

# TESIS DOCTORAL

Familias paramétricas  
de procesos iterativos  
de alto orden de convergencia

**Natalia Romero Álvarez**



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA



# **TESIS DOCTORAL**

Familias paramétricas  
de procesos iterativos  
de alto orden de convergencia

**Natalia Romero Álvarez**

Universidad de La Rioja  
Servicio de Publicaciones  
2006

Esta tesis doctoral, dirigida por el doctor D. Miguel Ángel Hernández Verón, fue leída el 26 de junio de 2006, y obtuvo la calificación de Sobresaliente Cum Laude por Unanimidad.

© Natalia Romero Álvarez

Edita: Universidad de La Rioja  
Servicio de Publicaciones

ISBN 84-689-9938-5

# Familias paramétricas de procesos iterativos de alto orden de convergencia

NATALIA ROMERO ÁLVAREZ



Departamento de Matemáticas y Computación

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

# Familias paramétricas de procesos iterativos de alto orden de convergencia

Natalia Romero Álvarez

Memoria presentada para optar al grado de  
Doctor en Ciencias Matemáticas  
bajo la dirección del  
Dr. Miguel Ángel Hernández Verón



Departamento de Matemáticas y Computación  
UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Esta tesis ha sido elaborada bajo la dirección de Miguel Ángel Hernández Verón, Michel. Con todo lo que me ha enseñado y ayudado me ha demostrado que, además de ser un excelente matemático, es sobre todo mi amigo. Gracias Michel por haber estado siempre ahí cuando me asaltaban las dudas, sin tus consejos esta memoria nunca hubiera sido posible.

José Antonio, mi amigo y confesor, me ha dado consejos, me ha regalado su amistad y su complicidad durante todos estos años de trabajo. Gracias Jose por estar dispuesto a escucharme en todo momento.

José Manuel ha sabido transmitirme la tranquilidad que necesitaba para afrontar algunos de los retos de esta tesis. Amparo y Maria Jesús, mis compañeras de grupo de investigación, con su experiencia me han mostrado las satisfacciones y dificultades de un trabajo bien hecho. Gracias a los tres por vuestras continuas muestras de apoyo.

También quiero agradecer a mis compañeros del Departamento de Matemáticas y Computación, y de manera especial a Víctor, Manuel, Juan Luis y Óscar, la ayuda que me han prestado. A la pandilla de doctorandos Anita, Clara, Jesús Mari, Judit, Fabián, Miriam y Ana, con los que he compartido tantos momentos especiales e inolvidables.

Por último quiero dedicar esta tesis a mis amigos y a mi familia. A mis sobrinos, Sofía y Álvaro, a mis hermanos Alberto, Carlos, Chema y Eduardo, a los que no siempre he podido dedicar el tiempo que hubiera deseado, y sin embargo, han querido compartir conmigo la ilusión de este proyecto, y de manera especial a Pedro y a mis padres, Mercedes y Alberto, que han sabido brindarme el apoyo, el ánimo y el cariño que he necesitado en todo momento. En buena parte, a ellos les debo el mérito de este trabajo.

Logroño, junio de 2006

*A mis padres*

---

## Índice general

<b>Introducción</b> .....	1
<b>Preliminares</b> .....	9
Procesos iterativos en espacios de Banach .....	9
Sucesiones y funciones mayorizantes en la convergencia de procesos iterativos en espacios de Banach .....	10
Orden de convergencia y otros indicadores de convergencia .....	12
<b>1. Procesos iterativos para la resolución de ecuaciones no lineales</b> .....	19
1.1. Introducción .....	19
1.2. El operador grado de convexidad logarítmico .....	21
1.3. Una nueva familia de procesos iterativos en espacios de Banach .....	25
1.4. Procesos iterativos de tercer orden en espacios de Banach .....	26
<b>2. Análisis del resultado de Gander en espacios de Banach</b> ...	29
2.1. Introducción .....	29
2.2. Estudio de la convergencia mediante sucesiones mayorizantes ..	30
2.2.1. Convergencia semilocal .....	30
2.2.2. $R$ -orden de convergencia de la familia .....	46
2.3. Estudio de la convergencia mediante relaciones de recurrencia .	50
2.3.1. Construcción de las relaciones de recurrencia .....	51
2.3.2. Convergencia semilocal .....	57
2.3.3. Algunos procesos iterativos con $R$ -orden de convergencia al menos tres .....	61
2.3.4. $R$ -orden de convergencia .....	65
2.4. Algunas aplicaciones a ecuaciones integrales y diferenciales ...	69
2.4.1. Una ecuación integral .....	69
2.4.2. Un problema de valor en la frontera .....	75

<b>3. Condiciones de tipo Kantorovich para operadores con derivada segunda acotada</b> .....	81
3.1. Introducción .....	81
3.2. Sucesiones mayorizantes para condiciones Hölder .....	83
3.3. Relaciones de recurrencia para condiciones Hölder .....	95
3.3.1. Construcción de las relaciones de recurrencia .....	95
3.3.2. Convergencia semilocal .....	100
3.3.3. $R$ -orden de convergencia .....	104
3.4. Relaciones de recurrencia para condiciones $\omega$ -condicionadas ..	107
3.4.1. Construcción de las relaciones de recurrencia .....	108
3.4.2. Convergencia semilocal .....	113
3.4.3. $R$ -orden de convergencia .....	118
3.4.4. Aplicación a algunas ecuaciones integrales no lineales de tipo Hammerstein .....	121
3.5. Relaciones de recurrencia para condiciones más suaves que las anteriores .....	127
3.5.1. Construcción de las relaciones de recurrencia .....	128
3.5.2. Convergencia semilocal y $R$ -orden de convergencia .....	132
<b>4. Otras modificaciones de las condiciones de Kantorovich</b> .....	137
4.1. Introducción .....	137
4.2. Sucesiones mayorizantes para condiciones Lipschitz .....	138
4.3. Relaciones de recurrencia para condiciones $\omega$ -condicionadas ..	144
4.3.1. Construcción de las relaciones de recurrencia .....	144
4.3.2. Convergencia semilocal .....	149
4.4. Aplicaciones .....	152
4.4.1. Ecuaciones integrales de tipo Fredholm .....	152
4.4.2. Un problema de valores en la frontera .....	156
<b>5. Ecuaciones cuadráticas</b> .....	161
5.1. Introducción .....	161
5.2. Ecuaciones cuadráticas reales .....	162
5.2.1. Construcción de procesos iterativos con orden de convergencia prefijado .....	163
5.2.2. Convergencia semilocal .....	165
5.2.3. Aplicaciones .....	169
5.2.4. Convergencia global .....	176
5.3. Ecuaciones cuadráticas en espacios de Banach .....	180
5.3.1. Convergencia semilocal .....	181
5.3.2. Una ecuación en derivadas parciales .....	191
5.3.3. La ecuación integral de Chandrasekhar .....	195
5.3.4. Una ecuación integral cuadrática .....	197
5.4. Ecuaciones cuadráticas complejas y conjuntos universales de Julia .....	201

**6. Aplicación a las ecuaciones escalares no lineales** ..... 217

6.1. Introducción ..... 217

6.1.1. Construcción geométrica y “velocidad de convergencia infinita” del método de Newton ..... 217

6.1.2. Convergencia global y “velocidad de convergencia infinita” de otros métodos iterativos ..... 218

6.2. Construcción de procesos iterativos con orden de convergencia prefijado ..... 223

6.2.1. Convergencia semilocal y convergencia global ..... 228

6.2.2. Aproximación de la raíz  $n$ -ésima de un número real .... 234

**Cuestiones abiertas y conclusiones** ..... 251

**Bibliografía** ..... 259



---

## Introducción

El problema de resolver una ecuación no lineal ha interesado a los Matemáticos durante muchos siglos. Generalmente no es posible determinar explícitamente las soluciones para este tipo de ecuaciones. Basándonos en el trabajo de Knill, [103], parece ser que ya las civilizaciones mesopotámicas, casi dos mil años antes de Cristo, conocían algoritmos, como la famosa fórmula de Heron, para aproximar la raíz cuadrada de un número real positivo. Actualmente, este algoritmo es considerado como un caso especial del procedimiento dado por Newton en 1669 para resolver una ecuación algebraica, conocido hoy como método de Newton o método de Newton-Raphson. Esta segunda denominación para el método de Newton es consecuencia de la contribución de Joseph Raphson (1690) a la técnica ya propuesta por Newton, aportando la idea de iteración y simplificando además el aspecto operacional. Es por esta razón por la que muchos autores denominan el proceso dado por Newton como método de Newton-Raphson, actualmente el método iterativo más conocido y empleado para aproximar soluciones de ecuaciones no lineales. Es conocido que este método iterativo bautizado por Fourier ([62]) como *la méthode newtonienne* tiene convergencia cuadrática.

Ya a principios del siglo XVIII, aparecen también algoritmos que posteriormente dieron lugar a algunos de los métodos iterativos clásicos con convergencia cúbica. Así, por ejemplo, Halley en 1708 en un intento por aproximar la raíz cúbica de un número natural llega a una expresión que se corresponde con el primer paso del que hoy conocemos como método iterativo de Halley. Parece ser que Halley también intentó extender sus métodos para obtener aproximaciones incluso para ecuaciones dadas por funciones trascendentes. Otro método iterativo clásico con convergencia cúbica es el método de Euler, también conocido como método de Cauchy. Un primer resultado de convergencia semilocal para este método iterativo lo estableció Cauchy ([35]) en 1829, en el que prueba también la velocidad cúbica del método.

Hay otros muchos métodos iterativos con convergencia cúbica como el método de Chebyshev, atribuido al matemático ruso Pafnuty Luovich Chebyshev (1840), que consiguió ganar con este método la medalla de plata en un

concurso infantil, el método de Ostrowski o el método de Super-Halley entre otros. Todos estos métodos iterativos clásicos, junto con otros no tan conocidos, serán tratados en esta memoria, en la que analizaremos familias de procesos iterativos de alto orden de convergencia, con el fin de aproximar soluciones de ecuaciones no lineales.

Así, un proceso iterativo consiste en aplicar un algoritmo o un esquema iterativo,  $x_{n+1} = G(x_n)$ , de forma que a partir de una aproximación inicial  $x_0$  a una solución de la ecuación no lineal, se genera una sucesión  $\{x_n\}$  de aproximaciones a la solución de la ecuación, con la exigencia de que exista  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ , siendo  $x^*$  la solución de la ecuación no lineal considerada.

Una vez que que el algoritmo está propiamente formulado, el siguiente objetivo que se plantea es conocer exactamente cuáles son las condiciones bajo las que el esquema iterativo aproxima una solución del problema considerado, esto es, bajo qué condiciones la sucesión de aproximaciones generada es convergente a una solución de la ecuación correspondiente. Los resultados de convergencia que se establecen pueden ser de tres tipos: local, semilocal y global, dependiendo de cuáles sean las condiciones que se impongan; sobre la solución, sobre la aproximación inicial  $x_0$ , o simplemente sobre la función que define la ecuación, respectivamente.

Otras cuestiones que se plantean sobre el comportamiento de un esquema iterativo son la velocidad de convergencia con la que la sucesión converge a una solución y el error cometido al aproximar esa solución. Existen distintos indicadores para medir la velocidad de convergencia de una sucesión como son el  $Q$ -orden, el  $R$ -orden y el orden de convergencia, relacionados estrechamente entre sí (véanse [115] y [122]). Concretamente, en este trabajo, usaremos para establecer la velocidad de convergencia de una sucesión, los indicadores  $R$ -orden y orden de convergencia.

Esta memoria tiene su origen en un trabajo realizado por Gander (véanse [63], [81]), en el que se determinan las características que debe satisfacer una función de iteración  $x_{n+1} = G(x_n)$ , de modo que los procesos iterativos dados por  $G$  convergen a una solución de la ecuación escalar no lineal  $f(x) = 0$  con al menos convergencia cúbica. Con este objetivo, Gander se plantea el estudio de los procesos iterativos tipo Newton  $x_{n+1} = x_n - H(L_f(x_n))f(x_n)/f'(x_n)$ , estableciendo como condiciones suficientes para la función  $H$ :  $H(0) = 1$ ,  $H'(0) = 1/2$  y  $|H''(0)| < \infty$ , donde  $L_f(x) = f(x)f''(x)/f'(x)^2$  es conocido como el *grado de convexidad logarítmico* ([84], [87], [90], [88]).

Este resultado es sin duda lo que motiva el origen de esta memoria. Así, basándonos en la idea de Gander y atendiendo a las expresiones que tienen los procesos iterativos más conocidos con al menos convergencia cúbica, tratamos de generalizar este resultado en espacios de Banach con el objetivo de obtener procesos iterativos que tengan  $R$ -orden de convergencia al menos tres para la resolución de ecuaciones no lineales en espacios de Banach.

En primer lugar nos planteamos, al igual que Gander, el análisis de los procesos iterativos tipo Newton  $x_{n+1} = x_n - H(x_n)[F'(x_n)]^{-1}F(x_n)$  para

aproximar soluciones de ecuaciones no lineales de la forma  $F(x) = 0$ . Más concretamente, y tratando de obtener en espacios de Banach una familia de procesos iterativos con orden de convergencia al menos tres, nos planteamos la caracterización del operador  $H$ . Siguiendo la idea de Gander para establecer este operador  $H$ , observamos en primer lugar la necesidad de extender formalmente el *grado de convexidad logarítmico* de una función a operadores definidos en espacios de Banach ([68], [69]). A lo largo de toda la memoria, nos referiremos a este operador, que denotamos por  $L_F$ , como operador *grado de convexidad logarítmico* por analogía con el caso real.

Una vez caracterizado el operador  $H$ , consideramos la familia de procesos iterativos con  $R$ -orden de convergencia al menos tres dada por el siguiente algoritmo:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - H(L_F(x_n))\Gamma_n F(x_n), & n \geq 0 \text{ y } x_0 \text{ dado,} \\ H(L_F(x_n)) = I + \frac{1}{2}L_F(x_n) + \sum_{k \geq 2} A_k L_F(x_n)^k, & A_k \in \mathbb{R}^+, k \geq 2, \end{cases} \quad (1)$$

donde hemos denotado  $\Gamma_n = [F'(x_n)]^{-1}$ . Esta familia de procesos iterativos incluye los procesos iterativos más conocidos en espacios de Banach con al menos convergencia cúbica, como el método de Chebyshev ([6], [16], [34], [92]), el método de Super-Halley ([18], [51], [73], [74]), el método de Halley ([17], [33], [59], [63], [85]), el método de Ostrowski ([117], [134]), el método de Euler ([63], [104], [140]), el método exponencial ([3]), el método logarítmico ([30]), así como otras familias de procesos iterativos con convergencia al menos cúbica ([71], [148]).

