

Juegos de azar paradójicos

por

Juan M.R. Parrondo

LOS JUEGOS PARADÓJICOS ORIGINALES

Supongamos una moneda ligeramente trucada, de forma tal que la probabilidad de obtener “cara” al lanzarla al aire sea $p = 1/2 - \epsilon$, en donde ϵ es un número pequeño y positivo. Con ella, a la que denominaremos moneda A , le ofrezco jugar del siguiente modo: cada vez que salga cruz le doy mil pesetas y cada vez que salga cara usted me da mil pesetas a mí. Si usted dispone de un capital ilimitado, debería aceptar sin dudarle un momento: si $X(t)$ es lo que llevo ganado después de jugar t veces —lo llamaremos el “capital”— no le será difícil demostrar que el valor medio de esta ganancia, $\langle X(t) \rangle$, es una función estrictamente decreciente de t (mientras que *su* ganancia es estrictamente creciente con t).

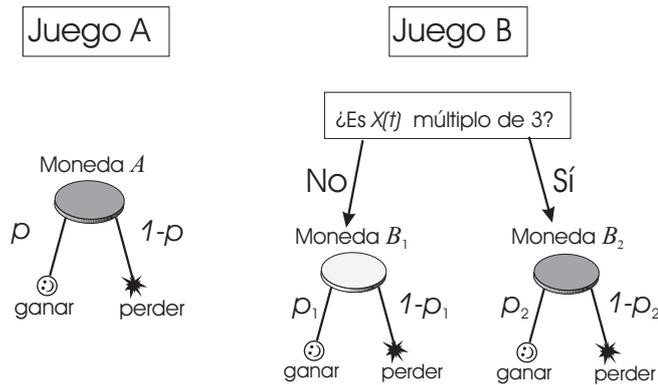


Figura 1: Reglas de los juegos A y B. Los valores de las probabilidades son: $p = 1/2 - \epsilon$, $p_1 = 3/4 - \epsilon$ y $p_2 = 1/10 - \epsilon$, con ϵ un número pequeño y positivo, que favorece en todos los casos la opción “perder”. El color más claro de la moneda B_1 indica que en esta moneda la probabilidad de ganar es mayor que $1/2$ y que, por tanto, se trata de una moneda favorable.

Ahora le propongo un segundo juego en el que se utilizan dos monedas, que llamaremos B_1 y B_2 . La moneda B_2 se lanza cuando lo que llevo ganado es múltiplo de tres y la moneda B_1 en el resto de los casos (recuerde que la ganancia puede ser negativa; por múltiplo de tres entendemos cualquier número entero que se pueda escribir como $3n$ con n entero). La probabilidad de que yo gane con la moneda B_1 es $p_1 = 3/4 - \epsilon$ y con la moneda B_2 , $p_2 = 1/10 - \epsilon$, tal y como se muestra en la figura 1. El análisis de este segundo juego no es

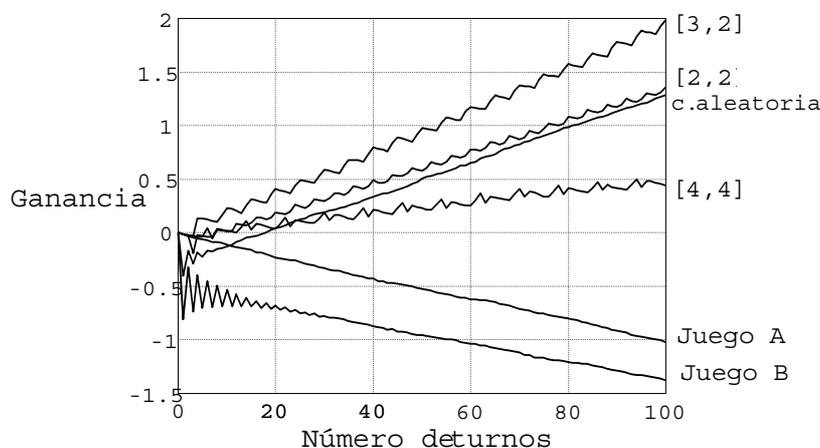


Figura 2: Ganancia media (sobre 5 000 jugadores), en función del número de turnos, en cada uno de los juegos y en varias de sus combinaciones. En todos ellos $\epsilon = 0.0005$ y se ha utilizado la notación $[a, b]$ para indicar que se juega a turnos al juego A seguidos de b turnos del juego B.

tan simple como en el caso anterior. Sin embargo, puede demostrarse (ver la sección siguiente y la figura 2) que el juego es también favorable para usted, en el sentido de que el valor medio de mi ganancia o capital $\langle X(t) \rangle$ es de nuevo una función estrictamente decreciente de t . Llamemos A al primero de los juegos que hemos descrito y B al segundo.

