ALGUNOS MATICES DE ESTRATEGIAS COGNITIVAS-METACOGNITIVAS DURANTE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON ESTUDIANTES DE E.S.O.

Tania C. Rocha S. Gusmao
José A. Cajaraville Pegito
Pedro A. Labraña Barrero

CONSIDERACIONES INICIALES.

Son muchas las dudas que planteamos en torno a la temática metacognición. Entre ellas está la de percibir los matices que, en algunos momentos, diferencian estrategias metacognitivas de las cognitivas.

En esa perspectiva asumimos, de momento[1], las ideas de Flavell de que las estrategias son cognitivas cuando son empleadas para hacer progresar la actividad cognitiva hacia la meta y son metacognitivas cuando su función es supervisar ese progreso (Mateos, 2001; Hegedus, 1998, entre otros).

De forma general, se concibe la metacognición en dos sentidos diferenciados, pero interrelacionados: como producto cognitivo que se refiere al conocimiento que tenemos sobre nuestro propio funcionamiento cognitivo y como proceso cognitivo que se refiere a las actividades de planificación, supervisión y regulación.

Específicamente, para este Congreso, traemos *los problemas de las bolitas*[2], intentando sacar a la luz matices de estrategias (más bien metacognitivas) en las justificaciones orales, dadas por tres estudiantes de 3º de ESO, para “complementar”, o más bien, enriquecer, otros matices no “declarados” en el protocolo escrito (resolución de los referidos problemas). A tiempo, aclaramos que este estudio representa un recorte de la investigación que llevamos a cabo en el programa de doctorado en Didáctica de las Matemáticas del Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales de la

[1] Puede que al paso que profundizamos en el estudio de la temática haya cambio de opinión una vez que el conocimiento no es estático ni inmutable, aún más cuando se trata de representar la subjetividad de comprensión de una temática.

[2] Los problemas de las bolitas forman parte de un conjunto de 15 problemas no-rutinarios que compone nuestra PHM (Prueba de Habilidades Metacognitivas) – protocolo escrito elaborado para evaluar la actividad metacognitiva de los estudiantes –. Entendemos por no-rutinario aquel problema que 1) el estudiante no dispone (bajo nuestras hipótesis) de habilidades estandarizadas para resolverlo; 2) fuerzan al resolutor a tomar decisiones, hacer elecciones y enjuiciamientos sobre si lo que se plantea permite por ejemplo la utilización de modelos conocidos; 3) rompen con los tipos de estrategias habituales, provocando una interrupción momentánea de la conducta y del pensamiento. Es así que la PHM requiere pensamientos y acciones conscientes en el sentido de Carrión y Fernández (2000).

Universidad de Santiago de Compostela, cuyo problema de investigación se centra en el estudio de la influencia de algunas componentes metacognitivas, particularmente las habilidades y estrategias metacognitivas, sobre la comprensión de las matemáticas, en un contexto de resolución de problemas, en la perspectiva de que además de que los propios procesos formativos, de matemáticas en particular y de cualquier materia en general, debieran contribuir al desarrollo de competencias metacognitivas preexistentes.

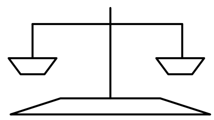
Seguidamente, presentamos los problemas y los argumentos dados a éstos, por tres resolutores: Iasmin, Victor y Ramón. Paralelamente intentaremos hacer nuestro análisis de la situación.

LOS PROBLEMAS DE LAS BOLITAS Y EL CONTEXTO DE ANÁLISIS

Los *niveles de competencia* cognitivas-metacognitivas que hemos establecido atienden al razonamiento manifestado, a las estrategias utilizadas, a los resultados alcanzados, etc. Estos niveles pueden mostrar aparentemente – y en exclusiva – estrategias de razonamiento cognitivo (como de facto lo son), pero percibimos que subyacen procesos propios de estrategias metacognitivas y que pueden simultáneamente caminar y entremezclarse con las cognitivas. Así que concebimos esos procesos como intrínsecamente relacionados.

El Problema de las 3 Bolitas

Tres bolitas son del mismo tamaño, color y forma; dos tienen el mismo "peso" y la otra es más "ligera". Usando una balanza con dos platos y efectuando **una única pesada**, ¿como podemos encontrar la bolita más "ligera"?



La idea esencial en este problema reside en que se puede establecer el "rango" (peso relativo), a través de una relación de orden entre 3 objetos sin necesidad de contrastarlos todos entre si.