El análisis de esta familia de procesos iterativos en espacios de Banach es el objetivo inicial de esta memoria. Por una parte, nos planteamos el estudio de la convergencia, de los dominios de existencia y unicidad de solución, así como la obtención de cotas a priori del error cometido por los procesos iterativos de la familia.

En lo que se refiere al análisis de la convergencia, realizamos varios estudios utilizando dos técnicas distintas. Habitualmente, la técnica utilizada para abordar el estudio de la convergencia de un proceso iterativo en espacios de Banach se basa en el principio de la mayorante (véanse [13], [14], [108], [156]), concepto que surge a partir del de operador mayorizante introducido por Kantorovich ([99], [100], [101]) para la demostración de la convergencia del método de Newton. La otra técnica, menos conocida pero no menos eficaz, se basa en la construcción de un sistema de relaciones de recurrencia ([33], [34], [73]). Esta técnica desarrollada por nuestro equipo de investigación, permite, de una manera “más sencilla” que empleando sucesiones mayorizantes, establecer la convergencia y la velocidad de convergencia de la familia de procesos iterativos construida, fundamentalmente en condiciones débiles para el operador  $F$ .

Inicialmente, las condiciones que se impusieron para probar un resultado de convergencia semilocal de un proceso iterativo con  $R$ -orden de convergencia

al menos tres en espacios de Banach involucran a los operadores  $F''$  y  $F'''$  ([99], [100], [131], [132]). Posteriormente, la condición exigida para el operador  $F'''$  se suavizó por una condición de Lipschitz sobre  $F''$ :

$$\|F''(x) - F''(y)\| \leq K\|x - y\|, \quad K \geq 0.$$

Esta condición junto con  $\|F'''(x)\| \leq M$ ,  $\|T_0\| \leq \beta$  y  $\|T_0F(x_0)\| \leq \eta$ , son conocidas como *condiciones de Kantorovich*, introducidas a mediados del siglo XX y que han dado lugar a un gran número de trabajos de investigación (véanse [100], [122], [128], [129]).

Nuestro primer estudio en el capítulo 2, consiste en un análisis del resultado de Gander en espacios de Banach, de modo que estudiamos la convergencia de la familia de procesos iterativos (1) bajo las condiciones de Kantorovich. Así, aplicando las técnicas indicadas, obtenemos resultados de convergencia semilocal, dominios de existencia y unicidad así como estimaciones a priori del error, si bien, con alguna diferencia interesante. Cuando realizamos el estudio de la convergencia utilizando el principio de la mayorante se hace necesario exigir una condición de decrecimiento sobre la sucesión de los coeficientes  $\{A_k\}_{k \geq 2}$  que define cualquier proceso iterativo de la familia. Esta condición aparece como consecuencia de la descomposición que tomamos para el operador  $F$  cuando se “mayoriza” la aproximación  $F(x_n)$ . De esta manera al emplear esta técnica, se excluyen procesos iterativos tan conocidos como el método de Euler, entre otros. Sin embargo, se puede prescindir de esta condición cuando el estudio lo realizamos utilizando la técnica basada en las relaciones de recurrencia.

Por otra parte, conseguimos establecer el  $R$ -orden de convergencia al menos tres para la familia. Para ello, utilizamos una caracterización del  $R$ -orden de convergencia, dada por Potra y Ptak en [123], cuando empleamos en el estudio de la convergencia el principio de la mayorante y acotamos, de una manera más sencilla, el  $R$ -orden de convergencia con la técnica de las relaciones de recurrencia.

Con el objetivo de abarcar un conjunto amplio de operadores no lineales, en los capítulos 3 y 4 realizamos un análisis de la convergencia para la familia de procesos iterativos suavizando las condiciones que se exigen para el operador  $F$ . Así, en el capítulo 3, estudiamos la convergencia de la familia en condiciones tipo Kantorovich. Comenzaremos rebajando la condición de Lipschitz por una condición de Hölder para el operador derivada segunda

$$\|F''(x) - F''(y)\| \leq K\|x - y\|^p, \quad K \geq 0, \quad p \in (0, 1],$$

condición que cumple por ejemplo el operador raíz cuadrada. Al realizar el estudio de la convergencia mediante el principio de la mayorante es necesario imponer una condición para el operador  $F'''$ , como consecuencia de la expresión que tiene el resto integral en la descomposición que se utiliza para mayorizar el operador  $F$ . Además, bajo estas nuevas condiciones para el operador  $F$  no es sencillo acotar el  $R$ -orden de convergencia de la familia. Estos problemas se solventan cuando usamos la técnica basada en las relaciones

de recurrencia que permite, con cierta comodidad, demostrar la convergencia semilocal de la familia de procesos iterativos y acotar el  $R$ -orden de convergencia,  $2+p$ , bajo las condiciones de tipo Kantorovich con condición de Hölder continuidad para el operador  $F''$ , sin necesidad de exigir una condición para el operador  $F'''$ .

Tratando de aplicar nuestro análisis de la convergencia a situaciones más diversas como, por ejemplo, cuando el operador  $F$  viene dado por combinaciones de operadores Lipschitz y Hölder, suavizamos más las condiciones de convergencia de tipo Kantorovich. Así, modificamos la condición de Lipschitz por una condición  $\omega$ -condicionada para  $F''$ :

$$\|F''(x) - F''(y)\| \leq \omega(\|x - y\|),$$

que generaliza las situaciones anteriores Lipschitz con  $\omega(z) = Kz$  y Hölder con  $\omega(z) = Kz^p$ . Analizando la convergencia con la técnica basada en las relaciones de recurrencia, obtenemos que la familia de procesos iterativos converge a una solución de la ecuación  $F(x) = 0$  con al menos  $R$ -orden dos. Además, se obtienen dominios de existencia y unicidad de solución y estimaciones a priori del error. Como un caso particular de esta suavización, cuando  $\omega$  es cuasi-homogénea de orden  $p$ ,  $\omega(tz) \leq t^p\omega(z)$ , obtenemos  $R$ -orden de convergencia al menos  $2 + p$ .

Veremos también que las condiciones  $\|I_0\| \leq \beta$ ,  $\|I_0F(x_0)\| \leq \eta$ , e imponiendo que el operador  $F''$  esté acotado, son suficientes para obtener un resultado de convergencia semilocal para la familia de procesos iterativos.

Otra situación que analizamos en el capítulo 4 es el estudio de la convergencia semilocal de la familia (1) en el caso en el que el operador  $F''$  no esté acotado, situación que aparece frecuentemente por ejemplo en la resolución de ecuaciones integrales no lineales. El procedimiento que habitualmente se sigue en esta situación es localizar previamente la solución en un conjunto apropiado donde el operador  $F''$  esté acotado. Para solventar esta situación suavizamos las condiciones de Kantorovich y exigimos que el operador  $F''$  esté sólomente acotado en la aproximación inicial, es decir,  $\|F''(x_0)\| \leq \alpha$ . Considerando algunas modificaciones de las condiciones de Kantorovich sobre el operador  $F''$ , que estudiamos en el capítulo 3, y combinando las técnicas del principio de la mayorante y de las relaciones de recurrencia establecemos resultados de convergencia semilocal, dominios de existencia y unicidad de solución, así como estimaciones a priori del error. Damos también estimaciones a posteriori del error utilizando un procedimiento dado por Ostrowski ([117]), y empleado por Gutiérrez y Hernández en [71], en función de las raíces de un polinomio mayorizante para la familia de procesos iterativos.

Para el estudio anterior, hemos considerado el operador  $H$  que define la familia de procesos iterativos (1) como un operador dado mediante un desarrollo en serie infinito. En los casos en los que este operador admite una representación analítica conocida, como ocurre con los métodos iterativos clásicos, esta familia es aplicable a la resolución de una ecuación no lineal. Por el contrario, no es sencillo aplicar los procesos iterativos de la familia cuando este

desarrollo no se puede identificar con un operador conocido. En este caso, se hace necesario trincar el desarrollo en serie que tiene el operador  $H$ . De esta manera, en el capítulo 5, establecemos una familia de procesos iterativos con orden de convergencia prefijado en el caso particular de ecuaciones cuadráticas. Analizamos esta situación en  $\mathbb{R}$  y en espacios de Banach.

Mostramos que en el caso real el proceso iterativo de la familia con el desarrollo convenientemente truncado para  $H$ :

$$H_q(x) = \sum_{k=0}^{q-2} A_k x^k, \quad A_k = C_k/2^k, \quad C_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}, \quad k \geq 0,$$

donde los  $C_k$  son los conocidos números de Catalan (véanse [38], [45], [82], [149]), converge a una solución de la ecuación  $F(x) = 0$  con orden de convergencia  $q$ ,  $q \geq 4$ . De esta manera, tomando estos valores para los parámetros  $A_k$ , conseguimos orden de convergencia prefijado  $q$ . Esta situación se generaliza a espacios de Banach obteniendo  $R$ -orden de convergencia al menos cuatro, sin más que fijar el parámetro  $A_2 = C_2/4$ , de manera que al exigir ciertas condiciones para el operador  $L_F$ , se obtiene un  $R$ -orden de convergencia prefijado  $q > 4$ , al igual que en  $\mathbb{R}$ . Además, notemos que cuando se considera  $q \rightarrow \infty$  el correspondiente proceso iterativo de la familia es el conocido método de Euler, también llamado método de Cauchy. Establecemos en  $\mathbb{R}$  resultados de convergencia semilocal para la familia de procesos iterativos y un resultado de convergencia global si el orden que se ha prefijado es par. El hecho de obtener tan sólo convergencia global para el caso en el que el proceso iterativo elegido tiene orden de convergencia par queda reflejado al representar las cuencas de atracción asociadas a las raíces de una ecuación cuadrática. A partir de estos dibujos, también conocidos como fractales (véanse [27], [42], [119], [143]), observamos que cuando el proceso iterativo empleado tiene un orden de convergencia impar no podemos asegurar la convergencia global para el método; sin embargo, hay convergencia en casi todo punto.

También, conseguimos generalizar a espacios de Banach los resultados de convergencia semilocal obtenidos en  $\mathbb{R}$ , utilizando la técnica basada en las relaciones de recurrencia y estableciendo así procesos iterativos de alto  $R$ -orden de convergencia en espacios de Banach.

Por otra parte, considerando el desarrollo en serie de  $H$  truncado y utilizando otro tipo de técnica realizamos en el plano complejo extendido,  $\mathbb{C}_\infty$ , un análisis cualitativo de las propiedades de la familia de procesos iterativos. Así, presentamos en  $\mathbb{C}_\infty$  un primer estudio de la convergencia de estos procesos iterativos desde un punto de vista numérico y dinámico, siguiendo la teoría ya existente sobre funciones iterativas racionales de variable compleja ([27], [102], [105], [106]). En particular, probamos que estos procesos iterativos tienen *convergencia general*, concepto introducido por Smale en [138] y que más tarde fue generalizado por McMullen ([105]). El concepto de convergencia general asociado a un proceso iterativo viene a decir que para casi todo punto inicial, excepto para un conjunto de medida nula, y para casi todo polinomio de gra-

do conocido, el proceso iterativo es convergente a una solución del polinomio, entendiendo por solución una raíz del polinomio.

Para establecer la convergencia general de los procesos iterativos de la familia nos apoyamos en las propiedades dinámicas de las aplicaciones racionales  $S_q$  conjugadas por una aplicación de Möbius y asociadas a los procesos iterativos cuando estos son aplicados a polinomios cuadráticos. Concretamente, el comportamiento dinámico que tienen los puntos fijos y los puntos repulsores asociados a estas aplicaciones racionales describen de manera implícita la convergencia de los procesos iterativos de la familia, de tal manera que  $\mathbb{C}_\infty$  queda dividido en dos subconjuntos, por un lado el conjunto conocido como *conjunto de Fatou*,  $\mathcal{F}(S_q)$ , que contiene los puntos cuyo comportamiento dinámico es predecible bajo la aplicación racional  $S_q$ , y por otro lado, el conjunto de puntos cuyo comportamiento dinámico es caótico o cuanto menos complicado de predecir, conocido como *conjunto de Julia*,  $\mathcal{J}(S_q)$ . Así, hablaremos también del conjunto universal de Julia,  $\mathcal{J}(G_F)$ , asociado a un proceso iterativo de la familia,  $G_F$ , esto es que  $\mathcal{J}(G_F)$  es conjugado por una aplicación de Möbius a  $\mathcal{J}(S_q)$ , y veremos la estructura que tienen los conjuntos universales de Julia para algunos de los procesos iterativos de la familia.

Con el objetivo de generalizar el estudio realizado en el capítulo 5 para el caso particular de las ecuaciones cuadráticas en  $\mathbb{R}$ , en el capítulo 6 analizamos la convergencia de la familia de procesos iterativos cuando es aplicada en la resolución de un conjunto de ecuaciones  $f(t) = 0$  más amplio. Así, al igual que en el capítulo 5, obtenemos resultados de convergencia semilocal y global para las funciones  $f$  que cumplen la condición de ser constante el grado de convexidad logarítmico de la función derivada  $L_{f'}$ .

En primer lugar, observamos la estrecha relación que hay entre la velocidad de convergencia y la construcción geométrica para los métodos iterativos clásicos como son el método de Newton, Euler, Chebyshev, Halley, exponencial y logarítmico ([4], [104], [134]). De manera que todos estos procesos iterativos, cuando son aplicados en la resolución de ciertas ecuaciones, tienen en común la característica de alcanzar en una sola iteración una solución. Cuando este hecho ocurra, hablaremos de *velocidad de convergencia infinita* y convergencia global para dicho proceso iterativo. Así, por ejemplo, el proceso iterativo de Euler tiene *velocidad de convergencia infinita* y convergencia global cuando es aplicado a ecuaciones cuadráticas.

