El valor estético de las Matemáticas

por

Antonio J. Durán

1 Postulados y definiciones

¿Hay belleza en los razonamientos matemáticos? Antes de precisar lo que entiendo por belleza y por razonamientos matemáticos concluyo que sí, que la hay, y me parece tan elemental, claro y explícito este hecho que incluso lo postulo como el axioma primero de estas reflexiones:

Postulado 1: *Hay belleza en los razonamientos matemáticos.*

Dicho de otra forma: un razonamiento matemático es un objeto estético (en este caso fenoménico o intencional) entendido más que como objeto físico o sensorial, que no lo es —y ya casi me estoy adelantando a los comentarios propios del segundo postulado—, como depositario de significado y valor estético.

El axioma segundo, y último, viene a matizar este comienzo que a muchos les estará pareciendo excesivamente optimista:

Postulado 2: *Es difícil apreciar la belleza de los razonamientos matemáticos.*

Conviene ya, sin más dilación, precisar el sentido en que voy a utilizar los términos *belleza* y *razonamiento matemático*.

No considero oportuno, ni creo que sea tampoco necesario, adentrarse en ningún tratado de Estética en busca de alguna sofisticada definición de belleza, o de valor estético, que cuadre con mis propósitos; por contra, lo más apropiado para éstos es acudir al diccionario de la Real Academia Española y consultar la entrada correspondiente a *belleza*, ya veremos lo que tal aventura nos depara —en este caso, como casi siempre, fue una aventura acudir al diccionario—. En primer lugar leemos:

belleza: *Propiedad de las cosas que nos hace amarlas, infundiendo en nosotros deleite espiritual.*

Ésta es una magnífica definición. Desde luego refleja muy bien la peripecia personal de la mayoría de los matemáticos que conozco (desde luego la mía propia): atribuyen la atracción, curiosidad e interés que en grado superlativo sienten por las matemáticas —¿será eso amarlas?— a la belleza que encuentran en ellas. Sin embargo matizaría algo lo del *deleite espiritual*: la capacidad de infundir, de causar deleite espiritual sería más potencial que en acto, lo que no hace sino aumentar el interés por la cosa al situar la recompensa del placer (deleite) dentro de lo posible pero no seguro. En cualquier caso, esta capacidad de afectarnos es esencial para la apreciación estética; como escribió Voltaire en su diccionario filosófico: «para el gusto no basta ver o conocer la belleza de una obra: hay que sentirla, ser afectado por ella».

La encendida felicitación a los académicos de la lengua que me proponía hacer, por su definición de belleza, se trunca trágicamente cuando leo el resto de la entrada:

Esta propiedad (la belleza) existe en la naturaleza y en las obras literarias y artísticas.

¿Y en las científicas? Tan imperdonable olvido por parte de los adalides de la gramática casi me obliga, en venganza, a escribir sin acentos estas reflexiones. Finalmente, como el lector está comprobando, he dejado para mejor ocasión ese órdago al orden gramatical establecido.

En cuanto al término razonamientos matemáticos, lo usaré en sentido amplio, de manera que incluya, no sólo demostraciones, o partes de una prueba, sino también enunciados de teoremas, definiciones de conceptos, teorías enteras e incluso razonamientos más o menos heurísticos o con poca fundamentación lógica. Y, por supuesto, las ideas matemáticas y las combinaciones de ideas matemáticas —términos estos que usaré como sinónimos, pues una idea matemática viene normalmente a ser una combinación de otras ideas y conceptos matemáticos—.

2 Desarrollo comentado de los postulados

Una vez aclarado con que significados voy a usar los términos belleza y razonamientos matemáticos dedicaré unos párrafos a comentar y a analizar con algo más de detalle los postulados anteriores.

2.1 ¿Dónde hay que buscar la belleza?

Hay belleza en los razonamientos matemáticos, establece el primer postulado. Obviamente no voy a discutir sobre el grado de verdad de este axioma, más bien responderé a la pregunta natural que uno se hace al enunciarlo: hay belleza, pero ¿dónde hay que buscarla?, ¿dónde reside?

Trataré de ilustrar con un ejemplo: ¿dónde reside la belleza del Partenón[1]?

Mediante una atenta observación del edificio comprobamos que sus dimensiones son armónicas, sus columnas de proporciones adecuadas, con modificaciones para corregir la ilusión óptica: levemente inclinadas hacia dentro, diámetro ligeramente ampliado en su parte central, columnas más gruesas en los extremos; incluso las líneas horizontales del edificio (las líneas horizontales

[1]Como comprobará el lector que tenga la paciencia de completar la lectura de estas reflexiones, todos los ejemplos, de los que con afán ilustrativo y clarificador iré echando mano, corresponden a las llamadas Bellas Artes. En muchos casos serán ejemplos arriesgados porque el principal, y casi único, objetivo de las obras de arte es proporcionar placer estético (no es este el caso de la Arquitectura), mientras que en matemáticas aparte de proporcionar este placer, hay un claro propósito utilitario (entiéndase: la resolución de un problema); creo, sin embargo, que este riesgo potencia la utilidad de tales ejemplos, por otra parte casi imprescindibles en unas reflexiones como éstas.

El Partenón

de entablamentos y escalinatas, por ejemplo) están curvadas para que parezcan rectas, evitando así, en palabras de Jorge Santayana, la sequedad y rigidez propia de la línea recta larga –quizá esta curvatura se justifica también, según ha apuntado O. Tusquets, por las razones menos estéticas y más prácticas de desaguar el agua de lluvia que entraba en el peristilo–. Y, en fin, armonía también en los elementos decorativos que lo adornaban y enriquecían, incluso cuando se ubicaban en huecos tan difíciles de componer como los triángulos achatados que forman los frontones de las fachadas principales, y que sólo podemos ya disfrutar haciendo un esfuerzo de imaginación ayudados por dibujos, planos y algunos restos no demasiado bien conservados.

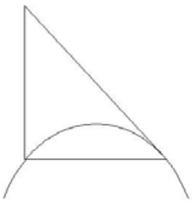


Figura 1

No parece, pues, difícil concluir que la belleza del edificio reside en la armonía de los elementos arquitectónicos que lo forman. Abstrayendo esta conclusión nos preguntamos, ¿qué forma los razonamientos matemáticos? Parece claro que las ideas, las ideas matemáticas. O sea, que la belleza de los razonamientos matemáticos hay que buscarla entonces en la combinación armónica de las distintas ideas matemáticas que los componen.

Esta conclusión, que ha sido alcanzada aquí por un procedimiento algo indirecto, ya la apuntó G. H. Hardy hace más de medio siglo en su opúsculo "Autojustificación de un matemático". En ese libro, que volveremos a encontrar de manera determinante en otro momento de estas reflexiones, Hardy escribió: «un matemático, lo mismo que un pintor o un poeta es un constructor de configuraciones; su material básico son las ideas. Las configuraciones construidas por un matemático, lo mismo que las de un pintor o un poeta deben poseer belleza; las ideas, los colores y las palabras deben ensamblarse de un modo armónico. No hay un lugar permanente para las matemáticas desagradables desde el punto de vista estético».

Antes de seguir con las reflexiones conviene mostrar un ejemplo de combinación armónica de ideas matemáticas. He elegido el cálculo de la cuadratura de un segmento de parábola tal y como lo hizo Arquímedes en el "*Método*". Eliminando todos los aspectos secundarios y las demostraciones, el razonamiento es como sigue. Arquímedes comparó el área de la parábola con la del triángulo cuya base es el segmento que cierra el trozo de parábola, su la-

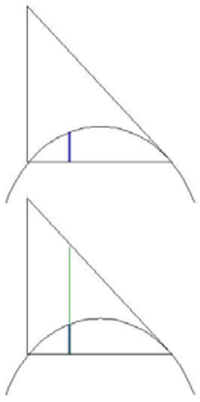


Figura 2

do izquierdo está sobre la perpendicular a su base y su lado derecho sobre la tangente a la parábola (figura 1).

Arquímedes consideró que tanto el área de la parábola como la del triángulo están formadas por segmentos rectos perpendiculares a la base del triángulo (figura 2)[2].