Una vez que está usted convencido de que yo pierdo en ambos juegos, le haré una tercera proposición: alternemos los dos juegos siguiendo la secuencia AABBAABB... Si usted frunce el ceño, puedo modificar ligeramente la propuesta para hacerla menos sospechosa: en cada turno, elijamos al azar cuál de los dos juegos jugamos.

Si acepta cualquiera de estas dos propuestas habrá confiado demasiado en su intuición, sin tener en cuenta que los sistemas aleatorios, aún tan simples como los que hemos descrito, pueden comportarse de manera sorprendente.

En efecto, tanto si alternamos los juegos formando una secuencia fija, AABBAABB..., como si lo hacemos de forma aleatoria, el resultado es que mi ganancia media $\langle X(t) \rangle$ es una función *estrictamente creciente* de t . La figura 2 muestra mi ganancia en distintas situaciones: juegos A y B por separado, varias combinaciones periódicas y la combinación aleatoria.

ANÁLISIS DETALLADO DE LOS JUEGOS

El fenómeno descrito en la sección anterior se conoce como *Paradoja de Parrondo*, está recibiendo cierta atención [1, 2, 3, 4] y se piensa que puede tener aplicaciones en distintos ámbitos, como economía o teoría de la evolución. El optimismo acerca de las posibles aplicaciones de la paradoja se justifica por el hecho de que el fenómeno puede en principio aparecer en cualquier situación en la que se combinen dos o más dinámicas aleatorias. Sin embargo, debemos hacer notar que hasta ahora no se ha descrito ninguna situación real en la que tenga lugar un efecto similar.

Antes de analizar los juegos en detalle, quisiera discutir un argumento que, a pesar de ser erróneo, ayuda a comprender el mecanismo subyacente a la paradoja. El argumento concluye que el juego B no es justo sino ganador y consiste en suponer que la moneda B_2 se lanza un tercio de las veces mientras que la moneda B_1 se lanza dos tercios de las veces. De ser así, la probabilidad de ganar sería:

$$\begin{aligned} P_{\text{ganar}} &= \frac{2}{3}p_1 + \frac{1}{3}p_2 \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4} - \epsilon\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{10} - \epsilon\right) \\ &= \frac{8}{15} - \frac{5}{6}\epsilon \end{aligned} \tag{1}$$

que, para $\epsilon = 0$, es ligeramente superior a $1/2$, indicando que B es un juego ganador. Esta conclusión es falsa porque lo es la suposición inicial: la moneda B_2 se lanza con una frecuencia mayor que $1/3$, debido a que el capital tiene una probabilidad alta de oscilar entre un múltiplo de 3, digamos $3n$, y su inmediato inferior, $3n - 1$.

Es decir, son las propias reglas del juego B las que rompen la uniformidad de la distribución de probabilidad del capital ganado. Las verdaderas frecuencias con las que se lanza cada moneda pueden calcularse mediante la teoría de *cadena de Markov* [5]. El juego B, así como la combinación aleatoria de A y B, puede reducirse a una cadena de Markov de tres estados [5]. Estos tres estados son: ganancia igual a un múltiplo de 3, a un múltiplo de 3 más 1, o a un múltiplo de 3 más 2. La variable que determina estos tres estados es

$$Y(t) \equiv X(t) \pmod{3}, \tag{2}$$

que puede tomar sólo tres valores: 0, 1 ó 2. La matriz de probabilidades de transición para esta cadena de Markov, cuando se juega únicamente el juego B, es:

$$\Pi_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 - p_1 & p_1 \\ p_2 & 0 & 1 - p_1 \\ 1 - p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