Teniendo en cuenta la relación existente entre la velocidad de convergencia y el tipo de convergencia que se obtiene para los métodos iterativos clásicos en la resolución de ciertas ecuaciones escalares no lineales  $f(t) = 0$ , observamos que todas estas funciones satisfacen una misma propiedad,  $L_{f'}(t) = M$ ,  $M \in \mathbb{R}$ . En un intento de generalizar esta situación teórica para una familia de procesos iterativos tipo Newton,  $t_{k+1} = t_k - H(t_k)f(t_k)/f'(t_k)$ , caracterizamos la función  $H(t)$  de manera que los procesos iterativos que obtenemos tienen *velocidad de convergencia infinita* y convergencia global en la resolución de ecuaciones  $f(t) = 0$ , y cumplen la propiedad de que  $L_{f'}(t) = M$ .

De manera que para las funciones  $H$  de la forma

$$H(t) = \frac{-1 + (1 + (M - 2)L_f(t))^{\frac{M-1}{M-2}}}{(M - 1)L_f(t)}$$

y para las funciones  $f(t) = k(t+b)^m + a$ , con  $a, b, k, m \in \mathbb{R}$ , tenemos asociados unos métodos iterativos para los cuales la convergencia es global y la velocidad de convergencia “infinita”.

Desde un punto de vista más práctico, nos planteamos un nuevo objetivo que no es otro que el de establecer el tipo y el orden de convergencia de los procesos iterativos que resultan de truncar el desarrollo en serie de la función  $H$ ,

$$H_q(t) = 1 + \frac{1}{2}t + \sum_{j=2}^{q-2} A_j t^j, \quad A_j = \frac{\prod_{i=2}^j (2i - 1) - (i - 1)M}{(j + 1)!}.$$

Obtenemos así una nueva familia de procesos iterativos con orden de convergencia prefijado  $q$ ,  $q \geq 4$ , y establecemos a partir de las propiedades de estos polinomios  $H_q$  resultados de convergencia semilocal y global, si  $q$  es par, para esta familia de procesos iterativos cuando  $M \leq 2$ . Como caso particular, obtenemos procesos iterativos con órdenes de convergencia altos para la aproximación de la raíz  $n$ -ésima de un número real.

---

## Preliminares

### Procesos iterativos en espacios de Banach

El estudio de procesos iterativos tiene un gran interés debido a su amplio uso en la aproximación de la solución de una ecuación, por ejemplo, en la resolución de un sistema de ecuaciones, problema clásico que aparece envuelto a su vez en diversos campos de la ingeniería o de la matemática aplicada. Nuestro estudio se centra en el problema de aproximar una solución de una ecuación no lineal y, para dar una mayor generalidad al estudio, lo desarrollamos en espacios de Banach, lo cual permite aplicar los resultados obtenidos a un amplio número de problemas: ecuaciones escalares, sistemas de ecuaciones no lineales, ecuaciones diferenciales, ecuaciones integrales, problemas de valores en la frontera, etc.

Básicamente, un proceso iterativo puede describirse de la siguiente manera: dada una aproximación inicial  $x_0$  a una solución de la ecuación no lineal

$$F(x) = 0, \tag{2}$$

se construye un algoritmo, que genera a partir de  $x_0$ , una sucesión  $\{x_n\}$  de aproximaciones a una solución de (2) y que viene definida a través de una iteración funcional, como ocurre con muchos de los métodos iterativos más conocidos, como el método de Newton ([68]), el método de Chebyshev ([71]), el método de Halley ([63]). En todos esos casos, podemos escribir la sucesión resultante de la siguiente forma

$$x_{n+1} = G(x_n), \quad n = 0, 1, 2 \dots \tag{3}$$

donde  $G$  es una función que depende de  $x_n$  y que puede depender de  $F(x_n)$  y de derivadas de  $F$  evaluadas en  $x_n$ .

Notemos que las sucesivas aproximaciones  $x_n$  pueden expresarse en términos de anteriores iteraciones ya conocidas, o que previamente han sido calculadas  $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots$ . Si al calcular  $x_n$  se utiliza sólo la iteración precedente  $x_{n-1}$ , entonces el proceso iterativo se denomina de un paso; si en cambio,  $x_n$  se

expresa en términos de más de una iteración  $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-m}$ , ya conocidas, por ejemplo en términos de  $m$  iteraciones previas, el proceso iterativo se denomina de  $m$  pasos. En nuestro estudio analizaremos métodos iterativos de un paso.

Por otra parte, hay varios aspectos importantes en el estudio de procesos iterativos que son el análisis de la convergencia de la sucesión que se genera, el estudio de la velocidad de convergencia con la que esta sucesión converge a una solución de la ecuación (2) y el análisis del error, que dependen todos ellos básicamente de las características del operador  $F$ .

La velocidad de convergencia de la sucesión que genera el proceso iterativo mide, en cierta manera, la velocidad con la que dicha sucesión se acerca a su límite, suponiendo que este límite existe y es finito. La velocidad de convergencia puede ser analizada de diferentes maneras y con distintos indicadores, como veremos posteriormente. Respecto al estudio de la convergencia, decir que los resultados pueden ser de tres tipos: local, semilocal y global, dependiendo de si se imponen condiciones sobre la raíz buscada o solución de (2), condiciones sobre la aproximación inicial  $x_0$  o condiciones sobre el operador  $F$ , respectivamente. El estudio de la convergencia de los procesos iterativos ha sido abordado habitualmente mediante la utilización de sucesiones mayorizantes. En este trabajo, usaremos además de esta técnica otra desarrollada por Hernández ([73]) y otros autores ([33], [34]), basada en el uso de relaciones de recurrencia, que permite un tratamiento más sencillo, no sólo de las condiciones de convergencia, sino también de la velocidad de convergencia de estos procesos iterativos. Además, esta simplificación posibilita introducir modificaciones en los procesos iterativos clásicos, con los objetivos de incrementar la velocidad de convergencia y de reducir el coste operacional. Así, vamos a poder construir nuevos procesos iterativos, más rápidos, con menor coste operacional y de aplicación directa en un espacio de Banach para cada tipo de ecuación no lineal a resolver.

## Sucesiones y funciones mayorizantes en la convergencia de procesos iterativos en espacios de Banach

Kantorovich ([99]) en el año 1948 dió un resultado, conocido como teorema de Kantorovich, que emplea relaciones de recurrencia y resume los resultados básicos que tratan la convergencia del método de Newton en espacios de Banach, así como estimaciones del error y la existencia y unicidad de soluciones (véanse [101], [115], [118]). Un año más tarde dió una demostración del mismo teorema ([100]) utilizando *el principio de la mayorante* que involucra las tan conocidas sucesiones mayorizantes.

La técnica de Kantorovich no es la única manera de abordar el estudio del método de Newton en espacios de Banach, como queda reflejado en diversos estudios. Así, por ejemplo, Rheinboldt ([129]) obtuvo resultados acerca de la convergencia del método de Newton apoyándose en unos resultados sobre

ecuaciones en diferencias. Destacamos también el estudio realizado por Pták ([126], [127]) y el realizado en colaboración con Potra ([123]), en el que basan su estudio de la convergencia en el método de inducción no discreta o inducción continua. La aplicación de la técnica de sucesiones mayorizantes a procesos iterativos abrió nuevos caminos de estudio sobre todo en lo relativo al análisis del error, (véanse [13], [14], [108], [156]). Otros autores han tratado el estudio de la convergencia de procesos iterativos a partir de relaciones de recurrencia, en esta línea podemos citar los trabajos de Candela y Marquina ([33], [34]) y, el de Gutiérrez y Hernández ([73]) donde se emplean relaciones de recurrencia reducidas. Finalmente, citamos los trabajos de Alefeld y Herzberger ([1]) y Moore ([107]), en los que se aplican herramientas del análisis de intervalos para probar la convergencia de diversos procesos iterativos y resolver sistemas de ecuaciones no lineales.

A continuación, introducimos los conceptos de sucesión y función mayorizante, y vemos su aplicación a la hora de probar la convergencia de sucesiones en espacios de Banach ([2], [154]).

**Definición 1** *Sea  $\{x_n\}$  una sucesión en un espacio de Banach  $X$  y  $\{t_n\}$  una sucesión escalar. Decimos que la sucesión  $\{t_n\}$  mayoriza a la sucesión  $\{x_n\}$  si se cumple la condición*

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq t_{n+1} - t_n, \quad n \geq 0.$$

Observemos que si la sucesión  $\{t_n\}$  es mayorizante, se sigue que es una sucesión creciente. El interés de estas sucesiones mayorizantes reside en que de su convergencia se puede deducir la convergencia de la sucesión a la que mayoriza en el espacio de Banach. En efecto, si  $\{t_n\}$  converge a  $t^* \in \mathbb{R}$ , entonces existe  $x^* \in X$  de manera que la sucesión converge a  $x^*$  y además se tiene que

$$\|x^* - x_n\| \leq t^* - t_n, \quad n \geq 0.$$

Esta desigualdad nos permite obtener cotas del error para la sucesión definida en el espacio de Banach  $\{x_n\}$  en términos de su correspondiente sucesión mayorizante  $\{t_n\}$ .

De ahora en adelante, en toda la memoria, denotaremos por

$$B(x_0, r) = \{x \in X; \|x - x_0\| < r\} \quad \text{y} \quad \overline{B(x_0, r)} = \{x \in X; \|x - x_0\| \leq r\},$$

y llamaremos respectivamente a estos conjuntos bola abierta y bola cerrada de centro  $x_0$  y radio  $r$ .

**Definición 2** *Sea la ecuación  $x = S(x)$ ,  $S : X \rightarrow X$  un operador definido en espacios de Banach con derivada continua en  $\Omega = \overline{B(x_0, r_0)} \subseteq X$  y  $t = g(t)$  la ecuación real, con  $g$  función real diferenciable, definida en el intervalo  $[t_0, t']$  y  $t' \leq t_0 + r_0$ . Decimos que la ecuación  $t = g(t)$  (o la función  $g$ ) mayoriza a la ecuación  $x = S(x)$  (o al operador  $S$ ) si se satisfacen las dos siguientes condiciones:*

$$\begin{aligned} \|S(x_0) - x_0\| &\leq g(t_0) - t_0, \\ \|S'(x)\| &\leq g'(t) \quad \text{si} \quad \|x - x_0\| \leq t - t_0. \end{aligned}$$

Las demostraciones de los siguientes resultados pueden encontrarse en [101].

**Teorema 1** *Sea  $S : X \rightarrow X$  un operador definido en espacios de Banach con derivada continua en la bola  $\overline{B}(x_0, r_0) \subseteq X$ . Sea  $g$  una función real diferenciable en el intervalo  $[t_0, t']$  ( $t' \leq t_0 + r_0$ ). Supongamos que  $g(t)$  mayoriza al operador  $S(x)$  y que  $t = g(t)$  tiene una raíz en el intervalo  $[t_0, t']$ . Entonces, la sucesión  $t_{n+1} = g(t_n)$  converge a la menor raíz  $t^*$  de  $t = g(t)$  en el intervalo  $[t_0, t']$ , y además mayoriza a la sucesión  $x_{n+1} = S(x_n)$ . En consecuencia,  $\{x_n\}$  está contenida en  $\overline{B}(x_0, r_0)$  y es convergente a  $x^*$ , solución de  $x = S(x)$ .*

Además, se tiene

$$\|x^* - x_0\| \leq t^* - t_0.$$

La ecuación  $x = S(x)$  puede tener otras soluciones además de  $x^*$  en la bola  $\overline{B}(x_0, r_0)$ , incluso si la solución  $t^*$  de la ecuación mayorante es única en  $[t_0, t']$ . Sin embargo, se pueden dar condiciones para obtener la unicidad de la solución de  $x = S(x)$ .

**Teorema 2** *En las condiciones del teorema anterior, supongamos que se cumple que  $g(t') \leq t'$  y  $t = g(t)$  tiene una única raíz en el intervalo  $[t_0, t']$ . Entonces, la ecuación  $x = S(x)$  tiene una única solución en  $\overline{B}(x_0, r_0)$ . Además, la sucesión  $\{x_n\}$  converge a esta solución comenzando en cualquier  $\tilde{x}_0 \in \overline{B}(x_0, r_0)$ .*

A continuación, presentamos algunos indicadores de convergencia, junto con las relaciones que satisfacen entre ellos.

## Orden de convergencia y otros indicadores de convergencia

La noción de orden de convergencia surge debido a la necesidad de comparar diferentes procesos iterativos, y representa la velocidad con que nos aproximamos a la raíz de la ecuación mediante la sucesión generada por un proceso iterativo. La definición de esta noción la podemos encontrar en Traub ([140]).

**Definición 3** *Sea una sucesión de puntos  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  en un espacio de Banach  $(X, \|\cdot\|)$  que converge a un punto  $x^* \in X$ . Se dice que  $k$  es el orden de convergencia de la sucesión si existe y es finito el siguiente límite:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_{n+1} - x^*\|}{\|x_n - x^*\|^k}. \quad (4)$$

Se puede probar que, para  $n$  suficientemente grande, en cada paso del proceso iterativo, el número de “decimales exactos” se multiplica exactamente por  $k$ .

Otra caracterización del orden de convergencia es la siguiente. Suponiendo que  $x^*$  es una solución de la ecuación (2), se dice que un proceso iterativo dado por una función de iteración  $G$  de la forma (3) es convergente a  $x^*$  con orden de convergencia  $k \geq 1$  si

$$|G(x) - x^*| = O(|x - x^*|^k).$$

La caracterización fue dada a finales de siglo XIX por Schröder ([136]), donde es necesaria la analiticidad de la función de iteración  $G$  en un entorno de  $x^*$ .

Entonces, suponiendo que la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$ , definida por (3), converge hacia un punto  $x^*$  y  $G$  es analítica en un entorno de  $x^*$ , Schröder prueba que el proceso iterativo tiene exactamente orden de convergencia  $k$  si

$$G(x^*) = x^*, \quad G^{(j)}(x^*) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k-1; \quad G^{(k)}(x^*) \neq 0. \quad (5)$$

Este número  $k$  que aparece en (4) no es necesariamente un entero, puede ser un número real (por razones obvias, estamos interesados en el caso  $k > 1$ ). Estas observaciones nos conducen a la definición de otros indicadores de convergencia que pasamos a enunciar, como son el  $Q$ -orden y el  $R$ -orden de convergencia de una sucesión, cuyo estudio detallado, incluidas las demostraciones de los resultados que exponemos, podemos encontrarlo en [115] y [122].

Comenzaremos estudiando el  $Q$ -orden de convergencia.

