

La geometría de las películas de jabón: superficies mínimas

por

Celso José da Costa

INTRODUCCIÓN

Las curvas y las superficies son los objetos fundamentales con los que trata la Geometría Diferencial del espacio euclídeo tridimensional \mathbf{R}^3 . Tales curvas y superficies deben ser diferenciables y regulares, es decir, poseen en todo punto, respectivamente, una recta tangente y un plano tangente. Estas propiedades son esenciales para introducir la noción de curvatura, de importancia fundamental en el estudio de tales curvas y superficies. En este artículo trataremos de una clase importante de superficies, denominadas superficies mínimas, con una bella y relevante historia que comenzó a ser dibujada en el siglo XVII y hoy se mantiene como un campo de extrema vitalidad de la investigación científica.

Antes de nada, vamos a precisar cuáles son las propiedades que definen una superficie como mínima. Como motivación inicial, podríamos decir que las superficies mínimas son el análogo bidimensional de las geodésicas. En efecto, consideremos en el plano euclídeo \mathbf{R}^2 , provisto de un sistema de coordenadas rectangulares (x, y) , los puntos $p = (0, 0)$, $q = (2\pi, 1)$ y las rectas verticales t y s que pasan por p y q , respectivamente (fig. 1). El camino de menor longitud que une tales puntos es un segmento de recta r . La banda de plano limitada por t y s puede ser transformada isométricamente (sin alterar longitudes) en un cilindro circular recto C en \mathbf{R}^3 cuyo círculo de base tiene radio 1, de modo que las rectas t y s coincidan en C (fig. 2).

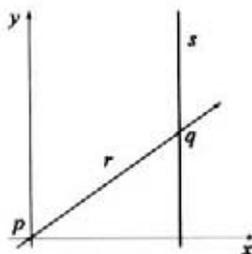


FIGURA 1

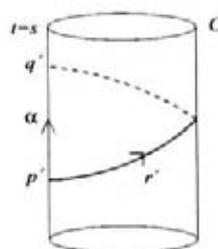


FIGURA 2

El segmento de recta r , las rectas t y s y los puntos p y q , por esta transformación, dan como resultado, respectivamente, la curva r' , las rectas coincidentes t' y s' y los puntos p' y q' . Obsérvese que en el cilindro C , r' no es la curva de menor longitud entre p' y q' , puesto que el camino vertical α que une p' y q' realiza esta distancia. A pesar de esto, r' preserva una propiedad minimizante local. A saber, para todo punto $x \in r'$ existe un entorno abierto $V \subset C$, con $x \in V$, tal que, si $a, b \in V \cap r'$, entonces el segmento de r' que une a y b y contiene el punto x tiene la menor longitud de entre todas las curvas contenidas en el cilindro y que unen a y b . Por lo tanto, este segmento realiza la distancia entre a y b en el cilindro C .

De lo que se deduce que, a pesar de que globalmente no minimiza distancias entre dos cualesquiera de sus puntos, r' conserva esta propiedad localmente. Es decir, r' es una geodésica del cilindro (fig. 3). Consideremos ahora una superficie $S \subset \mathbf{R}^3$. S es una superficie mínima si tiene la siguiente propiedad: dado un punto arbitrario $x \in S$, existe un entorno abierto $V \subset S$ con $x \in V$ tal que si $\gamma \subset V$ es una curva de Jordan¹ y $D \subset V$ es el disco cerrado cuyo borde ∂D verifica $\partial D = \gamma$, entonces $\text{área } D \leq \text{área } D^*$, para todo disco $D^* \subset \mathbf{R}^3$, con $\partial D^* = \gamma$. En verdad, tendríamos que exigir también que D^* estuviese suficientemente próximo a D (fig. 4).

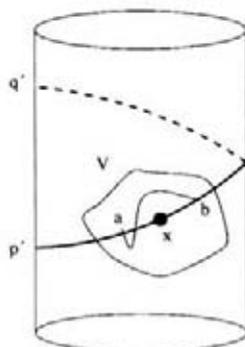


FIGURA 3

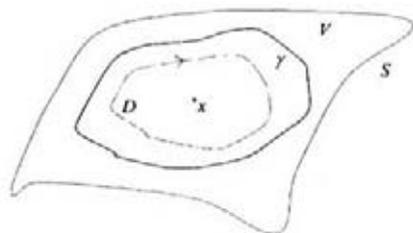


FIGURA 4

En conclusión, mientras que las geodésicas minimizan localmente la longitud, las superficies mínimas minimizan localmente el área. Esta analogía nos lleva, intuitivamente, a considerar superficies mínimas como geodésicas bidimensionales. Vamos con los primeros ejemplos. Evidentemente, todo plano en \mathbf{R}^3 es una superficie mínima. También las películas de jabón son ejemplos de superficies mínimas.

¹Una curva de Jordan $\gamma \subset \mathbf{R}^3$ es una curva homeomorfa al círculo unitario $S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$

Las películas de jabón son obtenidas después de mojar en una solución de agua y jabón un contorno metálico, que tenga la forma de una curva de Jordan. El contorno metálico, después de retirarlo de la solución de agua y jabón, soportará una película de jabón. Tal película representará una superficie de área mínima entre todas las superficies que están suficientemente próximas a esta película y tienen como borde la curva de Jordan representada por el contorno metálico. Por lo tanto, la película es una superficie que se encuadra en la definición que introducimos de superficie mínima. Esto es así porque en su formación la película se mueve en el sentido de encontrar una posición de equilibrio. Posición ésta que representará un estado de energía potencial mínima para el sistema. Como la energía potencial es proporcional al área, tenemos energía y área mínimas. Por lo tanto, las películas de jabón son ejemplos de superficies mínimas (fig. 5).

El físico belga F. Plateau (1801-1883), en la segunda mitad del siglo pasado, hizo varios experimentos con películas de jabón y publicó en 1873 sus resultados en la obra "Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires". Tales experimentos son ilustrativos para el famoso "Problema de Plateau" que describiremos a continuación. El nombre de Plateau ligado a este problema es un homenaje al físico belga, pero la verdad es que la cuestión ya había sido considerada por Lagrange en 1760. La situación que se presentaba a Plateau en sus experimentos era la siguiente. Cuando un contorno metálico, representando una curva de Jordan, era introducido en una solución de agua y jabón, la posibilidad o no de conseguir físicamente una película de jabón apoyándose sobre el contorno metálico, parecía en gran parte depender de la geometría (longitud, curvatura, etc.) de la curva representando el contorno. Tal cuestión está ligada al hecho que, como veremos más adelante, las superficies mínimas son sólo puntos críticos para la función área. Por lo tanto, ciertos contornos metálicos, con geometría limitada, representan puntos críticos estables (minimizantes) y la película se forma físicamente. Sin embargo, de manera general, los contornos metálicos representan puntos de equilibrio inestables para el problema. El equilibrio inestable representaría una película ideal sin existencia física. De ahí, el enunciado del famoso problema de Plateau:

Problema de Plateau: *Considérese el disco unitario $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$, cuyo borde ∂D es una curva de Jordan $\partial D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$, y $\gamma \subset \mathbf{R}^3$ otra curva de Jordan arbitraria. Demuéstrese que existe una función $X : D \rightarrow \mathbf{R}^3$ tal que:*

- a) $X(\partial D) = \gamma$ y X establece un homeomorfismo entre ∂D y γ ,
- b) $X(D)$ es una superficie mínima con borde γ .

En otras palabras, el problema de Plateau consiste en lo siguiente: dada una curva de Jordan $\gamma \subset \mathbf{R}^3$ demostrar que existe una película de jabón, con la topología del disco y con γ como borde. El problema de Plateau ejerció una gran fascinación entre los más ilustres matemáticos del siglo XIX. Entre ellos,

podemos citar a Riemann, Möbius, Weierstrass, Schwarz, etc. Tal fascinación venía de la importancia del problema, y aún más, porque combinaba fuertes ingredientes. Tenía una formulación que podía ser entendida hasta por personas con conocimientos elementales de matemática, y una increíble dificultad para ser abordado. Tal dificultad era tan expresiva que el geométra francés Darboux (1842-1917) escribía en 1914, refiriéndose al Problema de Plateau: "hasta el presente el análisis matemático aún no puede inventar un método que nos permita atacar este bello problema". Así, vió entrar el siglo XX sin que ninguna solución satisfactoria fuese presentada, a no ser para algunas curvas $\gamma \subset \mathbf{R}^3$ particulares. Por ejemplo, la solución [18] de Schwarz (1843-1921) dónde la curva borde γ se apoyaba sobre las aristas de un tetraedro (fig. 6). Solución también obtenida por Riemann [15] y publicada póstumamente.