Los Protocolos Escritos:

a) Iasmin

Pondo 2 de un lado e una en el otro lado así susecivamente asta que la boliña menos pesada este sola en un lado da balanza. Por esa el lado da balanza que este a boliña va a estar muncho mas alto que cuando, a boliña estubo con outra bola que pesaba mais e estaria mais alto que el otro lado.

Poniendo 2 de un lado y una en el otro lado, así sucesivamente hasta que la bolita menos pesada esté sola en un lado de la balanza. Por eso el lado de la balanza que esté la bolita va a estar mucho más alto que cuando la bolita estuvo con otra bola que pesaba más y estaría más alto que el otro lado.

b) Victor:

pones 1 bolo en cada plato y si son iguales pues es la que sobra es la ligera y si lo ligero esta en un plato se ira para abajo y es esa

Pones 1 bola en cada plato y si son iguales, pues es la que sobra es la ligera y si la ligera esta en un plato se va para abajo y es esa.

c) Ramón:

Pones una bola en cada plato y si son iguales Pues la que sobra es la mas ligera, o sino la que queda mas alta en los platos es la la mas ligera.

Pones una bola en cada plato y si son iguales, pues la que sobra es la más ligera, o sino la que queda más alta en los platos es la más ligera.

La comparación de las tres bolas admite distintas maneras de proceder: por parejas; las tres de una vez (dos frente a una); una a una, por separado, sin respectar las condiciones impuestas, si se decide por estrategias que llevan a varias pesadas.

En el caso de Iasmin, observamos, al principio, que ella no se sujeta a las condiciones impuestas por el problema: *una única pesada*. Ella evalúa como repercuten los distintos elementos (dos bolitas frente a una, valorando, a ojo, el grado de descompensación producido). En este sentido, podemos clasificar su estrategia como 1) "cognitiva" con un *nivel de acción de experimentación ingenua* cuando afirma "Poniendo 2 de un lado... en un lado de la balanza" y 2) "metacognitiva" que puede tener un cierto nivel de *supervisión* cuando certifica que el grado de descompensación de la balanza es indicador de que puede estar en la dirección correcta hacia la meta.

Los protocolos escritos de Victor y Ramón comportan estrategias "cognitivas" con un nivel de acción que permite distribuir o elegir 2 bolas cualesquiera entre 3 y "metacognitivas" cuando realiza la planificación, supervisión y control que permite identificar la estrategia cognitiva de decidir donde se encuentra la bola más ligera. Sin embargo, el nivel "comunicativo" de Ramón muestra un dominio más preciso del lenguaje que Victor. En este momento, se pone en evidencia la necesidad de diferenciar distintos tipos de objetos[3] matemáticos que manejamos (Godino, 2003). Es decir, percibimos que ambos resolutores, desde el punto de vista de sus acciones y procesos se comportan de manera similar, pero con pequeños matices en el manejo de lenguaje.

EL PROTOCOLO ORAL DE IASMIN

Recuerdas como hiciste, Iasmin?

No.. pero me dijeron como se hacía.

Bien... vamos primero a leer tu respuesta. Puedes leerla?

(tiempo de lectura)

Como tiene que ser en una única pesada, puse una de un lado y otra del otro, y si pesaban lo mismo, si estuvieran a la misma altura los platos, es que son las mismas, y si una quedara más alta que la otra, es que la más alta es la más ligera.

Y cómo se encuentra la bola más ligera cuando los platos están equilibrados?

Será la que no está en los platos.

---

[3] Lenguaje, situaciones, acciones, conceptos, propiedades o atributos, argumentaciones.

Con esta respuesta se ve que cambiaste de idea, porque?

Conversando con los compañeros y discutiendo un poco después de la clase, del test, acabé aprendiendo cómo se hace.

Podemos decir que el razonamiento, ahora, utilizado por Iasmin comporta estrategias "cognitivas" en un *nivel de acción de experimentación selectiva de una elección* (una de un lado, una del otro, una que sobra) y estrategias cognitivas-metacognitivas en un *nivel de acción de explicitación de posibles alternativas resultantes de la experimentación* (por ejemplo, si la misma altura,...si más alta que la otra) y *un nivel de acción de deducción inquerida* (si la misma altura ¿qué sabría?) y, dos niveles metacognitivos: uno de *supervisión* y otro de *regulación* cuando se observa el cambio de estrategias entre las respuestas escrita y oral. Además, observamos que, aún habiendo transcurrido dos meses entre el protocolo escrito y el oral, aquel diálogo pos-test entre compañeros surtió un aprendizaje significativo que parece reflejarse en la toma de conciencia, por parte de la resolutora, de las limitaciones impuestas por la tarea al afirmar "tiene que ser en una única pesada", frase destacada, con mucho énfasis, al principio del razonamiento y que no había considerado en el protocolo escrito.