en la que el elemento $(\Pi_B)_{ij}$ es igual a la probabilidad de saltar del estado j al i en un turno. La distribución de probabilidad $\vec{\pi}(t) = (\pi_0(t), \pi_1(t), \pi_2(t))$ (utilizamos subíndices 0, 1 y 2 para que coincidan con los posibles valores de $Y(t)$) verifica la ecuación de evolución:

$$\vec{\pi}(t+1) = \Pi_B \vec{\pi}(t). \quad (4)$$

Esta distribución $\vec{\pi}(t)$ tiende, para $t \rightarrow \infty$, a una distribución estacionaria $\vec{\pi}^{\text{est}}$ que es la solución de [5]:

$$\vec{\pi}^{\text{est}} = \Pi_B \vec{\pi}^{\text{est}}, \quad (5)$$

es decir, $\vec{\pi}^{\text{est}}$ es el autovector de la matriz Π con autovalor 1. La distribución estacionaria se alcanza a los pocos turnos, como puede verse en las gráficas. Por ello, podemos utilizarla para definir juego justo, ganador y perdedor¹. La probabilidad de ganar, una vez alcanzada esta distribución estacionaria, es:

$$P_{\text{ganar}} = [\pi_1^{\text{est}} + \pi_2^{\text{est}}] p_1 + \pi_0^{\text{est}} p_2. \quad (6)$$

Cuando se juega únicamente el juego B, la probabilidad de utilizar la moneda B_2 , es decir π_0^{est} , no es 1/3 sino ligeramente superior. Por esta razón el argumento que conducía a la ecuación (1) es incorrecto. La verdadera probabilidad con la que se utiliza la moneda B_2 se puede calcular resolviendo (5) y resulta ser:

$$\pi_0^{\text{est}} = \frac{5}{13} - \frac{440}{2197}\epsilon + \dots \quad (7)$$

en donde hemos depreciado términos de orden ϵ^2 para simplificar la exposición.

Aplicando (6), obtenemos la siguiente probabilidad de ganar para el juego B:

$$P_{\text{ganar}} = \frac{1}{2} - \frac{147}{169}\epsilon + \dots \quad (8)$$

que es menor que 1/2 para cualquier ϵ positivo. Vemos entonces que el juego B es en efecto un juego perdedor, de acuerdo con la simulación presentada en la figura 2.

¿Qué ocurre cuando combinamos aleatoriamente los juegos A y B? La combinación aleatoria puede tratarse de la misma forma que el juego B. Matemáticamente tiene la misma estructura: puede reducirse a una cadena de Markov de tres estados con una matriz de transición que tiene una forma

¹A lo largo de todo este trabajo, consideraremos juego *justo* aquél en el que la ganancia media es constante en el estado estacionario. Se trata de una definición aceptable, pero sin embargo difiere, y es más débil, de la definición utilizada en la teoría de la probabilidad, para la que juego justo es aquél en el que la ganancia es una *martingala*. Es inmediato comprobar que el capital en el juego B no es una martingala.

similar a la matriz Π_B definida en (3). Más concretamente, la matriz se puede escribir como:

$$\Pi_{\text{aleat}} = \frac{1}{2} (\Pi_A + \Pi_B), \quad (9)$$

en donde la matriz Π_A es la matriz de transición del juego A, es decir:

$$\Pi_A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 + \epsilon & 1/2 - \epsilon \\ 1/2 - \epsilon & 0 & 1/2 + \epsilon \\ 1/2 + \epsilon & 1/2 - \epsilon & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Diagonalizando la matriz Π_{aleat} obtenemos la probabilidad con la que jugamos cada moneda en la combinación aleatoria, que ahora es:

$$\pi_0^{\text{est}} = \frac{245}{709} - \frac{48880}{502681}\epsilon + \dots \quad (11)$$

y es menor que la calculada en (7). Finalmente, la probabilidad de ganar en la combinación aleatoria de los dos juegos es:

$$P_{\text{ganar}} = \frac{727}{1418} - \frac{486795}{502681}\epsilon + \dots \quad (12)$$

que es mayor que $1/2$ si ϵ es suficientemente pequeño.