A continuación comparó estos segmentos que forman las áreas usando una balanza. El brazo de la balanza está sobre el segmento que une el último punto de la base del triángulo con el vértice de la parábola, su eje de giro es el punto de corte con la altura del triángulo, que es, además, el punto medio entre el extremo izquierdo de la balanza y el último punto de la base del triángulo (primer dibujo de la figura 3); el extremo derecho de la balanza es el punto de corte con el segmento de los que forman el triángulo. Entonces, si se mantiene este segmento de los que forman el triángulo en su sitio y se traslada el segmento de los que forman la parábola al otro extremo de la balanza (segundo dibujo de la figura 3), ésta queda equilibrada (tercer dibujo de la figura 3). En consecuencia, trasladando la parábola segmento a segmento Arquímedes consiguió equilibrar en la balanza la parábola con el triángulo y, por tanto, obtuvo que la relación entre sus áreas es inversa a la relación de los correspondientes brazos de la balanza (figura 4).

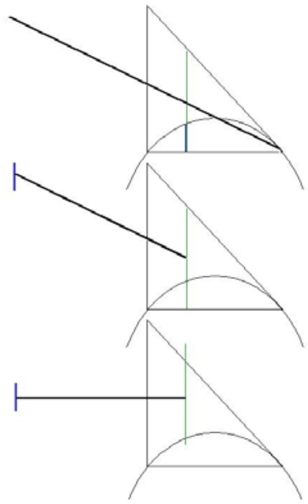


Figura 3

Está relación es 3 : 1, de donde resulta que el área de la parábola es la tercera parte del área del triángulo.

Podemos señalar las ideas matemáticas y apreciar la armonía de su composición: Arquímedes consideró el área del triángulo y el área del segmento de parábola como una colección de segmentos rectos, entonces comparó estos segmentos uno a uno mediante una balanza ideal y, finalmente, recuperadas las áreas originales, redujo la relación entre ellas a un problema de proporción entre los brazos de la balanza.

Una vez concluido que la belleza de los razonamientos matemáticos radica en la armonía de las ideas matemáticas de que constan, alguien podría objetar que más que resolver el problema no hemos hecho sino precisarlo, pues, ¿no es

[2]Ésta es una idea revolucionaria que no se volvería a producir en matemáticas hasta el siglo XVII: casi dos mil años después de la muerte de Arquímedes —recuérdese que los argumentos que se están reproduciendo aquí pertenecen al libro del "*Método*" que estuvo perdido hasta que se recuperó una copia, escrita bajo un texto de carácter religioso, a principios de este siglo—.

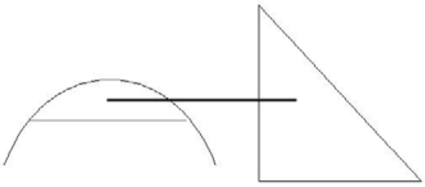


Figura 4

acaso la armonía, uno de los problemas esenciales de la Estética[3]? Por el momento no voy a profundizar sobre el significado, la forma o la esencia de la armonía de las ideas matemáticas, dejaré tal análisis para la sección 3.

Daré por establecido aquí, que hay una *innata* y *común* capacidad para reconocerla en la estructura de ideas que conforma un razonamiento matemático, una vez que esa estructura es captada.

Lo que sí me interesa señalar es que la armonía es un concepto muy amplio, afectado por múltiples factores y que se puede plasmar de muchas y variadas maneras, incluso usando planteamientos manifiestamente opuestos y contradictorios. Merece la pena ilustrar estas consideraciones con algunos ejemplos.

La fontana de Trevi

Volvamos al ámbito de la arquitectura. La armonía se puede lograr con una abundancia (casi un exceso) de elementos decorativos —como ocurre en la Fontana de Trevi que N. Salvi diseñó para el papa Clemente XII, y donde un mundo de formas escorzadas, divergentes y radiales avanza desde el centro de la pared con el agua en todos los sentidos— o bien, por la ausencia de elementos ornamentales —como es el caso del edificio del Banco de China del arquitecto I.M. Pei, con apenas unos sencillos motivos geométricos adornando la fachada—. Este mismo esquema puede ser trasladado a las matemáticas, donde la armonía puede derivar de una abundancia, casi exceso, de elementos computacionales que trasmiten una sensación de esfuerzo, pesantez —es el caso de la demostración de la trascendencia del número π, basada en una abundancia, aparentemente caótica, de cálculos que, sin embargo, se rigen de manera casi mágica por las propiedades estructurales de una familia de polinomios ortogonales que, como un arcano aparecen controlando toda la misteriosa demostración—, o bien, puede lograrse justo por lo contrario, esto es, por una ausencia de cómputos que transmita una extraña

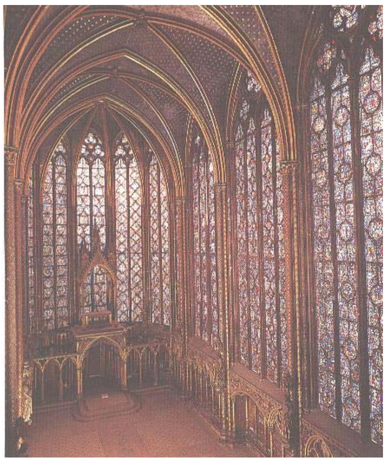
[3]Por cierto, pronto se relacionó la armonía con las matemáticas, o mejor dicho, con los números: fue justamente cuando los pitagóricos descubrieron la relación entre los tonos musicales emitidos por una cuerda que vibra y la medida de su longitud, o la existencia de una determinada razón entre los lados de algunos rectángulos que les proporciona las proporciones más armónicas (razón áurea).

sensación de levedad —como ocurre en el teorema de Euclides sobre la existencia de infinitos primos, del que escribió Hardy: «la demostración tiene el aspecto de una simple y bien delineada constelación sin complicaciones de detalle»—.

Banco de China

Pero también la armonía es variable en cuanto a su localización. Unas veces está en el interior de los edificios, o de los teoremas —como es el caso de la Sainte Chapelle de París, o bien, en el ejemplo de la cuadratura de la parábola antes considerado: el enunciado (área del segmento de parábola igual a la tercera parte del área del triángulo), aún siendo interesante, sólo es un palidísimo reflejo de la belleza interior, puesta de manifiesto por Arquímedes, entre la combinación de ideas desplegada y las armonías geométricas internas de la figura—. O bien, puede ubicarse en el exterior del edificio, o en el enunciado del teorema —sería el caso de la fachada del Obradoiro de la catedral de Santiago, o bien, el del teorema que asegura la existencia de sólamente cinco poliedros regulares: ninguna de sus demostraciones alcanza, al menos para mí, el calificativo de bella, lo que si ocurre con el enunciado—.

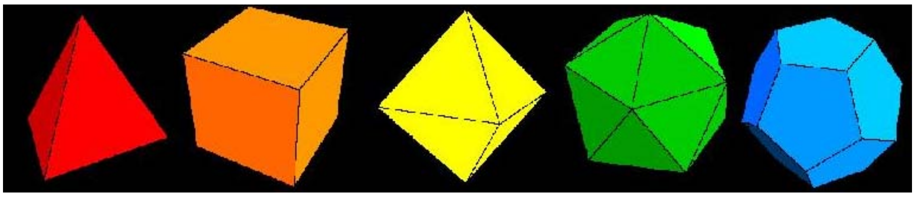
Y, como último ejemplo, la armonía puede ser consecuencia de aspectos manifiestamente contradictorios, como pueden ser la elegancia, sutileza o delicadeza de la composición —como el Patio de los Leones de la Alhambra, o el teorema de Gauss sobre la caracterización del número n de lados de un polígono regular para que pueda ser construido con regla y compás: $n = 2^k p_1 \cdots p_h$, con k y h números naturales y $p_1, \cdots, p_h$ primos de Fermat (números de la forma $2^{2^m} + 1$ que, además, son primos), todo un prodigio de elegancia y delicada conjunción de



Sainte Chapelle

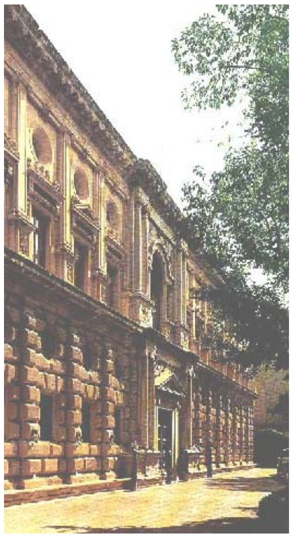
Catedral de Santiago

teoría de números y construcciones geométricas con regla y compás— o, por contra, la solidez y contundencia —como la que se aprecia en el Palacio de Carlos V, o en la potencia de conceptos y teorías como los del cálculo diferencial e integral que compensa su menor elegancia (en comparación con la geometría sintética griega, o la teoría de números, por ejemplo) con su increíble capacidad para modelizar y resolver problemas no sólo del análisis, sino también de la geometría, la física o la ingeniería—.



