

Da aritmética á álgebra: procesos de estabilización

Antón Labraña

Departamento de Didáctica das Ciencias Experimentais – USC

*“Non sei se como consecuencia das súas limitacións ou como mostra da súa grandeza, o pensamento humano semella estar constituído por unha sutil mestura do **formal** e do **intuitivo**, do **deductivo** e o **inductivo**, do **algorítmico** e o **estratéxico**, de **rigor** e **imaxinación**,... de **información** e **descubrimento**.*

*Os procesos de ensino-aprendizaxe son, en consecuencia, moi complexos: o **formal**, **deductivo**, **algorítmico** e **rigoroso** é máis fácil de representar ós ollos do experto, e quizais por iso moitos educadores centran os seus esforzos na tarefa de **informar**.*

*Pero tamén é posible abrir camiños para **o intuitivo**, **o inductivo**, **o estratéxico** e **o imaxinativo**, e quizais percorréndoo o educando poda sentir a emoción do **descubrimento**.”*

Xesús Balteiro (A escola imaxinaria)

PRESENTACIÓN:

A actividade que se describe a continuación, experimentada en 3º da ESO, pretende, xa non soamente mostrar e analizar un proceso probabilístico que conduce á súa estabilización, se non *construír un método*, simple e eficaz, *de previsión de resultados*.

Os requisitos técnicos para poder realizala son sinxelos: calcular porcentaxes¹ e resolver sistemas 2x2 de ecuacións de primeiro grao.

Dende una fase aritmética que poderíamos cualificar como empírica ou experimental, na que se traballa con datos numéricos concretos e a partir deles se obteñen novos datos que á súa vez son utilizados para novos cálculos, intentaremos pasar a unha fase teórica na que se constrúe un modelo alxébrico que “explica” a problemática anterior e resolve eficazmente novas situacións.

¹ Por unha cuestión de axilidade sería conveniente que os alumnos tivesen xa conciencia de que unha porcentaxe cáculase tamén multiplicando a cantidade polo “tanto por un”.

PROCESOS QUE SE ESTABILIZAN

Un tipo de situacións que evolucionan cara a estados estables caracterízase porque as probabilidades permanecen constantes ó longo do proceso. Delas tense ocupado o matemático ruso Markov, ideando unha técnica matemática que se usa como modelo en grande variedade de procesos nas ciencias sociais, biolóxicas e físicas. (Grossman, 1988).

Non imos traballar, alomenos non inicialmente, coa idea explícita de probabilidade, deixándoa suxacer no problema tras as porcentaxes.

Conceptualmente debéra comprenderse que as porcentaxes son cálculos hipotéticos: sobre 100 elementos; e non ten por que haber precisamente 100.

Os propios cálculos levarannos ós números decimais, que por tratarse de persoas deberemos interpretar como resultados aproximados².

¿QUÉDASE O GRUPO SEN XENTE?

Presentamos a situación:

No instituto organizáronse catro grupos de 30 alumnos cada un para a realización de actividades extraescolares.

Ó chegar o terceiro trimestre os estudantes comezan a faltar a elas con certa frecuencia, ben pola presión dos temarios e exames, que esixen máis horas de estudo ou asistir a clases de reforzo, ben polo cansazo,

Tense estimado que a partir desa data un 80% dos que asisten un día á súa actividade, asisten tamén ó día seguinte, mentres que soamente un 40% dos que faltaron un día asisten o día seguinte.

Ó comezar o trimestre no grupo A asisten 25 alumnos, 21 no B, 28 no C, e 18 no D.

² A actividade pode realizarse igualmente redondeando/truncando que sen redondear/truncar. Se a presenza dos decimais referidos a personas non obstaculiza a comprensión, son partidario de mantelos: por exactitude e polo Euro, que nos vai a envolver nos números decimais por moito tempo, o que recomenda a súa presenza no ámbito escolar. Neste caso resulta de interés o uso “intelixente” da calculadora.

¿Como cres que estarán os grupos despois dunhas semanas?

¿Cantos asistirán e cantos non, previsiblemente, a cada actividade o quinto día?.

Organiza os datos en táboas.

O estudio de primeiro grupo resulta xa, enormemente persuasivo:

GRUPO A

Día	Asisten	Faltan
1º	25	$30 - 25 = 5$
2º	$0'8 \cdot 25 + 0'4 \cdot 5 = 22$	$30 - 22 = 8$
3º	$0'8 \cdot 22 + 0'4 \cdot 8 = 20'8$	$30 - 20'8 = 9'2$
4º	$0'8 \cdot 20'8 + 0'4 \cdot 9'2 = 20'32$	$30 - 20'32 = 9'68$
5º	$0'8 \cdot 20'32 + 0'4 \cdot 9'68 = 20'128$	$30 - 20'128 = 9'872$

Pedimos de novo que conxecturen sobre o que está a pasar aquí, ata chegar a unha formulación deste tipo:

"Isto parece que se queda en que veñen 20 e faltan 10, pois do terceiro ó quinto día a penas cambia"

Preséntase unha boa ocasión para indicar cómo utilizar a calculadora³ que, de non telo feito aínda, empregaríase para os cálculos nos restantes casos do problema.

O grupo B, inicialmente máis preocupante dá lugar ó mesmo resultado: 20'025 e 9'975 o 5º día; incluso máis cerca dese 20 e 10 que semella ser o destino final⁴.

³ Con calculadora:

Día	Asisten	Faltan
1º	25	$30 [-] 25 = 5$
2º	$0.8 [x] 25 [M+] 0.4 [x] 5 [M+] [RM] \rightarrow 22$	$[\pm] \rightarrow - 22 [+] 30 [=] \rightarrow 8$
3º	$0.8 [x] 22 [M+] 0.4 [x] 8 [M+] [RM] \rightarrow 20.8$	$[\pm] \rightarrow - 20.8 [+] 30 [=] \rightarrow 9.2$
		

Esta “linguaxe máquina” trata de recrear visualmente a manipulación da calculadora: nos corchetes indícanse as teclas de operación. A frecha indica que o número que ven a continuación non o prememos, senón que é un resultado proporcionado pola máquina.

⁴ Unha boa estratexia docente sería que todos/as fixesen o grupo A, e logo distribuír os outros grupos por filas. Así afórrase tempo e evítase o tedio que puidese producir tanto cálculo.

Do C xa o esperan e, efectivamente, obteñen: $20'21$ e $9'79$.

Preguntamos se agora estase máis lonxe ou máis cerca de 20 e 10, ó que responden case de inmediato, despois de comprobar os decimais: "Un pouco máis lonxe".

Pídese agora que conxecturen sobre o grupo D, que está por debaixo de 20, pero non unicamente sobre o resultado, senón como se chega a el: "subindo pouco a pouco"; "subindo rápido, pois xa estaba moi cerca"; ...

HEURÍSTICOS

Emprego a terminoloxía de Pólya (1954) e non a da LOXSE (procedementos e actitudes), pois esta última paréceme bastante farrapa e desafortunada. Co termo "heurísticos" pretende designar aqueles recursos que son útiles para o descubrimento e para a invención: diante dun problema novidoso a información coñecida non xera por si soa nova información, é necesario contrastala cos novos datos establecendo relacións fructíferas; e **isto tamén se pode aprender a facelo**, practicándoo.

Subliñarei algúns dos heurísticos máis comúns na construción do coñecemento matemático (ó mellor tamén noutros ámbitos), non sempre coincidentes cos que Pólya sinalara, pero que entendo son agora moi oportunos:

A comprobación:

¿Que sucedería nos días seguintes?.... Conxecturamos: "O mesmo, achegámonos un pouquiño máis"; e comprobámolo coa calculadora, reafirmando non soamente a conclusión senón tamén o proceso.

Análise de situación extremas:

¿Que sucedería se nun dos grupos o primeiro día asistiran todos á actividade?

Dubídase, arguméntase e avalíase para atoparse co mesmo: $20'256$ y $9'744$ (lixeramente peor, loxicamente).

¿Ocorreseche unha situación inicial onde isto poida resultar distinto?

Pénsase na recíproca: "¡que no veña ningún o primeiro día!" (sorrisos). Pero..., tamén: $19'488$ y $10'512$ (a peor, por ser a máis distante inicialmente).

Buscando a conclusión:

A conclusión é xa inevitable: ¡A evolución non depende da situación inicial! Ou, nas súas palabras: “sempre vai pasar o mesmo”.

Discriminando o substantivo do circunstancial:

Estamos nun momento crucial e podemos intentar un salto cualitativo: se os valores iniciais son puramente circunstanciais, ¿que é o substantivo?. En palabras máis coloquiais:

¿De que depende, entón? ... “Terá que ser das porcentaxes; non hai outra cousa”.

A curiosidade:

¿Que sucedería se a situación inicial fose precisamente 20 e 10?

A pregunta é un desafío á intuición... , en todo caso faise a táboa e non se precisan comentarios:

2º	$0'8 \cdot 20 + 0'4 \cdot 10 = 20$	$30 - 20 = 10$
3º	$0'8 \cdot 20 + 0'4 \cdot 10 = 20$	$30 - 20 = 10$

"Que non se move: 20 e 10, 20 e 10, 20 e 10,"

ISTO PÓDESE PREVER

O método:

¿Como poderías coñecer previamente a situación cara a cal se evoluciona?

A anterior resposta dá unha pista clara, aínda que quizais non haberá unha reacción inmediata de cara a planear ecuacións. Aquí vanse notar os hábitos adquiridos en prácticas anteriores⁵, pero en calquera caso o profesor/a proporcionará a explicación específica e pertinente dirixida a construír o sinxelo sistema que proporciona a solución:

$x \rightarrow$ asisten $y \rightarrow$ faltan

Cambiando na última táboa 20 por x e 10 por y , xurde naturalmente:

⁵ Refírome ó hábito de, cada vez que hai un valor descoñecido, asignarlle un símbolo (x , y ,) escribindo, tal como figuran aquí, que símbolo se asigna a cada cousa. Un pequeno protocolo que acaba por resultar moi beneficioso.

$$0'8x + 0'4y = x$$

$$30 - x = y$$

A xeralización:

Agora temos unha moi boa ocasión para que os máis capaces axuden ós outros.

- 1.- Poñede outras porcentaxes ó problema e vede o que ocorre, confeccionando unha táboa. Logo construíde e resolvede o sistema de ecuacións. ¿Confírmase?
2. – Cambiade o número de persoas dos grupos e estudiade que sucede.

UNHA OPORTUNIDADE DE INVENCIÓN DO CONCEPTO DE MATRIZ

Unha parte dun grupo-clase, que correspondía a un desdobre, estaba formada por oito alumnos de maior rendemento; nela, de vez en cando facíamos actividades coa calculadora gráfica (tamén programable e con cálculo matricial) e ocorréuseme que tiñamos agora unha nova ocasión de explorar un concepto reservado para moito máis adiante, o de matriz, e xustificar de forma natural neste contexto a “caprichosa” definición de multiplicación de matrices.

Na Secundaria, concretamente no Bacharelato, a vantaxe de utilizar matrices reside na posibilidade de automatizar cálculos que afectan a conxuntos de números que se operan simultaneamente, en bloque (Labraña et al., 1995). Para desenvolver esta idea ía necesitar retomar as táboas anteriores e reformulalas de xeito que “os que faltan” se obtivesen directamente, de maneira semellante a como se obteñen “os que asisten”:

Día	Asisten a	Faltan f
1º	25	5
2º	$0'8 \cdot 25 + 0'4 \cdot 5 = 22$	$0'2 \cdot 25 + 0'6 \cdot 5 = 8$
3º	$0'8 \cdot 22 + 0'4 \cdot 8 = 20'8$	$0'2 \cdot 22 + 0'6 \cdot 8 = 9'2$
	...	...

Automatizando as tarefas rutineiras

Como estamos realizando unha e outra vez contas reiterativas: multiplicando 0'8 polos que asisten, 0'4 polos que faltan e sumando, etc., etc., propónse a construción dun programa que nos libere desta rutina e nos dea seguridade nos cálculos.

Acorde ó noso protocolo habitual, primeiro “capturamos” a idea esencial do que pretendemos:

$$0'8 \cdot a + 0'4 \cdot f = a'$$

$$0'2 \cdot a + 0'6 \cdot f = f'$$

e a continuación “redactamos” o programa no léxico propio da máquina, seguindo o manual.

Codificación

A continuación informeilles de que se ideara un código, abreviado, de representar este tipo de procesos, un termo (matriz) para designar o novo obxecto, e que decidira chamarlle tamén “multiplicación” (de matrices) a ese conxunto de operacións realizadas. Reescribimos en linguaxe matricial:

1º	$\begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix}$
2º	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 8 \end{pmatrix}$
3º	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 22 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20'8 \\ 9'2 \end{pmatrix}$
4º	...

Feliciteinos por ter reinventado unha operación tan sofisticada e, como testemuña da súa importancia, indiqueilles que a calculadora tiña precisamente implementado este programa, e puxémonos a traballar con el realizando de forma rápida e fiable múltiples cálculos.

Economizar

Neste novo contexto de traballo dáse unha situación moi parecida á anterior: estamos repetindo unha e outra vez a “matriz” (percíbase o dobre sentido do termo) do problema, ¿non poderíamos automatizar isto?...naturalmente coa potencia. Reescribimos:

1º	$\begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix}$
2º	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 8 \end{pmatrix}$
3º	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix}^2 \times \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20'8 \\ 9'2 \end{pmatrix}$

E comprobamos que tamén está implementada na calculadora. Agora facemos cálculos con potencias moi elevadas, cunha mínima inversión de tempo e cunha máxima fiabilidade. ¡Un novo campo de problemas está agora ó noso alcance!

BIBLIOGRAFÍA

GROSSMAN, S. I. (1988): *Aplicaciones del Álgebra Lineal*. México. Grupo editorial Iberoamericana.

LABRAÑA, A.; PLATA, A.; PEÑA, C.; CRESPO, E.; SEGURA, R. (1995) *Algebra Lineal. Resolución de Sistemas Lineales*. Madrid. Editorial Síntesis.

PÓLYA, G. (1954). *Matemáticas and plausible reasoning*. Volume 2. Princeton University Press. Traducción ó castelán (1966): *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid. Ed. Tecnos.