
LA COLUMNA DE MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Sección a cargo de

Tomás Recio

El objetivo de esta columna es presentar de manera sucinta, en cada uno de los números de La Gaceta, alguna cuestión matemática en la que los cálculos, en un sentido muy amplio, tengan un papel destacado. Para cumplir este objetivo el editor de la columna (sin otros méritos que su interés y sin otros recursos que su mejor voluntad) quisiera contar con la colaboración de los lectores, a los que anima a remitirle (a la dirección que se indica al pie de página¹) los trabajos y sugerencias que consideren oportunos.

EN ESTE NÚMERO...

...presentamos una reflexión sobre la naturaleza de la asignatura “Informática”, de carácter troncal en la Licenciatura en Matemáticas. ¿Ha de ser una materia de carácter práctico, en la que los alumnos aprendan a manejar ordenadores y programas de cálculo matemático? ¿Ha de ser una materia teórica, con un enfoque similar en su ámbito al de otras materias de Primer Ciclo, digamos, como el Álgebra Lineal o el Análisis?

Los lectores disculparán, el que tal reflexión venga, por una vez, de la mano de un profesor de mi propio Departamento. Esto es debido, entre otras razones, a la concurrencia en él de múltiples circunstancias favorables: el profesor Montaña es Doctor en Matemáticas, pero Titular de Universidad en el Area de Lenguajes y Sistemas Informáticos; ha impartido docencia de Informática en las Licenciaturas de Matemáticas y Físicas, pero también en Ingeniería Industrial y de Telecomunicación; ha desarrollado su docencia en varias universidades (Cantabria, Universidad Pública de Navarra), por lo que su perspectiva puede ser más amplia; su ámbito de investigación (Complejidad Algebraica) está a caballo entre la Geometría Algebraica y las Ciencias de la Computación Además, nuestro Departamento conjuga, desde hace quince años, una especial sensibilidad para los aspectos computacionales de la Matemática, mientras mantiene, como es tradicional, una fuerte componente docente e investigadora en matemática pura.

Por todo ello he considerado oportuno pedir al Dr. Montaña que exprese su opinión sobre el controvertido tema del enfoque más adecuado para esta materia, la Informática, tan importante y novedosa, en la carrera de Matemáticas.

¹Tomás Recio. Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad de Cantabria. 39071 Santander. recio@matesco.unican.es

Algunas reflexiones acerca de la enseñanza de la Informática en las Licenciaturas en Matemáticas

por

José Luis Montaña Arnaiz

INTRODUCCIÓN

Desde la máquina de Turing –dispositivo puramente teórico–, hasta los computadores personales de hoy en día, pasando por la máquina de Von Neumann, la evolución de la Informática ha sido espectacular. En esta evolución las Matemáticas han jugado un papel muy relevante, proporcionando los conceptos teóricos necesarios para abordar la modelización, tanto de los computadores actuales como de los problemas tratables vía computador; desarrollando técnicas que permiten resolver, junto con las aportaciones de otras ciencias, problemas cotidianos en Ciencias e Ingeniería: simulación numérica, resolución simbólica, tratamiento estadístico de datos, algoritmos de compresión de la información, etc.

Esta relación estrecha entre las Matemáticas y la Informática es, a veces, difícil de percibir, dado que los usuarios de programas sólo ven el producto informático terminado y listo para ser utilizado en el computador. En esta relación, de doble vía, entre modelización y obtención del producto final, la Informática no se ha limitado, ni se limita, a proponer los problemas, sino que también ha generado un buen número de conceptos e ideas de indudable valor científico; y también ha despertado un gran interés, en todos los ámbitos de la Ciencia y la Ingeniería, por la creación y el análisis de modelos abstractos adaptados a determinados problemas de dichos ámbitos para que, posteriormente, puedan ser estos adecuadamente tratados en un computador.

Es por ello que, a nuestro juicio, existe hoy un acuerdo general acerca de lo fundamental y lo necesario de la Informática como objeto de docencia en las carreras de Ciencias y de Ingeniería. Esta necesidad fue primero detectada en las Escuelas de Ingeniería y –más lentamente, pero de un modo inexorable y definitivo– ha llegado hasta las Facultades de Ciencias.

En particular, constatamos que no existe ningún plan de estudios de Físicas, Químicas o Matemáticas que no recoja asignaturas troncales u obligatorias de Informática. En el caso de las Licenciaturas en Matemáticas, los planes de estudios elaborados bajo la nueva normativa recogen una asignatura troncal de nueve créditos, dedicada al estudio de la Informática.

La finalidad de este artículo es abordar la definición de los contenidos de esta materia, en otras palabras, describir, lo que, a nuestro juicio, deben ser los conocimientos mínimos que un matemático debe poseer en relación con la disciplina Informática.

PRINCIPIOS GENERALES DE NUESTRA PROPUESTA

Mi experiencia en la docencia de estas asignaturas en las titulaciones de Ciencias e Ingeniería, así como otras opiniones y referencias consultadas, sustenta la necesidad de consolidar un programa riguroso, con aspectos tanto formativos como informativos, sobre los fundamentos de la Informática, que sea aplicable, no a una titulación en particular, sino a la mayor parte de las titulaciones de Ciencias y de Ingeniería.

Esta idea no debería resultar novedosa para la Informática, dado que es la idea comúnmente admitida (al menos entre matemáticos) para otras asignaturas. A estas alturas nadie puede defender seriamente que exista un Álgebra Lineal o un Cálculo, específicamente diseñado para Físicos o para Ingenieros Industriales o para Ingenieros de Telecomunicación. . . . Pues bien, lo mismo es válido y aplicable a la Informática básica. Por citar un ejemplo, en las instituciones universitarias estadounidenses es habitual que el correspondiente Departamento de Informática imparta una o más asignaturas “de servicio”, dirigidas a estudiantes de titulaciones no informáticas, o incluso que imparta asignaturas en las que se matriculan tanto estudiantes de informática como estudiantes de otras carreras. La implantación de un programa común en todos los casos, salvo pequeñas adaptaciones, sólo tendría ventajas académicas y organizativas (optimización de recursos materiales y humanos, transferencia del profesorado de unos estudios a otros, convalidaciones, etc.).

Es cierto que toda asignatura de un plan de estudios debe estar contextualizada dentro del mismo. Pero llevar este principio al extremo no resulta enriquecedor ni positivo, dado que impide, en la práctica, la transmisión de los aspectos más importantes de aquellas materias que, no siendo nucleares de un plan de estudios determinado, son importantes en la formación de los profesionales de ese plan de estudios. En el caso particular de las Licenciaturas en Matemáticas, a nadie se le debería escapar que un tanto por ciento elevadísimo de los Licenciados en Matemáticas que desarrollan su actividad profesional fuera de la docencia o la investigación, ejercen como programadores o como administradores o diseñadores de sistemas.

También debemos constatar que, aún dentro de una unidad de planteamiento, deben existir ciertas diferencias entre los cursos básicos de Informática impartidos en titulaciones no Informáticas y los cursos básicos homólogos impartidos en las titulaciones media y superior de Ingeniería en Informática. Tales diferencias se deben, fundamentalmente, a que los planes de estudio de Informática pueden elaborarse de tal modo que los diversos conceptos de la disciplina se introduzcan en anchura (se cursan simultáneamente asignaturas correspondientes a varias áreas de la disciplina) y/o en profundidad (los mismos conceptos se revisan en diferentes niveles del plan de estudios, con profundidad y rigor crecientes). Esto es sólo y parcialmente aplicable a los planes de estudios de otras carreras. Como es natural, cada centro pretende formar profesionales competentes en la titulación escogida y que sus estudiantes reciban una sólida, pero no exhaustiva, formación informática.

Por desgracia, sobrepasando con mucho los matices anteriores, proliferan, a nuestro juicio, en los planes de estudios de las universidades españolas, asignaturas de Informática con descriptores y contenidos que deberían ser similares, pero cuya disparidad sólo puede explicarse en atención a los intereses corporativos y particulares de las distintas áreas, grupos profesionales y estamentos de la universidad. Son asignaturas de Informática elaboradas al gusto y a la medida de los especialistas, no en Informática, sino exclusivamente de las áreas de conocimiento dominantes en la titulación correspondiente. Más que la barbarie del especialismo, bien descrita en su momento por Ortega y Gasset, tales prácticas reflejan, sin duda, determinados abusos de un clientelismo cuya existencia está más extendida de lo que es debido en nuestra Universidad.

UNA DISTINCIÓN MUY IMPORTANTE

“...Supongamos que deseamos conocer el primo más pequeño de 100 cifras decimales. Tecleando en nuestra sesión de MAPLE la orden $\text{nextprime}(10^{99})$; obtenemos en pocos segundos...la respuesta $10^{99} + 289...$ ”.

La frase anterior, extraída de un artículo de la Sección de Matemática Computacional de *La Gaceta* (véase Tena, Vol. 3, n.º 3 (2000)), muy bien podría ser parte del contenido de una práctica de una asignatura de Matemáticas, probablemente Teoría de Números, que se realiza en un Aula de Informática; pero nunca debería formar parte de una práctica de una asignatura de Informática. Queremos decir con ello lo mismo que decía el matemático francés Philippe Flajolet, autor de prestigiosos trabajos en cálculo simbólico, en un texto dirigido a la Comisión Francesa de Reflexión sobre la Enseñanza de las Matemáticas (Comisión Kahane, 2001), esto es, que debemos distinguir claramente entre:

- la utilización de computadores y *software* científico en las prácticas de asignaturas de matemáticas, por una parte y
- el aprendizaje de los conceptos fundamentales sobre algoritmos y programación, de otra parte.

UTILIZACIÓN DE COMPUTADORES Y SOFTWARE

Indudablemente la potencia de cálculo de los computadores actuales permite nuevas experiencias en la enseñanza de las matemáticas. Hay programas que factorizan, derivan, integran, calculan desarrollos de Taylor, dibujan gráficas, simulan sucesos aleatorios, tratan datos estadísticos, etc. Sin embargo estas potencialidades de los computadores y programas no deben confundirse con la enseñanza de la informática. Incluso, mal utilizadas, obscurecerán más que beneficiarán dicha enseñanza.

El *software* más comúnmente utilizado, paquetes de dibujo de curvas, programas de visualización, paquetes de cálculo simbólico, *software* numérico, paquetes para el tratamiento estadístico de la información, no es, muchas veces,

un producto informático destinado a la industria o a la investigación, sino que más bien se trata de un programa informático caro cuya interfaz ha sido especialmente modificada para hacerla agradable en la enseñanza. Para analizar las consecuencias de la proliferación de este tipo de *software* podemos plantearnos un ejemplo habitual. Acudimos a un aula de informática, lanzamos un paquete de software simbólico y planteamos las operaciones habituales sobre polinomios, sumarlos/restarlos, multiplicarlos, evaluarlos en un punto, dibujar la gráfica de la función polinómica asociada, derivarlos, etc. Nos diluiremos en un montón de órdenes que nunca recordaremos ni haremos recordar a los alumnos, habremos distraído, incluso escamoteado, la reflexión sobre los objetos matemáticos involucrados y tampoco seremos capaces de provocar la reflexión sobre las estructuras de datos para la representación de un polinomio (para la mayoría de los matemáticos, erróneamente, la lista de sus coeficientes, lo que supone confundir el objeto matemático con el objeto informático) ni en los conceptos algorítmicos y de programación subyacentes para manipularlos (alternativas, bucles, gestión de una lista o de un grafo, recursividad...).

CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE PROGRAMACIÓN Y ALGORITMOS

Por otra parte, a nuestro juicio, resulta ilusorio pensar que la existencia de un *software* matemático tan sofisticado hace inútil el aprendizaje de las nociones de base de algorítmica y programación, o que éstas nociones son impropias de los estudios de un matemático. Los derroteros actuales de la investigación científica más puntera dan lugar a una actividad que va desde la matemática pura, pasando por la matemática aplicada, al producto informático final. Y en el desarrollo del producto informático deben intervenir activamente aquellos agentes involucrados en el estudio de los problemas que ha de resolver el producto. Queremos decir con ello que, por ejemplo, un sofisticado *software* simbólico o numérico debe ser desarrollado no sólo por ingenieros informáticos sino fundamentalmente por matemáticos, dado que la naturaleza de las técnicas a utilizar viene de las matemáticas. En definitiva, abogamos por una enseñanza de la informática que no convierta a los matemáticos españoles en meros usuarios de *software* científico, simbólico o numérico, del cual, en la mayor parte de los casos, los informáticos sólo han desarrollado la interfaz, sino que les ponga en situación de poder contribuir a crearlo.

Puede inducir a la reflexión lo que en el año 1948 escribía E. Borel (Borel, 1948) sobre los números:

“ Il est intéressant de classer les entiers qui peuvent être définis, d’après de temps nécessaire pour les définir, en admettant que l’on puisse, chaque second, prononcer un mot ou écrire un chiffre... Nous appellerons Hauteur d’un nombre le temps minimum nécessaire pour le définir (exprimé en seconds, d’après les conventions précédents)”.

Normalmente, la manera de representar los números enteros en un computador es su codificación bit. La longitud de dicha codificación bit es lo que en Teoría de Números se llama altura de un número. Sin embargo, la defini-

ción de Borel es mucho más próxima a la computación: el tiempo que cuesta computar el número.

Hay dos cosas a destacar en la anterior definición de E. Borel que subyacen en la resolución algorítmica de cualquier problema matemático, el papel de las estructuras de datos o cómo representar los objetos matemáticos (los números) por una parte, y la cuestión de la complejidad computacional (la altura) por otra. Es por ello que consideramos que ambos aspectos, estructuras de datos y complejidad computacional, deben integrarse en la formación básica en Informática en las Licenciaturas de Matemáticas.

PROPUESTA DE OBJETIVOS PARA LA ASIGNATURA TRONCAL “INFORMÁTICA”

Mientras que un programa, por ejemplo, de Cálculo Infinitesimal, en una titulación ajena a la Licenciatura de Matemáticas (de Ciencias o Ingeniería), tiene unos objetivos y un programa docente bien consolidados y relativamente invariables cualquiera que sea el plan de estudios a que corresponda o la universidad en la que se imparte, no sucede lo mismo con los Fundamentos de Informática. Cabe apuntar como causa de esta situación el hecho de que mientras en otras materias básicas de Ciencias, como la mencionada, hay muchos años de experiencia docente y, por lo tanto, textos clásicos, la enseñanza de Fundamentos de Informática se encuentra en una fase experimental. Esta experimentalidad queda patente en planes de estudio de la Licenciatura en Matemáticas en alguna de las grandes universidades españolas, donde existen –a tenor de lo que muestra la página web correspondiente– cuatro grupos de primer curso y cuatro programas distintos para la asignatura troncal de Informática.

A pesar de esta fase experimental, los programas docentes consultados a través de las páginas web de las distintas universidades españolas, apoyan la tesis de que la situación actual de la enseñanza universitaria de la asignatura troncal de Informática en los planes de estudios de la Licenciatura en Matemáticas es más homogénea de lo que pudiera derivarse del carácter novedoso de la materia en los citados planes de estudio. Es constatable una gran coincidencia, en buena parte de los centros, en primar los aspectos formativos frente a los puramente informativos y en ofrecer cursos que van más allá del aprendizaje sistemático de un lenguaje de programación o del uso de equipos informáticos y *software* especializado.

En la mayor parte de los casos se cubren los aspectos básicos de la programación de computadores: estructuras de control, tipos de datos simples y tipos de datos estructurados, utilizando en las prácticas un lenguaje de propósito general. En menor medida se cubren aspectos como el diseño descendente, la modularidad y técnicas de diseño de algoritmos iterativos o recursividad. La toma de contacto con los principios del análisis de eficacia de algoritmos no se refleja en prácticamente ningún programa.

También se pueden encontrar en el panorama universitario español, en el contexto de la Licenciatura en Matemáticas, cursos de informática, centrados exclusivamente en el aprendizaje de un lenguaje de programación o en el uso de

paquetes de cálculo numérico o simbólico, que no satisfacen, a nuestro juicio, los criterios mínimos de calidad exigibles en la enseñanza de la asignatura.

Lo deseable es el establecimiento de unos objetivos y principios generales que puedan ser aceptados por una mayoría de los docentes implicados en este tipo de asignaturas. Estos objetivos y principios deberían surgir de un amplio debate sobre el tema basado no sólo en la experiencia docente, sino también en la experiencia investigadora y profesional en la disciplina, que necesariamente repercute en la manera en que ésta se debe transmitir.

OBJETIVOS GENERALES

De acuerdo con mi propia experiencia son cuatro los objetivos generales que, bajo nuestro punto de vista, han de satisfacer las asignaturas de Fundamentos de Informática:

- Perspectiva general. Dar al alumno una perspectiva general de la informática como disciplina.
- Conceptos básicos. Dotar al alumno de un conjunto de conceptos básicos sobre la resolución algorítmica de problemas, las estructuras de datos y el análisis de las soluciones, con un enfoque riguroso.
- Técnicas de resolución de problemas. Capacitar al alumno para diseñar, analizar y, posteriormente, codificar en un lenguaje de programación soluciones algorítmicas correctas y eficaces a problemas de dificultad baja o media, con los criterios de calidad exigibles a tal nivel.
- Continuidad. Preparar al alumno para proseguir el estudio de otras asignaturas especializadas de Informática o relacionadas con ésta, que el alumno pudiera cursar dentro del plan de estudios. También deben proporcionársele los fundamentos adecuados para que el alumno afronte una situación nueva (p. e. aprender un nuevo lenguaje) mediante el estudio personal.

La asunción de estos cuatro objetivos introduce diferencias entre los cursos basados en ellos y cursos cuyo objetivo principal sea, por ejemplo, el uso de equipos informáticos o *software* específico. Estas diferencias se manifiestan principalmente en

- la proporción información/formación que ofrecen las asignaturas;
- la calidad científica de sus contenidos;
- la capacidad desarrollada por el alumno para cursar otras asignaturas o familiarizarse con nuevos conceptos a través del estudio personal.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS DE LA ASIGNATURA “INFORMÁTICA”

En tanto que la algorítmica constituye uno de los núcleos fundamentales de la informática, consideramos necesario que el núcleo del temario de una asignatura de Informática se centre en esta área en particular y, especialmente, en los conceptos y técnicas que involucran el diseño, corrección y análisis, y codificación de algoritmos, tal y como se expresa en los objetivos generales de la sección anterior. En apoyo de este argumento citaremos la introducción de *Computer Science. A Modern Introduction* (Goldschalager, Lister, 1982) en la que sus autores afirman:

“Una introducción a la disciplina [informática] debe ser una amplia panorámica de sus muchas facetas e interrelaciones, proporcionando a los no especialistas una perspectiva equilibrada de la informática, [...]. El curso introductorio tradicional consistente únicamente en la programación de computadores no satisface estos objetivos. [...] La noción de algoritmo es, a nuestro parecer, el concepto central de la informática. Por ejemplo, muchas ramas de la informática pueden caracterizarse en términos de diseño, análisis, expresión, ejecución y uso de algoritmos.”

Con esta premisa creemos que lo que el estudiante debe lograr respecto a estos objetivos generales es:

Respecto al diseño de algoritmos:

- Comprender el concepto de computación como sucesión de cambios de estado. Poder hacer un seguimiento simbólico del comportamiento de un algoritmo.
- Desarrollar el hábito de especificar los problemas con la mayor precisión posible.
- Adquirir dominio de una notación algorítmica sencilla que permita tratamiento por casos, secuenciación y repetición.
- Notar la necesidad de la tipificación de variables. Comprender el concepto de tipo.
- Asimilar el concepto de programación estructurada y aprender a aplicar las técnicas y herramientas derivadas: diseño descendente por niveles de abstracción, procedimientos con parámetros, esquemas algorítmicos, etc.
- Conocer los tipos simples de datos, su representación y propiedades, así como los tipos estructurados más utilizados.
- Entender el concepto de módulo y lo que éste aporta al diseño de algoritmos.
- Considerar la recursión como una alternativa válida a la iterativa.

Respecto a la corrección y análisis:

- Conocer los mecanismos básicos para determinar si un algoritmo es correcto o no. Poder aplicarlos sobre algoritmos sencillos. Incorporarlos progresivamente como herramientas de diseño.
- Saber apreciar la legibilidad, generalidad, reusabilidad y la elegancia en general como valores a tener en cuenta en un programa.
- Tomar contacto con los primeros conceptos asociados al análisis del coste de un algoritmo.

Respecto de la codificación:

- Adquirir un mínimo grado de destreza en el manejo del entorno de programación disponible. Ello debe incluir el manejo, a nivel de usuario, de un sistema operativo y las herramientas de programación disponibles, editor de texto orientado al lenguaje, compilador y depurador.
- Aprender de forma sistemática un lenguaje de programación de alto nivel, preferiblemente de propósito general, que soporte programación estructurada y modularidad.
- Poder codificar, mediante dicho lenguaje, cualquier algoritmo previamente diseñado por el propio alumno.
- Habituar a presentar el producto final convenientemente documentado.

CONCLUSIONES

Existe entre las Matemáticas y la Informática una solidaridad en los aspectos fundamentales que reposa en la historia (baste sólo mencionar a Turing o a Von Neumann) y también en la práctica actual; sin embargo, no tiene sentido que ésta solidaridad sea contradictoria.

Queremos decir con ello que, durante el último siglo, la Informática no se ha limitado a aportar herramientas técnicas para el tratamiento de la información sino que ha desarrollado sus propios conceptos, métodos e ideas y ha aportado numerosos problemas y retos a las Matemáticas, que justifican el no ocultar la presentación de la Informática bajo el aspecto de una rama de la Ciencia de carácter puramente instrumental. Tal es así que algunos de los retos más destacados de la matemática actual, que ocupan a numerosos matemáticos de prestigio, tienen su origen en la Informática clásica: baste mencionar la resolución de la conocida, y todavía abierta, *conjetura de Cook* consistente en mostrar que existen problemas tratables no determinísticamente que, sin embargo, no son tratables bajo un modelo de cómputo determinístico; o el problema de mostrar funciones booleanas *difíciles de computar*. En ambos casos es reseñable que algunos intentos especialmente brillantes de resolución de

los problemas antes planteados han dado lugar a más de una medalla Nevalinna: baste mencionar las concedidas a los matemáticos, Tarjan, Razborov o Valiant. Y también que, recientemente, el prestigioso Instituto Clay ha señalado la resolución de la *conjetura de Cook* como uno de los siete problemas abiertos más destacados de la Matemática actual.

El computador no es sólo una máquina de escribir o una calculadora que permite procesar texto o representar gráficas, es un autómatas gobernado por un programa y, dependiendo del programa, ejecuta una u otra tarea. Desde los distintos campos de conocimiento y, especialmente, desde las Matemáticas, debemos asumir la responsabilidad de aprender y enseñar la Ciencia de la Computación más allá de la utilización de programas y recursos informáticos. Ello exige en los currícula de las distintas titulaciones y, en particular, en las licenciaturas de marcado carácter científico o técnico, un esfuerzo por enseñar los conceptos fundamentales de la disciplina Informática.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] BOREL, E.: “La définition en mathématiques”, *Les Grands Courants de la Pensée Mathématique, Cahier du Sud*, (1948) 24-34.
- [2] COMMISSION KAHANE, COMMISSION DE RÉFLEXION SUR L’ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES: “Informatique et enseignement des mathématiques”, <http://www.smf.emath.fr>, (2001).
- [3] GOLDSCHLAGER, L., LISTER, A.: “Computer Science. A Modern Introduction”, *Prentice-Hall International*, (1982).
- [4] SIAM WORKING GROUP ON CSE EDUCATION: “Graduate education in Computational Science and Engineering”, *SIAM Review*, **43**, (2001) 163-177.
- [5] TENA, J.: “Test de Primalidad”, *La Gaceta de la RSME*, **3.3**, (2000) 567-573.

José Luis Montaña Arnaiz
Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación
Universidad de Cantabria
39071- Santander
correo electrónico: montana@matesco.unican.es