Las Medallas Fields

Sección a cargo de

Adolfo Quirós

La concesión de las Medallas Fields en la sesión inaugural del Congreso Internacional de Matemáticos (ICM) de Berlín, celebrada el pasado 18 de agosto de 1998, aconseja recoger en esta sección una breve reseña sobre los galardonados. Confiamos en que los lectores sepan perdonar la brevedad y escasa originalidad de esta nota, que no hacen justicia a los méritos de los premiados, y para las que no hay más excusa que la cercanía entre la celebración del ICM y la fecha de cierre de este número de La Gaceta.

Empezaremos por alguien que no ha recibido una Medalla Fields: el inglés **Andrew J. Wiles** (Universidad de Princeton, Estados Unidos). No hará falta recordar que Wiles ha probado la Conjetura de Shimura-Taniyama-Weil en muchos casos, y que como consecuencia ha demostrado el Último Teorema de Fermat.

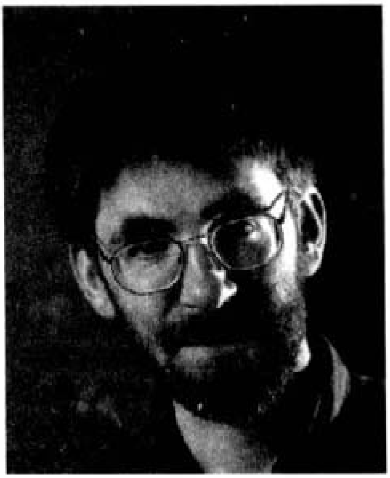
Seguramente tampoco es necesario recordar los avatares que ha sufrido la demostración. Cuando Wiles anunció por primera vez su fantástico resultado, en junio de 1993, se generó un cierto debate sobre si Wiles debería o no recibir la Medalla Fields en 1994. Dado que había nacido el 11 de abril de 1953, tendría ya más de 40 años en la fecha de concesión de las medallas. Pero al fin y al cabo tenía todavía 40 cuando demostró el Último Teorema de Fermat; su demostración era maravillosa; y su victoria sobre el que era quizá el problema más famoso de las matemáticas había aparecido en la prensa de todo el mundo, permitiendo a nuestra ciencia recibir un grado de atención al que no estamos acostumbrados. ¿No justificaba todo esto interpretar flexiblemente la tradición y conceder la Medalla Fields a alguien que ya había alcanzado la madura edad de 41 años? Vana discusión. Cuando se celebró en Zurich el ICM de 1994 había aparecido un fallo en la demostración original, y Wiles tuvo que conformarse con dar una conferencia plenaria ante una sala abarrotada por un público que deseaba oir que finalmente se habían superado todos los obstáculos. Pero ese anuncio no llegó hasta el año siguiente.

En agosto de 1998 Andrew Wiles había demostrado finalmente el Último Teorema de Fermat (con la colaboración de Richard Taylor), y había recibido todo tipo de premios y reconocimientos: el Premio Wolfskehl, el Premio Wolf, el Premio Rey Faisal, la Medalla de Oro de la Royal Society, Doctorados Honoris Causa...; pero tenía ya 45 años, demasiados para recibir la Medalla Fields (incluso si, como señalamos en el número anterior de la Gaceta, la norma de los 40 años es sólo una tradición no escrita). Afortunadamente, el

Comité Ejecutivo de la International Mathematical Union tuvo lo que muchos consideramos una brillante idea: conceder a Andrew J. Wiles la "Placa de Plata de la IMU" por su demostración del Último Teorema de Fermat. En la placa aparece grabado el enunciado del Teorema.

En cuanto a las Medallas Fields, los galardonados en 1998 han sido: dos matemáticos ingleses, ambos de la Universidad de Cambridge, Richard E. Borcherds (nacido en Sudáfrica) y W. Timothy Gowers; un matemático ruso que trabaja en el Institut des Hautes Études Scientifiques en Francia, Maxim Kontsevich; y el americano Curtis T. McMullen, de la Universidad de Harvard.

Richard E. Borcherds (nacido el 29 de noviembre de 1959) ha recibido una medalla por sus trabajos en álgebra y geometría, y en particular por su introducción de las nociones de "Álgebra de Vértices" y de Álgebra de Kac-Moody generalizada y por aprovechar estos nuevos objetos para demostrar la llamada "Moonshine Conjecture", que podríamos traducir como "Conjetura de la Música Celestial"[1]. Esta conjetura, formulada en 1979 por J. Conway y S. Norton, plantea la existencia de una relación entre el "Monstruo" (el mayor grupo finito simple esporádico) y las funciones modulares. Esta relación era tan inesperada que a los expertos les sonaba a "Música Celestial", y a veces se habla de "Música Celestial Monstruosa".