Los cinco poliedros regulares

Alhambra



Palacio de Carlos V

2.2 ¿Porqué es difícil apreciar la belleza?

Según el primer postulado hay belleza en los razonamientos matemáticos y ya hemos discutido dónde radica. Conviene ahora responder a la pregunta implícita en el segundo postulado: ¿por qué es difícil apreciarla?

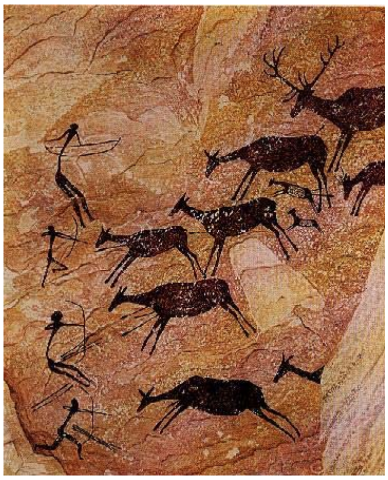


Figura 5

Expondré de entrada mi tesis: sostengo que la razón principal que dificulta la apreciación de la belleza en los razonamientos matemáticos es la falta de un sentido apropiado para aprehender las estructuras de ideas donde radica. Antes de pasar a discutir esta aseveración conviene ilustrar con algunos ejemplos exteriores a las matemáticas, en la línea en que ya antes se ha hecho.

Empezaré con la pintura. Según lo discutido anteriormente, podemos afirmar que la belleza de un cuadro radica en la combinación armónica de elementos tales como la forma, los colores, la composición, el espacio y la luz, incluso la textura[4].

El matrimonio Arnolfini

Pues bien, en cada caso, el elemento pictórico correspondiente es aprehendido directamente mediante el sentido de la vista, al igual que las interrelaciones totales entre ellos.

Empecemos considerando la pintura rupestre de la figura 5. La vista nos da cuenta de que unas **formas** son ciervos, otras personas, de que nos encontramos ante una escena de caza. Mediante un solo golpe de vista hemos captado toda la estructura de formas de esa pintura; ahora el cerebro podrá decidir sobre su armonía.

Igualmente basta un golpe de vista para aprehender el **colorido**

[4]Por razones utilitarias consideraré en este ejemplo una visión puramente formalista de la pintura dejando, por tanto, sin valoración estética los valores vitales que pueda tener: emoción, ideas, etc.

del cuadro de Van Eyck “El matrimonio Arnolfini” (también habría hecho falta algo más de presupuesto para imprimir la Gaceta en color); de forma automática el cerebro dispone de la información cromática para decidir sobre la belleza del cuadro.

De nuevo la vista percibe de modo automático la **composición** del fresco de Rafael “La escuela de Atenas”: la distribución de personajes –entre los que podemos reconocer a Pitágoras, Euclides, Ptolomeo, y por supuesto Platón y Aristóteles– en grupos simétricos, su ubicación dentro de la sucesión de cúpulas que alberga la escena, la profundidad creada por la perspectiva. Toda la información es llevada automática y rápidamente al cerebro por la vista para que éste decida.

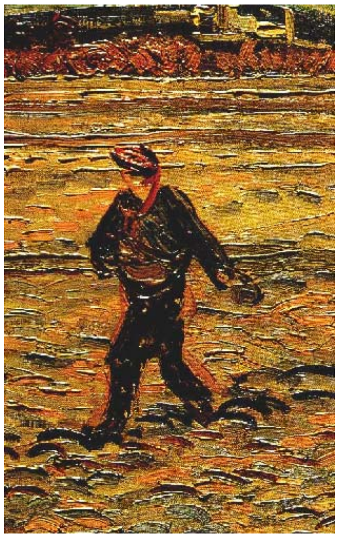
Nada escapa a la vista, ni el **espacio** ni la **luz** creadas por Velázquez en “Las meninas” y que llenan toda la escena del cuadro; incluso la **textura** de la pincelada en “El sembrador” de Van Gogh, como si tocáramos el cuadro, es captada por la vista, casi suplantando al tacto, y transmitida al cerebro para que éste dictamine sobre el valor estético del cuadro.

La escuela de Atenas

Parecidas consideraciones se pueden hacer para la música en relación con el sentido del oído[5]: el oído va poniendo automática y secuencialmente a disposición del cerebro los elementos rítmicos, de cadencia, compositivos, etc.; con esta información el cerebro decidirá sobre la armonía de los diversos elementos y sobre la belleza de la pieza.

[5]Por supuesto hay que considerar en este ejemplo el carácter cinético de la música (irrelevante en pintura); en palabras de Monroe C. Beardsly «al ser la música un arte temporal, fluye con el tiempo: se agita, salta, se ondula, se vuelve impetuosa, se eleva, titubea, se mueve de continuo». En este sentido tiene más parecido que la pintura con los razonamientos matemáticos que también están afectados por una ordenación temporal.

Las meninas



El sembrador (detalle)

También son válidas todas estas consideraciones para situaciones más complejas donde intervengan varios sentidos, como es el caso de la gastronomía. Aquí intervienen prácticamente todos los sentidos y por tanto el cauce sensorial es más complejo pero igualmente eficaz; si nos centramos en la cata de un vino, empezando por el oído que transmite el sonido de la caída del vino en la copa (informando sobre el equilibrio glicerina/alcohol), siguiendo con la vista que transmite la tonalidad, intensidad y brillo de los colores, el olfato que ofrece al cerebro todo un mundo de información camuflado entre olores (variedad de uva, proceso de elaboración, condiciones de almacenamiento, etc.), el gusto que transfiere la distribución y equilibrio entre los cuatro sabores básicos, y acabando por el tacto (paso de boca), que detalla la armonía interna de las distintas componentes dentro del líquido, todos los sentidos ponen en conocimiento del cerebro las propiedades organolépticas que nos permiten valorar (estéticamente) un vino[6].

Finalmente, consideraré un ejemplo más cercano a lo que ocurre en matemáticas: la literatura. En este caso, es la vista –el oído, si nos leen, o el

[6]En este ejemplo hay que suponer unas mínimas condiciones iniciales sobre el individuo para la valoración estética: ausencia de determinados compromisos religiosos o morales que le impidan la valoración –esto, en menor medida, también es aplicable a la pintura o escultura: piénsese en la célebre sala secreta del palacio de los Austrias donde se ocultaban las pinturas con desnudos–, una cierta cultura y educación del paladar (incluyendo el olfato) que se traduzca en la capacidad para apreciar, distinguir y reconocer sabores y olores –lamentablemente no nos educan en la escuela sobre los olores y sabores como sí se hace con los colores–, y, por supuesto, haber evitado la amenaza de la atrofia sensorial que produce la tiranía de atarse sólo a unos pocos sabores y olores. Bastaría un pequeño esfuerzo de abstracción para trasladar, en gran medida, estos impedimentos al disfrute de los razonamientos matemáticos. Es un ejercicio que dejo al lector.

tacto, si se lee en Braille– la que traslada al cerebro la distintas peripecias que conforman una novela, o los distintos versos que componen un poema. Pero frente al automatismo con que el cerebro capta los elementos pictóricos de un cuadro, ahora el cerebro debe hacer una cierta labor de análisis. Esto es debido a que el objeto estético, en el caso de la literatura, no consta de percepciones visuales, auditivas, olfativas o táctiles, sino que está constituido de significados y éstos no son percibidos sensorialmente, son, por contra, producto de un esfuerzo, más o menos intenso, del pensamiento. Digamos que la literatura tiene valor estético pero no perceptivo.

Creo que los ejemplos anteriores ilustran, y justifican, bastante bien mi tesis inicial: es difícil aprehender la belleza de los razonamientos matemáticos porque no tenemos un sentido apropiado para captar la configuración de ideas donde radica. Es conveniente aclarar, sin embargo, que captar la configuración de ideas es previo al análisis o a la captación de la belleza que la configuración posee, de sus armonias, etc. Estaríamos en la etapa previa a aplicar nuestra capacidad de *juicio*, donde según Kant radica el hecho de lo estético o el gusto, esto es, «la facultad de juzgar un objeto o una representación mediante una satisfacción o un descontento, sin interés alguno» ("Crítica del juicio"). Lo que he pretendido poner de manifiesto es la dificultad de captar aquello que vamos a someter al juicio del gusto.

A los razonamientos matemáticos les ocurre como a la literatura, tienen valor estético pero no perceptivo: la apariencia, la forma (en el sentido hegeliano) de los razonamientos matemáticos, que es lo que apreciamos sensorialmente, es irrelevante desde el punto de vista estético; lo importante radica en su contenido que no se aprehende por un acto de percepción sino por un proceso de pensamiento discursivo. Una vez aprehendida la estructura de ideas generará –o no, depende de cada cual– un cierto placer estético (deleite espiritual como recoge el diccionario); este placer objetivado que, si sabemos destilarlo se obtiene, es la categoría estética central, la cualidad del razonamiento matemático que le otorga belleza (que podría haber escrito J. Santayana en "El sentido de la belleza").

La vista, el oído o el tacto ponen al alcance del cerebro el enunciado de un teorema o su demostración, pero la estructura de ideas no tiene por qué estar explícita en esa demostración. A menudo ocurre que la estructura de ideas está escondida tras la reelaboración lógica que las demostraciones de los teoremas sufren, aparece fraccionada y rota por pasos intermedios y demostraciones de hechos secundarios que nos ocultan la trama de ideas y nos impide apreciar su armonía. La captación por el cerebro de la estructura de ideas no es automática, sino fruto de un estudio, un análisis de los elementos que componen la prueba, una purga de lo prescindible, y una reordenación y recomposición de las ideas principales. Al no ser un proceso automático no siempre se tiene éxito a la hora de llevarlo a cabo; puede depender de la mayor o menor capacidad y preparación matemática que se tenga, del esfuerzo que se realice, etc.

Finalmente apuntaré, para acabar esta sección, otro hecho significativo que abunda en favor de mi tesis. Si analizamos la antigüedad, o la frecuencia con que disfrutamos de las distintas artes se observa que las que disponen de un sentido (o varios) específicos para hacer llegar al cerebro la composición, donde en cada caso radica la belleza, son los de más antiguo origen (salvo aquellas más tardías por evidentes razones tecnológicas) y más frecuente disfrute: pintura, escultura, arquitectura y música (o el cine, en su faceta de verlo y oírlo: las películas de evasión). Por contra, las que necesitan, además de uno o varios sentidos, un esfuerzo discursivo por parte del cerebro para descubrir la estructura, ya sea de ideas, como ocurre en matemáticas, o de situaciones como en la literatura, son más recientes y mucho menos frecuentes.

3 Un intento de objetivar la belleza de los razonamientos matemáticos

Pongámonos ahora en el caso de haber aprehendido la estructura de ideas de una razonamiento matemático, ¿se podrá, entonces, objetivar las características de las ideas y de sus configuraciones que les confieren la capacidad de generar belleza? Es, desde luego, tarea complicada, aunque yo lo voy a intentar —pero teniendo siempre en mente la recomendación de Santayana: «sentir la belleza es cosa mejor que entender cómo la sentimos»—. Para eso me voy a coger del brazo de un gigante (ya no se lleva eso de subirse a sus hombros) que me aconseje y acompañe en este paseo lleno de dificultades.

G.H. Hardy (1941)

El gigante es el *autoproclamado* quinto mejor matemático puro de su tiempo —proclama muy propia de quien tanto amaba el *criquet*— tal y como se nos presenta en su opúsculo "Autojustificación de un matemático". Se trata naturalmente de Hardy. Antes de entrar en materia me conviene reproducir el siguiente párrafo del magnífico prólogo de C.P. Snow[7]: «"Autojustificación de un matemático" siempre que sea leído con la atención que se merece, es un libro de devastadora tristeza. Ciertamente es ingenioso y agudo, con un humor muy intelectual; no es menos cierto que la claridad cristalina y el candor siguen todavía presentes; no hay duda alguna de que es el testamento de un artista creador. A pesar de todo no es menos cierto que se trata de una forma estoica de lanzar un apasionado lamento por el poder de creación del que se ha gozado y que ya nunca jamás volverá». Comprenderá el lector que, en unas

[7]Por cierto, en la reciente polémica sobre el equilibrio entre ciencias y letras en la enseñanza secundaria, hubiera venido bien rescatar los pensamientos de este escritor y científico inglés sobre las dos culturas —quizá también las de Descartes—, la humanística y la científica; aunque sólo fuera para confirmar, una vez más, que a estas alturas de la vida la comunicación entre ambas parece, efectivamente, imposible.

reflexiones como éstas, no podía desaprovechar el guiño que suponen las expresiones «artista creador», o, «poder de creación», referidas a un matemático. (ver a este respecto la nota 12 más adelante).

Recuerdo que según el propio Hardy, un matemático es un constructor de configuraciones cuyo material básico son las ideas. Parece, pues, que una objetivación de la belleza pasa por indicar que cualidades fundamentales confieren a una idea matemática el valor estético[8]. Hardy apuntó dos aspectos esenciales de carácter intrínseco, es decir, aspectos calificativos de su propia naturaleza de objeto; son: la generalidad y la profundidad. A estas dos añadió otras tres, no ya propiedades, sino capacidades, es decir, disposiciones que miden la capacidad de la idea para producir una determinada respuesta estética; Hardy las llamó calidad de los inesperado, de lo inevitable y economía.

Conviene ir ilustrando con un ejemplo las reflexiones de Hardy sobre estas propiedades y capacidades. Los ejemplos que Hardy aportó en la "Autojustificación" son excesivamente simples —debido a la audiencia a quien iba dirigida el libro, como el mismo reconoció: «los ejemplos que presente deben ser muy simples, inteligibles para todo lector que no posea conocimientos matemáticos especializados»—. Yo he preferido considerar un ejemplo más complejo pero que me dará más juego para ilustrar perfectamente todos los argumentos de Hardy en torno al valor estético de las ideas matemáticas y relacionarlos con otras consideraciones sobre estética extraídas de la filosofía. Se trata de como sumó Euler la serie $\sum_n \frac{1}{n^2}$ en su "*Introductio in analysin infinitorum*". La historia del problema es la siguiente: cuando, en el año 1673 Leibniz logró sumar la serie $\sum_n \frac{1}{n(n+1)}$,[9] cuentan que quedó tan entusiasmado que afirmó poder sumar cualquier otra —esa actitud tan optimista, que bien pudiera ser una exageración histórica, cuadra sin embargo, como Voltaire no dudaría en certificar, con la personalidad de Leibniz—. Alguien, con la peor de las intenciones imaginables, le propuso entonces que sumara la serie $\sum_n \frac{1}{n^2}$; a fin de cuentas, podría haber dicho el malintencionado, el cálculo de esa suma no puede ser tan complicado siendo los sumandos casi iguales a los de la serie que ya había sumado Leibniz. Casi medio siglo hubo que esperar hasta que alguien la lograra sumar. Ese alguien fue Leonard Euler.

Euler procedió del siguiente modo. Comenzó por unos cálculos sencillos, aparentemente estériles y sin conexión con el problema que pretendía resolver; se trataba, concretamente, del cálculo de los factores cuadráticos del polinomio $a^n - z^n$, que son $a^2 - 2az\cos\left(\frac{k}{n}\pi\right) + z^2$, donde k toma todos los valores pares

[8]En alguna ocasión he oído comentar la, un tanto incomprensible, insistencia que Hardy hizo en su "Autojustificación" sobre la inutilidad de las matemáticas. Desde mi punto de vista lo que Hardy estaba vindicando con esa insistencia es que, en las matemáticas, se debe cumplir también la premisa kantiana del arte como finalidad sin fin.

[9]Descomponiendo, igual que hoy seguimos haciendo, en fracciones simples.

entre 2 y $n-1$; además el polinomio tiene los factores simples $a-z$ y, si n es par, $a+z$. Esto, que aparentemente es trivial, se convirtió en mágico cuando Euler lo aplicó a la función exponencial. Euler la escribía como $e^x = \left(1+\frac{x}{i}\right)^i$, donde i es el número *infinite parvus*, esto es, un número infinitamente grande[10]. Usando esta sugerente forma de escribir la exponencial tenemos que

$$e^x - e^{-x} = \left(1+\frac{x}{i}\right)^i - \left(1-\frac{x}{i}\right)^i;$$

tomando $a = \left(1+\frac{x}{i}\right)$, $z = \left(1-\frac{x}{i}\right)$ y $n = i$, obtenemos para $e^x - e^{-x}$ los siguientes factores cuadráticos

$$\left(1+\frac{x}{i}\right)^2 - 2\left(1+\frac{x}{i}\right)\left(1-\frac{x}{i}\right)\cos\left(\frac{2k}{i}\pi\right) + \left(1-\frac{x}{i}\right)^2, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

junto con el factor simple $2x/i$ (este factor se puede reducir al factor constante $1/i$ considerando la función $\left(e^x - e^{-x}\right)/2x$). Como i es infinitamente grande, Euler tomó

$$\cos\left(\frac{2k}{i}\pi\right) = 1 - \frac{2k^2}{i^2}\pi^2,^{11}$$

lo que simplifica los factores anteriores hasta

$$\frac{4k^2\pi^2}{i^2}\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2} - \frac{x^2}{i^2}\right), \quad k = 1, 2, \cdots.$$

Euler despreció el termino x^2/i^2 por ser i infinitamente grande y estar elevado al cuadrado (¿por qué debe estar elevado al cuadrado para poder eliminarlo?), y obtuvo la descomposición en producto infinito:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2x} = c\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots,$$

donde la constante c es el producto de los factores constantes $\frac{4k^2\pi^2}{i^2}$, $k = 1, 2, \cdots$ y el $1/i$. Evaluando la igualdad en $x = 0$ se obtiene el valor 1 para la constante c, por tanto:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots.^{12}$$

[10]Es lo que hoy nosotros escribimos como $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

[11]Los dos primeros términos del desarrollo de Taylor para el coseno, que diríamos hoy.

[12]Al principio de esta sección aparecieron las expresiones «artista creador» y «poder de creación», referidas a un matemático. Hay quien sostiene que el término «creadores» no

Desarrollando en serie de potencias la expresión $(e^x - e^{-x})/2x$ y haciendo el cambio de variable $x^2 = \pi^2 z$ se obtiene finalmente que

$$(1+z)\left(1+\frac{z}{2^2}\right)\left(1+\frac{z}{3^2}\right)\cdots = 1 + \frac{\pi^2 z}{3!} + \frac{\pi^4 z^2}{5!} + \frac{\pi^6 z^3}{7!} + \cdots. \tag{1}$$

Ya estamos muy cerca del objetivo: Euler mostró entonces que es lo que ocurre cuando se desarrolla un producto finito como el que hay a la izquierda en la igualdad anterior: si

$$(1+az)(1+bz)(1+cz)(1+dz) = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 \tag{2}$$

entonces

$$a+b+c+d = A;$$

Euler entendió que lo que valía para productos finitos y polinomios, valía también para productos infinitos y series de potencias, lo que aplicado a (1) da:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$ [13]

debería aplicarse a los científicos en general, y a los matemáticos en particular, puesto «que es creador quien fabrica algo que sin él nunca hubiera llegado a ser, el que trae algo al mundo que sin él nunca podría haber existido precisamente de ese modo y no de otro más o menos parecido» (cito a Fernando Savater en "Las preguntas de la vida", aunque también se podrían citar científicos, a François Jacob en "Mosca, ratón y hombre", por ejemplo y por citar obras muy recientes). En este sentido podemos decir que Euler no es el creador de la fórmula que origina este pie de página puesto que si Euler no la hubiera descubierto, algún otro lo habría hecho más tarde o más temprano. Pero, pregunto yo, ¿y la justificación que da Euler de esa fórmula y que he recogido arriba? Desde mi punto de vista sí podemos llamarlo un acto de creación. Esa manera de descubrir lleva el sello inconfundible de Euler; al igual que no podemos imaginar "Las meninas" sin Velázquez, yo no puedo imaginar esos razonamientos sin Euler. De hecho se puede citar un ejemplo más contundente que casi es una prueba irrefutable de lo que digo: la forma como Arquímedes encuentra el área de la parábola en el "Método" (véase la sección 2). Podemos decir que Arquímedes **descubre** la fórmula para cuadrar la parábola, pero su manera de proceder, descomponiendo en segmentos y *pesándolos*, tan cargada de valor estético es una creación suya en el pleno sentido usado antes por Savater: «sin él nunca podría haber existido precisamente de ese modo y no de otro más o menos parecido»; nunca mejor dicho: nadie logró nunca repetir los razonamientos de Arquímedes, que no fueron conocidos hasta principios de este siglo cuando se recuperó el "Método", esto es, Arquímedes es creador porque ningún otro salvo él logró darle existencia a esa forma tan hermosa de encontrar el área de la parábola.

[13] Conviene hacer un par de comentarios sobre el rigor lógico de estos razonamientos de Euler. En primer lugar tienen más rigor del que parece: no se olvide que nosotros mayoritariamente manejamos el sistema estándar de los números reales donde no caben números ni infinitamente pequeños ni infinitamente grandes; Euler manejaba, en cambio, un sistema de números reales más parecido al no estándar, desarrollado con total solvencia lógica por A. Robinson en la década de los sesenta del siglo XX, y donde sí es posible manejar, en parecidos términos a como lo hace Euler, tanto lo infinitesimal como lo infinitamente grande. En

Una vez presentado el ejemplo de Euler, retomemos el hilo argumental de Hardy sobre las dos propiedades esenciales cuya presencia dota a las ideas matemáticas de valor estético; escribió Hardy: «hay dos aspectos que parecen ser esenciales, una cierta generalidad y una cierta profundidad, pero ninguna de ambas cualidades puede ser definida con precisión de un modo sencillo».

En relación a la generalidad de las ideas Hardy puntualizó: «una idea matemática significativa, un teorema matemático serio, debe ser general en un cierto sentido de dicho término. Tales ideas deben integrarse en varios esquemas matemáticos, deben poder ser empleadas en las demostraciones de teoremas de diversos tipos diferentes. El teorema debe ser tal que, aun habiendo sido planteado originariamente en una forma muy especializada, sea susceptible de ser extendido a otras ramas y constituya el punto de referencia para toda una clase de teoremas de idéntico tipo. Las relaciones reveladas a lo largo de la demostración deberán ser tales que interrelacionen varias ideas matemáticas distintas». Y para que no quepa duda de la dificultad de precisar el término generalidad acaba: «todo cuanto acabo de indicar es sumamente vago y queda sujeto a todo tipo de reservas».

Ilustremos con el ejemplo de Euler: ¿hay generalidad, en el sentido que Hardy explicó, en la suma de Euler? Dividamos los razonamientos de Euler en dos partes: hasta la obtención del producto infinito y lo que sigue. En la primera parte aparece un uso genial del infinito como herramienta para la comprensión de las funciones: es la gran aportación que hizo Euler en ese libro. El *juego* con el infinito, que le permitió obtener el desarrollo en producto para $e^x - e^{-x}$, es tan sólo uno más de los muchos que, con gran generalidad y versatilidad, Euler hizo a lo largo del "*Introductio*" con esta herramienta/idea y que le permitió, entre otras muchas cosas, obtener los desarrollo en serie de potencias para las funciones elementales sin hacer uso del cálculo diferencial e integral.

Pero es, en la segunda parte de sus razonamientos, donde se puede apreciar todavía mejor la generalidad de sus argumentos en el sentido considerado por Hardy. En efecto, para el cálculo de la suma sólo se ha usado uno de los coeficientes del desarrollo en serie de potencias del producto infinito; si consideramos el resto de coeficientes de las potencias que aparecen en (2) se

---

segundo lugar, Euler deja bien claro en el prólogo del "*Introductio*" que está descubriendo (descubriendo la fórmula, pero creando la estructura de ideas que la justifica), y en consecuencia el problema del rigor es, cuanto menos, secundario. De hecho, Euler justifica que estos razonamientos que le valen para desarrollar en producto infinito la función $e^x - e^{-x}$, no le sirven para $e^x - 1$, esto es, Euler presenta y explica un intento fallido de descubrimiento —un hipotético desarrollo de $e^x - 1$ en producto infinito—, cosa totalmente inusual en matemáticas. En este sentido, el "*Introductio*" me recuerda los apuntes históricos de Antonio Pigaffeta donde narra, al igual que Euler, los diversos intentos infructuosos de Magallanes para dar con el paso del océano Atlántico al Pacífico antes de descubrir la ruta correcta. Euler en el "*Introductio*", como Magallanes en el Atlántico austral, estaba descubriendo.

obtiene:

$$\begin{aligned} B &= ab + ac + ad + bc + bd + cd, \\ C &= abc + abd + acd + bcd, \\ D &= abcd. \end{aligned}$$

Basta ahora escribir

$$\begin{aligned} P &= a + b + c + d, \\ Q &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2, \\ R &= a^3 + b^3 + c^3 + d^3, \\ S &= a^4 + b^4 + c^4 + d^4, \end{aligned}$$

y hacer unos simples cálculos para obtener la recursión

$$\begin{aligned} P &= A, \\ Q &= AP - 2B, \\ R &= AQ - BP + 3C, \\ S &= AR - BQ + CP - 4D. \end{aligned}$$

Ahora podemos ver toda la generalidad del razonamiento del Euler, pues la fórmula (1) encierra, no sólo el valor de la suma de los inversos de los cuadrados de los números naturales, sino el valor de la suma de cualquier potencia par de los inversos de los números naturales; en efecto, puesto que en (1), $P = \sum_n 1/n^2$, $Q = \sum_n 1/n^4$, $R = \sum_n 1/n^6$, $S = \sum_n 1/n^8$, etc, y $A = \pi^2/6$, $B = \pi^4/120$, etc, obtenemos, usando la recursión anterior que:

$$\begin{aligned} \sum_n \frac{1}{n^4} &= \frac{\pi^4}{90}, \\ \sum_n \frac{1}{n^6} &= \frac{\pi^6}{945}, \\ \sum_n \frac{1}{n^8} &= \frac{\pi^8}{9450}, \\ \sum_n \frac{1}{n^{10}} &= \frac{\pi^{10}}{93555}. \end{aligned}$$

Y así, hasta llegar a la potencia 26.[14] Y estas son sólo unas pocas de las muchísimas más series que Euler logró sumar en el "*Introductio*" con métodos similares. Lo dicho: generalidad —además de genialidad— de la idea.

Volvamos a Hardy y la propiedad de profundidad: «La segunda cualidad que le he pedido a una idea para que sea significativa es la profundidad, concepto aún más difícil de definir que el que hemos abordado antes. Algo puede hacerse abordando la cuestión por el lado de la dificultad. Las ideas más profundas acostumbran a ser las más difíciles de comprender, pero ello no siempre

[14] Algunos años después Euler encontraría la fórmula general para las sumas de los inversos de cualquier potencia par de los números naturales en términos de los números de Bernoulli.

es cierto. Parece ser que las ideas matemáticas se hallan agrupadas en algo así como una serie de estratos, de tal modo que todas las que pertenecen a uno determinado aparecen vinculadas entre sí, a la vez que con las pertenecientes a los estratos inmediatamente superior e inferior, a través de una compleja trama de relaciones. Cuanto más bajo es el estrato, más profunda (y en general de más difícil comprensión) es la idea».

¿Hay profundidad, en ese sentido, en las sumas de Euler? Mucha. Por un lado en el manejo del infinito; para los griegos fue una especie de bestia temible, pongamos un minotauro gigantesco del que había que huir. En cambio Euler no huyó; al contrario, se acercó al monstruo, le acarició el lomo y le unció un yugo que le permitió hacer fértil un campo antes estéril. Es admirable la docilidad que el infinito muestra en los manejos de Euler. En el concepto de infinito podemos encontrar la idea estética kantiana de lo sublime: «es aquello en comparación con lo cual toda otra cosa es pequeña; es lo que, sólo porque se puede pensar, demuestra una facultad de espíritu que supera toda medida de los sentidos. El sentimiento de lo sublime es un sentimiento de dolor y, al mismo tiempo, un placer despertado, una conmoción, un movimiento alternativo, rápido, de atracción y repulsión de un mismo objeto». En esa conmoción está el logro estético: la capacidad de producir algún tipo de escalofrío, que dijo el filósofo T. W. Adorno, o bien, ese escalofrío en la columna vertebral, que dijo el matemático S. Lang.

Así pues, en los razonamientos de Euler aparecen, tal y como exige Hardy, ideas pertenecientes a diferentes estratos —el infinito (estrato, digamos, metafísico), números naturales (la aritmética), el número π (geometría de la circunferencia), series y productos infinitos (variable compleja)— vinculadas entre sí a través de una compleja trama de relaciones; en una palabra: profundidad.

Vayamos por último con las capacidades; escribió Hardy: «los razonamientos toman una forma singular y sorprendente (calidad de lo inesperado), los medios empleados parecen ser simples si tomamos en consideración el enorme alcance de los resultados (economía), pero no hay forma alguna de eludir las conclusiones (calidad de lo inevitable)».

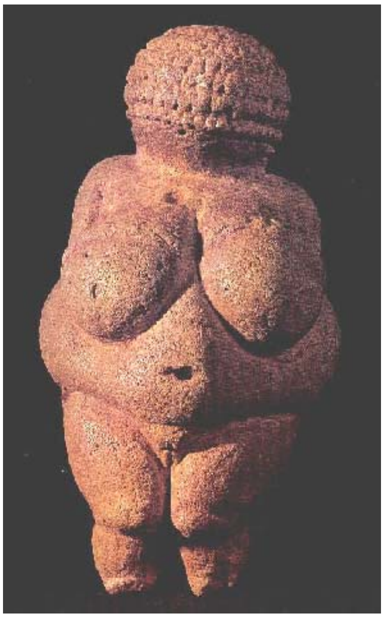
De nuevo es fácilmente observable en los razonamientos de Euler su capacidad para sorprender, su singularidad, lo que Hardy llamó calidad de lo inesperado y Santayana «ingenio»[15]: es difícilmente imaginable, a priori, que las sumas de las potencias pares de los números naturales sean un múltiplo racional de la correspondiente potencia de π. Y también su certeza: en vista de los argumentos de Euler, parece inevitable que ese sea el valor de la suma. Y por último, la economía con que Euler ha procedido: en tan sólo una cuantas líneas Euler consigue resolver un problema profundo y difícil que escapó a la sagacidad matemática de, entre otros, Leibniz, o los Bernoulli. Es sin duda una ilustración perfecta de lo que Santayana llamó «la expresión de lo económico»:

[15]Santayana relacionó directamente el ingenio con la profundidad: «es característico del ingenio penetrar hasta las ocultas profundidades de las cosas, para extraer de allí alguna circunstancia o relación significativa que hace que el objeto se presenta bajo una nueva y más clara luz».

nuestra aprobación de la economía de las cosas se eleva hasta convertirse en apreciación estética.

Para completar esta sección añadiré otra capacidad a las consideradas por Hardy (calidad de lo inesperado, inevitabilidad y economía). Se trata de una propuesta que Gian Carlo Rota hizo en el capítulo titulado *The phenomenology of mathematical beauty* de su libro *Indiscrete thoughts*: la capacidad *iluminadora* de una idea (*enlightenment* fue el término inglés usado por Rota). Una idea iluminadora arroja luz sobre los conceptos o problemas que relaciona o resuelve —«el objeto se presenta bajo una nueva y más clara luz» veíamos antes que dijo Santayana—, los aclara, nos permite comprenderlos mejor[16]. ¿No encuentran ustedes iluminadora, en relación con la suma de los inversos de las potencias pares de los números naturales, la idea euleriana de desarrollar en serie el producto infinito, tal y como refleja la fórmula (1)[17]?

4 ¿Puede la historia de las matemáticas ayudar a aprehender su belleza?



La venus de Willendorf

Dado que un adecuado bagaje cultural de un determinado arte facilita la apreciación de la belleza de ese arte, y el conocimiento de la historia es parte integrante del bagaje cultural, discutiré en esta sección como puede la historia de las matemáticas ayudar a apreciar su belleza. Evidentemente el planteamiento de esta sección cae dentro del contextualismo como posición estética, de manera que los aislacionistas, a lo Clive Bell, absténganse de seguir.

Como ya va siendo habitual en estas reflexiones acudiré a un ejemplo ilustrativo; se trata en este caso de como la historia del arte puede ayudar a apreciar la belleza de una determinada escultura.

Comenzaré con la “Venus de Willendorf”; es innegable que gran parte de la belleza y fascinación de esa escultura radica en que sabemos que es antiquísima:

[16]También encontramos un agradecimiento a esta capacidad iluminadora (de las matemáticas en general) en el arquitecto Le Corbusier; en relación con el proyecto de su segunda casa escribió: «la ausencia de una regla, de una ley, salta a mi vista; estoy aterrado, pues compruebo que trabajo en pleno caos. Y he aquí que descubro, para mi uso, la necesidad de una intervención matemática, la necesidad de un regulador, obsesión que en adelante ocupará siempre un rincón en mi cerebro».

[17]Qué bien vendría otra ideal igual de iluminadora para calcular $\sum_n 1/n^{2k+1}$. Tan sólo sabemos que $\sum_n 1/n^3$ es irracional (Apery (1979) y Sorokin (1994)).

podemos estimar su edad en torno a los 25.000 años. Sabemos, porque sabemos historia del arte, que es una de las esculturas más antiguas hoy conservadas y eso la dota de un valor especial. Es discutible si este valor añadido es, o no, valor estético; lo que es indiscutible es que es valor histórico, y que su conocimiento predispone a la hora de la apreciación estética de la "Venus"[18].

Igualmente es la historia del arte la encargada de informarnos acerca de cuál fue la intención, el propósito, las técnicas del escultor, cuál el significado de la escultura, etc. En resumen, la historia aporta un enriquecimiento cultural que facilitará la apreciación estética de la propia obra.

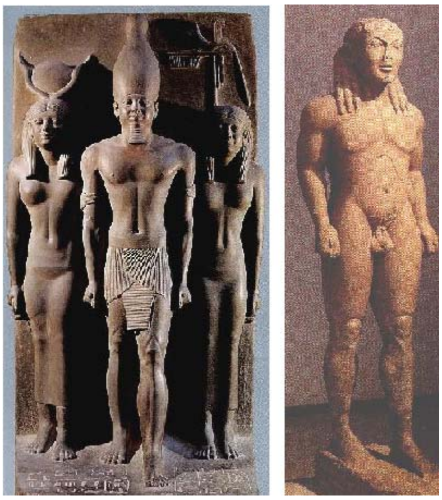


Figura 6

¿No será acaso importante, para una correcta ponderación de la escultura griega, conocer cuál fue su herencia, qué aprendieron, por ejemplo, de los egipcios (figura 6)? Huelga decir que este conocimiento lo aporta la historia, y que su adquisición nos permitirá valorar mejor las contribuciones griegas, apreciar mejor la armonía y perfección que alcanzaron en la representación del cuerpo humano.

[18] Alguien podría objetar, sobre todo desde una concepción aislacionista, que implicar la historia de una obra de arte en su contemplación estética no es adecuado. Incluso me podrían recordar, siguiendo a Kant, que la actitud estética debe estar disociada de todo planteamiento práctico, incluyendo el histórico. Sólo tengo que recordar la advertencia hecha al inicio de esta sección sobre mi posición contextualista.

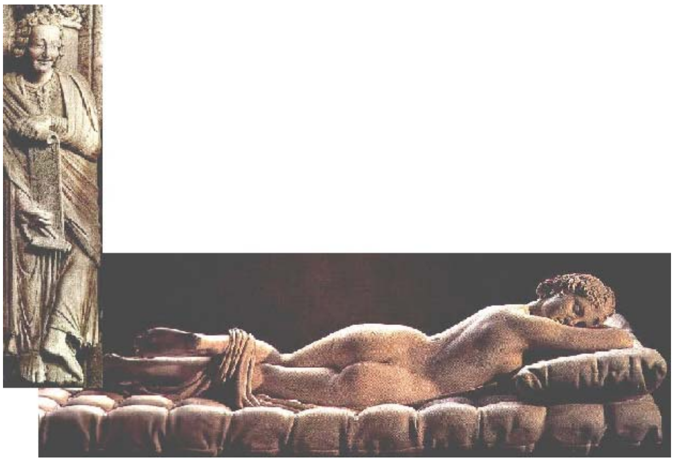
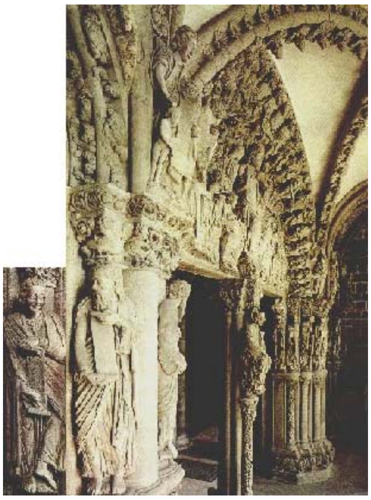


Figura 7



El Pórtico de la gloria

Será también la historia del arte la encargada de ponernos al tanto de qué pudo ocurrir al cabo de 1000 años para que la representación humana sufriera la transformación que refleja la figura 7, esa infantilización de la escultura románica con respecto a la griega, ese aparente retroceso en la calidad de la representación, en la perfección del acabado[19].

¿No nos permitirán los conocimientos que nos proporciona la historia del arte una mejor apreciación de toda la escultura románica cuando nos enseña

[19]También convendría conocer algo de la cultura sexual griega para apreciar en todo su significado la escultura de ese "Hermafrodita dormido" de la que, en el montaje de la figura 7, no quita ojo el profeta Daniel del Pórtico de la Gloria.

la nueva dimensión simbólica que impregnó la representación del cuerpo humano en torno a la divinidad propugnada por una religión omnipotente y omnipresente en la sociedad de la época?

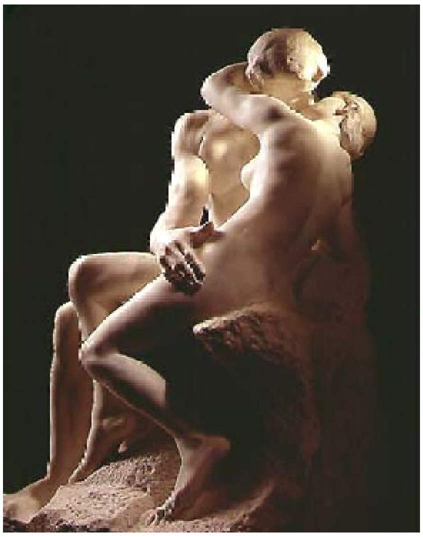
Nuevamente, es la historia del arte la encargada de explicarnos las razones por las que la escultura recuperó otra vez el canon clásico, en un nuevo retorno de la figura del hombre como centro de interés del artista. Y será también importante su ayuda a la hora de revelar las diferencias con la escultura clásica y su evolución hasta el neoclasicismo romántico (figura 8).

Figura 8

Y, finalmente, para apreciar mejor la belleza de las nuevas formas que, tras la recuperación del realismo clásico, se empiezan a imponer en escultura, hay que saber los nuevos propósitos que se había marcado el artista.

Y es la historia la encargada de ponernos al tanto de la renuncia del escultor a la fría perfección del acabado para conseguir esculturas con más capacidad para impresionar al espectador.

¿Cómo entender el proceso de aceleración que ha sufrido el arte en el último siglo sin saber historia del arte?

Besos de Rodin y Brancusi

Fountain

¿Sería posible entender y apreciar estéticamente la versión de Constantin Brancusi de “El beso” de su maestro Rodin, sin unos conocimientos históricos que nos expliquen esa especie de vuelta a los orígenes paleolíticos que observamos en la secuencia de besos de la figura?

Aunque todo tiene sus límites, y ni toda la historia del arte junta podrá hacerme comprender el valor estético de algunas de las propuestas artísticas de este siglo —la célebre fuente de Duchamp, por ejemplo— fuera del valor estético que pueda tener la trasgresión[20].

La historia de las matemáticas puede ayudar a apreciar el valor estético de los razonamientos matemáticos de manera parecida a como lo hace la historia del arte con la escultura.

En matemáticas, esta ayuda sea quizá más necesaria, habida cuenta de la dificultad que la falta de un sentido apropiado supone para la captación de la belleza.

[20]Viene a cuento hacer aparecer aquí a Marcel Duchamp porque —aparte de que los *ready made* acabaran convirtiéndose, de broma un tanto absurda en gesto revolucionario dirigido al corazón de la institución llamada arte— tuvo una curiosa relación con el valor estético de las matemáticas. Duchamp, al que ciertamente interesaron matemáticas y física y, sobre todo, el ajedrez, dedicó mucho tiempo a meditar sobre la siguiente pregunta: ¿se pueden producir obras de arte mentales que no se basen en efectos primariamente retinianos? Interesante, ¿verdad? Quizá más que sus *ready made*. Por cierto, como puede verse en la foto, Duchamp firmó su “Fountain” como R. Mutt que no es otro que el equivalente alemán de nuestro Roca.

Por ejemplo, consideremos el siguiente resultado: todo triángulo inscrito en una semicircunferencia uno de cuyos lados es el diámetro es rectángulo[21]. Es un resultado aparentemente ingenuo que se puede demostrar sencilla y elementalmente de varias formas. Es, sin embargo, la historia de las matemáticas la que nos da la verdadera clave del teorema: fue uno de los primeros resultados que iba acompañado de un razonamiento con la pretensión de garantizar su validez general, esto es, lo custodiaba una demostración, una disección lógica del resultado hasta reducirlo a verdades universales y evidentes. Para entender la grandeza de este hecho —imponer a los resultados la compañía necesaria de una demostración— habrá que comparar con el tipo de razonamientos matemáticos que hacían lo egipcios o mesopotámicos, esto es, acudir de nuevo a las historia de las matemáticas; la historia, al situarnos en la época, transformará la pretendida ingenuidad del teorema en sutileza, incluso sentiremos la cercanía conceptual del proceder de los griegos —colegas de otras universidades, como dice Hardy que los llamaba Littlewood— frente al primitivismo que advertiremos en los razonamientos matemáticos egipcios o mesopotámicos. Al igual que la "Venus de Willendorf", ese teorema tiene valor histórico, y el conocimiento de ese valor predispone a la hora de su apreciación estética.

Y tal y como ocurría con la escultura griega, será la historia la que nos permita valorar mejor, también estéticamente, la evolución de la matemática griega desde la ingenuidad de los primeros teoremas hasta la profundidad y sofisticación que alcanzó después —compárese el teorema anterior con el cálculo arquimediano del área de un segmento de parábola que se hizo en la sección 2—.

Para considerar el valor estético de algo, aparentemente más *feo* que la geometría sintética griega, como el sistema de numeración posicional y con cero, o los procedimientos elementales del álgebra, convendría, al igual que para valorar la escultura románica, saber que éste radica en la potencialidad simbólica que implica su simpleza, precisamente en esa falta de sofisticación que oculta su valor estético. Y aquí es donde interviene la historia para decirnos que esa tal simpleza, o sencillez, no es más que un hecho educacional, ¿cómo no calificar a nuestro sistema de numeración de sofisticado al compararlo con el de los griegos, o cómo, sino, explicar que éstos carecieran casi por completo de aparato algebraico? ¿Cómo calibrar la dificultad conceptual del sistema de numeración, o del álgebra, sin saber su proceso histórico de gestación, tan arduo y lento? ¿No será también esencial para su correcta valoración conocer la importancia que ambos tuvieron en el nacimiento durante el siglo XVII de teorías, muchos más sofisticadas, como la geometría analítica y, después, el cálculo diferencial e integral?

La misma valoración estética del cálculo infinitesimal precisa del conocimiento de sus orígenes: como necesitó para su nacimiento de una serie de avances sobre la matemática griega, su modesta contribución, cuando todavía

[21]Este teorema lo atribuye de segundas fuentes Diogenes Laercio a Thales, que sacrificó un buey cuando lo descubrió y demostró, aunque Apolodoro lo atribuye, quizá con más fundamento histórico, a Pitágoras.

tenía un carácter esotérico –Carlos Marx *dixit*–, a la consolidación de la Revolución Copernicana, y como estimuló, asimismo, el desarrollo no sólo de las matemáticas sino también de la física. Todo esto es difícil de entender y valorar si se renuncia a la historia de las matemáticas.

Y, finalmente, ¿cómo entender y apreciar el carácter revolucionario e innovador —tanto o más que el arte moderno— de determinados resultados que han llegado a cambiar la forma y el fondo de las matemáticas transformándolas en lo que hoy son, si no es usando la perspectiva histórica?

Por ejemplo, consideremos el primer gran resultado de Cantor sobre el infinito: la no numerabilidad del continuo. ¿Es posible captar toda su transcendencia revolucionaria si se desconoce el miedo al infinito del mundo griego, las distintas prohibiciones, que desde Aristóteles hasta Gauss, se han dictaminado sobre su uso, o el manejo de lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño desde el Barroco hasta mediados del siglo XIX? Y, ¿quién nos enseña todo eso?

Bibliografía

[1] Beardsley, M. C.: *Estética, historia y fundamentos.* Cátedra, Madrid, 1997.

[2] Euler, L.: *Introductio in Analysin Infinitorum.* Edición facsimilar de la RSME y Thales. Sevilla, 2000.

[3] Gombrich, E. H.: *Historia del arte.* Debate, Madrid, 1997.

[4] Hardy, G. H.:, *A Mathematician's Apology.* Cambridge University Press, 1940. Hay versiones castellanas, *Autojustificación de un matemático.* Ariel, Barcelona, 1981; *Apología de un matemático.* Nivola, Madrid, 1999.

[5] Kant, E.: *Crítica del juicio.* Espasa Calpe, Madrid, 1977.

[6] Jacob, F.: *La mosca, el ratón y el hombre.* Crítica, Barcelona, 1998.

[7] Le Lionnais, F. (y colaboradores): *Las grandes corrientes del pensamiento matemático.* Eudeba, Buenos Aires, 1962.

[8] Rota, G. C.: *Indiscrete thoughts.* Birkhäuser, Boston, 1997.

[9] Santayana, J.: *El sentido de la belleza.* Tecnos, Madrid, 1999.

[10] Savater, F.: *Las preguntas de la vida.* Ariel, Barcelona, 1999.

[11] Tusquets Blanca, O.: *Todo es comparable.* Anagrama, Barcelona, 1998.

[12] Wölfflin, H.: *Conceptos fundamentales de la historia del arte.* Espasa Calpe, Madrid, 1999.

Antonio J. Durán
Dpto. de Análisis Matemático
Facultad de Matemáticas
Universidad de Sevilla
Aptdo. 1160; 41080–Sevilla
correo electrónico: duran@cica.es