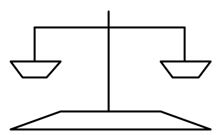
No disponemos del protocolo oral de Victor y Ramón, en relación con ese problema, pues solamente se tuvo en cuenta, en aquel momento, sondear estrategias carentes de un cierto nivel cognitivo-metacognitivo.

Así, pasamos al problema siguiente que es un desdoblamiento del anterior y que fue presentado a los resolutores una semana después de contestar el primero.

El Problema de las 9 bolitas

Fíjate como pensó Rocío la forma de averiguar cual era la bolita más "ligera" efectuando una única pesada:
Cogió dos cualquiera de las bolitas y puso una en cada plato:
a) Si una pesaba menos, esa sería la más ligera;
b) Si pesaban lo mismo, la que quedó sin pesar sería la más ligera.

Ahora tienes **nueve** bolitas semejantes, también una de ellas más ligera que las otras. ¿Como podrías descubrir cuál es, **en dos pesadas**?

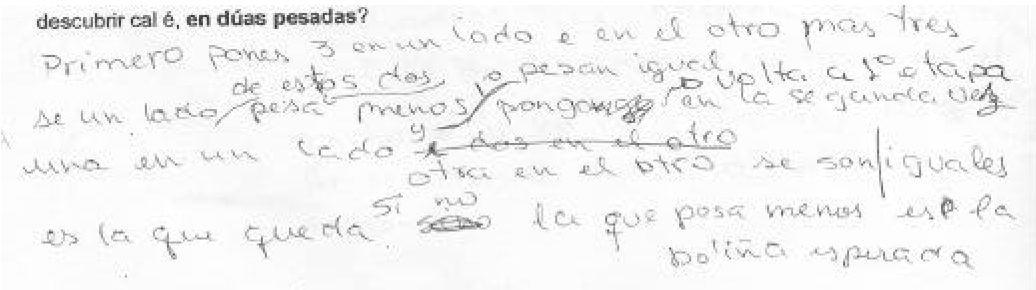


Lo que se pretende, ahora, es observar una estrategia general de exploración frente a una situación nueva: relacionarla con otras ya conocidas (en un mismo contexto); y si la forma de relacionar permitiera situarse en la misma tesitura anterior, garantizaría, entonces, el éxito en la tarea.

Una *reflexión* metacognitiva del problema permitirá usar las estrategias cognitivas pertinentes para reducir el caso de 9 bolas al caso de 3 cuya solución se hace explicita. Se trata de una estrategia generalizable según las potencias sucesivas de 3, en donde el numero de pesadas (n) necesario para discriminar la bola más ligera es constante para cualquiera cantidad de bolas comprendido en el intervalo $[3^{n-1} + 1,\ 3^n]$ (para cualquier $n \geq 1$).

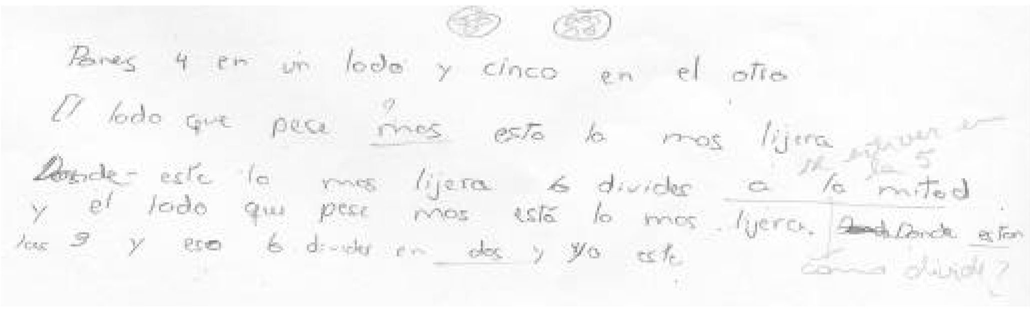
LOS PROTOCOLOS ESCRITOS:

a) Iasmin:


descubrir cal é, en dúas pesadas?
Primero pones 3 en un lado e en el otro mas tres
de estos dos o pesan igual volta a 1ª etapa
se un lado pesa menos pongamos en la segunda vez
una en un lado ~~e dos en el otro~~ y otra en el otro se son iguales
es la que queda si no la que pesa menos es la bolina esperada