**Definición 4** *Sea una sucesión de puntos  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  en un espacio de Banach  $(X, \|\cdot\|)$  convergente con límite  $x^* \in X$ .*

(i) *Decimos que 1 es un  $Q$ -orden de convergencia de la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  si existe una constante  $b \in (0, 1)$  y un número  $N \in \mathbb{N}$  de forma que*

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq b\|x_n - x^*\|, \quad \forall n \geq N.$$

(ii) *Decimos que 1 es el  $Q$ -orden exacto de convergencia de la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  si existen dos constantes  $a, b \in (0, 1)$  y un número  $N \in \mathbb{N}$  de forma que*

$$a\|x_n - x^*\| \leq \|x_{n+1} - x^*\| \leq b\|x_n - x^*\|, \quad \forall n \geq N.$$

(iii) *Decimos que  $r \in (1, +\infty)$  es un  $Q$ -orden de convergencia de la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  si existe una constante  $B > 0$  y un número  $N \in \mathbb{N}$  de forma que*

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq B\|x_n - x^*\|^r, \quad \forall n \geq N. \quad (6)$$

(iv) *Decimos que  $r \in (1, +\infty)$  es el  $Q$ -orden exacto de convergencia de la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  si existen dos constantes  $A, B > 0$  y un número  $N \in \mathbb{N}$  de forma que*

$$A\|x_n - x^*\|^r \leq \|x_{n+1} - x^*\| \leq B\|x_n - x^*\|^r, \quad \forall n \geq N. \quad (7)$$

Supondremos en lo que sigue que:

$$\|x_n - x^*\| > 0, \quad \forall n \geq N. \quad (8)$$

Así, se cumple que si  $r$  es el  $Q$ -orden exacto de convergencia de la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$ , entonces  $r$  es el único número con esta propiedad. Por otra parte, si  $r \in [1, +\infty)$  es un  $Q$ -orden de convergencia de la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$ , entonces cualquier número  $r_1$ , con  $1 \leq r_1 \leq r$ , es también un  $Q$ -orden de convergencia de esta sucesión. Denotando por  $Q(x_n)$  el conjunto de todos los  $Q$ -órdenes de convergencia de la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$ , se sigue que  $Q(x_n)$  es no vacío si y sólo si  $1 \in Q(x_n)$ . Suponemos que  $Q(x_n)$  es no vacío y sea

$$\rho = \sup Q(x_n).$$

Se sigue que

$$[1, \rho) \subset Q(x_n) \subset [1, \rho].$$

Es claro que si el  $Q$ -orden exacto de convergencia de una sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  existe, entonces éste es igual a  $\rho$  y, en este caso, tenemos que  $Q(x_n) = [1, \rho]$ .

A la hora de construir una sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  mediante un proceso iterativo, en general no conocemos el límite  $x^*$  de esta sucesión. Además, no disponemos de las cantidades  $\|x_n - x^*\|$  que aparecen en la definición 4 en ningún paso finito del proceso. No obstante, si la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  converge suficientemente rápido, entonces asintóticamente, podemos reemplazar las cantidades  $\|x_n - x^*\|$  por  $\|x_{n+1} - x_n\|$ . Antes de dar un enunciado preciso de este resultado, vamos a fijar la siguiente terminología:

Si 1 es el  $Q$ -orden exacto de convergencia de una sucesión, entonces decimos que esta sucesión converge linealmente de manera exacta.

Si 1 es un  $Q$ -orden de convergencia de una sucesión, entonces decimos que esta sucesión converge al menos linealmente.

**Definición 5** Sea  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  una sucesión convergente en un espacio de Banach  $(X, \|\cdot\|)$  con límite  $x^* \in X$ , de manera que la condición (8) se cumple. La sucesión converge superlinealmente si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_{n+1} - x^*\|}{\|x_n - x^*\|} = 0. \quad (9)$$

*Nota 1* Es fácil ver que si la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  tiene un  $Q$ -orden de convergencia mas grande que 1, entonces la sucesión converge superlinealmente.

A continuación damos algunos resultados que nos muestran las relaciones que existen entre la convergencia superlineal y los  $Q$ -órdenes de convergencia de la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  y la sucesión  $\{\|x_{n+1} - x_n\|\}_{n \geq 0}$ .

**Teorema 3** Sea  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  una sucesión convergente en un espacio de Banach  $(X, \|\cdot\|)$  con límite  $x^* \in X$ . Suponemos que

$$\|x_{n+1} - x_n\| > 0 \quad \text{para } n \text{ suficientemente grande.}$$

Entonces, la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  converge superlinealmente si y sólo si la sucesión  $\{\|x_{n+1} - x_n\|\}_{n \geq 0}$  converge superlinealmente.

**Teorema 4** Sea  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  una sucesión en un espacio de Banach  $(X, \|\cdot\|)$  tal que  $\|x_{n+1} - x_n\| > 0$  para  $n$  suficientemente grande. Si esta sucesión converge superlinealmente a un punto  $x^* \in X$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_{n+1} - x_n\|}{\|x_n - x^*\|} = 1.$$

A partir de los dos últimos teoremas obtenemos el siguiente resultado:

**Corolario 1** Sea  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  una sucesión convergente en un espacio de Banach  $(X, \|\cdot\|)$  satisfaciendo  $\|x_{n+1} - x_n\| > 0, \forall n \geq N$  y sea  $r$  un número real mas grande que 1. Entonces:

- (i)  $r$  es un  $Q$ -orden de convergencia de la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  si y sólo si  $r$  es un  $Q$ -orden de convergencia de la sucesión  $\{\|x_{n+1} - x_n\|\}_{n \geq 0}$ .
- (ii)  $r$  es el  $Q$ -orden exacto de convergencia de la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  si y sólo si  $r$  es el  $Q$ -orden exacto de convergencia de la sucesión  $\{\|x_{n+1} - x_n\|\}_{n \geq 0}$ .

*Nota 2* De acuerdo con Corolario 1, un número  $r \in (0, +\infty)$  es el  $Q$ -orden de convergencia de una sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  si y sólo si existe una constante positiva  $B$  y un número natural  $N$  tal que

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq B\|x_n - x_{n-1}\|^r, \quad \forall n \geq N. \quad (10)$$

También se sigue que  $r$  es el  $Q$ -orden exacto de convergencia de una sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  si y sólo si existen dos constantes positivas  $A, B$  y un número natural  $N$  tal que

$$A\|x_n - x_{n-1}\|^r \leq \|x_{n+1} - x_n\| \leq B\|x_n - x_{n-1}\|^r, \quad \forall n \geq N. \quad (11)$$

De forma contraria a lo que ocurre en (6) y (7), las anteriores desigualdades pueden ser estimadas en un paso finito del proceso iterativo. Las constantes  $A, B$  y  $N$  pueden ser halladas de manera teórica. En muchos casos las estimaciones dadas por (10) y (11) son precisas solamente para valores de  $N$  muy grandes. No obstante, podríamos querer parar el proceso iterativo antes de que la cota  $N$  fuese alcanzada. Desde luego, es posible extender la validez de (10) y (11) para todo  $n$ , tomando  $B$  suficientemente grande y  $A$  suficientemente pequeña, pero esto nos puede llevar a obtener malas estimaciones.

Otro concepto que interviene en el estudio de la velocidad de convergencia de una sucesión es el que a continuación estudiaremos: el  $R$ -orden de convergencia.

Con la finalidad de unificar algunas fórmulas usaremos en lo que sigue la siguiente notación:

$$e_r(n) = \begin{cases} n, & \text{si } r = 1, \\ r^n, & \text{si } r > 1, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

**Definición 6** Sea una sucesión de puntos  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  en un espacio de Banach  $(X, \|\cdot\|)$  convergente con límite  $x^* \in X$  y sea  $r$  un número real tal que  $r \geq 1$ .

(i) Decimos que  $r$  es un  $R$ -orden de convergencia de la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  si existen dos constantes  $b \in (0, 1)$  y  $B \in (0, +\infty)$  tal que

$$\|x_n - x^*\| \leq Bb^{e_r(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

(ii) Decimos que  $r$  es el  $R$ -orden exacto de convergencia de la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  si existen constantes  $a, b \in (0, 1)$  y  $A, B \in (0, +\infty)$  tal que

$$Aa^{e_r(n)} \leq \|x_{n+1} - x^*\| \leq Bb^{e_r(n)}. \quad (13)$$

Denotamos por  $R(x_n)$  el conjunto de todos los  $R$ -órdenes de convergencia de la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$ . Es fácil ver que  $r \in R(x_n)$  implica  $[1, r] \subset R(x_n)$ .

Denotando por

$$\rho^* = \sup R(x_n),$$

fácilmente se sigue que

$$[1, \rho^*) \subset R(x_n) \subset [1, \rho^*].$$

Es claro que si una sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  tiene un  $R$ -orden exacto de convergencia entonces éste es igual a  $\rho^*$  y en este caso tenemos que  $R(x_n) = [1, \rho^*]$ . Como consecuencia se sigue que el  $R$ -orden exacto de convergencia de una sucesión es único.

**Lema 1** Sea  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  una sucesión en un espacio de Banach  $(X, \|\cdot\|)$  con límite  $x^*$ . Sean  $M, N \in \mathbb{N}$  y  $r$  un número real tal que  $r \geq 1$ .

(i) Decimos que  $r$  es un  $R$ -orden de convergencia de la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  si existen dos constantes  $b_1 \in (0, 1)$  y  $B_1 \in (0, +\infty)$  tal que

$$\|x_{N+k} - x^*\| \leq B_1 b_1^{e_r(M+k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

(ii) Decimos que  $r$  es el  $R$ -orden exacto de convergencia de la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  si existen constantes  $a_1, b_1 \in (0, 1)$  y  $A_1, B_1 \in (0, +\infty)$  tal que

$$A_1 a_1^{e_r(M+k)} \leq \|x_{N+k} - x^*\| \leq B_1 b_1^{e_r(M+k)}. \quad (15)$$

En los siguientes resultados daremos condiciones suficientes bajo las cuales un número  $r \in [1, \infty)$  es un  $R$ -orden de convergencia de una sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$ . Los casos  $r > 1$  y  $r = 1$  son estudiados por separado. Análogamente a la terminología introducida en el estudio de los  $Q$ -órdenes de convergencia, diremos que una sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  converge al menos  $R$ -linealmente si 1 es un  $R$ -orden de convergencia de  $\{x_n\}_{n \geq 0}$ , y diremos que converge  $R$ -linealmente de manera exacta si 1 es el  $R$ -orden exacto de convergencia de  $\{x_n\}_{n \geq 0}$ .

**Teorema 5** Sea  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  una sucesión en un espacio de Banach  $(X, \|\cdot\|)$  con límite  $x^*$  y sea  $r > 1$  un número real.

(i) Si existen  $C \in (0, +\infty)$  y  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|x_n - x^*\| \leq C\|x_{n-1} - x^*\|^r \quad \text{para } n \geq N + 1,$$

entonces  $r \in R(x_n)$ .

(ii) Si  $r \in R(x_n)$  y existen  $D \in (0, +\infty)$  y  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|x_n - x^*\| \geq D\|x_{n-1} - x^*\|^r \quad \text{para } n \geq N + 1,$$

entonces  $r$  es el  $R$ -orden exacto de convergencia de  $\{x_n\}_{n \geq 0}$ .

A partir de Teorema 5, obtenemos el siguiente resultado que relaciona los dos indicadores de convergencia que hemos introducido, los  $Q$ -órdenes y los  $R$ -órdenes.

**Corolario 2** Si  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  es una sucesión convergente en un espacio de Banach  $(X, \|\cdot\|)$ , entonces  $Q(x_n) \subset R(x_n)$ . Además, si un número  $r \geq 1$  es el  $Q$ -orden exacto de convergencia de una sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$ , entonces  $r$  es también el  $R$ -orden exacto de convergencia de esta sucesión.

En el anterior párrafo, relativo al estudio de los  $Q$ -órdenes de convergencia, hemos visto que un número  $r > 1$  es un  $Q$ -orden de convergencia de una sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  si y sólo si  $r$  es un  $Q$ -orden de convergencia de la sucesión  $\{\|x_{n+1} - x_n\|\}_{n \geq 0}$ . En el caso de  $R$ -órdenes de convergencia se tiene el siguiente resultado para  $r \geq 1$ .

**Teorema 6** Si  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  es una sucesión convergente en un espacio de Banach  $(X, \|\cdot\|)$ , entonces  $R(x_n) = R(\|x_{n+1} - x_n\|)$ .

*Nota 3* Si las sucesiones  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  y  $\{\|x_{n+1} - x_n\|\}_{n \geq 0}$  tienen  $R$ -órdenes exactos de convergencia, entonces, de acuerdo con el Teorema 6, se sigue que tienen que ser el mismo. Sin embargo, el hecho de que la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  tenga un  $R$ -orden exacto de convergencia no implica que la sucesión  $\{\|x_{n+1} - x_n\|\}_{n \geq 0}$  tenga un  $R$ -orden exacto de convergencia y viceversa. A pesar de eso tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 7** Sea  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  una sucesión en un espacio de Banach  $(X, \|\cdot\|)$  que converge a un punto  $x^* \in X$  y tal que

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq C\|x_n - x^*\| \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

donde  $C$  es una constante positiva. Si un número  $r \in [1, +\infty)$  es el  $R$ -orden exacto de convergencia de la sucesión  $\{\|x_{n+1} - x_n\|\}_{n \geq 0}$ , entonces  $r$  es también el  $R$ -orden exacto de convergencia de  $\{x_n\}_{n \geq 0}$ .

Para concluir, damos un resultado que relaciona los conceptos introducidos en esta sección para medir la velocidad de convergencia de un proceso iterativo:  $Q$ -orden exacto,  $R$ -orden exacto y orden de convergencia.

**Teorema 8** Sea  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  una sucesión en un espacio de Banach  $(X, \|\cdot\|)$  que converge a un punto  $x^* \in X$ , de tal manera que existen  $\rho = Q$ -orden exacto y  $\rho^* = R$ -orden exacto de convergencia de la sucesión. Si además, existe y es finito el siguiente límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_{n+1} - x^*\|}{\|x_n - x^*\|^r},$$

entonces los tres indicadores de convergencia de la sucesión coinciden y  $\rho = \rho^* = r$ .

## Procesos iterativos para la resolución de ecuaciones no lineales

### 1.1. Introducción

El objetivo que se pretende con este estudio es la construcción de una familia de procesos iterativos, que incluirá a los procesos iterativos más conocidos en espacios de Banach con al menos convergencia cúbica.