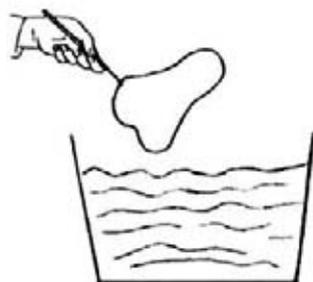


FIGURA 5

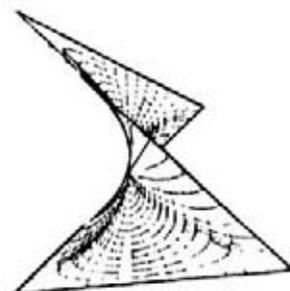


FIGURA 6

En 1928, J. Douglas presentó la primera solución al problema de Plateau. El consiguió probar que para una curva de Jordan arbitraria $\gamma \subset \mathbf{R}^3$, existe una función $X : D \rightarrow \mathbf{R}^3$ poseyendo las propiedades requeridas en (a) y (b) en el enunciado del problema de Plateau apenas con la salvedad de que la solución podría presentar puntos aislados sobre la superficie $X(D)$ donde el plano tangente no estuviese bien definido. Tales puntos sobre una superficie se llaman puntos de ramificación. Situaciones como ésta, donde puntos aislados de una superficie no poseen plano tangente, aparecen con frecuencia. Véase, por ejemplo, el caso del cono circular recto en \mathbf{R}^3 . El cono es una superficie diferenciable y regular excepto en el vértice, donde no es posible definir un plano tangente.

La solución del problema de Plateau sorprendió al mundo matemático, siendo principalmente este hecho, la causa de que Jesse Douglas fuese el ganador de la medalla Fields (distinción máxima a la que puede aspirar un matemático) en el Congreso Mundial de Matemáticas de 1936, en la primera edición que la medalla fue otorgada. Otro ganador de la distinción en la misma fecha fue L. Ahlfors. En cuanto a la existencia de soluciones del problema de Plateau exentas de puntos de ramificación es aún un problema no resuelto. Lo que ya está probado es la existencia de soluciones sin puntos de ramificación en el interior del disco. Es decir, puntos que son imágenes por la parametrización

X de los puntos interiores al disco D . Este resultado es un bello trabajo de R. Ossermann [13] de 1970. En cuanto a la inexistencia de puntos singulares en el borde, la cuestión está decidida sólo cuando γ es una curva analítica.

Intentando dirigirnos hacia aspectos analíticos y geométricos, vamos a traducir nuestra definición de superficies mínimas en términos de técnicas variacionales. Este método fue concebido por Lagrange (1736-1813) en 1760. Consideremos una superficie $S \subset \mathbf{R}^3$ diferenciable y con borde ∂S diferenciable. La condición de ser diferenciable implica que todo punto interior p de S posee un plano tangente $T_p S$ y tales planos varían diferenciablemente. Además, vamos a restringir nuestro estudio a las superficies orientables, que son aquellas superficies que poseen un campo de vectores continuo $N : S \rightarrow \mathbf{R}^3$, donde $N(p)$ es un vector unitario normal al plano tangente $T_p S$. Aún más, supongamos que S pueda ser descrita como el gráfico de una función diferenciable f definida en un dominio (abierto y conexo) $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, cuyo borde $\partial\Omega$ es una curva de Jordan. Es decir, $f : \Omega \cup \partial\Omega \rightarrow \mathbf{R}$ es diferenciable y

$$S = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbf{R}^3; (x, y) \in \Omega \cup \partial\Omega\}.$$

En esta situación, $N : S \rightarrow \mathbf{R}^3$,

$$N(x, y, f(x, y)) = (|f_x \wedge f_y|)^{-1}(f_x \wedge f_y)$$

es un campo de vectores normales a la superficie S . Aquí, por ejemplo, f_x indica la derivada parcial de f respecto a x , etc. Consideremos ahora una función diferenciable arbitraria $\zeta : \Omega \cup \partial\Omega \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $\zeta|_{\partial\Omega} \equiv 0$. Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño y $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ es posible probar que los subconjuntos $S_t \subset \mathbf{R}^3$, que son imágenes de las funciones $F^t : \Omega \cup \partial\Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$, $F^t(x, y) = (x, y, f(x, y)) + t\zeta(x, y)N(x, y, f(x, y))$, son superficies regulares. Es decir, $S_t = \text{Im } F^t$. Nótese que $S_0 = S$. Diremos que S_t , $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ es una variación definida por ζ en la dirección normal de la superficie S . Nótese que la condición $\zeta|_{\partial S} = 0$ implica que $\partial S_t = \partial S$, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, y la variación se dice con borde fijo. Para cada t denotamos por $A(t)$ el área de la superficie S_t , y se tiene así definida una función diferenciable $A : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow (0, \infty)$, $A(t) = \text{área de } S_t$. Lagrange definió S como una superficie mínima si y sólo si $A'(0) = 0$, para toda función ζ con las propiedades descritas anteriormente. Aquí, $A'(0)$ representa la derivada de la función $A(t)$ con respecto a la variable t , valuada en $t = 0$. En conclusión, Lagrange estableció que $A'(0) = 0$, para elecciones arbitrarias de la función ζ si y solo si

$$(1 + (f_x)^2)f_{yy} + (1 + (f_y)^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} = 0. \quad (1)$$

La ecuación (1) es conocida como la ecuación diferencial de Lagrange para las superficies mínimas. Debemos señalar que el punto de vista de Lagrange es absolutamente general en lo que concierne a la caracterización de las superficies mínimas, una vez que toda superficie en \mathbf{R}^3 se puede expresar localmente, en torno a un punto p arbitrario, como gráfico de alguna función diferenciable definida en el plano tangente $T_p S$ de S en p . Esta observación nos permite

adoptar la ecuación (1) como definición para superficies mínimas. Euler, uno de los mayores matemáticos del siglo XVIII, al conocer el trabajo del joven Lagrange, se dió cuenta de la importancia del método, e inició una fructífera colaboración con Lagrange, la cuál es la raíz del desarrollo del cálculo de variaciones, técnica matemática de suma importancia en geometría y en la matemática en general. En 1764 Euler resolvió la ecuación (1) imponiendo la condición de que S fuese una superficie de rotación, y encontró que el catenoide es una superficie mínima. ¿Pero qué superficie es ésta? Consideremos en \mathbf{R}^3 dos puntos fijos A y B a los cuáles se ata una cuerda homogénea de longitud superior a la distancia entre A y B (fig. 7).



FIGURA 7

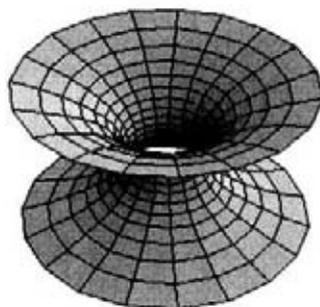


FIGURA 8

Una vez en reposo, la cuerda toma una posición de una curva l la cuál identificamos como una catenaria. La catenaria, para ejes ortogonales apropiados x e y en el plano definido por la curva l , es parte del gráfico de la función $y = y(x)$,

$$y = \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}). \quad (2)$$

Una rotación de la extensión de la curva l dada por la ecuación (2) en torno al eje x , genera una superficie mínima, que recibe el nombre de catenoide. Una vez que la curva l fue extendida para todos los valores de x siguiendo la ecuación anterior, el catenoide es una superficie mínima que se asemeja a un cilindro en \mathbf{R}^3 , con una geometría adicional que hace que los cortes siguiendo una familia de planos P_x paralelos al plano coordenado (yz) , tal que $(x, 0, 0) \in P_x$, sean círculos C_x de radios $r_x = \cosh(x)$. El catenoide es una especie de cilindro expansivo, donde los círculos C_x tienen radios verificando $\lim r_x = \infty$, cuando $x \rightarrow \infty$. Un poco más tarde, en 1776, J. Meusnier interpreta la ecuación (1) en términos de la curvatura media de la superficie. Esto permitió a Meusnier probar que el helicoide es otro ejemplo de superficie mínima.