La conjetura dice que existe un módulo graduado para el Monstruo (es decir, una representación de este grupo) cuyas series de Thompson (obtenidas a partir de las trazas de los elementos del Monstruo) son ciertas funciones modulares. Frenkel y Kac habían propuesto un candidato V a mediados de los 80. Borcherds observó que V era una "Álgebra de Vértices" y aprovechó este hecho para demostrar que satisfacía la conjetura de Conway y Norton.

La clave del resultado es la construcción a partir de V de una Álgebra de Kac-Moody generalizada (un cierto tipo de álgebra de Lie), M, llamada "Álgebra de Lie del Monstruo". El Monstruo actúa

[1]La traducción de *Moonshine* que suelen utilizar los expertos es *Claro de Luna*. Pero *Moonshine* también significa *Música Celestial*, y me atrevo a proponer esta traducción como más sugerente de lo sorprendente de la Conjetura. Quizá pueda debatirse la cuestión en la sección de *Nombramientos*. (*Moonshine* tiene una tercera acepción como *licor destilado ilegalmente* que considero poco adecuada en este contexto, aunque A. P. Ogg ofreciese una botella de *Jack Daniel's* a quien explicase algunas de las maravillosas coincidencias que llevaron a la Conjetura.)

sobre M, y calculando la llamada "identidad del denominador" (que expresa una suma como un producto) para M, Borcherds probó que las series de Thompson de V satisfacían una identidades que se sabía que eran ciertas para las funciones modulares sugeridas por Conway y Norton. Después encontró un conjunto de condiciones iniciales que caracterizaban unívocamente las series, y demostró que las condiciones iniciales eran las mismas para los dos objetos que le interesaban.

Las "Álgebras de Vértices" de Borcherds, que proporcionan una formalización matemática de parte de la Teoría Conforme Cuántica de Campos, tienen su origen en ideas de la Teoría de Cuerdas de la Física de Partículas, donde están a su vez encontrando aplicaciones las álgebras de Kac-Moody generalizadas. Mencionaremos dos ejemplos de las interesantes relaciones entre la física y las formas modulares que se obtienen al estudiar "identidades del denominador" en espacios de cuerdas:

(a) Para el espacio de estados físicos de una cuerda no parametrizada que se mueve en el toro $\mathbb{R}^{25+1}/\Pi_{25,1}$, donde $\Pi_{25,1}$ es el único retículo de Lorentz unimodular par de dimensión 26, el "lado de la suma"de la identidad del denominador resulta ser una forma automorfa en el grupo $O_{26,2}(\mathbb{R})$ con respecto a su subgrupo discreto $\Pi_{26,2}$, y la identidad da una fórmula del producto para ella.

(b) Considerando el espacio de estados de una cuerda en el orbifold obtenido al tomar el cociente de las formas de dimensión 26 de (a) por una involución obtenemos precisamente el "Álgebra de Lie del Monstruo", y su identidad del denominador da una fórmula del producto para la función elíptica modular clásica.

W. Timothy Gowers (nacido el 20 de noviembre de 1963) ha sido premiado por sus contribuciones al análisis funcional, basadas en gran medida en la utilización de métodos combinatorios. Probablemente el mayor mérito de Gowers es el haber sido capaz de utilizar simutáneamente estas dos áreas de las matemáticas, aparentemente tan dispares, para atacar (y resolver) varios de los más famosos problemas de la teoría de espacios de Banach.

Los éxitos de Timothy Gowers se apoyan en la poderosa maquinaria que ha ideado para construir espacios de Banach con álgebras de operadores pequeñas. Su primera construcción notable (obtenida también independientemente por Maurey) fue un espacio ninguno de cuyos subespacios de dimensión infinita tenían una base incondicional, resolviendo así el llamado "Problema de la Sucesión Básica Incondicional". Una base (de Schauder) en un espacio de Banach de dimensión infinita X es una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos de X tales que cualquier $v \in X$ se expresa de manera única como una suma convergente de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$. Enflo demostró en 1973 que no todo espacio de Banach (separable) tiene una base, pero además debe observarse que la definición depende del orden en la suma, y que por tanto una permutación de una base no tiene por qué seguir siendo base. Se dice que una base de un espacio de Banach es una base incondicional si sigue siendo una base después de reordenarla, o equivalentemente, si las proyecciones a los subespacios generados por subconjuntos arbitrarios de la base son todas ellas continuas. La idea es que dar una base debería permitirnos representar los operadores como "matrices infinitas", pero con bases no incondicionales obtenemos de este modo sólo perturbaciones compactas de múltiplos de la identidad, de ahí el interés de las bases incondicionales.