Este análisis nos proporciona la siguiente explicación intuitiva de la paradoja. El juego B utiliza dos monedas: una “mala”, la moneda B_2 , y otra “buena”, la moneda B_1 (en la figura 1 todas las monedas desfavorables se muestran más oscuras). Cuando se juega sólo el juego B, la probabilidad de utilizar la moneda “mala” es mayor de un tercio. El juego A, a pesar de consistir en una única moneda “mala”, redistribuye las frecuencias con las que se juegan las dos monedas del juego B haciendo que la moneda “buena” se utilice un mayor número de veces. Ésta es la esencia de la paradoja: en el juego B coexisten dos tendencias, una ganadora y otra perdedora, y, cuando se juega aisladamente, la tendencia perdedora es dominante; el papel del juego A es invertir esta dominancia. A pesar de que el juego A es perdedor, el efecto de potenciar la moneda “buena” del juego B es mayor que la propia tendencia perdedora de A y el resultado neto es que la combinación de A y B es ganadora.

Que el juego A disminuya la frecuencia con que se juega la moneda B_2 no debe extrañarnos. Esa frecuencia es mayor que un tercio cuando se juega sólo B. Por otra parte, el juego A es un simple camino aleatorio cuyo efecto es “aleatorizar” el capital, es decir, hacer que su distribución de probabilidad sea más parecida a la distribución uniforme.

La combinación periódica puede tratarse también como una cadena de Markov con probabilidades de transición dependientes del tiempo. La evolución de la distribución de probabilidad es:

$$\vec{\pi}(t + a + b) = \Pi_A^a \Pi_B^b \vec{\pi}(t) \quad (13)$$

si el juego A se juega a veces seguidas de b turnos del juego B. La probabilidad estacionaria verifica en este caso

$$\vec{\pi}^{\text{est}} = \Pi_A^a \Pi_B^b \vec{\pi}^{\text{est}}. \quad (14)$$

Obsérvese que esta distribución de probabilidad no es en realidad un invariante de la ecuación de evolución temporal, sino que se trata de uno los $a + b$ estados de una órbita periódica con periodo $a + b$. En cualquier caso, a partir de $\vec{\pi}^{\text{est}}$ pueden calcularse todos los estados de dicha órbita y, a partir de éstos, las probabilidades de ganar en cada paso. El cálculo es más tedioso que en el caso de la combinación aleatoria pero puede realizarse sin dificultad, al menos para a y b pequeños, con algún programa de cálculo numérico o simbólico. Merece la pena destacar que la combinación $[1, 1]$, es decir, la sucesión ABABAB... es, para $\epsilon = 0$, un juego justo, de modo que en este caso no tiene lugar la paradoja. Por el contrario, la combinación óptima, es decir, aquélla en la que es máxima la probabilidad de ganar, es la $[1, 2]$ o ABBABB..., para la que $P_{\text{ganar}} = 0.52545\dots$

Finalmente, no le será difícil demostrar al lector que las pendientes de las curvas que aparecen en la figura 2 se pueden calcular en función de la probabilidad de ganar, ya que :

$$\langle X(t+1) \rangle - \langle X(t) \rangle = 2P_{\text{ganar}} - 1. \quad (15)$$

JUEGOS INDEPENDIENTES DEL CAPITAL

El juego B descrito en la sección anterior es un juego de azar un tanto artificial y parece difícil encontrar ejemplos reales en donde alguna cantidad aleatoria evolucione de forma parecida a cómo lo hace el capital $X(t)$ en dicho juego². La razón fundamental de este carácter artificial es que las reglas de B dependen del capital ganado. ¿Es posible encontrar juegos paradójicos con reglas independientes del capital? La respuesta es sí: es posible eliminar la dependencia de las reglas en el capital pero únicamente si consentimos que éstas dependan de la *historia* del juego, es decir, de los últimos resultados del mismo.

