Las medallas Fields

Sección a cargo de

Adolfo Quirós Gracián

Las Medallas Fields de 2002

por

Adolfo Quirós Gracián

Aunque sea con algún retraso, La Gaceta quiere celebrar la concesión de las Medallas Fields en el Congreso Mundial de Matemáticos de Pekín con una reseña del trabajo de los galardonados. Continuamos así una tradición, necesariamente breve, que comenzó ya en el primer año de vida de la Gaceta con un artículo análogo a éste sobre las Medallas Fields de 1998.

Los Premiados, El Comité, Las Circunstancias...

Igual que ha sucedido en todos los Congresos desde el celebrado en Oslo en 1936, uno de los momentos culminantes del Congreso Mundial de Matemáticos de Pekín 2002 fue el anuncio de los galardonados con la Medalla Fields, la entrega de las mismas, y la presentación del trabajo de los medallistas por reconocidos expertos. En el Congreso de Pekín los galardonados han sido el francés **Laurent Lafforgue**, del Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES) en Bures-sur-Yvette, cerca de París; y el ruso **Vladimir Voevodsky**, del Institute for Advanced Study (IAS) de Princeton.

Como es tradicional, todo el ceremonial relacionado con las Medallas Fields se realizó en el marco de la sesión inagural, celebrada el 20 de agosto de 2002 y presidida por el entonces Presidente de la República Popular China, Jiang Ze Ming, quien entregó las medallas. El encargado de presentar los trabajos de Lafforgue fue el director de su tesis doctoral, Gérard Laumon, de la Universidad de París XI (Orsay), mientras que los trabajos de Voevodsky fueron presentados por Christoph Soulé del IHES, y compañero por tanto de Lafforgue.

El Comité que ha seleccionado las Medallas Fields de 2002 ha estado presidido por Yakov G. Sinai (Universidad de Princeton, Estados Unidos), siendo sus restantes miembros James Arthur (Universidad de Toronto, Canadá), Spencer Bloch (Universidad de Chicago, Estados Unidos), Jean Bourgain (Institute for Advanced Study, Princeton, Estados Unidos), Helmut Hofer (Courant Institute, Nueva York, Estados Unidos), Yasutaka Ihara (Universidad de Kyoto, Japón), H. Blaine Lawson (State University of New York, Stony Brook, Estados Unidos), Sergei Novikov (Universidad de Maryland, Estados Unidos), George Papanicolau (Universidad de Stanford, Estados Unidos) y Efim Zelmanov (Universidad de Yale, Estados Unidos).

Dicho Comité ha reconocido a Laurent Lafforgue "por haber realizado un gran avance en el Programa de Langlands, poniendo así de manifiesto nuevas conexiones entre la teoría de números y el análisis". Añaden que el trabajo de Lafforgue "se caracteriza por su formidable poderío técnico, su profunda visión y lo tenaz y sistemático de sus métodos de trabajo". En cuanto a Vladimir Voevodsky, la Medalla se le concede "por desarrollar nuevas teorías cohomológicas para variedades algebraicas, abriendo así nuevas perspectivas en teoría de números y geometría algebraica". Su trabajo "se caracteriza por la habilidad para tratar ideas extremadamente abstractas con sencillez y flexibilidad, y para emplear dichas ideas en la resolución de problemas matemáticos concretos".

Vladimir Voevodsky, Jiang Zemin, Jacob Palis (Presidente de IMU) y Laurent Lafforgue

Antes de presentar el trabajo de los premiados, nos gustaría comentar algunas de las "circunstancias" que se dan en las Medallas Fields de 2002. La primera, evidente, es que se han otorgado sólo dos medallas, en lugar de las "tradicionales" cuatro. Ponemos tradicionales entre comillas porque no es un hecho insólito. Desde que, en 1966, se amplió el número de posibles Medallas Fields de dos a cuatro, ha habido otras tres ocasiones en que no se alcanzó el máximo: en 1974 también se concedieron sólo dos medallas, mientras que en 1982 y 1986 los medallistas fueron tres. Es evidente que ni en esta ocasión ni en las anteriores faltaban candidatos, así que probablemente la explicación sea la obvia: el Comité no consiguió ponerse de acuerdo en quiénes eran los claros merecedores de las restantes posibles medallas.

También merece destacarse que Lafforgue y Voevodsky se ajustan en varios aspectos al perfil típico de los medallistas Fields. Más allá de cumplir la condición no escrita de no haber cumplido los 40 años (ambos nacieron en 1966), son estrellas emergentes, como demuestran sus recientes incorporaciones a plazas permanentes en dos de los más afamados Institutos de Matemáticas, el IAS y el IHES, y el que los dos hubiesen sido ya conferenciantes en el anterior ICM de Berlín 1998. Ambos trabajan en lo que en los últimos tiempos suele llamarse *Geometría Algebraica Aritmética*, un área bien representada entre los Medallas Fields, y sus resultados iluminan las relaciones entre varios campos de las matemáticas, una característica común a muchos de los logros merecedores del reconocimiento de una Fields (como decía G.H. Hardy [H], "*Una idea matemática significativa o un teorema matemático serio debe ser general en un cierto sentido de la palabra*"). Desde el punto de vista de la "nacionalidad", entran en dos de los grupos más frecuentes entre los medallistas: un francés y un no americano (ruso en este caso) que trabaja en Estados Unidos [Q].

Esta condición de no americano que trabaja en Estados Unidos se da también en los tres Medallas Fields que formaban parte del Comité, Bourgain, Novikov y Zelmanov, y nos lleva a hacer un comentario sobre el notable predominio de matemáticos afincados en norteamérica entre los miembros del Comité que ha propuesto a los galardonados con las Medallas en 2002. Es un hecho que vivimos un momento histórico en el que la influencia que ejercen (o al menos intentan ejercer) los Estados Unidos puede llegar a resultar, por decirlo suavemente, abrumadora. ¿Sucede esto también en el marco más restringido de las matemáticas?

Laurent Lafforgue, antes de impartir la primera conferencia plenaria del Congreso Mundial, dijo que habría preferido hablar en francés, y que "*el actual dominio del mundo entero por un sólo país –sean cuales sean sus méritos– por una sóla cultura y por una sóla lengua puede ser contraproducente para la diversidad de pensamiento*". Probablemente este comentario de Lafforgue tuviese un caracter general, puesto que en matemáticas los criterios fundamentales de calidad y belleza parecen ser todavía independientes de la nacionalidad. Y de hecho en nuestra ciencia hay al menos un foco muy importante que no se encuentra en Estados Unidos: la región parisina es uno de los lugares del mundo con mayor densidad matemática. Sin ir más lejos, nada menos que siete Medallas Fields, incluido Lafforgue, son o han sido miembros permanentes del IHES, y los dos encargados de presentar los resultados de los medallistas de 2002 trabajan también en la *banliêu* sur de París.

A pesar de ello, es evidente que el inglés es prácticamente la única lengua en uso actualmente en la comunidad matemática internacional. Pero, contra la opinión de Lafforgue, pensamos que el que haya una lengua "sean cuales sean sus méritos" que nos sirva de facto como *lingua franca* facilita enormemente la comunicación. Sin embargo, creemos que Lafforgue tiene razón al señalar el riesgo de que el enorme poder económico y científico de los Estados Unidos pase de permitirles atraer a los mejores cabezas del planeta a influir excesivamente en el modelo de pensamiento, o de actividad matemática en nuestro caso, que debe prevalecer en todo el mundo.

Antes de hablar del trabajo de los galardonados, debemos advertir que se trata de resultados de gran dificultad técnica. Hemos intentado dar una presentación en la que se citen los principales objetos y algo del contexto en el que aparecen, pero lo hemos hecho de manera deliberadamente vaga. A quien esto le sepa a poco, le recomendamos leer los seminarios Bourbaki [F, K, La1], las conferencias de los propios Lafforgue y Voevodsky en el ICM de Berlín 1998 [L1, V], o las *laudatio* de Pekín [La2, S]. Por otra parte, puede haber lectores que deseen una presentación más breve. Con motivo de la concesión de las Medallas Fields se han publicado varias, de las que nosotros sugerimos que lean [BX]. Finalmente, si alguien desea una exposición breve pero técnica, puede optar por [FRS].

Los Trabajos de Laurent Lafforgue

Laurent Lafforgue nació el 6 de noviembre de 1966 en Antony (Francia). Se licenció en 1986 en la École Normale Supérieure de París y se incorporó al CNRS como *chargé de recherche* en 1990. En esta condición se unió al equipo de Aritmética y Geometría Algebraica de la Universidad de París-Sur (Orsay), donde en 1994 leyó su tesis doctoral titulada *D-chtoucas de Drinfeld*. En 2000 ascendió a *directeur de recherche* del CNRS, todavía en Orsay, y en noviembre de ese mismo año se incorporó al IHES como Profesor Permanente.

Laurent Lafforgue con su Medalla Fields

Que los resultados de Lafforgue eran importantes había sido ya reconocido con anterioridad. En Francia ha recibido el *Prix Peccot* (1996) y el *Grand Prix Jacques Herbrand* de la Academia de Ciencias (2001). A nivel internacional, el recientemente creado Clay Mathematics Institute le concedió en 2000 un *Clay Research Award* en el transcurso de la misma ceremonia en que se anunciaron los *Millennium Prize Problems*. No resulta sorprendente por tanto que el nombre de Laurent Lafforgue figurase en muchas quinielas sobre potenciales ganadores de una Medalla Fields en 2002.

Como se ha indicado al principio de esta nota, los trabajos de Lafforgue constituyen una importante contribución al Programa de Langlands, que tiene su origen en las ideas contenidas en una carta que el entonces joven matemático canadiense Robert Langlands envió a André Weil en enero de 1967 (se puede encontrar una excelente exposición en [Ge]). Para dar una primera impresión del interés de las ideas de Langlands apelaremos a un argumento de autoridad y citaremos a William Browder: *"El papel unificador de los grupos de simetría en geometría, tan agudamente expuesto por Felix Klein en su Programa de Erlangen, ha conducido a un siglo de progreso. Un digno sucesor del Programa de Erlangen parece ser el programa de Langlands* *de utilizar representaciones infinito dimensionales de grupos de Lie para iluminar la teoría de números".*

En el Programa de Langlands hay implícito un cuerpo base, F, que en la llamada "situación global" puede ser un cuerpo de números algebraicos, el cuerpo de funciones de una curva algebraica definida sobre un cuerpo finito, o el cuerpo de funciones de una curva algebraica definida sobre $\mathbb{C}$, es decir, una superficie de Riemann. El caso resuelto por Lafforgue es el segundo, cuerpos de funciones sobre cuerpos finitos, aunque quizá el de mayor interés sea el de cuerpos de números. En cualquier caso, hay similitudes y diferencias entre las tres situaciones pero, dados los objetivos de este artículo, no entraremos en demasiados detalles.

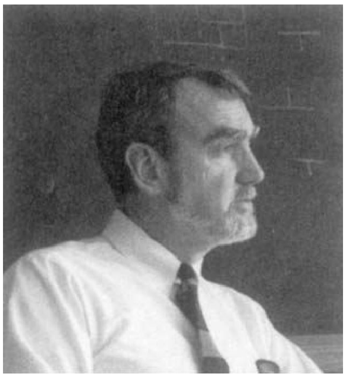
Sí es importante recordar que hay también versiones "locales" de la correspondencia de Langlands, donde en lugar de los *cuerpos globales* de los tres casos anteriores aparecen *cuerpos locales*. Para entender la diferencia, quizá es más sencillo pensar en los cuerpos de funciones. Estos cuerpos globales representan funciones algebraicas "meromorfas" en una curva, esencialmente cocientes de polinomios. Si nos fijamos sólo en lo que sucede en un punto (o con mayor precisión, en un *lugar*, para tomar en consideración el cuerpo de definición) de la curva, tendremos las funciones meromorfas en dicho punto, que tras completar dan lugar a un cuerpo de series de Laurent, que es el cuerpo local correspondiente a ese punto. Si el cuerpo base es $\mathbb{Q}$, sus *lugares* (finitos) son los primos, y para cada primo p hay una norma p-ádica (ligada a la divisibilidad entre potencias de p, y por tanto de indudable interés aritmético), que permite ver $\mathbb{Q}$ como un espacio métrico cuyo completado, los números p-ádicos $\mathbb{Q}_p$, son el cuerpo local en p. ¿Qué relación tiene esto con el valor absoluto usual? Pues si se mira bien mucha. El cuerpo $\mathbb{Q}$ tiene, además de los primos, un *lugar en el infinito*, cuyo cuerpo local es $\mathbb{Q}$ completado con la norma usual, es decir $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$. Si uno piensa en un cuerpo de números F cualquiera, los cuerpos locales correspondientes a lugares finitos, esto es, a los primos en el anillo de enteros de F, son extensiones finitas de los $\mathbb{Q}_p$, mientras que en los lugares en el infinito (que son las inmersiones de F en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) los cuerpos locales son precisamente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

La idea de "lugar en el infinito" es una de las analogías fructíferas entre cuerpos de números y cuerpos de funciones de curvas algebraicas. Ambos tipos de cuerpos son los cuerpos de fracciones de anillos de Dedekind, y los lugares en el infinito recogen la idea de puntos en el infinito de las curvas, ¡que son proyectivas! Es por tanto razonable, y útil, pensar que también $\mathbb{Q}$ tenga puntos en el infinito. Por ejemplo, el resultado de que una función meromorfa sobre una curva tiene igual número de ceros que de polos (contando por supuesto los puntos en el infinito), se refleja en $\mathbb{Q}$ en la siguiente fórmula del producto:

$$\prod_{p \in Lugares} |x|_p = 1, \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{Q},$$

donde *Lugares* incluye el lugar en el infinito $p = \infty$, $|\cdot|_p$ es la norma p-ádica y, $|\cdot|_\infty$ es la norma en $p = \infty$, es decir, el valor absoluto usual. Desde este punto de vista $\mathbb{R}$ no tiene más privilegio sobre $\mathbb{Q}_p$ que el de resultar más familiar a la mayoría de nuestros lectores.

Intentaremos ahora dar unas pinceladas de lo que significan las ya citadas palabras de Browder. Si F es uno de los tipos de cuerpos globales que hemos mencionado, un problema fundamental (en aritmética y/o en geometría) es entender su grupo de Galois absoluto $G := Gal(\bar{F}/F)$. Un camino para hacerlo es estudiar las representaciones de G, digamos que en el grupo lineal GL_r, que es el caso tratado por Lafforgue[1] (aunque las conjeturas generales de Langlands se refieren a un grupo algebraico reductivo cualquiera). Para centrarnos, y por seguir en la situación de Lafforgue, si la característica del cuerpo de funciones F es p (> 0), fijamos un primo $\ell \neq p$ y consideramos representaciones $\sigma : G \longrightarrow GL_r(\mathbb{Q}_\ell)$. (Como se ve, incluso en el caso global aparecen los cuerpos locales. Por supuesto también son importantes las representaciones más clásicas $\sigma : G \longrightarrow GL_r(\mathbb{C})$.)



Robert Langlands

La genial intuición de Langlands fue que las representaciones de G debían estar ligadas a objetos mucho más analíticos, concretamente a las llamadas *representaciones automorfas cuspidales para* $GL_r(\mathbb{A}_F)$. Por $\mathbb{A}_F$ designamos los *adeles* de F, que es una herramienta para considerar simultaneamente todas las localizaciones de F. Por ejemplo, para $F = \mathbb{Q}$, los adeles $\mathbb{A}_{\mathbf{Q}}$ son el subgrupo de $\prod_{p \leq \infty} \mathbb{Q}_p$ formado por los (x_p) tales que $|x_p|_p \leq 1$ para todos los p excepto un número finito. La diagonal da una inmersión $F \longrightarrow \mathbb{A}_F$, y uno puede pensar en el espacio, L_0^2, de funciones $\phi : GL_r(F)\backslash GL_r(\mathbb{A}_F) \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ cuyo cuadrado es integrable con respecto a una medida adecuada[2], con ciertas simetrías, y que satisfacen una *condición cuspidal*[3]. El grupo $GL_r(\mathbb{A}_F)$ actúa sobre L_0^2 por traslaciones a la derecha, y resulta que la correspondiente representación se descompone como suma de una familia $\{\pi\}$ de representaciones irreducibles de $GL_r(\mathbb{A}_F)$ que son precisamente las representaciones automorfas cuspidales.

Lo que Langlands conjeturó, y Lafforgue ha demostrado para el grupo GL_r y para F un cuerpo de funciones sobre un cuerpo finito, es que hay una

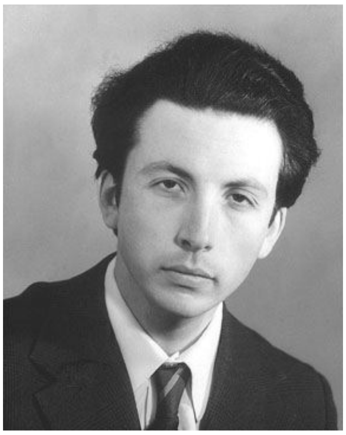
[1] Si A es un anillo, $GL_r(A)$ es el grupo de las matrices cuadradas $r \times r$ con coeficientes en A que son inversibles.

[2] La medida de Haar en el grupo cociente

[3] En el caso $r = 2$ no es otra cosa que la anulación del término constante del desarrollo de Fourier que caracteriza a las formas automorfas clásicas

correspondencia, la *Correspondencia de Langlands*, entre representaciones del grupo de Galois y representaciones automorfas cuspidales.

Vagamente, la correspondencia señala que "*para toda representación automorfa cuspidal π existe una representación de Galois $\sigma : G \longrightarrow GL_r(\mathbb{Q}_\ell)$, irreducible y no ramificada en casi todos los primos, tal que los autovalores de π coinciden con los de la acción de los elementos de Frobenius inducida por σ (donde σ es no ramificada), y recíprocamente*". Se puede hacer esto más preciso en términos de una identidad entre las funciones L asociadas a π y a σ, lo que debe recordarnos a la Conjetura de Shimura-Taniyama-Weil (STW) que demostró Andrew Wiles en los casos necesarios para probar el Último Teorema de Fermat. Recordemos que STW señalaba que toda curva elíptica sobre $\mathbb{Q}$ debía ser modular, lo que se puede interpretar como que la función L de la curva elíptica debe coincidir con la de una forma modular. De hecho la demostración de STW, que ha sido completada en 2000 por C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond y R. Taylor, se puede ver como un caso muy particular (aunque extremadamente interesante y nada trivial) del Programa de Langlands para $\mathbb{Q}$.



Vladimir Drinfeld

Con anterioridad a los resultados de Lafforgue se habían demostrado otros casos notables de la correspondencia de Langlands. El primer paso importante lo dio Vladimir Drinfeld (Medalla Fields en 1990) alrededor de 1988 cuando probó la correspondencia para los mismos cuerpos que Lafforgue, pero sólo en el caso del grupo GL_2. Sus ideas sirvieron de inspiración para muchos de los trabajos posteriores, incluidos los de Lafforgue. En 1993 G. Laumon, M. Rapoport y U. Stuhler probaron la correspondencia para cualquier GL_r sobre un cuerpo local de característica positiva, es decir, los cuerpos locales asociados a los globales estudiados por Drinfeld y Lafforgue. M. Harris y R. Taylor demostraron en 1998 que la correspondencia era cierta para cualquier GL_r sobre los cuerpos locales p-ádicos (extensiones de $\mathbb{Q}_p$), que son los cuerpos locales que aparecen al estudiar cuerpos de números (poco después G. Henniart encontró una demostración más sencilla, aunque quizá no tan iluminadora, de este caso). Por último, y como ya hemos indicado, Lafforgue completó en 2000 [L2] varios años de trabajo demostrando la correspondencia de Langlands para cuerpos de funciones globales sobre cuerpos finitos, y también para cualquier GL_r. Hasta la fecha no se ha demostrado que la correspondencia de Langlands sea cierta para cuerpos de números ni en el caso, no propuesto originalmente por Langlands sino elaborado posteriormente por Drinfeld, de cuerpos de funciones de curvas en característica cero, es decir, superficies de Riemann.

Como dice Langlands en su recensión de [L2] para Mathematical Reviews, "*El argumento [de Lafforgue] es largo, elaborado, y difícil*", de modo que nos limitaremos a presentar el principal ingrediente de la prueba, los *shtukas* (o *chtoucas* en la transcripción francesa), una expresión coloquial rusa para "cosa" cuya mejor traducción al castellano parece ser "pieza"[4]. Una técnica muy importante cuando se trabaja sobre un cuerpo de números es comparar la función Zeta de una variedad de Shimura con un producto de funciones L de formas automorfas. La idea de Drinfeld, que ahora ha completado Lafforgue es que el análogo de las variedades de Shimura para GL_r sobre un cuerpo de funciones F son los espacios algebraicos Cht^r que clasifican los chtoucas de rango r. Drinfeld había definido unos *módulos de Drinfeld* que eran de alguna manera similares a curvas elípticas. Inspirándose en el diccionario entre subálgebras de $\mathbb{C}[[t]][\frac{d}{dt}]$ y ciertos haces en curvas desarrollado por Krichever en el curso de su estudio algebro-geométrico de las ecuaciones de Korteweg-de Vries, Drinfeld asoció a sus módulos unos haces localmente libres, o fibrados vectoriales, sobre la curva X que define F. Estos fibrados vectoriales con estructura adicional son los chtoucas (sobre los que se puede encontrar información asequible en [Go]).

El paso fundamental en la demostración de la correspondencia de Langlands es comprobar que, dada π, existe σ. Para lograrlo, Lafforgue demuestra que las π que nos interesan pueden realizarse en la cohomología ℓ-ádica de Cht^r, y que además puede, simultaneamente, realizarse σ.

Para hacerse una idea de la enorme dificultad técnica del resultado, baste decir que los Cht^r no son variedades sino espacios algebraicos (definidos sobre $X \times X$, no sobre X), que no son completos (y son más "incompletos" cuanto mayor es r), y que no son ni siquiera de tipo finito. Pero Lafforgue consiguió truncarlos usando el llamado polígono de Harder-Narasimhan, y reducirlos así a un núcleo esencial en el que pudo trabajar con éxito.

Terminaremos explicando brevemente la relación entre la correspondencia de Langlands y las *leyes de reciprocidad*, en la confianza de que esto justifique las palabras de Browder en el sentido de que el Programa de Langlands debe servir "para iluminar la teoría de números".

La primera y más conocida de las leyes de reciprocidad, la *ley de reciprocidad cuadrática*, dice que, si p y q son dos números primos, el que la ecuación $x^2 \equiv q \ mod \ p$ tenga o no solución depende sólo del resto de $p \ mod \ q$ (o de $p \ mod \ 8$ en el caso $q = 2$), y nos dice también cuándo $x^2 \equiv -1 \ mod \ p$ tiene solución en términos de $p \ mod \ 4$. Este sorprendente resultado lo demostró por primera vez Gauss en las *Disquisitiones Arithmeticae* (1801), y estaba tan orgulloso de él que lo llamo *Theorema Aureum*. Pongamos este resultado en un contexto ligeramente distinto.

Si F es un cuerpo de números, su anillo de enteros $\mathcal{O}$ no es en general un dominio de ideales principales y sus elementos no se factorizan de manera

[4]En su acepción de "cada uno de los objetos que componen un conjunto".

única como producto de irreducibles. Sin embargo, todo ideal I de $\mathcal{O}$ se puede escribir de manera única como producto de ideales primos (no necesariamente principales ni distintos): $I = \prod \mathcal{P}_j$. La ley de reciprocidad cuadrática nos dice cómo se descompone el ideal generado por el primo racional p en el anillo de enteros del cuerpo cuadrático $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ (o de $\mathbb{Q}(i)$).

Otra forma de entender la descomposición $p\mathcal{O} = \prod \mathcal{P}_i$ (al menos en el caso no ramificado, donde los $\mathcal{P}_j$ son todos distintos) es estudiar los llamados elementos de Frobenius, $Fr_{\mathcal{P}_j} \in Gal(F/\mathbb{Q})$, que se caracterizan por dejar $\mathcal{P}_j$ invariante. Estos elementos están determinados sólo salvo conjugación, y la correspondiente clase de conjugación, $[Fr_p]$, determina totalmente la descomposición de $p\mathcal{O}$. En el caso particular de $F = \mathbb{Q}(i)$, se puede identificar $Gal(\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q})$ con $\{\pm 1\} \subset \mathbb{C}^*$ mediante la representación $\sigma : Gal(\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{C}^*$ que envía la conjugación a -1. La parte de la ley de reciprocidad cuadrática pertinente a este caso (soluciones de $x^2 \equiv -1 \ mod \ p$) nos dice que, para p impar, que son precisamente los no ramificados, se tiene $\sigma(Fr_p) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$. Este tipo de fórmula explícita es la que se pretende extender con las leyes de reciprocidad generales.

En 1920, E. Artin obtuvo una ley de reciprocidad general para extensiones abelianas, es decir, aquellas para las que $Gal(F/\mathbb{Q})$ es un grupo abeliano (gracias al teorema de Kronecker-Weber un tal F siempre está contenido en un cuerpo ciclotómico $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{N}})$). Demostró que, dado un homomorfismo $\sigma : Gal(F/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{C}^*$, existe un entero N_σ y un *caracter de Dirichlet*, $\chi_\sigma : (\mathbb{Z}/N_\sigma)^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ tal que $\sigma(Fr_p) = \chi_\sigma(p)$ para todo primo p no ramificado en F. Esta ley se puede expresar también como una igualdad $L_{F/\mathbf{Q}}(\sigma, s) = L(\chi, s)$, donde la función de la izquierda es la función L de Artin y la de la derecha es una función L de Hecke (en el caso más general). Y si E es un cuerpo de números cualquiera y E^{ab} es su extensión abeliana maximal, la ley de reciprocidad de Artin se puede ver también como un homomorfismo explícito de reciprocidad $rec : \mathbb{A}_E^*/E^* \longrightarrow Gal(E^{ab}/E)$, donde $\mathbb{A}_E^*$ son los *ideles* ($\mathbb{A}_{\mathbf{Q}}^*$ es el subgrupo de $\prod_{p\leq\infty} \mathbb{Q}_p$ formado por los (x_p) tales que $|x_p|_p = 1$ para todos los p excepto un número finito).

Todo esto constituye la *teoría abeliana del cuerpo de clase*, y la pregunta obvia es ¿qué hacer si $F/\mathbb{Q}$ no es abeliana? La respuesta propuesta por Langlands es: sustituir $\mathbb{C}^* = GL_1(\mathbb{C})$ por GL_r, los caracteres de Hecke por representaciones automorfas, estudiar las correspondientes funciones L no abelianas, etc., llegando así a generalizar el morfismo rec y a obtener la relación entre $G := Gal(\bar{F}/F)$ y $GL_r(F)\backslash GL_r(\mathbb{A}_F)$ dada por la correspondencia de Langlands.

Los Trabajos de Vladimir Voevodsky

Vladimir Voevodsky nació en Rusia el 4 de junio de 1966. Se licenció en 1989 en la Universidad Estatal de Moscú, y obtuvo el Doctorado en la

Universidad de Harvard en 1992. Tras diversas estancias como visitante en el IAS, Harvard y el Instituto Max Planck de Bonn, se incorporó en 1996 a Northwestern University, en Evanston (cerca de Chicago). En 2002 pasó a ser Profesor en el IAS de Princeton.

Voevodsky había sido *Sloan Fellow* entre 1996 y 1998 y, como con Lafforgue, el Clay Mathematics Institute había reconocido el interés de sus trabajos otorgándole sendas *Clay Prize Fellowships* en 1999 y 2000. Como se ve, tampoco en el caso de Voevodsky puede decirse que haya sido una sorpresa la concesión de una Medalla Fields.

Ya hemos señalado que el Comité Fields consideró que el trabajo de Voevodsky "se caracteriza por la habilidad para tratar ideas extremadamente abstractas con sencillez y flexibilidad, y para emplear dichas ideas en la resolución de problemas matemáticos concretos". El ejemplo más notable de idea extremadamente abstracta tratada por Voevodsky es su definición de cohomología motívica, que a su vez ha empleado para resolver un problema concreto (aunque nada sencillo): la *Conjetura de Milnor* en teoría K. Comentaremos ambos temas para nuestros lectores.

Vladimir Voevodsky

Las teorías de homología y de cohomología son maneras de asignar (funtorialmente) objetos algebraicos a objetos topológicos o geométricos. La idea es que los objetos geométricos son difíciles de entender directamente, y para estudiarlos es útil empezar por mirar su reflejo en un espejo algebraico, que es más sencillo y nos permite apreciar algunos aspectos esenciales del objeto en cuestión, aunque no nos de toda la información (igual que las imágenes en los espejos reales nos permiten apreciar los colores, pero no las texturas de los objetos que reflejan). Por poner un ejemplo trivial, para un espacio topológico X el "0-ésimo"grupo de cohomología singular, $H^0_{sing}(X, \mathbb{Z})$, nos dirá cuantas componentes conexas tiene X. Por supuesto el objetivo final es entender suficiente sobre la imagen algebraica como para poder recuperar la geometría.

Si X es una variedad algebraica (digamos proyectiva y lisa) sobre un cuerpo k, hay diversas teorías cohomológicas que se pueden asociar a X. Cuáles concretamente depende de k, pero sin dar detalles mencionaremos la cohomología de de Rham, la étale, la cristalina, o, en el caso $k = \mathbb{C}$, la cohomología singular. Todas ellas han resultado ser extremadamente útiles en Geometría Algebraica, tanto en su versión "clásica" (sobre $\mathbb{C}$), como en carácterística positiva (en particular sobre cuerpos finitos) y sobre todo en lo que se ha venido en llamar Geometría Algebraica Aritmética, cuyo objeto fundamental de estudio son las variedades definidas sobre $\mathbb{Q}$ o, con mayor generalidad, sobre cuerpos de números. De hecho, esta última situación conduce de manera natural al estudio de las anteriores, ya que una variedad definida sobre un cuerpo de números se puede ver también sobre $\mathbb{C}$; si uno mira un modelo entero y estudia sus fibras se encuentra con variedades sobre cuerpos finitos; un proceso natural de localización lleva al estudio de variedades sobre cuerpos locales (por ejemplo, sobre los números p-ádicos), etc.

Demos un ejemplo de la utilidad de las teorías que pueden sonar como más exóticas. Sea X una variedad sobre el cuerpo finito con $q = p^n$ elementos $\mathbb{F}_q$ y, para cada extensión $\mathbb{F}_{q^r}$ de $\mathbb{F}_q$, llamemos N_r al número de puntos de X con coordenadas en[5] $\mathbb{F}_{q^r}$. La pregunta aritmética básica sobre X es ¿cuánto valen los N_r? Andre Weil propuso recopilar toda esta información en la *función* Z, definida por la serie $Z(X/\mathbb{F}_q, t) := \sum_{r=1}^{\infty} N_r \frac{t^r}{r}$, y conjeturó (son las famosas *Conjeturas de Weil*) que esta función tendría interesantes propiedades: debe ser racional, con ceros y polos de tamaño determinado, satisfacer una ecuación funcional... También sugirió que debería poder interpretarse cohomológicamente, y que las conjeturas debían poder deducirse de propiedades de la cohomología. Alexander Grothendieck (Medalla Fields en 1966) propuso una cohomología adecuada, la cohomología étale, y Pierre Deligne (Medalla Fields en 1978) la utilizó para demostrar completamente las Conjeturas de Weil.

Dado que tiene importancia para el trabajo de Voevodsky, señalaremos que la cohomología étale se calcula por medio de la topología étale, que no es una topología en el sentido habitual, sino una *topología de Grothendieck*, donde un abierto de X no es necesariamente un subconjunto $U \subset X$ sino que puede ser un morfismo $U \longrightarrow X$ (en este caso concreto un morfismo étale, de ahí el nombre de la topología). Indicaremos también que contar puntos en curvas sobre cuerpos finitos, que puede parecer un paradigma de esa extrema inaplicabilidad de la Teoría de Números que tanto parecía agradar a Hardy [H], puede considerarse hoy Matemática Aplicada, pues encontrar curvas con muchos puntos permite construir buenos códigos correctores de errores y buenos códigos criptográficos.

Las diversas teorías cohomológicas para variedades algebraicas que hemos mencionado tienen propiedades similares, y hay teoremas que comparan unas con otras. Alexander Grothendieck, en una de sus geniales intuiciones, sugirió que lo que sucedía en realidad es que no eran sino *realizaciones* de la verdadera cohomología, una suerte de "cohomología universal" a la que llamó *cohomología motívica*.

Por seguir con la metáfora del espejo, lo que sucede es que, tras reflejarse en el espejo y antes de llegar a nuestros ojos , la luz ha pasado por un prisma que la ha descompuesto. Así pues, en lugar de ver la imagen algebraica del objeto geométrico (su cohomología motívica), hasta ahora sólo hemos sido capaces de ver sus realizaciones "roja", "amarilla", "azul", etc. (sus cohomologías étale, cristalina, de de Rham...). Esta luz descompuesta no deja de resultar útil, pero

[5]Técnicamente deberíamos decir "puntos definidos sobre...".

lo ideal sería recibir la luz blanca, que es la que nos transmite la imagen real del objeto que estamos estudiando[6].

De manera un poco más formal, sea $\mathcal{V}_k$ la categoría de variedades algebraicas proyectivas y lisas sobre el cuerpo k. La idea es que debe existir una *categoría de motivos (puros) sobre* k, $\mathcal{M}_k$, y un funtor de cohomología motívica, $h_{mot} : \mathcal{V}_k \longrightarrow \mathcal{M}_k$, o si se prefiere, grupos de cohomología motívica para cada variedad X, $H^i_{mot}(X)$, que sean universales. Es decir, que para cada una de las cohomologías usuales h, o H^i, exista un funtor *realización*, que denotaremos simplemente $real$, tal que $real \circ h_{mot} = h$, o si se prefiere, $real(H^i_{mot}(X)) = H^i(X)$. Está claro por tanto por qué las distintas cohomologías tienen comportamientos similares: son todas realizaciones (imágenes por los funtores $real_{dR}, real_{\acute{e}t}, real_{cris}, real_{sing} \ldots$) de un mismo objeto. En particular, cualquier propiedad que podamos demostrar para la cohomología motívica se reflejará en todas las demás cohomologías.

Antes de continuar señalaremos que deben existir también los *motivos mixtos*, con los que no habría que limitarse a variedades proyectivas y lisas. Y tampoco hay que limitarse a variedades sobre un cuerpo, sino que se pueden (o, incluso se deben) estudiar los esquemas sobre un esquema base S. La categoría a considerar sería entonces la de *motivos mixtos sobre el esquema* S, $\mathcal{MM}_S$.

Hay varias propuestas de construcción para la categoría de motivos (puros) sobre el cuerpo k. Lo más habitual es empezar por tomar como objetos las variedades proyectivas y lisas sobre k, pero generalizar los morfismos como sigue. Si X es una variedad, el *grupo de ciclos*, $Z^r(X)$ es el grupo abeliano libre generado por las subvariedades de X de codimensión r. Si X es una variedad de dimensión d, Y una variedad cualquiera y $f : Y \longrightarrow X$ un morfismo de variedades, su grafo Γ_f es una subvariedad de $X \times Y$ de codimensión d, y por tanto un elemento de $Z^d(X \times Y)$. Así pues, los ciclos de $X \times Y$ generalizan los morfismos. Aprovechando esto podemos definir la categoría de *Correspondencias* (sobre k) como aquella cuyos objetos son las variedades proyectivas y lisas sobre k, y donde los morfismos (se puede definir una composición) son $Hom_{Corr}(X, Y) := Z^d(X \times Y)/\sim$, siendo $\sim$ una de varias posibles relaciones de equivalencia. A cada una de estas relaciones de equivalencia correspondería un tipo de motivos[7].

Una opción interesante es considerar la relación de *equivalencia númerica*. Sin detalles técnicos, $Z_1 \sim_{num} Z_2$ si Z_1 y Z_2 "cortan cualquier ciclo W (de la codimensión adecuada) en la misma cantidad de puntos". Los correspondientes *motivos numéricos*, $\mathcal{M}^{num}_k$, tendrían propiedades estupendas, siempre que se cumpliesen las dos *Conjeturas Standard* de Grothendieck. No diremos nada

[6]Toda esta figura del espejo y la "luz descompuesta" está adaptada de una conferencia de Vicente Navarro en el encuentro MCGA-2002 en Santiago de Compostela. Si no resulta ilustrativa es culpa del autor y no de Vicente, quien sin duda la presentó con más gracia.

[7]Un lector muy atento podría objetar que, tal y como hemos definido $Hom_{Corr}(X, Y)$, los morfismos parecen ir al revés. Efectivamente. Hemos ocultado una dualidad.

sobre estas conjeturas, excepto que no se sabe cómo demostrarlas y que sus consecuencias interesantes serían numerosas. El lector curioso puede leer el primer artículo de [Mot].

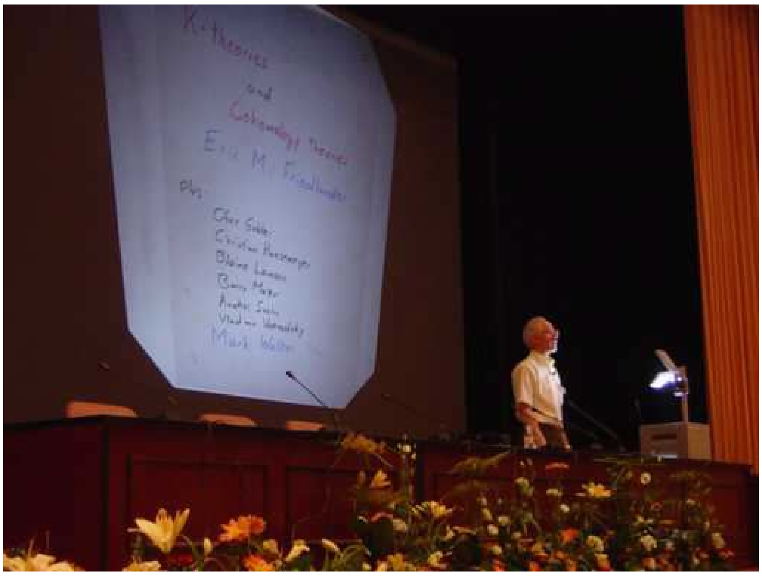
Otra opción clásica es considerar la equivalencia racional. De nuevo sin detalles técnicos, $Z_1 \sim_{rat} Z_2$ si existe un ciclo W en $X \times \mathbb{A}^1$ tal que $Z_1 = W \cdot (X \times \{0\})$ y $Z_2 = W \cdot (X \times \{1\})$, donde $\cdot$ es la intersección de ciclos. Dicho de otro modo, existe una família de ciclos parametrizados por la recta proyectiva para la que Z_1 y Z_2 son dos fibras. Los grupos $Z^r(X)/\sim_{rat}$ se llaman *grupos de Chow*, y los motivos a los que da lugar la equivalencia racional, $\mathcal{M}_k^{rat}$, son los *motivos de Chow*.

Es importante señalar que la teoría de motivos requiere ir un poco más allá de la categoría de correspondencias (para la relación de equivalencia que se haya tomado), ya que la categoría de motivos debería, como mínimo, ser una categoría *tanakiana*, y la de correspondencias no lo es. No es este el lugar de entrar en detalles delicados de teoría de categorías[8], así que nos limitaremos a decir que, en este contexto, un objeto de $\mathcal{M}_k$ es una terna (X, p, m), donde X es una variedad proyectiva y lisa sobre k, $p = p^2 \in Hom_{Corr}(X, X)$ es un idempotente y $m \in \mathbb{Z}$, y que el funtor de cohomología motívica, $h_{mot} : \mathcal{V}_k \longrightarrow \mathcal{M}_k$, viene dado por $h_{mot}(X) := (X, id, 0)$. Dos motivos destacados son el motivo unidad $\mathbf{1} := (Spec(k), id, 0)$ y el motivo de Lefschetz $\mathbb{L} := (Spec(k), id, -1)$, donde $Spec(k)$ es el *espectro de k* (una variedad, o mejor, un esquema, con un sólo punto). Observese que $\mathbf{1} = h_{mot}(Spec(k))$, pero $\mathbb{L}$ no es la cohomología de nadie. Un resultado interesante es que cualquier motivo es factor directo de $h_{mot}(X) \otimes \mathbb{L}^n$ para alguna X y algún n, de manera que podríamos decir que "los motivos son los sumandos de las cohomologías".

Si algunos de nuestros lectores quiere saber más sobre motivos desde este punto de vista, le recomendamos los dos volumenes de [Mot], y en particular los artículos de P. Deligne (*A quoi servent les motifs?*) y A. J. Scholl (*Classical Motives*). Pero nosotros debemos avanzar en el intento de presentar el trabajo de Voevodsky.

Sobre $\mathbb{C}$, la cohomología singular se comporta estupendamente. Se trata de una teoría con coeficientes enteros y su definición es topológica: si X es un espacio topológico, se trata de estudiar aplicaciones continuas de símplices al espacio X (así se definen los grupos de homología $H_i^{sing}(X, \mathbb{Z})$, y sus duales nos dan la cohomología $H^i_{sing}(X, \mathbb{Z})$) . Hay además un producto que dota a $H^*_{sing}(X, \mathbb{Z}) := \sum_i H^i_{sing}(X, \mathbb{Z})$ de una estructura de anillo graduado. Otra buena teoría es la *teoría-K topológica*, construida a partir de los fibrados vectoriales sobre X, que proporciona grupos $K_i^{top}(X)$. También en este caso $K_*^{top}(X) := \sum_i K_i^{top}(X)$ tiene estructura de anillo graduado. Un hecho maravilloso, consecuencia de la *sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch*, es que,

[8]Aunque nos gustaría que nuestros lectores apreciasen que, contra lo que a veces se piensa, la teoría de categorías no es simplemente "abstract nonsense".



Eric Friedlander hablando sobre teoría-K
en el Congreso AMS-RSME de Sevilla

a pesar de que sus definiciones son muy distintas, ambos anillos graduados coinciden si tomamos coeficientes racionales: $K_*^{top}(X) \otimes \mathbb{Q} \simeq H^*_{sing}(X, \mathbb{Q})$.

La cohomología singular podría considerarse como una cohomología universal, pero por desgracia se sabe, gracias a ejemplos sencillos dados por J.-P. Serre (Medalla Fields en 1954 y primer galardonado con el Premio Abel; como se ve, son muchos los matemáticos eminentes que se han preocupado por estos asuntos) que no es posible definirla algebraicamente y que, por tanto, no es posible definirla para variedades algebraicas en general. Desde este punto de vista podemos pensar en la cohomología motívica como una versión de la cohomología singular válida para variedades algebraicas (o esquemas).

Lo que sí que existe es una teoría-K algebraica. De hecho, el grupo K_0 algebraico de una variedad algebraica fue definido por Grothendieck a partir de los fibrados vectoriales algebraicos antes de la aparición de la teoría-K topológica. Sin embargo, los grupos K superiores se definieron antes en el contexto topológico que en el algebraico.

En 1971, M. Karuobi y O. Villamayor utilizaron ideas topológicas para definir la teoría-K algebraica de orden superior de un anillo R, que puede ser el anillo de funciones de una variedad algebraica afín. Su idea fundamental fue construir una teoría algebraica de homotopía, donde el papel del intervalo unidad en el caso topológico lo pasa a desempeñar en el caso algebraico la recta afín $\mathbb{A}^1$. El n-cosímplice Δ^n es el hiperplano en $\mathbb{A}^{n+1}$ de ecuación $\sum_{i=0}^n t_i = 1$ (para apreciar la analogía con la situación topológica, obsérvese que si nos limitamos a $t_i \in \mathbb{R}, 0 \leq t_i \leq 1$, nos encontramos con el n-símplice usual) y las aplicaciones habituales nos proporcionan un complejo cosimplicial Δ^*.

Si X es una variedad algebraica afín, y R es su anillo de funciones, tenemos un anillo simplicial $\Delta_*(R)$, donde $\Delta_n(R) = R[t_0, \ldots, t_n]/(\sum_{i=0}^n t_i - 1)$, de manera que $Spec(\Delta_*(R)) = X \times \Delta^*$. Considerando el esquema GL_N de matrices inversibles, se tienen[9] sus puntos en $\Delta_n(R)$, $GL_N(\Delta_n(R)) := Hom_{alg}(X \times \Delta^n, GL_N)$, lo que nos proporciona un grupo simplicial $GL_N(\Delta_*(R))$. Tomando su realización geométrica $|GL_N(\Delta_*(R))|$, pasando al límite sobre N, que notamos $|GL(\Delta_*(R))|$, y calculando sus grupos de homotopía llegamos a la definición de la teoría K de Karoubi-Villamayor:

$$KV_n(R) := \pi_{n-1}(|GL(\Delta_*(R))|).$$

Usando que cualquier esquema es localmente afín, esta definición se puede extender a esquemas arbitrarios. La hemos dado con algún detalle porque es el germen de alguna de las principales ideas de Voevodsky (y otros). En particular, encierra una "teoría algebraica de homotopía" (en la que el esquema X es homotópicamente equivalente a $X \times \mathbb{A}^1$) que sería luego extendida y explotada por Voevodsky. Y con caracter general se podría decir que tal teoría busca precisamente definir invariantes algebraicos en términos de grupos de homotopía de espacios topológicos, como hicieron Karoubi y Villamayor.

Alrededor de 1970, D. Quillen propuso una definición alternativa de la teoría-K-algebraica, usando lo que se llama la *construcción-Q*. La teoría-K de Quillen coincide con la de Karoubi-Villamayor para esquemas regulares, pero no para los singulares, y es considerada como la teoría-K algebraica "correcta" en el contexto general.

Por lo que se refiere a la cohomología motívica, la primera definición útil la dio S. Bloch en 1985 con su construcción de los *grupos de Chow superiores.* Los grupos de Chow de un esquema X, $CH^q(X)$, se definen a través de la equivalencia racional de ciclos. La teoría de clases de Chern (los morfismos c_q de la siguiente fórmula) y el llamado *Teorema de Grothendieck-Riemann-Roch* proporcionan un isomorfismo

$$\sum_q c_q : K_0(X) \otimes \mathbb{Q} \simeq \oplus_q CH^q(X) \otimes \mathbb{Q}.$$

Para definir los grupos de Chern superiores, la idea es dar sentido a los ciclos algebraicos en $X \times \Delta^*$. La dificultad técnica es que una subvariedad de codimensión q de $X \times \Delta^p$ puede no intersecar una cara de $X \times \Delta^{p'}$ en codimensión q. Bloch resolvió esto considerando $\mathcal{Z}^q(X,p)$, el subgrupo de ciclos en $X \times \Delta^p$ que intersecan a todas las caras en la codimensión correcta. Obtiene así complejos $\mathcal{Z}^q(X,*)$ y define los grupos de Chow superiores como sus homologías: $CH^q(X,p) := H_p(\mathcal{Z}^q(X,*))$. Como no podía ser menos, $CH^q(X,0) = CH^q(X)$.

[9] Ésta es una construcción estándar en teoría de esquemas.

En cuanto a las comparaciones entre todas estas teorías, si X es una variedad sobre $\mathbb{C}$, se tiene un morfismo de comparación $K_p^{alg}(X) \longrightarrow K_p^{top}(X(\mathbb{C}))$, que en general dista mucho de ser un isomorfismo. Pero la situación es distinta si se utilizan coeficientes módulo n. La *conjetura de Quillen-Lichtenbaum* propone que $K_p^{alg}(X, \mathbb{Z}/n) \longrightarrow K_p^{top}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/n)$ es un isomorfismo para $p \geq 2dim_{\mathbf{C}}(X)$.

Lo más interesante es que no es en realidad necesario estar sobre $\mathbb{C}$. Utilizando la topología étale, W. Dwyer y E. Friedlander han dado una construcción algebro-geométrica de una teoría-K topológica módulo n, $K_*^{ét}(X, \mathbb{Z}/n)$, para la que hay una sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch que la relaciona con la cohomología étale, $H_{ét}^*(X, \mathbb{Z}/n)$. En este contexto, la conjetura de Quillen-Lichtembaun dice que, para una variedad X sobre un cuerpo k, $K_p^{alg}(X, \mathbb{Z}/n) \longrightarrow K_p^{ét}(X, \mathbb{Z}/n)$ es un isomorfismo para $p \geq 2dim_k(X) + dc(Gal(\overline{k}/k))$ (dc = dimensión cohomológica). Utilizando las clases de Chern, esto se traduce en que, con algunas restricciones técnicas sobre n, para un cuerpo F las clases de Chern proporcionan un isomorfismo

$$\sum_{2q-p=m} c_{q,p} : K_m(F, \mathbb{Z}/n) \longrightarrow \oplus_{2q-p=m} H_{ét}^p(F, \mathbb{Z}/n(q))$$

para $2q \geq p$ (aquí (q) indica un "twist").

Como consecuencia, si X es un esquema liso sobre un cuerpo k, uno espera, para $2q \geq p$ y $q \geq dim_k(X)$, un isomorfismo natural

$$H_\mu^p(X, \mathbb{Z}/n(q)) \longrightarrow H_{ét}^p(X, \mathbb{Z}/n(q)),$$

donde $H_\mu^p(X, \mathbb{Z}/n(q) := H_{2q-p}(\mathcal{Z}^q(X, *) \otimes \mathbb{Z}/n)$ es la cohomología motívica módulo n, definida a través del complejo de Bloch.

Un resultado importante de Voevodsky, en colaboración con Andrei Suslin [SV], fue demostrar que tal isomorfismo existe para variedades sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. El papel fundamental en su demostración corresponde, no al complejo de ciclos de Bloch, sino a una versión homológica alternativa que Suslin había sugerido en 1988. Pero esta idea de Suslin no resulto fructifera hasta que Voevodsky definió, en 1992, las topologías h y qfh. Se trata, por supuesto, de topologías de Grothendieck en la categoría de esquemas (de tipo finito) sobre el cuerpo k, y en ellas los recubrimientos son, respectivamente, los *epimorfismos topológicos universales* [10] y los *epi-*

Andrei Suslin

[10]Un morfismo de esquemas $f : X \to Y$ es un epimorfismo topológico si es suprayectivo en los puntos e Y tiene la topología cociente; f es un epimorfismo topológico universal si,

morfismos topológicos universales quasi finitos. A partir de estas topologías, Voevodsky pudo dar una construcción natural de una *categoria abeliana de prehaces con transferencias en el sitio grande de Nisnevich de las variedades lisas sobre k* [11]. En conjunción con la propuesta de Suslin, esto les permitió definir unos complejos motívicos $\mathbb{Z}(n)$ (en la categoría derivada de haces de Nisnevich) y calcular la cohomología de Suslin módulo n en términos de cohomología de haces en las topologías de Grothendieck. La cohomología de estos complejos parece una excelente candidata a ser la "verdadera" cohomología motívica.

Voevodsky ha demostrado muchas propiedades de esta cohomología motívica. Uno de sus resultados más importantes, y muy reciente (publicado en 2002), es que los grupos de cohomología motívica son isomorfos a los grupos de Chow superiores de Bloch para k de cualquier característica (el mismo Voevodsky y Friedlander lo habían demostrado antes con una hipótesis de resolución de singularidades que requiere que k sea de característica 0).

Esta teoría de cohomología motívica es un ejemplo de la "habilidad [de Voevodsky] para tratar ideas extremadamente abstractas con sencillez". Pero Voevodsky lleva su habilidad más allá. Parece que, desde que escribió su tesis en Harvard, el objetivo de Voevodsky ha sido desarrollar una teoría de homotopía para variedades algebraicas en la que se puedan hacer cálculos como en topología algebraica. Lo ha conseguido [MV], en colaboración con Fabien Morel, partiendo de la idea de Karoubi-Villamayor de sustituir el intervalo unidad por la recta afín, por medio de la *Teoría de* $\mathbb{A}^1$*-homotopía*. Esta teoría le proporciona categorías que son análogas a las de homotopía estable e inestable de la topología algebraica. Una idea clave de Voevodsky ha sido que en geometría algebraica, donde el símplice de dimensión 1 es $\mathbb{A}^1$, se debe pensar en dos tipos de "círculos" que definen dos suspensiones. El análogo del círculo usual es una curva afín con un nodo, digamos la dada por la ecuación $y^2 = x^3 + x^2$. El otro círculo, al que Voevodsky llama *círculo de Tate*, es $\mathbb{A}^1 - \{0\}$. (No olvide el lector que si, por ejemplo, $k = \mathbb{C}$, $\mathbb{A}^1 - \{0\}$ es como el plano real menos el origen. Por tanto esto es un círculo sólo desde el punto de vista de sus propiedades en el marco que nos interesa.)

Voevodsky construye así un contexto abstracto en el que la cohomología motívica y la teoría-K algebraica (o, de hecho, cualquier teoría cohomológica para esquemas) pueden verse como funtores representables. Esta es precisamente una de las más poderosas herramientas que proporciona la teoría de Voevodsky: permite definir teorías de cohomología a partir de los objetos que las representan, sin necesidad de describir los propios grupos de cohomología.

Y el propio Voevodsky ha aplicado esta herramienta en otro de sus celebrados resultados, la demostración de la Conjetura de Milnor, un ejemplo

dado cualquier morfismo de esquemas $Z \to Y$, la proyección $Z \times_Y X \to Z$ es epimorfismo topológico.

[11] No tema el lector, no definiremos estos conceptos; pero le aseguramos que son naturales.

de su otra habilidad: "emplear dichas ideas en la resolución de problemas matemáticos concretos". Expliquemos brevemente lo que dice.

Dado un cuerpo F, Milnor definió unos grupos $K_n^M(F)$ que, para $n = 0,1,2$ (en el caso $n = 2$ gracias a un teorema de Matsumoto) coinciden con los grupos $K_n^{alg}(F)$ de Quillen. Pero tienen la ventaja de que el anillo graduado $K_*^M(F)$ es mucho más sencillo que $K_*^{alg}(F)$ porque, en general los $K_n^M(F)$ están generados por elementos de grado 1, los llamados *símbolos*. Por otra parte, existe un morfismo natural $s : K_*^M(F) \otimes \mathbb{Z}/2 \longrightarrow H^*(F, \mathbb{Z}/2)$ de la teoría-K de Milnor a la cohomología de Galois. Lo que Milnor conjeturó, y Voevodsky ha demostrado, es que, si la característica de F no es 2, s es un isomorfismo. Obsérvese que esto implica que los grupos de cohomología galoisiana $H^n(F, \mathbb{Z}/2)$ están generados por productos[12] de clases de cohomología de grado 1. Esto nos dice en particular que los anillos que surgen de la cohomología de Galois de un cuerpo son bastante especiales.

Antes de acabar señalaremos que, en realidad, la demostración publicada por Voevodsky de la Conjetura de Milnor no depende de la teoría de homotopía. Pero su espíritu sí. Y parece que está próxima una prueba del análogo de la Conjetura de Milnor donde se sustituye $\mathbb{Z}/2$ por $\mathbb{Z}/p$ para p un primo impar, que es la llamada *Conjetura de Bloch-Kato.* Y en este caso la teoría de homotopía de Voevodsky desempeña un papel esencial.

REFERENCIAS

[BX] J. I. BURGOS, X. XARLES, Medalles Fields, *SCM Not.* **18**, (2003), 28–31.

[F] E. M. FRIEDLANDER, Motivic complexes of Suslin and Voevodsky, Séminaire Bourbaki, Vol. 1996/97, Exp. No. 833, *Astérisque* **245** (1997), 355–378.

[FRS] E. F. FRIEDLANDER, M. RAPOPORT, A. SUSLIN,The mathematical work of the 2002 Fields medalists, *Notices Amer. Math. Soc.* **50** (2003), no. 2, 212–217.

[Ge] S. GELBART, An elementary introduction to the Langlands program, *Bull. Amer. Math. Soc.* (N.S.) **10** (1984), no. 2, 177–219.

[Go] D. GOSS, What is... a Shtuka?, *Notices Amer. Math. Soc.* **50** (2003), no. 1, 36–37.

[H] G. H. HARDY, *Apología de un matemático,* Nivola (1999).

[K] B. KAHN, La conjecture de Milnor (d'après V. Voevodsky), Séminaire Bourbaki, Vol. 1996/97, *Astérisque* **245** (1997), 379–418.

[L1] L. LAFFORGUE, *Chtoucas de Drinfeld et applications,* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998). Doc. Math. 1998, Extra Vol. II, 563–570.

[12] Se trata de *cup products.*

[L2] L. LAFFORGUE, *Chtoucas de Drinfeld, formule des traces d'Arthur-Selberg et correspondance de Langlands,* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Beijing, 2002), 383-400, Higher Ed. Press (2002).

[la1] G. LAUMON, La correspondance de Langlands sur les corps de fonctions (d'après Laurent Lafforgue), Séminaire Bourbaki, Vol. 1999/2000, *Astérisque* **276** (2002), 207–265.

[La2] G. LAUMON, *The work of Laurent Lafforgue,* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Beijing, 2002), 91–97, Higher Ed. Press (2002).

[Mot] U. JANNSSEN, S. KLEIMAN, J.-P. SERRE (eds.), *Motives,* Proceedings of the AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conference held at the University of Washington, Seattle, Washington, July 20–August 2, 1991, Proc. Symp. Pure Math. 55 (2 volúmenes), Amer. Math Soc. (1994).

[MV] F. MOREL, V. VOEVODSKY, A^1-homotopy theory of schemes, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **90** (1999), 45–143.

[Q] A. QUIRÓS, Las Medallas Fields, LA GACETA DE LA RSME 1.2 (1998), 517–526.

[S] E. SOULÉ, *The work of Vladimir Voevodsky,* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Beijing, 2002), 99–103, Higher Ed. Press (2002).

[SV] A. SUSLIN, V. VOEVODSKY, Singular homology of abstract algebraic varieties, *Invent. Math.* **123** (1996), no. 1, 61–94.

[V] V. VOEVODSKY, $\mathbb{A}^1$*-homotopy theory,* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Berlin, 1998). Doc. Math. 1998, Extra Vol. I, 579–604.

Adolfo Quirós Gracián
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid
28049 Madrid
Correo electrónico: `adolfo.quiros@uam.es`