Poco después Gowers construyó un ejemplo todavía más sorprendente: un espacio con una base incondicional cuyo álgebra de operadores está esencialmente generada por las proyecciones. Este espacio no es isomorfo a ninguno de sus subespacios, y Gowers había así resuelto, y mejorado, uno de los problemas que Banach había propuesto en su "Cuaderno Escocés", el "Problema del Hiperplano": ¿es todo espacio de Banach de dimensión infinita isomorfo a sus hiperplanos? Utilizando técnicas similares Gowers ha construido contraejemplos para otros problemas famosos, como el de Schröder-Bernstein: si dos espacios de Banach son cada uno factor directo del otro, ¿son necesariamente isomorfos? La respuesta es no. También ha sido capaz de construir un espacio de Banach X que es isomorfo a X^3 pero no a X^2, dando de paso un nuevo ejemplo negativo para el problema de Schröder-Bernstein.

Otro problema clásico resuelto por Timothy Growers es el "Problema del Espacio Homogéneo" propuesto por S. Mazur. Se dice que un espacio de Banach es homogéneo si es isomorfo a todos sus subespacios cerrados de dimensión infinita; ¿hay espacios homogéneos que no sean espacios de Hilbert?

Komorowski y Tomczac-Jaegermann habían demostrado que un espacio homogéneo con una base incondicional es de Hilbert. Utilizando ingeniosamente los juegos topológicos y la teoría de Ramsey, Gowers probó un Teorema de Dicotomía: todo espacio de Banach tiene un subespacio con una base incondicional o un subespacio hereditariamente indescomponible. (Se dice que un espacio de Banach es indescomponible si no es isomorfo a la suma directa de dos espacios de Banach de dimensión infinita. Se dice que un espacio de Banach de dimensión infinita es hereditariamente indecomponible si todos sus subespacios cerrados de dimensión infinita son indecomponibles). Como los espacios hereditariamente indescomponibles están muy lejos de ser homogéneos, Gowers había demostrado con su teorema de dicotomía que todo espacio homogéneo tenía una base incondicional, y por tanto era de Hilbert, resolviendo así el problema de Mazur.

La más reciente aportación de Gowers, y que al parecer ha llamado poderosamente la atención del Comité que ha otorgado las Medallas, es una nueva y muy elegante demostración del Teorema de Szmerédi (conjeturado por Erdős y Turan) que afirma que un conjunto de enteros suficientemente denso debe contener sucesiones aritméticas de todas las longitudes. Más exactamente el Teorema dice que para cada número natural k y cada $\delta > 0$ existe un N tal que cualquier subconjunto de $\{1, \ldots, N\}$ con al menos δN elementos contiene una sucesión aritmética de longitud k. Ninguna de las demostraciones que se conocían daba una idea de cuán grande debía ser N. La única excepción era el caso $k = 3$. La demostración de Gowers da cotas para todos los k, y todo indica que las técnicas que ha utilizado para atacar este problema prometen ser muy fructíferas.

Maxim Kontsevich (nacido el 25 de agosto de 1964) ha sido galardonado por sus aportaciones a la física matemática, la geometría algebraica y la topología. Es un experto en Teoría de Cuerdas y en Teoría Cuántica de Campos, y su trabajo muestra la influencia de Richard Feynmann y de Edward Witten (ganador a su vez de la Medalla Fields en 1990).

Kontsevich, igual que Borcherds, Witten o Simon Donaldson (otro galardonado con la Medalla Fields, en 1986) es un egregio representante de la fértil interrelación que hay entre la física teórica y las matemáticas. Citemos a modo de ejemplo su publicacion en 1990 en la revista *Communnications in Mathematical Physics* de un artículo en el que estudiaba la teoría de intersección en espacios de moduli de curvas algebraicas con puntos marcados (geometría algebraica), con el objetivo de demostrar una conjetura de Witten sobre la gravedad cuántica en dimensión dos (física teórica), lo que debería tener como consecuencia que satisfaciese una jerarquía integrable infinita de ecuaciones de Korteweg–de Vries (ecuaciones en derivadas parciales) completada con una "ecuación de cuerdas"(vuelta a la física teórica).