Consideremos el juego B', que se juega con cuatro monedas, B'_1, \dots, B'_4 , dependiendo del resultado del juego en las dos anteriores jugadas. Las reglas vienen dadas por la siguiente tabla:

Penúltimo turno $t - 2$	Último turno $t - 1$	Moneda	Prob. de ganar en t	Prob. de perder en t
perder	perder	B'_1	p_1	$1 - p_1$
perder	ganar	B'_2	p_2	$1 - p_2$
ganar	perder	B'_3	p_3	$1 - p_3$
ganar	ganar	B'_4	p_4	$1 - p_4$

²Aunque sí es posible encontrar un sistema físico con una evolución similar: una partícula browniana en un campo eléctrico asimétrico e intermitente [6, 7]. De hecho este ejemplo inspiró los juegos originales [3, 4, 8]

En este caso el capital $X(t)$ no es un proceso de Markov. Sin embargo, el vector:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} X(t) - X(t-1) \\ X(t-1) - X(t-2) \end{pmatrix} \quad (16)$$

que sólo puede tomar los cuatro valores $(\pm 1, \pm 1)$, sí forma una cadena de Markov. Podemos de nuevo aplicar la teoría de cadenas de Markov al proceso $Y(t)$. En este caso la matriz de probabilidades de transición es:

$$\Pi_{B'} = \begin{pmatrix} 1-p_1 & 0 & 1-p_3 & 0 \\ p_1 & 0 & p_3 & 0 \\ 0 & 1-p_2 & 0 & 1-p_4 \\ 0 & p_2 & 0 & p_4 \end{pmatrix} \quad (17)$$

y de nuevo el autovector con autovalor 1 es igual a la distribución de probabilidad estacionaria:

$$\vec{\pi}^{\text{est}} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} (1-p_3)(1-p_4) \\ (1-p_4)p_1 \\ (1-p_4)p_1 \\ p_1p_2 \end{pmatrix} \quad (18)$$

en donde N es una constante de normalización.

Podemos calcular ahora la probabilidad de ganar en el régimen estacionario:

$$P_{\text{ganar}} = \sum_{i=1}^4 \pi_i^{\text{est}} p_i = \frac{p_1(p_2 + 1 - p_4)}{(1-p_4)(2p_1 + 1 - p_3) + p_1p_2} = \frac{1}{2 + c/s} \quad (19)$$

en donde $s = p_1(p_2 + 1 - p_4)$, que es siempre positivo, y

$$c = (1-p_4)(1-p_3) - p_1p_2. \quad (20)$$

Por lo tanto, el carácter del juego B' se ajusta al siguiente criterio: si $c < 0$, B' es ganador; si $c = 0$, B' es justo; y si $c > 0$, B' es perdedor. De nuevo, por ganador, justo y perdedor entendemos que el valor medio $\langle X(t) \rangle$ sea, respectivamente, una función monótona creciente, constante o monótona decreciente.

Combinemos ahora aleatoriamente el juego B' con uno A similar al descrito en la sección anterior, en el que la probabilidad de ganar sea siempre p y la de perder $1-p$. Esta combinación puede tratarse de forma análoga. El vector $Y(t)$ definido en (16) sigue siendo una cadena de Markov cuya matriz de probabilidades de transición es

$$\Pi_{\text{aleat}} = \frac{1}{2} (\Pi_A + \Pi_{B'}) \quad (21)$$

que tiene la misma forma que $\Pi_{B'}$ pero con las probabilidades reemplazadas por $p'_i = (p_i + p)/2$.

Reuniendo todos estos resultados, podemos concluir que la paradoja tendrá lugar siempre que encontremos un conjunto de 5 probabilidades, p y p_i ($i = 1, 2, 3, 4$), que verifiquen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} 1 - p &> p \\ (1 - p_4)(1 - p_3) &> p_1 p_2 \\ (2 - p_4 - p)(2 - p_3 - p) &< (p_1 + p)(p_2 + p). \end{aligned} \quad (22)$$

La primera y la segunda aseguran que son perdedores los juegos A y B', respectivamente, mientras que la tercera desigualdad (que es simplemente la segunda invertida y con las p'_i en lugar de las p_i) hace que la combinación aleatoria sea ganadora.