Para entender el trabajo de Meusnier precisamos introducir la noción de curvatura para superficies de \mathbf{R}^3 . Tal noción es local y usa el cálculo diferencial elemental. Consideremos una superficie arbitraria $S \subset \mathbf{R}^3$, con un campo

de vectores normales unitarios $N : S \rightarrow \mathbf{R}^3$. En el plano tangente $T_p S$ consideremos un vector v tangente y unitario. $N(p)$ y v determinan un plano π_v normal a la superficie de modo que $C_v = \pi_v \cap S$ es una curva plana (por lo menos en un entorno de p) denominada la curva normal de S en p en la dirección v (fig. 9).

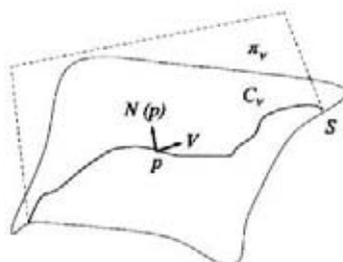


FIGURA 9

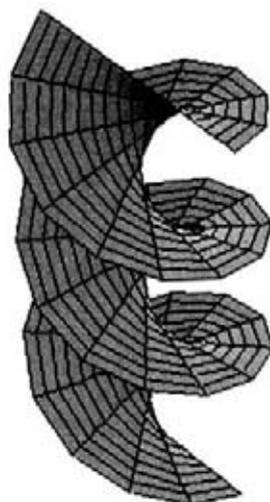


FIGURA 10

Sea $k(v)$ la curvatura con signo de la curva plana C_v en el punto p . En el caso de curvas planas, un modo de definir la curvatura en cuestión es por medio de una parametrización local de C_v en p , por una función diferenciable, $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbf{R}^3$, tal que $\alpha(t) \in C_v$, $|\alpha'(t)| = 1$, $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Por definición, $k(v) = \pm |\alpha''(0)|$. En el caso en que $|\alpha''(0)| \neq 0$, se adopta el signo positivo si $\alpha''(0)$ y $N(p)$ poseen la misma orientación, y el signo negativo en caso contrario. Tal definición no posee ambigüedades, a pesar de la elección arbitraria de α . Además, $k(v) = k(-v)$ para todo $v \in T_p S$. Lo que también se puede probar es que haciendo variar v en $T_p S$, con $|v| = 1$, existen vectores ortogonales v_1 y v_2 tales que

$$k(v_1) \leq k(v) \leq k(v_2).$$

De modo que tomando medias de $k(v)$ se definen, en el punto p , las curvaturas más importantes de la superficie S :

$$K(p) = k(v_1)k(v_2) \text{ y } H(p) = \frac{1}{2}(k(v_1) + k(v_2)).$$

Tales son, respectivamente, la curvatura gaussiana y la curvatura media de la superficie en p . En 1776, Meusnier demostró que S es una superficie mínima, y por tanto descrita por gráficos locales que satisfacen la ecuación (1), si y

solo si $H(p) = 0$ para todo punto p de S . Así, quedaba establecido el puente entre los puntos de vista analítico y geométrico. Tenemos así una importante caracterización de las superficies mínimas. Es decir, una superficie es mínima $\iff H \equiv 0$. Por lo tanto, geoméricamente, una superficie mínima es una silla perfecta en todos sus puntos. Con esto queremos decir que por todo punto arbitrario de la superficie pasan dos curvas, con direcciones tangentes ortogonales v_1 y v_2 , las cuáles definen curvaturas de igual intensidad y simétricas, $k(v_1) = -k(v_2)$, imitando en todo punto una silla perfecta. Aún cuando la intensidad de tal silla varíe de punto a punto de la superficie, el equilibrio perfecto de la silla debe ser verificado en todos los puntos. Esta interpretación permitió demostrar a Meusnier que el helicoides tiene curvatura media nula en todos sus puntos y es por lo tanto un ejemplo de superficie mínima.

El helicoides es una superficie formada por rectas (superficie reglada) que describiremos a continuación. Fijemos en \mathbf{R}^3 un sistema ortogonal de ejes xyz y hagamos coincidir una recta l con el eje x , y sean $p, q \in l$ los puntos $p = (0, 0, 0), q = (1, 0, 0)$. Ahora movemos l con continuidad en el tiempo $t \in (-\infty, \infty)$ de tal modo que l permanezca paralela al plano xy y las órbitas de los puntos p y q en el tiempo t , denotadas por p_t y q_t , verifiquen $p_t = (0, 0, t)$ y $q_t = (\cos t, \sin t, t)$. En definitiva, l se desliza sobre el eje z , girando continuamente y permaneciendo siempre paralela al plano xy . Con esta operación generamos una superficie mínima llamada helicoides (fig. 10). El helicoides es una superficie reglada y topológicamente, es una especie de plano torcido.

TOPOLOGÍA DE LAS SUPERFICIES

Para avanzar en nuestra comprensión de las superficies mínimas, precisamos de algunos conceptos de topología. Dos subconjuntos X e Y del espacio \mathbf{R}^3 son homeomorfos, con la topología inducida de \mathbf{R}^3 , si existe una función continua $h : X \rightarrow Y$, biyectiva y cuya inversa h^{-1} sea también continua. Este es el concepto fundamental de la topología y escribimos $X \cong Y$. La topología posee un bello teorema que clasifica todas las superficies compactas y orientables de \mathbf{R}^3 . La sucesión $M_n, n = 1, 2, \dots$ de superficies compactas y orientables que proporcionan la clasificación tiene como primer elemento a la esfera. Es decir,

$$M_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

M_2 es el toro, superficie obtenida por la rotación, en torno del eje z , de un círculo de radio unitario, con centro en el punto $c = (2, 0, 0)$ y situado en el plano coordenado yz de \mathbf{R}^3 (fig. 11). M_2 tiene como modelo las cámaras de aire de los neumáticos. El elemento M_3 de esta sucesión es un bi-toro que puede ser obtenido pegando dos ejemplares de M_2 , después de una cirugía conveniente. Para hacer esto, denotemos estos dos ejemplares por M'_2 y M''_2 , de los cuáles se quitan, respectivamente, dos discos abiertos D' y D'' suficientemente pequeños. El modelo M_3 se obtiene pegando $M'_2 \setminus D'$ a $M''_2 \setminus D''$ a través de la identificación (pegado) de $\partial D'$ y $\partial D''$ (fig. 12).

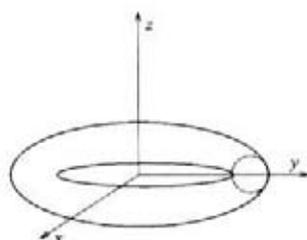


FIGURA 11

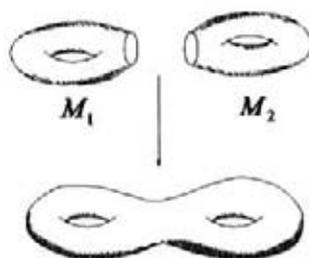


FIGURA 12

Este proceso se puede continuar para obtener el n -toro a partir de n copias de toros (fig. 13). Toda superficie homeomorfa a M_n se llama una **superficie de género n** .

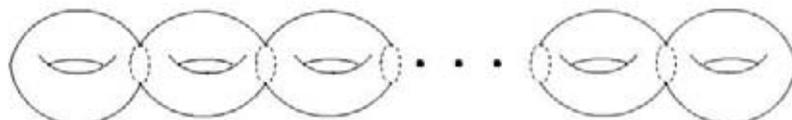


FIGURA 13

El teorema fundamental de clasificación topológica de las superficies compactas de \mathbf{R}^3 se puede enunciar así:

Teorema 1: *Dada una superficie compacta orientable $S \subset \mathbf{R}^3$ entonces existe n tal que S es homeomorfa a M_n . Además, si $n \neq m$ entonces M_n no es homeomorfa a M_m .*

Después de esta digresión sobre la topología de las superficies, volvemos a enfocar nuestra atención en las superficies de \mathbf{R}^3 que son mínimas. El plano, el catenoide y el helicoide son superficies mínimas con propiedades muy especiales e importantes. Son superficies mínimas, embebidas propiamente en \mathbf{R}^3 , completas y de topología finita. De ahora en adelante, nos vamos a concentrar en el siguiente conjunto U de superficies:

$$U = \left\{ \begin{array}{l} S \subset \mathbf{R}^3; S \text{ es mínima, propiamente embebida, completa y} \\ \text{de topología finita.} \end{array} \right\}$$

¿Cuáles son estas propiedades que debe poseer una superficie mínima para convertirla en un habitante del universo U ?