Esta demostración de la Conjetura de Witten es quizá su resultado más conocido, pero no se debe olvidar que había sido precedido por el descubrimiento, simultáneo, de: una uniformización del espacio de moduli de curvas algebraicas por el álgebra de Virasoro; los axiomas de la teoría conforme cuántica de campos; y un modo de definir invariantes para variedades de dimensión 3 usando funciones de correlación racionales.

Kontsevich ha propuesto un vasto programa para tratar los problemas enumerativos en geometría algebraica basándose en el estudio de los espacios de moduli de aplicaciones estables, ligando los problemas enumerativos con las integrales sobre diagramas de Feynman. Este programa (iniciado junto a Yuri Manin) comienza por un tratamiento axiomático de los invariantes de Gromov-Witten en un contexto algebro-geométrico (y no sólo simpléctico), y permite relacionar el álgebra homológica, la topología de variedades, la teoría de nudos y la "física topológica". Esto permite dar una interpretación geométrica de la cohomología cuántica así como una interpretación homológica de los invariantes de Witten y de Vassiliev de un nudo; presentar la Simetría Espejo como una identificación entre dos Variaciones de Estructuras de Hodge; entender la geometría de las ecuaciones que aparecen al estudiar las teorías de campos gauge; o encontrar relaciones insospechadas entre la Teoría de Cuerdas y la Teoría de Chern–Simmons. Pero también se pueden aplicar las ideas de Kontsevich a problemas quizá más prosaicos (aunque nada triviales) como calcular el número de curvas racionales planas de grado d que pasan por $3d-1$ puntos genéricos o el número de curvas racionales de grado dado que hay en una quíntica genérica de $\mathbb{P}^4$.

En sus trabajos más recientes juegan un papel importante los periodos de variedades definidas sobre $\mathbb{Q}$, y por tanto los grupos de Galois motívicos.

Otros resultados de Maxim Kontsevich tratan de la clasificación de nudos. Recordemos que un nudo en Matemáticas es lo que todo el mundo entiende por un nudo, salvo que los dos extremos de la cuerda están unidos, es decir, una inmersión de la circunferencia S^1 en el espacio $\mathbb{R}^3$. Clasificarlos consiste en decidir qué nudos se pueden transformar unos en otros sin usar tijeras. Hoy no se conoce una clasificación completa de los nudos, y lo mejor que se puede hacer es asignar a cada nudo invariantes (numéricos o de otro tipo) de manera que si dos nudos son equivalentes sus invariantes coincidan. Por supuesto si el recíproco fuese cierto estos invariantes nos darían una clasificación de los nudos. Parece que Kontsevich ha encontrado el que es, hasta ahora, el mejor invariante conocido para los nudos.

Mencionaremos por último uno de los más celebrados trabajos de Kontsevich, la resolución del problema de la cuantización: la demostración de que los dos modelos de la llamada gravitación cuántica son equivalentes. La teoría cuántica de la gravitación es un paso hacia una teoría unificada de las fuerzas, y armoniza la mecánica clásica (la atracción entre las masas, la teoría física del macrocosmos) con la mecánica cuántica (las fuerzas entre partículas elementales, la teoría física del microcosmos).

Curtis T. McMullen (nacido el 21 de mayo de 1958) ha recibido la Medalla Fields por su trabajo en geometría hiperbólica y dinámica compleja, concretamente en la parte de la teoría de sistemas dinámicos conocida popularmente como "Teoría del Caos".

Para decirlo con sus propias palabras: "Las olas, los asteroides, el corazón humano y una multitud de sistemas dinámicos muestran una transición del comportamiento periódico a la turbulencia, la impredicibilidad y el caos. El comienzo del caos es anunciado por una cascada de duplicaciones del periodo, gobernada por nuevas constantes de la naturaleza. Constantes familiares como π ó $\sqrt{2}$ están relacionadas con figuras geométricas, como el círculo o el cubo, que, por su simetría, pueden recubrir el espacio plano ordinario. Constantes más exóticas proceden de figuras como el dodecahedro, que puede usarse para recubrir el espacio curvado negativamente, recubrimiento que se vuelve caótico en el borde. Este caos está relacionado con la rigidez de las losetas y por tanto con la unicidad de las constantes que determinan. Mis últimas investigaciones intentan aprovechar esta conexión entre caos y rigidez para lograr una comprensión geométrica de las constantes universales en dinámica".

El primer resultado importante de Curtis McMullen trataba de la búsqueda de raíces de polinomios. Se sabe que el Método de Newton funciona estupendamente para calcular las soluciones (aproximadas) de ecuaciones cuadráticas. Pero no se sabía si existía un método análogo para ecuaciones de grado arbitrario. McMullen demostró que no podía existir un método universal, sólo métodos que funcionasen en situaciones particulares. Concretamente demostró que, para $d > 3$, no existe un método puramente iterativo para encontrar las raíces que funcione para casi cualquier polinomio complejo de grado d y casi cualquier condición inicial. Además desarrolló un "nuevo método de Newton" válido para ecuaciones cúbicas, es decir, para $d = 3$.

Otro resultado fundamental de McMullen se refiere al Conjunto de Mandelbrot. Los sistemas dinámicos complejos, como los que gobiernan el clima y los fluídos, muestran situaciones de dispersión y otras de equilibrio. La frontera entre ambos comportamientos es el llamado Conjunto de Julia. El Conjunto de Mandelbrot muestra los parámetros para los que el Conjunto de Julia es conexo. Esta es una caracterización muy grosera de la frontera, pero no se conocía ninguna mejor. El gran avance debido a Curtis T. McMullen fue el demostrar que, apoyándose en el Conjunto de Mandelbrot, se puede decidir cuando el sistema dinámico asociado es hiperbólico. Para este tipo de sistemas existe una teoría bien desarrollada que permite describirlos en detalle. Que esto era cierto se sospechaba desde los años 60, pero nadie antes de McMullen había logrado una caracterización precisa del Conjunto de Julia.

Curtis McMullen ha contribuido también de manera esencial a la extensión del diccionario, iniciado por D. Sullivan, entre la teoría de iteraciones de funciones racionales en la esfera de Riemann y la teoría de variedades hiperbólicas de dimensión 3. Este se manifiesta por ejemplo en el paralelismo entre el teorema de uniformización (existencia de métricas hiperbólicas) de 3-variedades de Thurston, y el teorema de Sullivan sobre la convergencia de la renormalización para aplicaciones cuadráticas reales. Entre otras aportaciones, McMullen ha dado nuevas demostraciones de ambos teoremas.

Y como en el caso de los otros galardonados, las ideas de McMullen también se pueden aplicar a otras áreas de las matemáticas. Ha sido por ejemplo capaz de dar una demostración sencilla, con argumentos elementales basados en las propiedades de los flujos geodésicos en los espacios homogéneos, de algunos de los teoremas fundamentales que utilizaron Duke, Rudnick y Sarnak para dar estimaciones asintóticas del número de puntos enteros con norma acotada en variedades afines simétricas definidas sobre $\mathbb{Q}$.

Tras presentar a todos los galardonados cabe destacar que es la primera vez que dos profesores de la misma Universidad, la Universidad de Cambridge en este caso, reciben la Medalla Fields en el mismo año. La Oficina de Prensa de la Universidad de Cambridge se ha apresurado a señalar que McMullen también estudió un curso de Licenciatura en esa universidad, y, como es sabido, Wiles nació, hizo todos sus estudios y comenzó su carrera profesional en Cambridge. Borcherds y Gowers pertenecen incluso al mismo Departamento, el DPMMS, Department of Pure Mathematics and Mathematical Statistics. No deja de ser curioso que, en un año en que la física juega un papel fundamental en el trabajo de los galardonados con las Medallas Fields, el otro Departamento de Matemáticas de Cambridge sea el DAMTP, Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics.

Terminaremos indicando que el Comité que ha otorgado las Medallas Fields de 1998 ha estado presidido por Yuri Manin (Max-Planck-Institut, Bonn, Alemania), siendo sus otros miembros: John Ball (Universidad de Oxford, Reino Unido), John Coates (Universidad de Cambridge, Reino Unido), J. J. Duistermaat (Universidad de Utrecht, Holanda), Michael H. Freedman (Microsoft Research, USA), Jürg Fröhlich (ETH Zürich, Suiza), Robert MacPherson (Institute for Advanced Study, Princeton, Estados Unidos), Kyoji Saito (Universidad de Kyoto, Japon) y Stephen Smale (City University, Hong Kong, China).