El argumento expuesto en la sección anterior acerca de las monedas “buenas” y “malas”, nos indica que, para obtener la paradoja, una de las monedas del juego B' debe ser “mala” y utilizarse más de un cuarto de las veces. No puede ser B'_1 ni B'_4 porque la frecuencia de uso de estas dos monedas está ligada al carácter ganador o perdedor del juego y sus combinaciones (si B'_1 se utiliza más frecuentemente que B'_4 , es obvio que el juego es perdedor). Las monedas “malas” deben ser por tanto la B'_2 y/o la B'_3 . En efecto, la paradoja se puede reproducir con la siguiente elección:

$$p = 1/2 - \epsilon, \quad p_1 = 9/10 - \epsilon, \quad p_2 = p_3 = 1/4 - \epsilon, \quad p_4 = 7/10 - \epsilon. \quad (23)$$

Con estas probabilidades la dos primeras desigualdades en (22) se satisfacen siempre que $\epsilon > 0$, mientras que la tercera lo hace si $\epsilon < 1/168 = 0.00595\dots$. Por tanto, estos juegos presentan la paradoja si $0 < \epsilon < 1/168$.

Una simulación de estos juegos se representa en la figura 3 y muestra cómo el capital medio decrece para cada uno de los juegos A y B', mientras que crece para las combinaciones periódica y aleatoria. De nuevo, utilizando (15), las pendientes de estas curvas son fáciles de calcular en función de la probabilidad de ganar, P_{ganar} , dada por la ecuación (19). Algunos detalles adicionales sobre estos nuevos juegos y su análisis pueden encontrarse en la referencia [9].

CONCLUSIONES

Hemos mostrado dos ejemplos de parejas de juegos paradójicos, en donde la tendencia de cada uno de ellos por separado se invierte cuando se alternan. En el primer ejemplo, uno de los juegos obedece reglas que dependen del capital ganado hasta el momento. En el segundo, esta dependencia se ha eliminado, pero a costa de incluir otra en los últimos resultados de la partida, que hace que el capital ganado deje de ser un proceso de Markov [9]. Sin embargo, este segundo ejemplo es más susceptible de encontrar aplicación en alguna situación

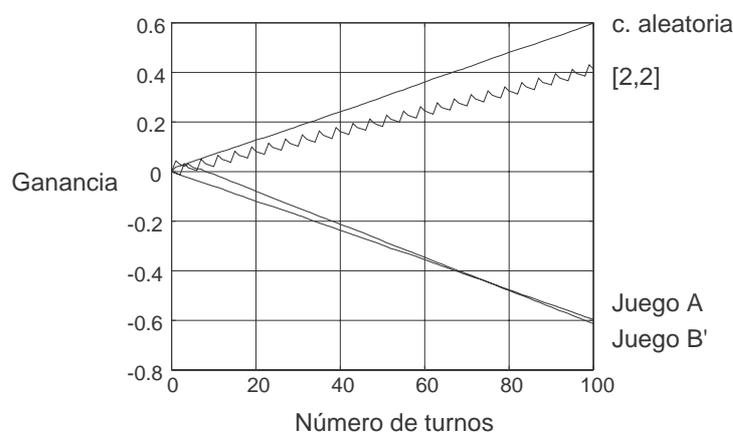


Figura 3: Evolución del capital medio en función del número de turnos. Las dos curvas inferiores corresponden a los juegos A y B' jugados individualmente. Como en la figura anterior, [2,2] denota la combinación AABBA... La curva superior corresponde a la combinación aleatoria entre A y B'. En estas simulaciones $\epsilon = 0.003$ y se ha promediado sobre 500 000 jugadores. El resto de las probabilidades son las estudiadas en el texto: $p = 1/2 - \epsilon$, $p_1 = 9/10 - \epsilon$, $p_2 = p_3 = 1/4 - \epsilon$, y $p_4 = 7/10 - \epsilon$.

real, ya que existen muchas situaciones en economía, física o dinámica de poblaciones, descritas mediante dinámicas aleatorias con memoria.

En cualquier caso, la relevancia de estas paradojas es que ponen de manifiesto que la combinación de dinámicas estocásticas puede dar lugar a una dinámica completamente distinta de las originales. Pienso no sólo en lo descrito en este artículo, que el crecimiento de una determinada cantidad se invierta en la combinación, sino en otros posibles efectos como: la creación de estructuras o patrones espaciales combinando dinámicas que, por separado, den lugar sólo a estados uniformes; una sustancial reducción o amplificación del tiempo de relajación de un sistema cuando se alternan dinámicas; cambios de estabilidad de soluciones, etc.