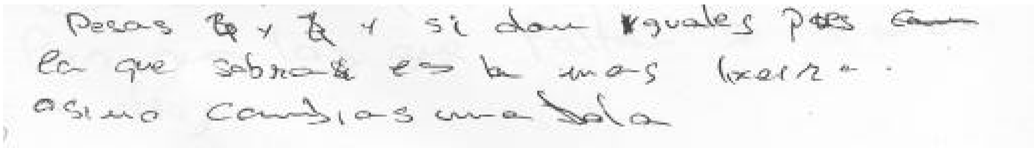
Primero pones 3 en un lado y en el otro más 3. Si un lado de estos dos pesa menos **(o pesan iguales, volta a la 1ª etapa)** ponemos en la segunda vez una en un lado y otra en el otro. Se son iguales es la que queda, si no la que pesa menos es la bolita esperada. **OBS.:** en el momento de entrega del test (PHM) la alumna me ha dicho que lo que escribía "por arriba o con las rectas" (en negrita) era para economizar tiempo y no tener que escribir la misma redacción

b) Victor:


Pones 4 en un lodo y cinco en el otro
El lodo que pese mas esta la mas lijera
Donde este la mas lijera lo divides a la mitad
y el lodo que pese mas esta la mas lijera. Donde estan
los 3 y eso lo divide en dos y ya esta
como dividir?

Pones 4 en un lado y cinco en el otro. El lado que pese más está la más ligera. Donde está la más ligera lo divides a la mitad y el lado que pese más está la más ligera. Donde están las 3 y eso lo divide en dos y ya está.

c) Ramón:


Pesas 4 y 4 y si dan iguales pues la que sobra es la mas ligera. asi no cambias una bola

Pesas 4 y 4 y si dan iguales pues la que sobra es la más ligera. Así no cambias una bola.

El aprendizaje significativo de Iasmin, después del dialogo con sus compañeros y la confirmación de la solución del problema anterior (se trata de la validación institucional de un aprendizaje previo) que ahora se hace explícita, parece reflejarse en ese protocolo. Aunque el problema del dominio de lenguaje nuevamente esté presente, sin embargo subyace una estrategia de generalización, a pesar de no particularizar explícitamente al no hacer mención de la relevancia de la información que se ofrece.

Víctor no puede generalizar, ya que no percibe ninguna conexión con el problema anterior. Esto le conduce al uso de una estrategia "cognitiva" de un nivel de *acción de experimentación ingenua* (no sujeta a las condiciones del problema: dos pesadas). Por otra parte, pasa por un nivel de *experimentaciones selectivas* en función del contexto que en ausencia de supervisión y control adecuados, no puede discriminar el grupo en donde se encuentra la bola más ligera y opta por elegir el que tiene más cantidad de bolas como el que "pesa más" y no como el que contiene la bola más ligera. Estas carencias de estrategias metacognitivas le lleva a proseguir con este criterio selectivo hasta el final del proceso.

Desde un punto de vista "cognitivo", la estrategia que Ramón utiliza está basada en una *adaptación algorítmica* (centrada en la aclaración b), en un intento de establecer relaciones por *imitación ingenua*: tomar 4 bolitas frente a 4, dejando una fuera. Como estrategia "metacognitiva" podemos decir que 1) hay un cierto nivel de supervisión cuando (aún sin considerar las condiciones de la tarea) persigue la búsqueda de la bolita más ligera y 2) un *nivel de reflexión* cuando de la aplicación de la *analogía* hace un uso parcial de la estructura, que no le permite reducir el nuevo problema al ya conocido. Es decir, elude la condición de desequilibrio de la balanza (de la que parece tener conciencia cuando afirma "así no cambias una bola") omitiendo así parte del estudio. Aún con la frase "así no cambias una bola" se puede pensar en una forzada necesidad de equilibrio, que también alude a la necesidad de hacer varias pesadas, sin percibir (o contemplar) las condiciones de la tarea.

LOS PROTOCOLOS ORALES

Iasmin:

Podrías leer el problema y comentarlo?

(momento de lectura)

Más o menos con ese raciocinio, en dos pesadas no [pausa larga]. A ver...pongo 3 bolitas en una y 3 en la otra. Si pesan igual yo hago el mismo sistema con las otras 3 que sobraran. Y si pesan diferentes, hago el mismo sistema con lo que pesa menos. Porque si tiene la bolita que pesa menos sería esta. Así.

Esta cuestión también fue discutida con los compañeros?

Sí.

Percibimos una evolución muy positiva del lenguaje (desde el punto de vista de la precisión) con el que, ahora, Iasmin, formula la generalización de la estrategia, en comparación con el empleado en el protocolo anterior. Ambos protocolos describen básicamente la misma estrategia que podemos considerar eficiente. Pensamos que esta evolución puede estar relacionada con la reflexión derivada del diálogo con sus compañeros y de la evolución de su propio aprendizaje en este contexto (el dialogo consigo mismo).

Víctor:

(momento de lectura)

pones 4 en un lado y 5 en el otro y el lado que pesa más está la más ligera. Donde está la más ligera lo divide a la mitad y el lado que pese más, estará la más ligera.

La mitad, ¿cómo?

Coge 3 y 2. donde están las 3 y eso lo divide en 2 y ya está. 2 y 1.

Y si la más ligera estuviera en el plato de las 2?

Lo divides nuevamente.

Pero estarás usando más de dos pesadas, ¿no?

(pausa)

Crees que con esas dos pesadas descubrirás la bolita más ligera?

No.

Puedes imaginar entonces otra forma de descubrir la más ligera?

No lo sé.

Otra forma de agrupar?

(larga pausa)

Volvamos, entonces, a la que has dicho anteriormente, al principio. Agrupas en 4 y 5. Explícame eso despacito.

Con 5 y 4... como una es más ligera... va pesar más incluso... la que tenga así (hace gestos con la mano)... espera. (pausa)... no se puede saber tampoco así... (larga pausa)... no se puede saber.

¿No?

No, porque si la ligera está donde pones las de 4, va pesar menos pero aún que...aún que la ligera estuviese donde las 5, iba a ser lo mismo...

Y... que más?

No, no se puede.

Su declaración reafirma la confusión de identificar la posición de la bola más ligera dentro del grupo que "pesa más", manteniendo la misma estrategia que descarta la posibilidad de analizar si la bola objetivo puede localizarse en el grupo donde hay menos bolas (los grupos de 4 y 2).

A pesar de reconocer que su estrategia no respecta las limitaciones de la tarea, se pone de manifiesto que no es capaz de vislumbrar estrategias que le permitan reducir el numero de pesadas.

Víctor no es capaz de percibir ninguna conexión entre ambos problemas lo que dificulta la aparición de estrategias alternativas.

Las últimas líneas de la entrevista, muestran como Víctor identifica el grupo que tiene más bolas con el grupo que pesa más, lo que es una conclusión correcta.

Ramón:

(Momento de lectura)

En tu respuestas dijiste, coges 4 y 4 y no hablas de la que sobró.
La que sobre es la que pesa menos.
Vale. Y se esta no es la más ligera? O si la balanza no esté equilibrada?
Cambiarias una a la suerte.
Pero tienes que descubrir en 2 pesadas y si lo haces por la suerte puede que pases de 2 pesadas. Si, por la suerte no descubres en 2 pesadas, que haces entonces?
(larga pausa)
Imagínate, tienes una balanza enfrente y esa cantidad de bolas...
No lo sé. (larga pausa)...pues... pones 3 en un plato y 3 en el otro y se si equilibra...es que no lo sé.
Podrías pensar, un poco más, que ocurriría con esta nueva forma de agrupar?
Pones 3 y 3 y si se equilibran pones 2 y si la queda fuera...si se equilibran la que queda fuera es...y si no se equilibran... pues no lo sé.

La condición de desequilibrio, que Ramón había eludido en el protocolo escrito, es ahora fuente de emergencia de nuevas estrategias cuando es forzado por la entrevistadora: “cambiamos una a la suerte”. En las siguientes fases de la entrevista se observan los bloqueos de Ramón cuando se le hace evidente que no respecta las limitaciones de la tarea. A continuación parece surgir una estrategia generalizadora que vislumbra posibilidades de éxito, pero que no cristaliza en la obtención de la solución dado que ni siquiera es capaz de recuperar la estrategia que usó con éxito cuando resolvió el problema de las 3 bolitas, lo que resulta sorprendente a nivel metacognitivo puesto que esa estrategia está explícita en el enunciado de esta tarea (se refleja en las últimas dos líneas). Tal hecho nos hace reflexionar sobre las consecuencias de un “débil” conocimiento metacognitivo acerca de las capacidades cognitivas de uno mismo.

CONSIDERACIONES FINALES

¿Qué matices nuevos ha aparecido? Por un lado la positiva evolución de Iasmin que ha pasado de exhibir estrategias débiles tanto cognitivas como metacognitivas (en el caso de las 3 bolitas) a mostrar estrategias muy útiles para resolver el problema de las 9 bolitas. Esta evolución parece ser consecuencia del logro de aprendizajes significativos a través de la reflexión del dialogo que mantuvo con sus compañeros y consigo mismo. Por otra parte, las limitaciones metacognitivas observadas, tanto en Víctor como en Ramón al pasar de un problema al otro, pueden tener algunas explicaciones: 1) ser justificadas por un “débil” conocimiento de su propio funcionamiento cognitivo (la metacognición en cuanto contenido cognitivo) que ponen de manifiesto en el momento de hacer uso de una estrategia eficiente para resolver una tarea (el caso de 3 bolas), y no ser capaz de reutilizarlo para el mismo tipo de tarea en otro contexto (el caso de 9 bolas); 2) la incapacidad para utilizar estrategias basadas en analogías, de forma eficiente, combinada con procesos de generalización, que les impiden ejercer el control de problemas análogos a otros que han sido capaces de resolver con eficacia, no percibiendo la relevancia de la información proporcionada en el enunciado, ni siquiera tratar de captar información útil del dialogo que pueden haber mantenido con sus compañeros sobre la tarea.

De manera general, observamos que las diferencias en el dominio del lenguaje para comunicar caracterizan algunos matices que pueden permitirnos discriminar distintos niveles de comprensión relacionados con la representación de los objetos matemáticos.

Las justificaciones escritas y orales que aquí presentamos son sucintas, teniendo en cuenta que el tiempo que nos cedieron para estar con los resolutores fue corto (una media de unos veinte minutos) y que, además, tuvimos que distribuirlo entre las respuestas (de un total de 15 problemas) a aquellas cuestiones que destacamos como carentes de estrategias cognitivas-metacognitivas en el correspondiente protocolo de cada resolutor.

Esta experiencia nos lleva a reconocer la necesidad de considerar el tiempo como factor primordial en nuestro estudio. Es decir, para el futuro será necesario realizar un estudio de casos donde el tiempo no sea obstáculo para desarrollar un dialogo fructífero entre entrevistados y entrevistador(es), con la intención de ver el alumno llegar hacia la meta (tener resuelto los problemas satisfactoriamente).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CARRIÓN, F. & FERNÁNDEZ J. (2000), La metacognición. Texto en Internet extraído del libro: MAYOR, J., SUENGAS, A. & GONZÁLEZ-MARQUÉS, J. (1993). *Estrategias Metacognitivas. Aprender a aprender y aprender a pensar*. Madrid: Síntesis Psicología. [http://www.ual.es/~dalonso/metacognicion.doc].

CHEVALLARD, Y; BOSCH, M. & GASCÓN, J. (1997), *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre Enseñanza y Aprendizaje*. Barcelona. ICE – Horsori Editorial.

FERREIRA, A. (2003), *Metacogniçao e desenvolvimento profissional de professores de matemática: uma experiencia de trabalho colaborativo*. Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas, Sao Paulo: Brasil.

GODINO, J. D. (2003), *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática*. Universidad de Granada. Documento publicado en Internet: [http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/monografiatfs.pdf].

HEGEDUS, S. (1998), *A study of the metacognitive behaviour of mathematics undergraduates in solving problems in the Integral Calculus*. Doctoral Thesis. University of Southanmpton. UK.

LAFORTUNE et al. (2003), *Pour guider la métacognition*. Quebec, Canada: Presses de l´Université du Québec.

MATEOS, Mar (2001), *Metacognición y educación*. Buenos Aires, Argentina: Aique Grupo Editor S.A.

SCHOENFELD, A. H. (1985), *Mathematical problem solving*. London, United Kingdom: Academic Press Inc. (London) Ltd.

SCHOENFELD, A. H. (1992), Learning to think mathematically: Problem-solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grows (Ed.), *Handbook on research on mathematics teaching & learning*. New York: Macmillan Publishing Company.