Una superficie $S \subset \mathbf{R}^3$ es **embebida** si S no posee autointersecciones. Esto implica que todo punto de la superficie posee exactamente un plano tangente. La figura 14 presenta una especie de cilindro con autointersecciones, y es una superficie no embebida en \mathbf{R}^3 .

Una superficie S es **propiamente embebida en \mathbf{R}^3** si S es embebida en \mathbf{R}^3 y para todo punto $q \in \mathbf{R}^3$, $q \notin S$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(q) \cap S = \emptyset$, donde $B_\epsilon(q)$ es la bola abierta en \mathbf{R}^3 de centro q y radio ϵ . Un ejemplo de superficie embebida en \mathbf{R}^3 y que no lo es propiamente, se obtiene construyendo una superficie reglada sobre el gráfico de la función $y = f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, $x > 0$, del modo siguiente. Para todo punto $(x, f(x))$ del gráfico, se considera la recta l_x perpendicular al plano coordenado (xy) , pasando por $(x, f(x), 0)$. Sea S^* la superficie generada por la unión de las rectas l_x para todo $x > 0$. S^* es embebida, pero no propiamente embebida en \mathbf{R}^3 . Pues dado $q = (0, y, 0)$, donde $|y| < 1$, entonces para todo $\epsilon > 0$, $B_\epsilon(q) \cap S \neq \emptyset$ (fig. 15).

Una superficie S es **propiamente embebida en \mathbf{R}^3 y completa** si S divide a \mathbf{R}^3 en dos subconjuntos abiertos y conexos A y B , disjuntos y tales que S es el borde común de A y B . Es decir, $\partial A = \partial B = S$ y \mathbf{R}^3 se escribe como unión disjunta, $\mathbf{R}^3 = A \cup S \cup B$. Por ejemplo, el plano, el catenoide, el helicoides y también el cilindro y la esfera son superficies que dividen \mathbf{R}^3 en subconjuntos con propiedades que las convierten en superficies propiamente embebidas y completas de \mathbf{R}^3 . Por otro lado, una parte limitada de un cilindro, el plano menos un punto, un cono menos su vértice, son ejemplos de superficies que no poseen tales propiedades.

Finalmente una superficie $S \subset \mathbf{R}^3$ se dice de **topología finita** si para un cierto n y para un número finito de puntos q_1, q_2, \dots, q_k , resulta que S es homeomorfa a $M_n \setminus \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$. En símbolos,

$$S \cong M_n \setminus \{q_1, q_2, \dots, q_k\}.$$

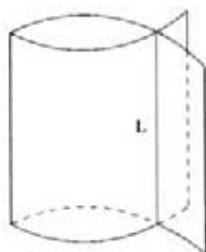


FIGURA 14

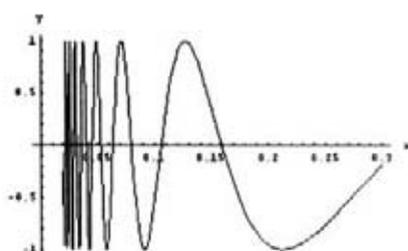


FIGURA 15

Una vez establecidos los atributos que definen las superficies del conjunto U , necesitamos aún introducir una nueva definición. Supongamos que $S \subset \mathbf{R}^3$ es una superficie en el conjunto U y $S \cong M_n \setminus \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$. Entonces todo punto q_j representa un punto en el infinito o un borde en el infinito para S . Por lo tanto, a todo punto q_j le asociamos un final F_j de S del siguiente modo. Supongamos que $\phi: M_n \setminus \{q_1, q_2, \dots, q_k\} \rightarrow S$ realiza el homeomorfismo entre S y $M_n \setminus \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$. Consideremos discos topológicos abiertos $D_j \subset M_n$ centrados en q_j , $j = 1, 2, \dots, k$, tales que $D_i \cap D_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Entonces, $F_j = \phi(D_j \setminus \{q_j\})$ es un **final** de S asociado al punto q_j . En estas condiciones también diremos que S es una **superficie de género n con k finales**.

Ya tuvimos ocasión de ver que el plano, el catenoide y el helicoides son superficies del conjunto U . De hecho, en cuanto a la topología finita, el plano es homeomorfo a la esfera menos un punto. El helicoides es una especie de plano torcido, y como la torsión no altera la topología, valen para el helicoides las mismas conclusiones que para el plano. Estas son, por lo tanto, superficies de género cero y con un final. En cuanto al catenoide, es homeomorfo al cilindro el cual es homeomorfo a una esfera menos dos puntos, y por lo tanto tiene género cero y dos finales.

Todavía en el intento de ilustrar intuitivamente estos conceptos importantes de la topología de las superficies, observemos que los modelos de M_n dados en el Teorema 1, son superficies compactas, completas y propiamente embebidas en \mathbf{R}^3 . Consideremos la partición de \mathbf{R}^3 inducida por M_n . Es decir, $\mathbf{R}^3 = A_n \cup M_n \cup B_n$, donde A_n y B_n son conjuntos abiertos, no vacíos y conexos. El hecho de que M_n sea compacta implica que A_n y B_n pueden ser escogidos como conjuntos acotado y no acotado, respectivamente. En estas condiciones, tiene sentido denominar a A_n el interior, y a B_n el exterior de M_n . Otra observación pertinente con este universo de ideas, es que una superficie diferenciable y compacta $S \subset \mathbf{R}^3$ y por lo tanto homeomorfa a M_n para algún n , no puede ser una superficie mínima. De hecho, si suponemos que este fuera el caso para alguna superficie S , llegaremos a una contradicción. Pues, si S es mínima y $S \cong M_n$ entonces S es acotada en \mathbf{R}^3 , no posee borde y todo punto de S posee un plano tangente. Ahora, siendo S acotada, existe $r > 0$ y una esfera euclídea $S_r = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$, tal que S está contenida en el interior de S_r (fig. 16).



FIGURA 16

Por lo tanto, existe un radio, digamos r^* , tal que S está en el interior de S_r si $r > r^*$, y para todo $r < r^*$ existen puntos de S en el exterior de S_r . Luego, en la situación límite de tangencia, existe un punto $p \in S \cap S_{r^*}$ tal que los planos tangentes a S y a S_{r^*} en este punto coinciden. Es decir, $T_p S = T_p S_{r^*}$. Pero de ahí se deduce que p es un punto de curvatura gaussiana positiva para la superficie S . Esto se puede concluir de la observación de que todas las curvas normales de S en p tienen concavidades para el mismo lado, y curvatura mayor o igual a la curvatura de las curvas normales de S_{r^*} en p , que es $(r^*)^{-1}$. Estamos suponiendo que los campos de vectores normales a S y a S_{r^*} apuntan al interior de estas superficies. Por lo tanto, la curvatura gaussiana de S en p es positiva, $H(p) \neq 0$ y S no es una superficie mínima.