El papel de estos juegos paradójicos, y los que quizá les sigan reproduciendo alguno de los fenómenos mencionados en el párrafo anterior, es invitar a investigadores de muy diversas áreas a explorar los efectos de la combinación o alternancia de dinámicas, ya que los juegos nos están indicando que alguno de estos efectos puede ser sorprendente y desafiar nuestra intuición. Cualquiera puede pensar ejemplos de combinaciones de este tipo: alternancia de estrategias económicas, alternancia de temperatura o luminosidad en reacciones químicas, o alternancia de presión ambiental en dinámica de poblaciones.

Desde un punto de vista puramente matemático, es interesante detectar los mecanismos básicos de la paradoja, generalizarla a otras situaciones y en-

contrar cuáles son los ingredientes necesarios para que ocurra. En este trabajo he abordado alguno de estos puntos, exponiendo el mecanismo de “reorganización de tendencias” y mostrando con un ejemplo cómo el capital o bien obedece reglas que dependen del mismo o bien debe ser no markoviano.

El lector interesado en otras generalizaciones (reglas módulo M , combinaciones de más de un juego) puede consultar [10] o algunas de las referencias citadas en [9]. Finalmente, Pearce en [11] ha estudiado los juegos desde un punto de vista diferente, analizando la entropía de las cadenas de resultados en cada uno de los juegos y en sus combinaciones.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] HARMER G.P. y ABBOTT D.: *Parrondo's paradox*. Statistical Science **14**, 206–213 (1999).
- [2] HARMER G.P. y ABBOTT D.: *Losing strategies can win by Parrondo's paradox*. Nature **402**, 864 (1999).
- [3] HARMER G.P., ABBOTT D., TAYLOR P.G. y PARRONDO J.M.R.: *Parrondo's paradoxical games and the discrete Brownian ratchet*. En ABBOTT D. y KISH L.B., editores: *Proc. 2nd Int. Conf. on Unsolved Problems of Noise (UPoN'99) Adelaide, Australia, 11.15th July 1999*. AIP Conference Proceedings **511**, pp. 189–200, American Institute of Physics, Nueva York (2000).
- [4] PARRONDO J.M.R. y JIMÉNEZ DE CISNEROS B.: *Juegos paradójicos y máquinas térmicas brownianas*. Revista Española de Física, **14**, número 3, 24–28 (2000).
- [5] KARLIN S. y TAYLOR H.M.: *A First Course in Stochastic Processes*. Academic Press, Nueva York (1975).
- [6] AJDARI A. y PROST J.: *Mouvement induit par un potentiel périodique de basse symétrie: diélectrophorèse pulsée*. C.R. Acad. Sci. Paris II, **315**, 1635–1639 (1992).
- [7] ASTUMIAN R.D. y BIER M.: *Fluctuation driven ratchets: molecular motors*. Phys. Rev. Lett. **72**, 1766–1769 (1994).
- [8] PARRONDO J.M.R., BLANCO J.M., CAO F. y BRITO R.: *Efficiency of Brownian motors*. Europhys. Lett. **43**, 248–254 (1998).
- [9] PARRONDO J.M.R., HARMER G.P. y ABBOTT D.: *New paradoxical games based on Brownian ratchets*. Phys. Rev. Lett. **85**, 5226–5229 (2000).
- [10] PEARCE C.E.M.: *On Parrondo's paradoxical games*. En ABBOTT D. y KISH L.B., editores: *Proc. 2nd Int. Conf. on Unsolved Problems of Noise*

- (UPoN'99) Adelaide, Australia, 11.15th July 1999. AIP Conference Proceedings **511**, pp. 201–206, American Institute of Physics, Nueva York (2000).
- [11] PEARCE C.E.M.: *Entropy, Markov information sources and Parrondo games*. En ABBOTT D. y KISH L.B., editores: *Proc. 2nd Int. Conf. on Unsolved Problems of Noise (UPoN'99) Adelaide, Australia, 11.15th July 1999*. AIP Conference Proceedings **511**, pp. 207–212, American Institute of Physics, Nueva York (2000).

Juan M.R. Parrondo
Dep. Física Atómica, Molecular y Nuclear
Universidad Complutense de Madrid
28040-Madrid, Spain.
correo electrónico: