Eight knot cone manifolds. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo.* **2**, 1995, 501-561.
- [3] HILDEN, H. M., LOZANO, M. T., MONTESINOS-AMILIBIA, J. M.: Volumes and Chern-Simons invariants of cyclic coverings over rational knots. *Topology and Teichmüller spaces*, Sadayoshi KOJIMA et al., World Scientific Pub. Co., 1996, 31-55.
- [4] LOZANO, M. T.: *Variedades tridimensionales cónicas: geometría e invariantes* Rev. R. Acad. Ciencias Madrid **LXXXIX**, 1995, 173-181.

María Teresa Lozano, Departamento de Matemáticas  
Universidad de Zaragoza, 50009 Zaragoza