La existencia de ejemplos es un hecho de enorme importancia en cualquier dominio de la matemática. Y esto fundamenta la importante pregunta en la teoría de superficies mínimas, ya vislumbrada desde los trabajos pioneros de

Lagrange, Euler y Meusnier. ¿Cuáles son todas las superficies del conjunto U ? Para abordar esta cuestión necesitamos identificar superficies en U , por medio de una relación de equivalencia, con el objetivo de disminuir el tamaño de este conjunto. Dos superficies S_1 y S_2 en U son equivalentes si existe un difeomorfismo $\Psi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, constituido por composición de movimientos rígidos (traslaciones, rotaciones y simetrías) y homotecias tal que $\Psi(S_1) = S_2$. Recordamos que una homotecia (de centro $0 \in \mathbf{R}^3$) en \mathbf{R}^3 y razón $\lambda > 0$, es una función $\phi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, $\phi(x) = \lambda x$. Tales difeomorfismos Ψ que identifiquen superficies mínimas en \mathbf{R}^3 se llaman similitudes. Nótese que una similitud preserva superficies mínimas. Esto es evidente en el caso de movimientos rígidos. En el caso de homotecias, basta observar que una superficie mínima es una silla perfectamente equilibrada en todos los puntos, y las homotecias (dilatación si $\lambda > 1$ o compresión si $\lambda < 1$) preservan sillas perfectas. En esta situación, por abuso de lenguaje, decimos que S_1 y S_2 son iguales. En conclusión, en el conjunto U podemos detectar la existencia de tres superficies: el plano, el catenoide y el helicoides. La conjetura que sobrevivió hasta el año 1985 era la de que estas superficies eran todas las superficies de U . Tal conjetura fue sorprendentemente demostrada ser falsa por el descubrimiento de una cuarta superficie mínima en 1982 por C. Costa [2], [3]. De este descubrimiento nos ocuparemos en la parte final de este artículo.

A partir de los años 70, con los trabajos pioneros de Ossermann, reavivando el puente entre la teoría de las variables complejas envuelta con la representación de Enneper-Weierstrass de superficies mínimas, y la teoría geométrica de tales superficies, se hicieron serios esfuerzos en el sentido de ampliar el conocimiento del universo U . Había la impresión extendida que, sino todo el conjunto U , al menos un subconjunto $U^* \subset U$, constituido por las superficies de U que poseían curvatura total finita, estaba formado solo por el plano y el catenoide. La curvatura total $C(S)$ de una superficie es definida como $C(S) = \int_S K(p)dS$, donde $K(p)$ representa la curvatura gaussiana de S en el punto p . Nótese que el helicoides es una superficie periódica y $K(p) < 0$ para todo punto. Por lo tanto, si Λ es un dominio fundamental del helicoides tenemos que $\int_\Lambda K(p)dS = -\epsilon$, para algún $\epsilon > 0$. Por lo tanto, para el helicoides $\int_S K(p)dS = -\infty$, y así el helicoides está fuera de U^* . Para el plano y el catenoide tenemos respectivamente curvaturas totales cero y -4π .

Desde aquí hasta el final de este artículo, vamos a concentrar nuestra atención en el subconjunto $U^* \subset U$:

$$U^* = \left\{ S \in S; C(S) = \int_S K(p)dS > -\infty \right\}.$$

En la década de los 70, e inicio de los años 80, fueron realizados varios trabajos importantes, en un esfuerzo de arrojar luz sobre el conjunto U^* . Para comprender mejor estos trabajos es necesario, todavía de un modo bastante introductorio, establecer el concepto de superficie de Riemann.

Una superficie de Riemann compacta M es una superficie compacta abstracta, diferenciable, que posee un atlas cuyos cambios de coordenadas

son funciones holomorfas. Es decir, M es homeomorfa a uno de los modelos estándar M_n descritos en el Teorema 1, y todo punto $p \in M$ posee un entorno abierto V_p que es homeomorfo a un disco abierto D_p del plano complejo \mathbf{C} . Además, si $\phi_p : V_p \rightarrow D_p$ denotasen esos homeomorfismos (llamados cartas locales) y para dos puntos $p, q \in M$, $V_p \cap V_q \neq \emptyset$, entonces el cambio de coordenadas $\phi_q \circ \phi_p^{-1} : \phi_p(V_p \cap V_q) \rightarrow \phi_q(V_p \cap V_q)$ es una función holomorfa. El ejemplo más simple de superficie de Riemann compacta es la esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Las cartas locales que hacen de S^2 una superficie de Riemann son las proyecciones estereográficas usuales, ϕ_n y ϕ_s de S^2 a partir de los polos norte y sur, respectivamente, en el plano complejo \mathbf{C} . Concretamente, $\phi_n : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbf{C}$ y $\phi_s : S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\} \rightarrow \mathbf{C}$, donde

$$\phi_n(x, y, z) = \frac{1}{(1-z)}(x+iy), \quad \phi_s(x, y, z) = \frac{1}{(1+z)}(x-iy).$$

Estas dos cartas locales cubren S^2 y transfieren a S^2 la estructura compleja de \mathbf{C} . Obsérvese que en este caso el cambio de coordenadas está dado por $\phi_n \circ \phi_s^{-1}(u+iv) = (u+iv)^{-1}$.

Una función $f : M \rightarrow M'$ entre dos superficies de Riemann es una función holomorfa si las expresiones de f en cartas locales, $\phi \circ f \circ (\phi')^{-1}$, son funciones holomorfas en el plano complejo \mathbf{C} , para cartas locales arbitrarias ϕ de M y ϕ' de M' , siempre y donde esta composición esté definida. Además, f es un difeomorfismo holomorfo si f es biyectiva y holomorfa y lo mismo ocurre con f^{-1} . Finalmente, dos superficies de Riemann son equivalentes desde el punto de vista complejo si existe un difeomorfismo holomorfo entre estas superficies. Escribimos en ese caso $M \cong M'$. De la teoría de variables complejas, se deduce que toda superficie de Riemann de género cero es equivalente a la esfera S^2 , con la estructura compleja dada por las proyecciones estereográficas definidas anteriormente. Esta superficie única se denomina la "esfera de Riemann". En cuanto a las superficies compactas de género uno, desde el punto de vista de la equivalencia, encontramos infinitas estructuras complejas distintas posibles. Un poco más adelante, cuando introduzcamos reticulados y funciones elípticas tendremos ocasión de esclarecer un poco más estas estructuras complejas de género uno.

De entre los importantes trabajos realizados en la década de los 70, inicio de los años 80, relacionados con el intento de entender la geometría de las superficies mínimas del conjunto U^* , nos gustaría destacar tres de ellos. El primero fue un artículo [14] de 1967 en el cuál R. Ossermann, utilizando la representación de Enneper-Weierstrass, estableció una parametrización para las superficies del conjunto U^* . Es decir, toda $S \in S^*$, de género n y con k finales, puede ser descrita por un par formado por una función meromorfa y una 1-forma diferencial analítica en una superficie de Riemann compacta de género n y perforada en k puntos. Sin entrar en detalles técnicos importantes, Ossermann demostró que $S \subset \mathbf{R}^3$ es una superficie en U^* y $S \cong M_n \setminus \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$, entonces existen una función meromorfa g en M_n y una 1-forma diferencial

analítica ω en $M_n \setminus \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$, donde $X : M_n \setminus \{q_1, q_2, \dots, q_k\} \rightarrow \mathbf{R}^3$ es la integral vectorial

$$X(z) = \operatorname{Re} \int_{z^*}^z ((1 - g^2), i(1 + g^2), 2g)w,$$

y z^* es un punto fijado de $M_n \setminus \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$. Aquí, Re representa la parte real de la integral. Como consecuencia de tales resultados, R. Ossermann pudo probar que el plano es la única superficie en U^* que posee un único final, y que el catenoide es la única superficie en U^* de género cero con dos finales.

El segundo trabajo que queremos citar, fue el realizado por Jorge y Meeks [11] en 1982, en el cuál, entre otras cosas, probaban que no existen superficies de género cero en U^* con un número de finales igual a tres, cuatro o cinco. Además de eso, ellos pudieron caracterizar geoméricamente los finales de una superficie mínima que pertenece al conjunto U^* . Un final arbitrario de una superficie S en U^* sería asintótico a un final de un catenoide o sería asintótico a un plano. En el primer caso, el **final se llama de tipo catenoide**, y en el otro caso, el **fin es de tipo plano**. En cuanto al tercer trabajo, realizado en la misma época, fue áquel en donde R. Schoen [16] demostró que la única superficie en U^* con dos finales es el catenoide.

Existía por lo tanto al comienzo de 1982 una fuerte impresión, en buena parte de personas que trabajaban en el tema de superficies mínimas, que las únicas superficies en U^* serían el plano y el catenoide. Este sentimiento se veía reforzado, ciertamente, por la manera en como se oponían como obstrucciones a la existencia de ejemplos las características contradictorias: topología de género mayor que cero y curvatura media igual a cero (una silla perfecta en todos sus puntos). Nos gustaría también citar aquí que por 1980, F. Gackstatter visitó la Universidad de Sao Paulo en Brasil, y en un trabajo conjunto con C. Cheng [1], construyeron ejemplos de superficies mínimas de género uno con un final, superficies éstas que a pesar de nos ser embebidas en \mathbf{R}^3 y por tanto fuera del conjunto U , tenían importancia por la técnica (las funciones elípticas) utilizada en la construcción.

La teoría de las funciones elípticas del plano complejo \mathbf{C} fue uno de los grandes logros de la matemática de los siglos XVIII y XIX. Sus raíces se remontan a Fagnano, Jacobi, y tienen un fuerte desarrollo con Kronecker, Einsestein, culminando con decisivas contribuciones de Weierstarss y Halphen. Saliendo un poco de la espina dorsal que es la comprensión del conjunto U^* , nos permitiremos una breve descripción de lo que es una función elíptica.

Tomamos como punto de partida dos números complejos no nulos λ y μ , tales que al establecer la identificación $\mathbf{C} \equiv \mathbf{R}^2$ y escribir $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ y $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, los vectores $\lambda, \mu \in \mathbf{R}^2$ sean linealmente independientes. Definimos el conjunto

$$L = L(\lambda, \mu) = \{m\lambda + n\mu; m, n \in \mathbf{Z}\}.$$

El conjunto L se dice un reticulado en \mathbf{C} , generado por λ y μ (fig. 17). Introduciendo en el plano complejo \mathbf{C} la relación de equivalencia $z \sim z'$ si y sólo si $z - z' \in L$, podemos considerar el conjunto cociente \mathbf{C}/L y la proyección

canónica $\pi : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}/L$, $\pi(z) = [z]$, donde $[z]$ es la clase de equivalencia definida por z . El conjunto cociente \mathbf{C}/L tiene la estructura topológica de un toro. Para ver esto, consideremos un paralelogramo Λ en el plano complejo \mathbf{C} que sea un dominio fundamental para π . Es decir, si $z \neq z'$ y $z, z' \in \Lambda$, entonces z no es equivalente a z' . Además de esto, para todo $z' \in \mathbf{C}$, existe un único $z \in \Lambda$ tal que $z \sim z'$, o sea, $\pi(z) = \pi(z')$. El toro \mathbf{C}/L puede entonces ser visualizado como el resultado de la identificación de las aristas opuestas del paralelogramo Λ . En este punto, para convencerse de que \mathbf{C}/L es un toro, el lector debe coger una tira de papel con la forma de un paralelogramo y pegar las aristas opuestas. El resultado es una superficie cerrada, compacta, topológicamente un toro. La estructura holomorfa del plano complejo \mathbf{C} se transfiere, a través de π , al toro \mathbf{C}/L , que se convierte así en una superficie de Riemann compacta de género uno, y hereda la holomorfía de \mathbf{C} . De donde se ve que tiene sentido hablar de funciones y diferenciales holomorfas y meromorfas, cálculo de residuos, etc.

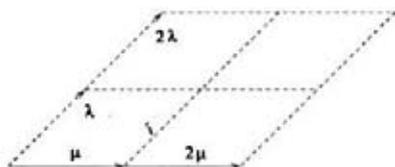


FIGURA 17 (a)

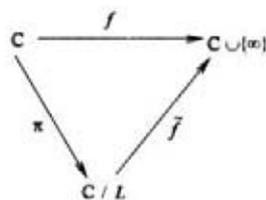


FIGURA 17 (b)

En cuanto a la equivalencia de estos toros, tenemos un teorema de clasificación de las estructuras complejas de género uno, muy importante y que está basado en el subconjunto de números FM :

$$FM = \left\{ \sigma = x + iy \in \mathbf{C}; x^2 + y^2 \geq 1, |x| \leq \frac{1}{2} \right\},$$

llamado figura modular.

Teorema 2: Sea M una superficie de Riemann compacta de género uno. Entonces existe $\sigma \in FM$, tal que $M \cong \mathbf{C}/L(1, \sigma)$. Además, si $\mathbf{C}/L(1, \sigma)$ y $\mathbf{C}/L(1, \sigma')$ son superficies de Riemann cuyas estructuras complejas son equivalentes, entonces $\sigma, \sigma' \in \partial FM$.

Nótese que módulo equivalencia de estructuras complejas tenemos solo una superficie de Riemann de género cero (la esfera de Riemann), mientras que en el caso de estructuras complejas de género uno tenemos una colección de infinitos toros distintos.

Pero vamos a las funciones elípticas. Dado un retículo L , una función meromorfa $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ es elíptica si para todo $\omega \in L$, y $z \in \mathbf{C}$,

$f(z + \Omega) = f(z)$. Esta última propiedad permite que la función f pase al cociente y pueda ser definida en \mathbb{C}/L . Véase el diagrama de la fig. 18. Es decir, toda función elíptica en \mathbb{C} , con respecto al reticulado L es una función meromorfa en el toro \mathbb{C}/L . La más importante función elíptica relativa a un reticulado L es la función \mathcal{P} de Weierstrass, la cuál la podemos definir como una suma infinita:

$$\mathcal{P}(z) = \sum_{\Omega \in L \setminus \{0\}} \left[\frac{1}{(z - \Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2} \right].$$

Usaremos la misma letra \mathcal{P} para representar el paso de la función \mathcal{P} al cociente \mathbb{C}/L . Por lo tanto, \mathcal{P} es una función meromorfa en el toro \mathbb{C}/L . La función elíptica de Weierstrass \mathcal{P} junto con su derivada \mathcal{P}' son suficientes para generar, mediante expresiones racionales, cualquier función elíptica.

LA SUPERFICIE DE COSTA

En nuestra tesis de doctorado en el IMPA, bajo la dirección del Prof. Manoel Perdigão do Carmo, y con el apoyo del Prof. Karl Otto Sorkin, quien tuvimos fructíferas discusiones sobre funciones elípticas, concebimos la posibilidad de describir una superficie mínima propiamente embebida en \mathbb{R}^3 , y de curvatura total finita. Esto es, una superficie en el conjunto U^* . Como hilo conductor para nuestro intento, consideraremos, por una parte, los resultados ya citados de Jorge y Meeks, los cuáles apuntaban para la conjetura de que las únicas superficies en U^* de género cero, debían ser el plano y el catenoide. Más tarde, en 1991, esta conjetura fue demostrada ser cierta por López y Ros [12] en un bello teorema. Por otro lado, había el resultado, también ya citado, probado por R. Schoen, de que toda superficie en U^* de género mayor o igual a uno, si existiera, debería poseer más de dos finales. Por lo tanto, la estructura topológica más simple para una nueva superficie en el conjunto U^* , que merecía ser examinada era la del toro menos tres puntos. Desde el punto de vista de la topología, no es difícil concebir una superficie en \mathbb{R}^3 , propiamente embebida, completa, y con curvatura gaussiana $K \leq 0$. Entretanto, para alcanzar la condición más fina, de ser mínima, sería necesario que en cualquier punto la superficie se presentase como una silla perfecta. El punto importante que nos permitió llegar al primer modelo fue concebir una especie de equilibrio que deberían satisfacer los tres finales de tal superficie. Imaginamos dos finales expansivos a semejanza del catenoide, y un tercer final plano, entre los dos, a semejanza de un ala de un sombrero. Ahora bien, en esta concepción, va algo de lo onírico y de la naturaleza lúdica de la disciplina matemática, del juego permanente, de entrada en laberintos donde buscar una salida, teniendo muchas veces que volver cíclicamente sobre muchos lugares que ya recorrimos en busca de una indicación reveladora de la dirección adecuada. Cuando buscamos establecer los trazos intuitivos de la motivación de nuestra concepción del modelo geométrico para tal superficie, una de las experiencias que nos marcó, fue que asistimos a la exhibición de un film de escuela de samba en

una pantalla de un cine de Rio de Janeiro, nos impresionó fuertemente el colorido y la geometría singular de una especie de sombrero extraño que llevaba un sambista. Esta especie de señal dentro del laberinto que indicaba una salida, el rumbo cierto, puede ser referenciada a esta imagen. Y pensamos, ¿por qué no? Hasta aquel momento, estábamos siempre insistiendo en construir una superficie mínima de género uno, con tres finales, cada uno de ellos imitando finales de tipo catenoide. Ahora, esta imagen del sombrero, sugiriendo la posibilidad de un fin plano (asintótico a un plano) intermediando dos finales de tipo catenoide, daba un equilibrio armónico al modelo, capaz de hacerlo posible. Estas imágenes las pudimos traducir en ecuaciones para la superficie.

Como punto de partida, para la construcción de esta nueva superficie, consideramos el retículo $L(1, i) = \{m + in \in \mathbf{C}; m, n \in \mathbf{Z}\}$, la proyección canónica $\pi : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C} \setminus L(1, i)$ y la superficie de Riemann compacta $\mathbf{C} \setminus L(1, i)$, la cuál es la más simple y simétrica estructura compleja de género uno. Sobre la superficie de Riemann no compacta M obtenida retirando de $\mathbf{C} \setminus L(1, i)$ los puntos $\pi(0)$, $\pi(\frac{1}{2})$ y $\pi(\frac{i}{2})$ definimos las ecuaciones de la superficie:

$$\omega = \mathcal{P}(z)dz, \quad g = \frac{\lambda}{\mathcal{P}'(z)}, \quad \lambda > 0, \quad (3)$$

donde $\mathcal{P}(z)$ es la \mathcal{P} -función de Weierstrass. El par (g, ω) es la representación de Weierstrass-Enneper de la superficie, donde g y ω son, respectivamente, una función meromorfa y una 1-forma diferencial analítica sobre la superficie de Riemann M . Nótese que M es una superficie de Riemann de género uno y con tres finales. La superficie de Costa se obtiene como la imagen en \mathbf{R}^3 de la función $X : M \rightarrow \mathbf{R}^3$:

$$X(z) = \operatorname{Re} \int_{[z^*]}^{[z]} ((1 - g^2)\omega, i(1 + g^2)\omega, 2g\omega),$$

donde $[z^*]$ es un punto fijado en M . Recordemos que $[z] = \{z' \in \mathbf{C}; z - z' \in L(1, i)\}$. Es decir, $[z] = \pi(z) \in \mathbf{C} \setminus L(1, i)$. Evidentemente, la existencia de la superficie de Costa está condicionada al hecho de que la función $X : M \rightarrow \mathbf{R}^3$ esté bien definida. Por lo tanto, los valores numéricos de las integrales que aparecen en la definición de $X(z)$ no pueden depender de la curva continua en M uniendo $[z^*]$ a $[z]$. Este es un hecho generalmente difícil de verificar, pues envuelve la anulación de la parte real de tres integrales a lo largo de todas las curvas continuas y cerradas de M . Es por esta razón que se introduce un parámetro real $\lambda > 0$, en las ecuaciones (3) que definen la superficie. Lo sorprendente es que $\lambda = \sqrt{8\pi} \mathcal{P}(\frac{1}{2})$ sea suficiente para que

$$\int_{\Psi} ((1 - g^2)\omega, i(1 + g^2)\omega, 2g\omega) = 0$$

para todo camino Ψ en M continuo y cerrado.

En diciembre de 1982 presentamos nuestras ecuaciones a la comisión de examen de tesis de doctorado. Lo que ya habíamos probado en aquel momento era que tales ecuaciones representaban una superficie mínima a la cuál le faltaba apenas la propiedad de ser embebida en \mathbf{R}^3 para inscribirla en el conjunto U^* . En verdad, lo que teníamos probado para entonces, y esto se deducía de un examen muy complejo de las ecuaciones, era que fuera de una bola compacta de radio $r > 0$, $B_r(0) = \{X \in \mathbf{R}^3, |X| \leq r\}$, la superficie era embebida. Quedaba por tanto la cuestión de decidir sobre el embebimiento de la superficie dentro de una bola $B_r(0) \subset \mathbf{R}^3$.

En la ocasión, nuestra intuición de que esas ecuaciones representaban una superficie embebida, salió reforzada por el entusiasmo de alguno de los miembros de la comisión de tesis, que compartían la misma expectativa sobre la posibilidad de que esas ecuaciones representaran una nueva superficie mínima completa y embebida en \mathbf{R}^3 de topología finita, después de cerca de 196 años del descubrimiento del helicoides y del catenoide por Meusnier y Euler. Entre los miembros de la comisión estaba Luquésio P. Jorge, matemático brasileño, ya citado [11]. Jorge decía estar convencido al 95% del embebimiento global de la superficie. Quedaba por tanto apenas un 5% para poder inscribir el ejemplo en el conjunto U^* . Pero un 5% en matemáticas es una distancia oceánica. Durante la comida de confraternización que siguió, aún en la mesa, continuamos discutiendo la posibilidad del embebimiento de la superficie, y Jorge garabateó un dibujo de aquello que él esperaba fuese la superficie en cuestión (fig. 18).



FIGURA 18

Para apreciar mejor el dibujo de Jorge, recordemos que la única propiedad que se necesitaba probar para incluir la superficie en el conjunto U^* era que el núcleo de la superficie (una parte de la superficie contenida en una bola compacta $B_r(0) = \{X \in \mathbf{R}^3; |X| \leq 1\}$) era embebida. El dibujo representa solo este núcleo. Ahora bien, el problema se transformó en una cuestión compacta, y por lo tanto, tratable por el computador, instrumento muy eficiente en el abordaje de problemas compactos, ligados a lo finito, donde se puede discretizar, dividir en rodajas, y examinar cada parte.

En 1985, D. Hoffman y W. Meeks [8] produjeron la primera imagen computacional del núcleo de la superficie de Costa, imagen muy próxima al dibujo libre de Jorge hecho en el día de la defensa de la tesis en diciembre de 1982. Vea la figura 19 y compare con la figura 18.

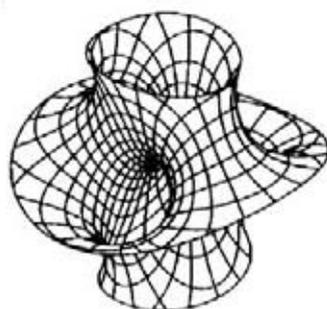


FIGURA 19

matemática del embebimiento del núcleo de la superficie. Ellos consiguieron probar que una región fundamental para el grupo de simetrías, correspondiente a una octava parte de la superficie, era embebida, pues se expresaba como un gráfico sobre un plano de \mathbf{R}^3 . En vista de las simetrías, esta octava parte generaba toda la superficie. Por lo tanto, la superficie era embebida. Tal superficie se probó que era un miembro de una familia infinita de superficies en el conjunto U^* . Hoffman y Meeks [10], generalizando las ecuaciones de la superficie de Costa, pudieron describir para cada género $\gamma \geq 2$ una superficie en U^* , con geometría y simetrías similares al ejemplo original de género uno.

Por otro lado, en 1991, conseguimos demostrar que la superficie de Costa era un miembro singular de una familia uni-paramétrica de superficies en el conjunto U^* con la topología de un toro menos tres puntos. Para apreciar este resultado, consideremos para cada $y \geq 1$, el retículo:

$$L(y) = L(1, iy) = \{m + niy \in \mathbf{C}; m, n \in \mathbf{Z}\},$$

generado por los números complejos 1 e iy . Tales retículos proporcionan una familia uni-paramétrica de superficies de Riemann de género uno (toros), $T(y)$, con estructuras complejas distintas, obtenidas por la proyección cociente $\pi : \mathbf{C} \rightarrow T(y) = \mathbf{C} \setminus L(y)$. Sean los puntos $p_1 = \pi(0)$, $p_2 = \pi(\frac{1}{2})$ y $p_3 = \pi(\frac{iy}{2})$, y las superficies de Riemann de género uno y tres finales $M(y) = T(y) \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$. En [5] conseguimos probar que, para cada $y \geq 1$, existe una superficie $S(y) \in U^*$ con la misma estructura compleja (y por lo tanto, topológica) equivalente a $M(y)$. Para todo $y > 1$, $S(y)$ posee tres finales de tipo catenoide, y $S(1)$ es precisamente la superficie de Costa. Las superficies $S(y)$, $y > 1$, pueden describirse como una deformación de la superficie de Costa $S(1)$, y añaden infinitas nuevas superficies distintas a U^* . Además, probamos en el mismo artículo que $S(y)$, $y \geq 1$, son todas las superficies en U^* que poseen la topología de un toro menos tres puntos.

Sobre el problema de la descripción completa de estas "formas perfectas" habitantes del universo U^* , es ciertamente un problema difícil, para ser relegado al nuevo milenio. ¿Cuánto de este milenio será consumido para que un día se llegue a colocar el punto final a esta descripción? Y, ¿será esto posible?

En esta imagen computacional, la simetría ya buscada originalmente en las alas del sombrero de la escuela de samba, se mostró como la conductora para una más amplia variedad de simetrías. En términos de simetría, tal superficie posee tantas simetrías como las de un cubo. Un cubo puede ser dividido en ocho partes, de modo que cada una de esas partes genera todo el cubo por movimientos rígidos (reflexiones, traslaciones y rotaciones de \mathbf{R}^3). La existencia de este grupo de simetrías fue crucial para que Hoffman y Meeks [9] encontrasen una demostración

Ciertamente, es un trabajo absolutamente profundo, y, parafraseando a Darboux, necesitará técnicas nuevas, las cuáles de momento no parecen existir. El desarrollo de estas técnicas descansa ciertamente en las relaciones fundamentales entre la geometría y la topología. En cuanto a la utilidad que pudieran tener estas superficies para la vida cotidiana y aplicaciones en otras áreas, es un asunto de previsión difícil. Lo que encontramos son ejemplos esporádicos, como la molécula de ADN representada como una doble hélice, y casos como el trabajo de Schoen y Yau [18] que, usando técnicas basadas en la teoría de superficies mínimas pudieran confirmar la conjetura de masa positiva en la teoría de la relatividad.

Pero de modo substancial, la curiosidad que mueve al geómetra a traer a la luz formas perfectas que conjetura para el mundo, tiene que ver más con el desafío intelectual inherente al proceso, la plasticidad de tales formas, y las emociones que ellas son capaces de transmitir. Entretanto, la esperanza es que las superficies mínimas puedan servir para modelar en el futuro fenómenos en la matemática y en otras ciencias. Véase el ejemplo de la elipse, de la parábola, formas antiguas estudiadas por varias civilizaciones, destacándose los griegos. Sus descripciones anticiparon, en muchos siglos, su uso como modelos de las órbitas de los planetas en el sistema solar, y en las curvas descritas por proyectiles lanzados bajo el efecto de la gravedad terrestre.

Bibliografía

- [1] CHEN, C. C., GACKTATTER, F.: "Elliptische und hyperelliptische funktionen und vollständige minimalflächen von Enneperschen typ.", *Math. Ann.*, **259** (1982), 359-369.
- [2] COSTA, C. J.: "Imersões mínimas completas em \mathbf{R}^3 de gênero um e curvatura total finita. Ph. D. thesis", IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, 1982.
- [3] COSTA, C. J.: "Example of a complete minimal immersion in \mathbf{R}^3 of genus one and three embedded ends", *Bol. Soc. Bras. Mat.*, **259 15** (1984), 47-54.
- [4] COSTA, C. J.: "Uniqueness of minimal surfaces embedded in \mathbf{R}^3 with total curvature 12π ", *J. Diff. Geom.*, **30** (1989), 597-618.
- [5] COSTA, C. J.: "Classification of complete minimal surfaces in \mathbf{R}^3 with total curvature 12π ", *Inventiones Mathematicae*, **105** (1991), 273-303.
- [6] DIERKES, U., HILDEBRANT, S., KÜSTER, A., WOHLRAB, O.: "Minimal Surfaces I, II.", *Springer-Verlag*, A series of comprehensive studies in mathematics, 295, 1992.
- [7] HILDEBRANT, S., TROMBA, A.: *Mathématiques et formes optimales. Pour la Science* (1986).
- [8] HOFFMAN, D.: "The computer aided discovery of new embedded minimal surfaces", *Mathematical Intelligencer*, **9** (1987), 8-21.
- [9] HOFFMAN, D., MEEKS, W.: "A complete embedded minimal surface in \mathbf{R}^3 with genus one and three ends", *J. Diff. Geom.*, **21** (1985), 109-127.
- [10] HOFFMAN, D., MEEKS, W.: "Properly embedded minimal surfaces of finite topology", *Annals of Math.*, (2) **131** (1990), 1-34.
- [11] JORGE, L. P., MEEKS, W.: "The topology of complete minimal surfaces of finite total curvature", *Topology*, **22** (1983), 203-221.
- [12] LÓPEZ, F. J., ROS, A.: "On embedded complete minimal surfaces of genus zero", *J. Diff. Geom.*, **33** (1991), 293-300.

- [13] OSSERMANN, R.: "A proof of the regularity everywhere of the classical solution to Plateau's problem", *Annals of Math.*, (2) **91** (1970), 550-569.
- [14] OSSERMANN, R.: "A survey of minimal surfaces", Van Nostrand, New York, 1969.
- [15] RIEMANN, B.: "Gesammelte Mathematische Werk", B.G. Teubner, Leipzig, 1876 (1. Auflage), 1892 (2. Auflage) und Nachträge, 1902.
- [16] SCHOEN, R.: "Uniqueness, symmetry and embedded minimal surfaces", *J. Diff. Geom.*, **18** (1983), 791-809.
- [17] SCHOEN, R., YAU, S. T.: "On the proof of positive mass conjecture in general relativity", *Communications in Mathematical Physics*, **65** (1979), 45-76.
- [18] SCHWARZ, H. A.: "Gesammelte Mathematische Abhandlungen", Band I. Springer, Berlin, 1890.
- [19] SPRINGER, G.: "Introduction to Riemann surfaces", Addison-Wesley, Reading, Mass. 1979.

Celso José da Costa.
Departamento de Geometria. Instituto de Matematica.
Universidade Federal Fluminense.
24020-140 Niteroi. RJ Brasil

Acerca de la Portada: la superficie de Costa

por

Marisa Fernández

La superficie de la portada fue definida por C. Costa en 1984 en su trabajo publicado en "Bol. Soc. Brasil Math." 15, págs. 47-54. Como nos explicó su autor, se trata de una superficie minimal con un final plano y que contiene dos líneas rectas, aunque no se aprecian en la figura de la portada pero sí en otras representaciones.

Las ecuaciones que la definen en términos de la función zeta de Weierstrass son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 x(u, v) &= \\
 & (1/2) \operatorname{Re}[-\operatorname{WeierstrassZeta}[u + I v, \{189.07272, 0\}] \\
 & + 3.14159 u + 0.35889 \\
 & + 0.228473 (\operatorname{WeierstrassZeta}[u + I v - 1/2, \{189.07272, 0\}] \\
 & - \operatorname{WeierstrassZeta}[u + I v - I/2, \{189.07272, 0\}])] \\
 \\
 y(u, v) &= \\
 & (1/2) \operatorname{Re}[-I \operatorname{WeierstrassZeta}[u + I v, \{189.07272, 0\}] \\
 & + 3.14159 v + 0.35889 \\
 & - 0.228473 (I \operatorname{WeierstrassZeta}[u + I v - 1/2, \{189.07272, 0\}] \\
 & - I \operatorname{WeierstrassZeta}[u + I v - I/2, \{189.07272, 0\}])] \\
 \\
 z(u, v) &= \\
 & 0.626657 \operatorname{Log}[\operatorname{Abs}[(\operatorname{WeierstrassP}[u + I v, \{189.07272, 0\}] \\
 & - 6.87519)/(\operatorname{WeierstrassP}[u + I v, \{189.07272, 0\}] + 6.87519)]]
 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones, determinadas por A. Gray, son las que permiten realizar con rapidez la representación gráfica de la superficie de Costa utilizando la versión 3.0 o posteriores del programa Mathematica. (Para los detalles de esas ecuaciones se puede consultar la segunda edición del libro de A. Gray titulado "Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica" publicado en 1998 por CRC Press LLC).

M. Fernández, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias,
 Universidad del País Vasco, Apartado 644, 48080 Bilbao
 e-mail: mtpferol@lg.ehu.es