Lo primero que haremos es intentar encontrar las características que debe cumplir una función de iteración en el caso escalar de tal manera que la expresión buscada de la función de iteración englobe los procesos iterativos más conocidos con al menos convergencia cúbica, y después esta situación se generaliza a espacios de Banach.

A partir de la condición suficiente de orden de convergencia, dada por Schöder en [136] y, a la vista de la expresión que tienen algunos de los procesos iterativos más conocidos, Gander ([63]) plantea el estudio de los procesos iterativos tipo Newton dados por la siguiente función de iteración

$$G(x) = x - H(x) \frac{f(x)}{f'(x)}. \quad (1.1)$$

En concreto, el objetivo que se plantea es determinar la función  $H$  para que el proceso iterativo tipo Newton definido por el algoritmo (1.1), tenga al menos orden tres (véase [41], [108], [109], [112], [124], [147], [155]).

Suponemos que  $r$  es un cero simple de  $f$  y que  $f$  y  $H$  tienen un número suficiente de derivadas continuas en un entorno de  $r$  y denotamos por  $u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ . Es claro que  $u'(x) = 1 - L_f(x)$ , donde  $L_f(x)$  es conocido como el “grado de convexidad logarítmico” ([84], [87], [90], [88]), y tiene la siguiente expresión

$$L_f(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}.$$

Puesto que  $G(r) = r$ , para que (1.1) defina un proceso iterativo de al menos orden dos bastará con que  $G'(r) = 0$ . Como

$$G'(r) = 1 - u'(r)H(r) - u(r)H'(r),$$

teniendo en cuenta que  $u(r) = 0$  y  $u'(r) = 1$ , se sigue que  $H(r) = 1$ .

Como caso particular, para la función constante  $H(x) = 1$ , se obtiene el método de Newton.

Está claro que, por la caracterización dada por Schröder (5), si se pretende obtener procesos iterativos de al menos convergencia cúbica, se necesita añadir la condición  $G''(r) = 0$ . Sin más que derivar por segunda vez en (1.1), esta condición se reduce a

$$G''(r) = -u''(r)H(r) - 2u'(r)H'(r) - u(r)H''(r) = 0.$$

Como  $u''(r) = -\frac{f''(r)}{f'(r)}$ , se sigue fácilmente que  $G''(r) = 0$  si y sólo si

$$H'(r) = \frac{f''(r)}{2f'(r)}.$$

A la hora de elegir apropiadamente una función  $H$ , estas condiciones que se han obtenido para  $H(r)$  y  $H'(r)$  no nos son útiles, ya que se necesita conocer a priori un cero de la función  $f$ . Sin embargo, si se considera la función  $H$  como una función dependiente del “grado de convexidad logarítmico”, a saber  $H(x) = \tilde{H}(L_f(x))$ , estas condiciones se reducen a

$$\begin{aligned} H(r) &= \tilde{H}(0) = 1, \\ H'(r) &= \tilde{H}'(0)L_f'(r) = \tilde{H}'(0)\frac{f''(r)}{f'(r)} = \frac{f''(r)}{2f'(r)}. \end{aligned}$$

Esto nos permite construir fácilmente funciones  $\tilde{H}$  que cumplan

$$\tilde{H}(0) = 1 \quad \text{y} \quad \tilde{H}'(0) = \frac{1}{2}.$$

Con esta técnica, Gander consigue establecer en [63] condiciones suficientes para la función  $\tilde{H}$  de modo que los procesos iterativos dados por  $G$  en (1.1) tienen convergencia al menos cúbica, sin más que imponer estas condiciones sobre la función  $\tilde{H}$ . Así, tenemos el siguiente resultado:

*Sea  $r$  un cero simple de  $f$  y  $\tilde{H}$  una función derivable al menos dos veces en un entorno del cero, cumpliendo que  $\tilde{H}(0) = 1$ ,  $\tilde{H}'(0) = \frac{1}{2}$  y  $|\tilde{H}''(0)| < \infty$ . La iteración  $x_{n+1} = G(x_n)$ , con  $G(x) = x - \tilde{H}(L_f(x))\frac{f(x)}{f'(x)}$  y  $L_f(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$ , es al menos de tercer orden.*

Este es el resultado cuya generalización a espacios de Banach motiva el origen de esta memoria.

## 1.2. El operador grado de convexidad logarítmico

El hecho de que una curva sea cóncava o convexa está perfectamente caracterizado. Sin embargo, el problema de medir la concavidad o convexidad de una curva es una cuestión menos estudiada. Los primeros trabajos donde aparecen grados de convexidad de una curva, aunque de manera global y con un cierto sentido teórico, se deben a Jensen y Popoviciu ([36]). La aplicación práctica de estos grados de convexidad, globales sobre un intervalo, resulta excesivamente complicada, pues conlleva, entre otras cosas, la consideración de particiones de un intervalo según diferentes medidas. Posteriormente, Garay y Hernández introducen en [65] el concepto de “grado de convexidad logarítmico” como una medida puntual de la convexidad de una función, y es utilizado en el problema de localización de neuronas ([64]). Este concepto de “grado de convexidad logarítmico” surge del teorema de Bohr-Mollerup ([32]), relativo a la definición de la función gamma, donde aparece el término de función “logarítmicamente convexa” ([130]), o función cuyo logaritmo es una función convexa.

El “grado de convexidad logarítmico” se define como un índice de medida puntual de la convexidad y mide la resistencia que ofrece una función convexa a ser “concavizada” mediante sucesivas aplicaciones del operador logaritmo, es decir, el número de veces que se debe aplicar dicho operador a una función convexa para obtener como resultado una función cóncava (véanse [84], [87], [90], [130]). Para un detallado estudio, véase [90].

Su aplicación al estudio de la velocidad de convergencia de procesos iterativos tiene su origen en [84]. En [86] se estudia el efecto de dicho grado de convexidad en la velocidad de convergencia del método de Newton. Este hecho permite construir una aceleración del método de Newton que proporciona a su vez un nuevo proceso iterativo, la aceleración convexa del método de Newton o método de Super-Halley ([73]). Este índice también ha permitido analizar la influencia de la velocidad de convergencia de otros procesos iterativos como son el método de Whittaker ([83]) o el método de la Regula Falsi ([89]).

A continuación, recordamos la definición del “grado de convexidad logarítmico”.

**Definición 1.2.1** *Sea una función convexa  $f \in C^{(2)}(V)$ , siendo  $V$  un intervalo que contiene al punto  $x_0$ . Se define el grado de convexidad logarítmico de  $f$  en  $x_0$  como el número real dado por la expresión*

$$L_f(x_0) = \frac{f(x_0)f''(x_0)}{f'(x_0)^2} \quad (1.2)$$

si  $x_0$  no es un mínimo de  $f$ , en cuyo caso  $L_f(x_0) = \infty$ .

Notemos que si se considera una función positiva en un entorno del punto  $x_0$ , es claro que el grado de convexidad logarítmico de una función convexa es un número real positivo, siendo más convexa respecto al logaritmo a medida que sea mayor dicho número ([87]).

Por otra parte, aunque se pierda el sentido geométrico del concepto, se puede extender formalmente esta definición al espacio  $C^{(2)}(V)$ . Obsérvese también que el grado de convexidad logarítmico es una medida invariante por dilataciones pero no por traslaciones.

Aunque el concepto de grado de convexidad logarítmico puede considerarse como relativamente reciente, existen antecedentes en la literatura matemática. Así, por ejemplo, Neta en [113] da la expresión de diversos métodos iterativos de tercer orden en función del grado de convexidad logarítmico. A continuación, citamos algunos métodos iterativos de tercer orden dados por la función de iteración

$$x_{n+1} = x_n - H(L_f(x_n)) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

donde la expresión de  $H(L_f(x_n))$  viene dada según el método iterativo elegido. Por ejemplo, para el método de Chebyshev ([16], [34], [92]):

$$H(L_f(x_n)) = 1 + \frac{1}{2}L_f(x_n).$$

Para el método de Super-Halley ([21], [73]):

$$H(L_f(x_n)) = 1 + \frac{1}{2}L_f(x_n)(1 - L_f(x_n))^{-1}.$$

Para el método de Halley ([17], [59], [63], [85]):

$$H(L_f(x_n)) = \left(1 - \frac{1}{2}L_f(x_n)\right)^{-1}.$$

Para el método de Ostrowski ([117], [134]):

$$H(L_f(x_n)) = (1 - L_f(x_n))^{-1/2}.$$

Para el método de Euler ([63], [104]):

$$H(L_f(x_n)) = 2\left(1 + \sqrt{1 - 2L_f(x_n)}\right)^{-1}.$$

Para el método exponencial ([3]):

$$H(L_f(x_n)) = -\frac{\log(1 - L_f(x_n))}{L_f(x_n)}.$$

Para el método logarítmico ([30]):

$$H(L_f(x_n)) = \frac{e^{L_f(x_n)} - 1}{L_f(x_n)}.$$

Para la familia de procesos iterativos de tercer orden que aparece en [71]:

$$H(L_f(x_n)) = 1 + \frac{1}{2}L_f(x_n)(1 - \lambda L_f(x_n))^{-1}, \quad \text{con } \lambda \in [0, 1].$$

Notemos que esta última familia de procesos iterativos proporciona el método de Chebyshev para  $\lambda = 0$ , el método de Super-Halley para  $\lambda = 1$  y el método de Halley para  $\lambda = 1/2$ .

Para la familia de procesos iterativos de tercer orden estudiada en [46]:

$$H(L_f(x_n)) = 1 + \frac{1}{2}L_f(x_n)\left(1 + \alpha L_f(x_n)(1 - L_f(x_n))^{-1}\right), \quad \text{con } \alpha \in [0, 1],$$

que es obtenida a partir de la combinación convexa de los procesos iterativos de Chebyshev ( $\alpha = 0$ ) y de Super-Halley ( $\alpha = 1$ ).

Para la familia de procesos iterativos de tercer orden que aparece en [148]:

$$H(L_f(x_n)) = 1 + \frac{1}{2}L_f(x_n)\left(1 - \frac{\lambda}{2}L_f(x_n)\right)^{-1}, \quad \text{con } \lambda \in [0, 2].$$

Al igual que ocurre para la familia dada por Gutiérrez y Hernández en [71], esta familia incluye, como casos particulares, los métodos de Chebyshev para  $\lambda = 0$ , Halley para  $\lambda = 1$  y Super-Halley para  $\lambda = 2$ .

Cuando se trata de analizar la convergencia de un proceso iterativo, en ocasiones, también interviene el grado de convexidad logarítmico. Así, por ejemplo, Altman ([2]) utiliza la expresión (1.2) para probar la convergencia de un proceso iterativo de orden tres en  $\mathbb{R}$ . A continuación, enunciamos por su utilidad una propiedad del grado de convexidad logarítmico que aparece en [2].

**Lema 1.2.2 (Altman)** *Sea  $f$  una función escalar que satisface las condiciones  $f(t) \geq 0$ ,  $f'(t) \neq 0$ ,  $f'''(t) \geq 0$  en  $[0, r]$  y  $f(r) = 0$ . Entonces,  $L_f(t) < \frac{1}{2}$ ,  $t \in [0, r]$ .*

Obsérvese que si  $f(t) \geq 0$ ,  $f'''(t) \geq 0$  en  $[0, r]$  y  $f'(t) \neq 0$  en  $[0, r)$ , entonces se tiene que

$$L_f(t) \leq \frac{1}{2}, \quad t \in [0, r].$$

El análisis de la convergencia de familias de procesos iterativos en espacios de Banach, en las que aparece en su definición el grado de convexidad logarítmico, lleva a pensar en su extensión a operadores definidos en espacios de Banach ([68]). Por una parte, la extensión a funciones reales definidas en espacios de Banach y, en particular, a funcionales continuos sigue teniendo sentido geométrico, pero no ocurre lo mismo para operadores definidos en espacios de Banach en general. No obstante, podemos definir el grado de convexidad logarítmico como un operador lineal entre espacios de Banach, entendiendo que no se trata de una medida puntual de la convexidad, sino de un operador con ciertas propiedades, que servirán para estudiar diversos procesos iterativos.

A partir de aquí, denotaremos por

$$\mathcal{L}(X, Y) = \{T : X \rightarrow Y \mid T \text{ operador lineal y acotado}\}$$

y

$$\mathcal{B}(X \times X, Y) = \{B : X \times X \rightarrow Y \mid B \text{ operador bilineal y acotado}\}.$$

Recordemos que  $\mathcal{L}(X, Y)$  es un espacio de Banach con la norma definida de la siguiente manera: Dado  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ , se define la norma de  $T$  como

$$\|T\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|.$$

Además, si  $X \neq \{0\}$ , entonces

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \inf\{C > 0 \mid \|T(x)\| \leq C\|x\|, \forall x \in X\}.$$

También  $\mathcal{B}(X \times X, Y)$  es un espacio de Banach con la norma definida de la siguiente forma:

$$\|B\| := \sup_{\|x_1\| \leq 1, \|x_2\| \leq 1} \|B(x_1, x_2)\|, \quad B \in \mathcal{B}(X \times X, Y).$$

Así, dado un operador  $F$  entre dos espacios de Banach  $X$  e  $Y$ ,  $F : X \rightarrow Y$ , y  $x \in X$ , se tiene que

$$X \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{\Gamma(x)} X,$$

siendo  $\Gamma(x)$  el operador dado por  $\Gamma(x) = [F'(x)]^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ . De donde se deduce que  $\Gamma(x)F(x)$  es un elemento de  $X$ . Por otra parte, teniendo en cuenta la isometría

$$\mathcal{B}(X \times X, Y) \cong \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y)),$$

se tiene que  $F''(x)\Gamma(x)F(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$ , y por consiguiente,

$$L_F(x) : X \xrightarrow{F''(x)\Gamma(x)F(x)} Y \xrightarrow{\Gamma(x)} X.$$

Teniendo en cuenta todo lo anterior, damos la siguiente definición.

**Definición 1.2.3** Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios de Banach y  $F : X \rightarrow Y$  un operador con derivada segunda Fréchet. Sea  $x_0 \in X$  de manera que exista  $\Gamma(x_0) = [F'(x_0)]^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ . Se define el operador  $L_F$ , que llamaremos grado de convexidad logarítmico, como  $L_F : X \rightarrow \mathcal{L}(X, X)$ , donde a  $x_0 \in X$  le hace corresponder el operador lineal  $L_F(x_0) : X \rightarrow X$  que viene dado de la siguiente manera

$$L_F(x_0)(x) = [F'(x_0)]^{-1} F''(x_0) [F'(x_0)]^{-1} F(x_0)(x), \quad x \in X.$$

Obsérvese que este operador es una generalización formal del grado de convexidad logarítmico definido para funciones reales. Por este motivo lo seguimos denominando de la misma forma. Un estudio más detallado sobre este operador puede encontrarse en [68] y [69].

Por otra parte, el objetivo de esta sección no es realizar un análisis detallado del concepto de convexidad ni de las propiedades que de él se deducen, sino dar una pequeña noción sobre el concepto de función logarítmicamente convexa y una medida de su convexidad. Para un estudio más profundo de la convexidad, pueden consultarse, entre otros, los trabajos de Borweim y Noll ([29]), Butnariu, y Iusem ([31]), Ciesielski ([36]), Giles ([67]), Hiriart-Urruty y Lemarichal ([95]), Hörmander ([96]), Phelps ([120]) o Roberts y Varberg ([130]).

### 1.3. Una nueva familia de procesos iterativos en espacios de Banach

El resultado obtenido por Gander en [63], e indicado anteriormente, nos proporciona un procedimiento para construir procesos iterativos de tercer orden en  $\mathbb{R}$ . Basándonos en esta idea, vamos a tener como objetivo la generalización de este resultado en la resolución de ecuaciones definidas en espacios de Banach. En otras palabras, nuestro objetivo es la construcción de una familia de procesos iterativos en espacios de Banach con al menos convergencia cúbica para la resolución de la ecuación  $F(x) = 0$ , siendo  $F$  un operador no lineal definido entre dos espacios de Banach  $X$  e  $Y$  y dos veces diferenciable Fréchet en un dominio  $\Omega$  abierto, convexo y no vacío,  $F : \Omega \subset X \rightarrow Y$ .

Consideraremos la siguiente familia de procesos iterativos

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - H(L_F(x_n))\Gamma_n F(x_n) \\ H(L_F(x_n)) = I + \frac{1}{2}L_F(x_n) + \sum_{k \geq 2} A_k L_F(x_n)^k, \quad A_k \in \mathbb{R}^+, k \geq 2, \end{cases} \quad (1.3)$$

donde  $L_F(x_n)$  es el operador definido en la sección anterior, y al que hemos llamado grado de convexidad logarítmico. Es claro que esta familia de procesos iterativos tiene al menos convergencia cúbica en  $\mathbb{R}$ , puesto que  $H(0) = 1$ ,  $H'(0) = \frac{1}{2}$  y  $|H''(0)| < \infty$ .

Obsérvese que esta familia de procesos iterativos estará bien definida cuando lo esté el operador  $H$ . Si se denota por  $I = L_F(x)^0$ , se tiene que el operador  $H$  actúa de la siguiente manera

$$H(L_F(-)) : \Omega \subset X \xrightarrow{L_F} \mathcal{L}(X, X) \xrightarrow{H} \mathcal{L}(X, X)$$

donde a cada  $x_n \in \Omega$  le asocia la serie numérica  $H(L_F(x_n)) = \sum_{k \geq 0} A_k L_F(x_n)^k$ ,

con  $A_0 = 1$ ,  $A_1 = \frac{1}{2}$  y  $A_k \in \mathbb{R}^+$ ,  $k \geq 2$ . Además, denotamos por  $L_F(x_n)^k$  la

composición del operador lineal  $L_F(x_n)$   $k$  veces consigo mismo, que vuelve a ser un operador lineal en  $X$ :

$$L_F(x)^k = \overbrace{L_F(x) \circ \cdots \circ L_F(x)}^k$$

El hecho de que  $H$  esté bien definido significa que es un operador que transforma el conjunto de aplicaciones lineales  $\mathcal{L}(X, X)$  en sí mismo y, como es una serie numérica, hay que determinar su dominio de convergencia. Para dar respuesta a estas preguntas sobre la buena definición del operador  $H$  hacemos uso del siguiente resultado ([37]).

**Teorema 1.3.1** *Sea  $X$  un espacio de Banach y  $T : X \rightarrow X$  un operador lineal y acotado,  $T \in \mathcal{L}(X, X)$ . Si  $\sum_{n \geq 0} A_n t^n$ , con  $\{A_n\} \subset \mathbb{R}^+$  es convergente*

*y  $r$  su radio de convergencia, entonces si  $\|T\| < r$ , se tiene que  $\sum_{n \geq 0} A_n T^n \in \mathcal{L}(X, X)$  está bien definida.*

Entonces, como consecuencia del resultado anterior, el operador  $H$ , dado en (1.3), está bien definido como un operador de  $\mathcal{L}(X, X)$  en  $\mathcal{L}(X, X)$  si el operador grado de convexidad logarítmico  $L_F(x)$  es tal que  $\|L_F(x)\| < r$ , donde  $r$  viene dado por  $\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_n|^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}$ . Además, si  $A_n \neq 0, \forall n$ , y existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{A_{n+1}}{A_n} \right|$ , entonces  $r = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{A_{n+1}}{A_n} \right|\right)^{-1}$ .

#### 1.4. Procesos iterativos de tercer orden en espacios de Banach

A continuación, vamos a ver como casos particulares de la familia de procesos iterativos definida en (1.3) los más conocidos métodos de tercer orden, dados todos ellos por la iteración funcional

$$x_{n+1} = x_n - H(L_F(x_n)) \Gamma_n F(x_n),$$

donde para cada método iterativo se tiene una expresión distinta de  $H(L_F(x_n))$ .

Para el método de Chebyshev ([22], [91]):

$$H(L_F(x_n)) = I + \frac{1}{2} L_F(x_n). \tag{1.4}$$

Para los C-métodos ([4], [48]):

$$H(L_F(x_n)) = I + \frac{1}{2} L_F(x_n) + C L_F(x_n)^2, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Para el método de Super-Halley ([14], [18], [51]):

$$H(L_F(x_n)) = I + \frac{1}{2}L_F(x_n)\left(I - L_F(x_n)\right)^{-1} = I + \frac{1}{2}L_F(x_n) + \sum_{k \geq 2} \frac{1}{2}L_F(x_n)^k. \quad (1.6)$$

Para el método de Halley ([23], [60], [104], [134]):

$$H(L_F(x_n)) = \left(I - \frac{1}{2}L_F(x_n)\right)^{-1} = I + \frac{1}{2}L_F(x_n) + \sum_{k \geq 2} \frac{1}{2^k}L_F(x_n)^k. \quad (1.7)$$

Para el método de Ostrowski ([63], [117]):

$$H(L_F(x_n)) = \left(I - L_F(x_n)\right)^{-1/2} = I + \frac{1}{2}L_F(x_n) + \sum_{k \geq 2} \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} L_F(x_n)^k. \quad (1.8)$$

Para el método de Euler ([104], [140]):

$$\begin{aligned} H(L_F(x_n)) &= 2\left(I + \left(I - 2L_F(x_n)\right)^{1/2}\right)^{-1} \\ &= I + \frac{1}{2}L_F(x_n) + \sum_{k \geq 2} \frac{1}{2^k(k+1)} \binom{2k}{k} L_F(x_n)^k. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Para el método exponencial ([3]):

$$H(L_F(x_n)) = I + \frac{1}{2}L_F(x_n) + \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k+1} L_F(x_n)^k. \quad (1.10)$$

Para el método logarítmico ([30]):

$$H(L_F(x_n)) = I + \frac{1}{2}L_F(x_n) + \sum_{k \geq 2} \frac{1}{(k+1)!} L_F(x_n)^k. \quad (1.11)$$

Para la familia obtenida a partir de la combinación convexa de los procesos iterativos de Chebyshev y de Super-Halley, que tiene  $R$ -orden de convergencia al menos tres ([46]):

$$\begin{aligned} H(L_F(x_n)) &= I + \frac{1}{2}L_F(x_n)\left(I + \alpha L_F(x_n)\left(I - L_F(x_n)\right)^{-1}\right) \\ &= I + \frac{1}{2}L_F(x_n) + \sum_{k \geq 2} \frac{\alpha}{2} L_F(x_n)^k, \quad \alpha \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Para la familia de procesos iterativos con  $R$ -orden de convergencia al menos tres que aparece en [71]:

$$\begin{aligned}
H(L_F(x_n)) &= I + \frac{1}{2}L_F(x_n)(I - \lambda L_F(x_n))^{-1} \\
&= I + \frac{1}{2}L_F(x_n) + \sum_{k \geq 2} \frac{\lambda^{k-1}}{2} L_F(x_n)^k, \quad \text{con } \lambda \in [0, 1].
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Para la familia de procesos iterativos con  $R$ -orden de convergencia al menos tres que aparece en [148]:

$$\begin{aligned}
H(L_F(x_n)) &= I + \frac{1}{2}L_F(x_n) \left(1 - \frac{\lambda}{2}L_F(x_n)\right)^{-1} \\
&= I + \frac{1}{2}L_F(x_n) + \sum_{k \geq 2} \frac{\lambda^{k-1}}{2^k} L_F(x_n)^k, \quad \text{con } \lambda \in [0, 2].
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Notemos que las familias de procesos iterativos (1.12), (1.13) y (1.14) incluyen como casos particulares los métodos de Chebyshev ( $\alpha = 0$  en (1.12),  $\lambda = 0$  en (1.13) y (1.14)), el método de Super-Halley ( $\alpha = 1$  en (1.12),  $\lambda = 1$  en (1.13) y  $\lambda = 2$  en (1.14)) y el método de Halley ( $\lambda = 1/2$  en (1.13) y  $\lambda = 1$  en (1.14)).

También es interesante notar que los métodos de Newton, Chebyshev y los C-métodos corresponden con la situación considerada en (1.3) cuando  $A_k = 0$ , para  $k \geq 1$ ,  $k \geq 2$  y  $k \geq 3$ , respectivamente y que el radio de convergencia asociado a estos métodos es  $r = +\infty$ .

## Análisis del resultado de Gander en espacios de Banach para la nueva familia de procesos iterativos

### 2.1. Introducción

A lo largo de todo el capítulo consideramos el problema de resolver la ecuación

$$F(x) = 0 \quad (2.1)$$

mediante procesos iterativos, siendo  $F$  un operador no lineal definido entre dos espacios de Banach  $X$  e  $Y$  y dos veces diferenciable Fréchet en un dominio  $\Omega$  abierto convexo y no vacío.

En primer lugar, planteamos la obtención de resultados de convergencia semilocal para la familia de procesos iterativos dada en (1.3), y cuya definición recordamos a continuación:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - H(L_F(x_n))\Gamma_n F(x_n), \\ H(L_F(x_n)) = I + \frac{1}{2}L_F(x_n) + \sum_{k \geq 2} A_k L_F(x_n)^k, \quad \{A_k\}_{k \geq 2} \subset \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Estudiamos las condiciones que tienen que cumplirse para que la sucesión que define esta familia de procesos iterativos converja a una solución de la ecuación (2.1). Para ello, exigimos sobre el operador  $F$  las que se conocen como condiciones de Kantorovich ([99], [100], [101]), habitualmente las más utilizadas para estudiar la convergencia de los procesos iterativos de tercer orden:

- (C1) Existe un punto  $x_0 \in \Omega$  donde el operador  $\Gamma_0$  está definido y  $\|\Gamma_0\| \leq \beta$ ,
- (C2)  $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \eta$ ,
- (C3)  $\|F''(x)\| \leq M, \quad \forall x \in \Omega$ ,
- (C4)  $\|F''(x) - F''(y)\| \leq K\|x - y\|, \quad K > 0, \quad x, y \in \Omega$ .

Otros autores utilizan, en lugar de la condición (C4), la condición de que la tercera derivada del operador esté acotada, es decir,  $\|F'''(x)\| \leq N$ . Notemos que la condición de que el operador  $F''$  sea Lipschitz-continuo, condición (C4), suaviza esta situación.

## 2.2. Estudio de la convergencia mediante sucesiones mayorizantes

Para realizar un primer estudio de la convergencia semilocal de (1.3) emplearemos las conocidas “sucesiones mayorizantes”, ([100]). Este concepto subyace a su vez del concepto de operadores mayorizantes que introduce Kantorovich en la demostración de la convergencia del método de Newton en [100] y que más tarde Rheinboldt emplea en [129] al dar una teoría de convergencia unificada para procesos iterativos en la forma  $x_{k+1} = G(x_k)$  siendo  $G : X \rightarrow X$  un operador continuo y  $X$  un espacio métrico completo.

### 2.2.1. Convergencia semilocal

Seguimos la técnica de sucesiones mayorizantes para realizar el estudio de la convergencia de la familia de procesos iterativos dada por (1.3) a una solución de (2.1), bajo las condiciones (C1)–(C4) de Kantorovich para el operador  $F$  en espacios de Banach.

Notemos que el operador  $S$  dado en el teorema 1 de convergencia no es otro que la función de iteración

$$x_{n+1} = S(x_n) = x_n - H(L_F(x_n))L_n F(x_n), \quad n \geq 0,$$

que define la familia de procesos iterativos dada en (1.3).

Con la notación anterior, una solución  $x^*$  de la ecuación  $x = S(x)$ , con  $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , es también solución de la ecuación (2.1), es decir,  $F(x^*) = 0$  sin más que tener en cuenta que  $H(L_F(x^*)) \neq 0$ .

La sucesión mayorizante empleada,  $\{t_n\} = P(t_n)$ , es la obtenida al aplicar la familia de procesos iterativos (1.3) a la ecuación escalar  $p(t) = 0$ , donde  $p$  es una función real, decreciente y convexa en un intervalo  $[a, b]$ , tal que  $p(a) > 0 > p(b)$ . Además,  $p'(t) \neq 0$  y  $p'''(t) \geq 0$  en el intervalo  $[a, s]$ , con  $s$  la única solución simple de  $p(t) = 0$  en  $[a, b]$ .

Si denotamos esta sucesión escalar por  $\{t_n\}$ , entonces se tiene que

$$\begin{cases} t_{n+1} = P(t_n) = t_n - h(L_p(t_n)) \frac{p(t_n)}{p'(t_n)}, & \text{donde} \\ h(L_p(t_n)) = 1 + \frac{1}{2} L_p(t_n) + \sum_{k \geq 2} A_k L_p(t_n)^k, & \{A_k\}_{k \geq 2} \subset \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (2.2)$$

Vamos a exigir que la sucesión  $\{A_k\}_{k \geq 2}$  sea decreciente en sentido no estricto:  $A_k \leq A_{k-1}$  para  $k \geq 3$ . Además, exigimos que  $|L_p(t)| < r$  en (2.2), siendo  $r$  el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{k \geq 0} A_k t^k, \quad \text{donde } A_0 = 1, A_1 = \frac{1}{2}, \quad (2.3)$$

para asegurar la buena definición de  $h$  en el intervalo  $[a, b]$ . En este caso,  $L_p(t)$  es el grado de convexidad logarítmico, que en el caso escalar viene dado por la expresión

$$L_p(t) = \frac{p(t)p''(t)}{p'(t)^2}.$$

Notemos que, con la notación anterior, una solución  $t^*$  de la ecuación  $t = P(t)$  es también solución de la ecuación escalar  $p(t) = 0$ , es decir,  $p(t^*) = 0$ .

A continuación, damos un resultado de convergencia, para la familia de procesos iterativos dada por (2.2), en términos de una función arbitraria  $p$  que mayoriza al operador  $F$ .

**Teorema 2.2.1** *Sea  $p$  una función real, decreciente y convexa en un intervalo  $[a, b]$ , cumpliendo que  $p(a) > 0 > p(b)$ . Además  $p'(t) \neq 0$  y  $p'''(t) \geq 0$  en el intervalo  $[a, s]$ , con  $s$  la única solución simple de  $p(t) = 0$  en  $[a, b]$ , y  $|L_p(t)| < r$  en  $[a, s]$ , donde  $r$  es el radio de convergencia de la serie (2.3). Entonces la sucesión dada por (2.2) converge a una solución  $s$  de  $p(t) = 0$  de forma creciente.*

*Nota 2.1.* En el caso de que  $r < 1/2$  debemos exigir que  $|L_p(t)| < r$ , para asegurar una buena definición de  $h$  en el intervalo  $[a, s]$ . Sin embargo, en esta situación, dado que el punto de salida  $t_0 \in [a, s]$  estará próximo a la solución  $s$ , la sucesión  $\{L_p(t_n)\}$  es decreciente, y por lo tanto, esta condición puede ser cambiada por esta otra  $|L_p(t_0)| < r$ . En otro caso, es decir, cuando  $r \geq 1/2$ , por el lema 1.2.2, lema de Altman, tenemos asegurada la condición impuesta  $|L_p(t)| < r$  en el teorema 2.2.1.

Después de la observación anterior podemos enunciar la siguiente consecuencia, cuya demostración se sigue del resultado dado por Altman, lema 1.2.2.

**Corolario 2.2.2** *Sea  $p$  una función real, decreciente y convexa en un intervalo  $[a, b]$ , cumpliendo que  $p(a) > 0 > p(b)$ . Además,  $p'(t) \neq 0$  y  $p'''(t) \geq 0$  en el intervalo  $[a, s]$ , con  $s$  la única solución simple de  $p(t) = 0$  en  $[a, b]$ . Entonces, si  $r \geq 1/2$ , la sucesión dada por (2.2) converge a  $s$  una solución de  $p(t) = 0$  de forma creciente.*

*Demostración del teorema 2.2.1.* Por un lado, vamos a demostrar que la sucesión real  $\{t_n\}$  está acotada por  $s$ , la única raíz simple de la función  $p(t)$  en  $[a, b]$ . Y, por otro lado, demostraremos que dicha sucesión es creciente hacia  $s$ .

Sin pérdida de generalidad tomamos  $t_0 = 0$ . De (2.2) se sigue que

$$t_1 - t_0 = -h(L_p(t_0)) \frac{p(t_0)}{p'(t_0)} \geq 0,$$

puesto que  $h(L_p(t_0)) \geq 0$ ,  $p(t_0) > 0$  y  $p'(t_0) < 0$ . Entonces, se obtiene que  $t_1 \geq t_0$ . Veamos ahora que,  $t_1 \leq s$ . Por el teorema del valor medio, obtenemos que

$$t_1 - s = P(t_0) - P(s) = P'(\xi_0)(t_0 - s), \text{ con } \xi_0 \in (t_0, s).$$

Por otra parte,

$$P'(t) = 1 - h'(L_p(t))L_p'(t)\frac{p(t)}{p'(t)} - h(L_p(t))(1 - L_p(t)).$$

Además, como

$$L_p'(t) = \frac{p''(t)}{p'(t)} + \frac{p(t)p'''(t)}{p'(t)^2} - 2\frac{p(t)p''(t)^2}{p'(t)^3},$$

se sigue que

$$L_p'(t)\frac{p(t)}{p'(t)} = L_p(t) + L_p(t)^2L_{p'}(t) - 2L_p(t)^2 = L_p(t)\left(1 - L_p(t)(2 - L_{p'}(t))\right),$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} P'(t) &= 1 - \left(\frac{1}{2} + \sum_{k \geq 2} kA_k L_p(t)^{k-1}\right) L_p(t)\left(1 - L_p(t)(2 - L_{p'}(t))\right) \\ &\quad - \left(1 + \frac{1}{2}L_p(t) + \sum_{k \geq 2} A_k L_p(t)^k\right) (1 - L_p(t)). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $A_1 = \frac{1}{2}$ , obtenemos que

$$P'(t) = \sum_{k \geq 2} \left[ \left( (k-1)(2 - L_{p'}(t)) + 1 \right) A_{k-1} - (k+1)A_k \right] L_p(t)^k.$$

Como

$$L_{p'}(t) = \frac{p'(t)p'''(t)}{p''(t)^2} \leq 0 \text{ en } (t_0, r),$$

se tiene que

$$\left( (k-1)(2 - L_{p'}(t)) + 1 \right) A_{k-1} - (k+1)A_k \geq 0, \quad k \geq 2,$$

puesto que, por hipótesis, la sucesión de coeficientes  $\{A_k\}_{k \geq 2} \subset \mathbb{R}^+$  es decreciente, podemos acotar el coeficiente de  $L_p(t)^k$  de la siguiente manera

$$\left( 2(k-1) + 1 - (k+1) \right) A_k = (k-2)A_k \geq 0, \quad \forall k \geq 2.$$

Como consecuencia, obtenemos que  $P'(t) \geq 0$  en el intervalo  $(t_0, s)$  y  $t_1 \leq s$ .

A continuación, suponemos que  $t_k \geq t_{k-1}$  y  $t_k \leq s$ , para  $k = 1, 2, \dots, n-1$ , y vamos a ver qué ocurre para  $k = n$ . Por el mismo procedimiento utilizado para  $t_1$ , se sigue a partir de (2.2) que

$$t_n - t_{n-1} = -h(L_p(t_{n-1})) \frac{p(t_{n-1})}{p'(t_{n-1})} \geq 0,$$

dado que  $h(L_p(t_{n-1})) \geq 0$ ,  $p(t_{n-1}) > 0$  y  $p'(t_{n-1}) < 0$ . Veamos ahora que,  $t_n \leq s$ . Por el teorema del valor medio, obtenemos que

$$t_n - s = P(t_{n-1}) - P(s) = P'(\xi_{n-1})(t_{n-1} - s), \text{ con } \xi_{n-1} \in (t_{n-1}, s).$$

Como  $P'(t) \geq 0$  en  $(t_k, s)$ , puesto que  $(t_k, s) \subset (t_0, s)$  para  $k = 1, 2, \dots, n-1$ , se sigue que  $t_n \leq s$ . Por lo tanto,  $\{t_n\}$  es una sucesión creciente y acotada superiormente. Entonces, existe  $u \in [a, b]$ , con  $u \leq s$ , y tal que  $u = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$ .

Ahora bien, pasando al límite en (2.2), obtenemos que

$$u = u - h(L_p(u)) \frac{p(u)}{p'(u)},$$

de donde se sigue que  $p(u) = 0$ , puesto que  $u \leq s$  y  $h(L_p(u)) > 0$ . Como, por hipótesis,  $s$  es la única raíz de  $p(t) = 0$ , tenemos que  $u = s$ . ■

Una vez visto el comportamiento de la sucesión real  $\{t_n\}$ , obtenida al aplicar la familia de procesos iterativos (1.3) a la ecuación escalar  $p(t) = 0$ , vamos a generalizar el estudio de esta familia a espacios de Banach. Como se indicó al comienzo de esta sección, consideraremos la ecuación (2.1), siendo  $F$  un operador en las condiciones allí indicadas. Para realizar dicho estudio emplearemos la técnica de las sucesiones mayorizantes.

A continuación, damos un resultado general de convergencia, en términos de una función  $p$  arbitraria, que mayoriza al operador  $F$ . El siguiente teorema contiene las condiciones suficientes para conseguir la convergencia de (1.3) y, además, asegurar también la existencia de una solución de la ecuación (2.1).

**Teorema 2.2.3** *Sea  $x_0 \in \Omega$  un punto en el que existe  $\Gamma_0 = F'(x_0)^{-1}$ , y existe  $p$  una función real de tal forma que  $p(t_0) > 0$  para  $t_0 \in [a, b]$ . En las hipótesis del teorema 2.2.1, si se cumplen las siguientes condiciones:*

- (I)  $\|\Gamma_0\| \leq \frac{-1}{p'(t_0)}$ ,
- (II)  $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \frac{-p(t_0)}{p'(t_0)}$ ,
- (III)  $\|F''(x)\| \leq p''(t)$  si  $\|x - x_0\| \leq t - t_0 \leq s - t_0$ ,
- (IV)  $\|F''(x) - F''(y)\| \leq |p''(u) - p''(v)|$  con  $x, y \in \Omega$ ,  $u, v \in [a, s]$ ,

entonces, si  $B(x_0, s - t_0) \subset \Omega$ , la sucesión dada en (1.3) está bien definida y converge a una solución  $x^*$  de la ecuación (2.1), siendo  $x^*$  la única solución en  $B(x_0, s - t_0)$ . Además, se tiene que

$$\|x^* - x_n\| \leq s - t_n \text{ para } n \geq 0.$$

Obsérvese que en este caso, por el teorema 2.2.1, la sucesión (2.2) es convergente a  $s$ , única solución simple de  $p(t) = 0$  en  $[a, b]$ . Antes de demostrar la convergencia de (1.3) y la existencia y unicidad de solución para la ecuación (2.1), vamos a enunciar unos lemas en las mismas condiciones del teorema anterior y que emplearemos en dicha demostración.

Teniendo en cuenta la expresión que tiene la familia de procesos iterativos dada en (1.3), damos a continuación una descomposición para el operador  $F$ .

**Lema 2.2.4** *Sea el operador  $F$  en las condiciones del teorema 2.2.3. Entonces,*

$$\begin{aligned} F(x_{n+1}) &= \frac{1}{2} F''(x_n) \Gamma_n F(x_n) \left( \sum_{k \geq 2} 2(A_{k-1} - A_k) L_F(x_n)^{k-1} \right) \Gamma_n F(x_n) \\ &\quad + \frac{1}{8} F''(x_n) \left( L_F(x_n) \tilde{H}(L_F(x_n)) \Gamma_n F(x_n) \right)^2 \\ &\quad + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left( F''(x) - F''(x_n) \right) (x_{n+1} - x) dx, \end{aligned}$$

donde  $\tilde{H}(z) = I + \sum_{k \geq 2} 2A_k z^{k-1}$ .

*Demostración.* Por el desarrollo de Taylor se tiene que

$$\begin{aligned} F(x_{n+1}) &= F(x_n) + F'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{1}{2!} F''(x_n)(x_{n+1} - x_n)^2 \\ &\quad + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left( F''(x) - F''(x_n) \right) (x_{n+1} - x) dx. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} F'(x_n)(x_{n+1} - x_n) &= F'(x_n) \left( - \left( I + \frac{1}{2} L_F(x_n) \tilde{H}(L_F(x_n)) \right) \right) \Gamma_n F(x_n) \\ &= -F(x_n) - \frac{1}{2} F''(x_n) \Gamma_n F(x_n) \tilde{H}(L_F(x_n)) \Gamma_n F(x_n), \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} F(x_{n+1}) &= -\frac{1}{2} F''(x_n) \Gamma_n F(x_n) \tilde{H}(L_F(x_n)) \Gamma_n F(x_n) \\ &\quad + \frac{1}{2!} F''(x_n) \left( - \left( I + \frac{1}{2} L_F(x_n) \tilde{H}(L_F(x_n)) \right) \Gamma_n F(x_n) \right)^2 \\ &\quad + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left( F''(x) - F''(x_n) \right) (x_{n+1} - x) dx. \end{aligned}$$

Denotamos  $*$  =  $-F(x_n) - \frac{1}{2} L_F(x_n) \tilde{H}(L_F(x_n)) \Gamma_n F(x_n)$  en la siguiente igualdad y como  $F''$  es bilineal, se tiene que

$$\begin{aligned}
F''(x_n)(*, *) &= -F''(x_n) \left( \Gamma_n F(x_n), * \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} F''(x_n) \left( L_F(x_n) \tilde{H}(L_F(x_n)) \Gamma_n F(x_n), * \right) \\
&= F''(x_n) \Gamma_n F(x_n) \Gamma_n F(x_n) \\
&\quad + \frac{1}{2} F''(x_n) \Gamma_n F(x_n) L_F(x_n) \tilde{H}(L_F(x_n)) \Gamma_n F(x_n) \\
&\quad + \frac{1}{2} F''(x_n) L_F(x_n) \tilde{H}(L_F(x_n)) \Gamma_n F(x_n) \Gamma_n F(x_n) \\
&\quad + \frac{1}{4} F''(x_n) \left( L_F(x_n) \tilde{H}(L_F(x_n)) \Gamma_n F(x_n) \right)^2.
\end{aligned}$$

Dado que el operador  $F''$  es un operador bilineal simétrico, se sigue que

$$\begin{aligned}
F''(x_n)(*, *) &= F''(x_n) \Gamma_n F(x_n) \left( I + L_F(x_n) \tilde{H}(L_F(x_n)) \right) \Gamma_n F(x_n) \\
&\quad + \frac{1}{4} F''(x_n) \left( L_F(x_n) \tilde{H}(L_F(x_n)) \Gamma_n F(x_n) \right)^2.
\end{aligned}$$

Sustituyendo ahora en la expresión que tiene  $F(x_{n+1})$ , nos queda

$$\begin{aligned}
F(x_{n+1}) &= -\frac{1}{2} F''(x_n) \Gamma_n F(x_n) \tilde{H}(L_F(x_n)) \Gamma_n F(x_n) \\
&\quad + \frac{1}{2} F''(x_n) \Gamma_n F(x_n) \left( I + L_F(x_n) \tilde{H}(L_F(x_n)) \right) \Gamma_n F(x_n) \\
&\quad + \frac{1}{8} F''(x_n) \left( L_F(x_n) \tilde{H}(L_F(x_n)) \Gamma_n F(x_n) \right)^2 \\
&\quad + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left( F''(x) - F''(x_n) \right) (x_{n+1} - x) dx,
\end{aligned}$$

y agrupando los dos primeros sumandos se sigue que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} F''(x_n) \Gamma_n F(x_n) \left( I + L_F(x_n) \tilde{H}(L_F(x_n)) - \tilde{H}(L_F(x_n)) \right) \Gamma_n F(x_n) \\
&= \frac{1}{2} F''(x_n) \Gamma_n F(x_n) \left( L_F(x_n) + \sum_{k \geq 2} 2A_k L_F(x_n)^k - \sum_{k \geq 2} 2A_k L_F(x_n)^{k-1} \right) \Gamma_n F(x_n) \\
&= \frac{1}{2} F''(x_n) \Gamma_n F(x_n) \left( (1 - 2A_2) L_F(x_n) + \sum_{k \geq 2} 2(A_k - A_{k+1}) L_F(x_n)^k \right) \Gamma_n F(x_n).
\end{aligned}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que  $A_1 = \frac{1}{2}$ ,

$$\begin{aligned}
F(x_{n+1}) &= \frac{1}{2}F''(x_n)\Gamma_n F(x_n) \left( \sum_{k \geq 2} 2(A_{k-1} - A_k)L_F(x_n)^{k-1} \right) \Gamma_n F(x_n) \\
&\quad + \frac{1}{8}F''(x_n) \left( L_F(x_n)\tilde{H}(L_F(x_n))\Gamma_n F(x_n) \right)^2 \\
&\quad + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left( F''(x) - F''(x_n) \right) (x_{n+1} - x) dx. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Lema 2.2.5** *Sea  $p$  una función real cumpliendo las condiciones del teorema 2.2.1 y sea la familia de procesos iterativos dada por (2.2). Entonces se tiene que  $p(t_{n+1})$  admite la siguiente descomposición:*

$$\begin{aligned}
p(t_{n+1}) &= \frac{1}{2}p(t_n) \sum_{k \geq 2} 2(A_{k-1} - A_k)L_p(t_n)^k + \frac{1}{8}p(t_n)L_p(t_n)^3\tilde{h}(L_p(t_n))^2 \\
&\quad + \int_0^1 \left( p''(t_n + \tau(t_{n+1} - t_n)) - p''(t_n) \right) (1 - \tau)(t_{n+1} - t_n)^2 d\tau,
\end{aligned}$$

siendo  $\tilde{h}(t) = 1 + \sum_{k \geq 2} 2A_k t^{k-1}$ .

*Demostración.* Por el desarrollo de Taylor se tiene que

$$\begin{aligned}
p(t_{n+1}) &= p(t_n) + p'(t_n)(t_{n+1} - t_n) + \frac{1}{2!}p''(t_n)(t_{n+1} - t_n)^2 \\
&\quad + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left( p''(t) - p''(t_n) \right) (t_{n+1} - t) dt.
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
p'(t_n)(t_{n+1} - t_n) &= -p'(t_n) \left( 1 + \frac{1}{2}L_p(t_n)\tilde{h}(L_p(t_n)) \right) \frac{p(t_n)}{p'(t_n)} \\
&= -p(t_n) - \frac{1}{2}p(t_n)L_p(t_n)\tilde{h}(L_p(t_n)).
\end{aligned}$$

Por tanto, haciendo el cambio de variable  $t = t_n + \tau(t_{n+1} - t_n)$ , se obtiene

$$\begin{aligned}
p(t_{n+1}) &= -\frac{1}{2}p(t_n)L_p(t_n)\tilde{h}(L_p(t_n)) + \frac{1}{2}p''(t_n) \left( \left( 1 + \frac{1}{2}L_p(t_n)\tilde{h}(L_p(t_n)) \right) \frac{p(t_n)}{p'(t_n)} \right)^2 \\
&\quad + \int_0^1 \left( p''(t_n + \tau(t_{n+1} - t_n)) - p''(t_n) \right) (1 - \tau)(t_{n+1} - t_n)^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Así, sin más que agrupar los dos primeros sumandos y teniendo en cuenta que  $A_1 = \frac{1}{2}$ , queda

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}p(t_n)L_p(t_n)\tilde{h}(L_p(t_n)) + \frac{1}{2}p''(t_n) \left( \left(1 + \frac{1}{2}L_p(t_n)\tilde{h}(L_p(t_n))\right) \frac{p(t_n)}{p'(t_n)} \right)^2 \\
 & = \frac{1}{2}p(t_n)L_p(t_n) \left(1 - (1 - L_p(t_n))\tilde{h}(L_p(t_n))\right) + \frac{1}{8}p(t_n)L_p(t_n)^3\tilde{h}(L_p(t_n))^2 \\
 & = \frac{1}{2}p(t_n) \sum_{k \geq 2} 2(A_{k-1} - A_k)L_p(t_n)^k + \frac{1}{8}p(t_n)L_p(t_n)^3\tilde{h}(L_p(t_n))^2.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 p(t_{n+1}) & = \frac{1}{2}p(t_n) \sum_{k \geq 2} 2(A_{k-1} - A_k)L_p(t_n)^k + \frac{1}{8}p(t_n)L_p(t_n)^3\tilde{h}(L_p(t_n))^2 \\
 & \quad + \int_0^1 \left( p''(t_n + \tau(t_{n+1} - t_n)) - p''(t_n) \right) (1 - \tau)(t_{n+1} - t_n)^2 d\tau. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Pasamos a demostrar el teorema 2.2.3 de convergencia, existencia y unicidad de solución para la ecuación (2.1). Por comodidad en la demostración, reescribimos la familia de procesos iterativos dada en (1.3) de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \left( I + \frac{1}{2}L_F(x_n)\tilde{H}(L_F(x_n)) \right) \Gamma_n F(x_n), \text{ donde} \\ \tilde{H}(L_F(x_n)) = I + \sum_{k \geq 2} 2A_k L_F(x_n)^{k-1}, \quad \{A_k\}_{k \geq 2} \subset \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (2.4)$$

Recordemos que la sucesión  $\{A_k\}_{k \geq 2}$  es decreciente.

*Demostración del teorema 2.2.3.* En primer lugar, demostramos que los elementos de la sucesión  $\{x_n\}$  están bien definidos y que forman una sucesión convergente. Comenzamos viéndolo para  $x_1$ . En efecto,

$$\|L_F(x_0)\| \leq \|\Gamma_0\| \|F''(x_0)\| \|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \frac{-1}{p'(t_0)} p''(t_0) \frac{-p(t_0)}{p'(t_0)} = L_p(t_0) < r,$$

siendo  $r$  el radio de convergencia de la serie (2.3). Además, tanto  $x_0$  como  $\Gamma_0 F(x_0)$  están en  $\Omega$  y  $\tilde{H}(L_F(x_0))$  está bien definido. Luego,

$$x_1 = x_0 - \left( I + \frac{1}{2}L_F(x_0)\tilde{H}(L_F(x_0)) \right) \Gamma_0 F(x_0) \in \Omega,$$

es decir,  $x_1$  está bien definido. Además, se tiene que

$$\|\tilde{H}(L_F(x_0))\| = \left\| I + \sum_{k \geq 2} 2A_k L_F(x_0)^{k-1} \right\| \leq 1 + \sum_{k \geq 2} 2A_k L_p(t_0)^{k-1} = \tilde{h}(L_p(t_0))$$

y

$$\begin{aligned}
 \|x_1 - x_0\| & \leq \left\| I + \frac{1}{2}L_F(x_0)\tilde{H}(L_F(x_0)) \right\| \|\Gamma_0 F(x_0)\| \\
 & \leq \left( 1 + \frac{1}{2}L_p(t_0)\tilde{h}(L_p(t_0)) \right) \left( \frac{-p(t_0)}{p'(t_0)} \right) = t_1 - t_0 \leq s - t_0.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $x_1 \in B(x_0, s - t_0) \subset \Omega$ .

A continuación, veamos que las condiciones (I) y (II) son ciertas si cambiamos  $x_1$  por  $x_0$ . En primer lugar, probamos la existencia de  $\Gamma_1$ . Sabemos de la existencia de  $\Gamma_0$  como operador lineal y que es invertible. Entonces,

$$\|I - \Gamma_0 F'(x_1)\| \leq \|\Gamma_0\| \|F'(x_0) - F'(x_1)\| \leq \|\Gamma_0\| \int_{x_0}^{x_1} \|F''(x)\| dx.$$

Ahora, sin más que parametrizar la integral y teniendo en cuenta que

$$\|x_0 + \tau(x_1 - x_0) - x_0\| \leq \tau \|x_1 - x_0\| \leq \tau(t_1 - t_0) = t_0 + \tau(t_1 - t_0) - t_0,$$

se sigue

$$\begin{aligned} \|I - \Gamma_0 F'(x_1)\| &\leq \|\Gamma_0\| \int_0^1 \|F''(x_0 + \tau(x_1 - x_0))\| \|x_1 - x_0\| d\tau \\ &\leq \frac{-1}{p'(t_0)} \int_0^1 p''(t_0 + \tau(t_1 - t_0)) (t_1 - t_0) d\tau \\ &= \frac{-1}{p'(t_0)} \int_{t_0}^{t_1} p''(z) dz = \frac{-1}{p'(t_0)} (p'(t_1) - p'(t_0)) = 1 - \frac{p'(t_1)}{p'(t_0)} \end{aligned}$$

y, puesto que la derivada de  $p$  es creciente, siendo  $p'$  negativa, se llega a que

$$\|I - \Gamma_0 F'(x_1)\| < 1.$$

Como consecuencia del Lema de Banach ([101]), existe el operador inverso de  $\Gamma_0 F'(x_1)$ , que se puede expresar como  $[\Gamma_0 F'(x_1)]^{-1} = [I - (I - \Gamma_0 F'(x_1))]^{-1}$ , y además

$$\left\| [\Gamma_0 F'(x_1)]^{-1} \right\| \leq \frac{1}{1 - \|I - \Gamma_0 F'(x_1)\|} \leq \frac{p'(t_0)}{p'(t_1)}.$$

Ahora bien, como  $\Gamma_1 = [\Gamma_0 F'(x_1)]^{-1} \Gamma_0$ , se obtiene

$$\|\Gamma_1\| \leq \left\| [\Gamma_0 F'(x_1)]^{-1} \right\| \|\Gamma_0\| \leq \frac{p'(t_0)}{p'(t_1)} \frac{-1}{p'(t_0)} = \frac{-1}{p'(t_1)}.$$

Para ver que se cumple (II), es decir,  $\|\Gamma_1 F(x_1)\| \leq \frac{-p(t_1)}{p'(t_1)}$ , nos apoyamos en las descomposiciones de  $F$  y de  $p$ , dadas en los lemas previos, lema 2.2.4 y lema 2.2.5 respectivamente.

Haciendo el cambio de variable  $x = x_0 + \tau(x_1 - x_0)$  en la descomposición obtenida en el lema 2.2.4 y tomando normas obtenemos

$$\begin{aligned} \|F(x_1)\| &\leq \frac{1}{2} \|F''(x_0)\| \|\Gamma_0 F(x_0)\|^2 \left\| \sum_{k \geq 2} 2(A_{k-1} - A_k) L_F(x_0)^{k-1} \right\| \\ &\quad + \frac{1}{8} \|F''(x_0)\| \|L_F(x_0)\|^2 \|\tilde{H}(L_F(x_0))\|^2 \|\Gamma_0 F(x_0)\|^2 \\ &\quad + \left\| \int_0^1 (F''(x_0 + \tau(x_1 - x_0)) - F''(x_0)) (1 - \tau)(x_1 - x_0)^2 d\tau \right\|. \end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta que la sucesión de coeficientes  $\{A_k\}_{k \geq 2} \subset \mathbb{R}^+$  es decreciente, obtenemos

$$\begin{aligned}
 \|F(x_1)\| &\leq \frac{1}{2}p''(t_0) \left( \frac{-p(t_0)}{p'(t_0)} \right)^2 \left( \sum_{k \geq 2} 2|A_{k-1} - A_k|L_p(t_0)^{k-1} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{8}p''(t_0)L_p(t_0)^2 \tilde{h}(L_p(t_0))^2 \left( \frac{-p(t_0)}{p'(t_0)} \right)^2 \\
 &\quad + \int_0^1 \|F''(x_0 + \tau(x_1 - x_0)) - F''(x_0)\| (1-\tau)\|x_1 - x_0\|^2 d\tau \\
 &\leq \frac{1}{2}p(t_0) \sum_{k \geq 2} 2(A_{k-1} - A_k)L_p(t_0)^k + \frac{1}{8}p(t_0)L_p(t_0)^3 \tilde{h}(L_p(t_0))^2 \\
 &\quad + \int_0^1 (p''(t_0 + \tau(t_1 - t_0)) - p''(t_0))(1-\tau)(t_1 - t_0)^2 d\tau = p(t_1).
 \end{aligned}$$

Como consecuencia de lo anterior, se sigue que (II) es cierto al reemplazar  $x_0$  por  $x_1$ :

$$\|I_1 F(x_1)\| \leq \|I_1\| \|F(x_1)\| \leq \frac{-p(t_1)}{p'(t_1)}.$$

Por otra parte,

$$\|L_F(x_1)\| \leq \|I_1\| \|F''(x_1)\| \|I_1 F(x_1)\| \leq \frac{-1}{p'(t_1)} p''(t_1) \frac{-p(t_1)}{p'(t_1)} = L_p(t_1) < r,$$

puesto que,  $\|x_1 - x_0\| \leq t_1 - t_0 \leq s - t_0$ . Además,

$$\|\tilde{H}(L_F(x_1))\| = \left\| I + \sum_{k \geq 2} 2A_k L_F(x_1)^{k-1} \right\| \leq 1 + \sum_{k \geq 2} 2A_k L_p(t_1)^{k-1} = \tilde{h}(L_p(t_1)).$$

Por tanto,  $x_2$  está bien definido y, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \|x_2 - x_1\| &\leq \left\| I + \frac{1}{2}L_F(x_1)\tilde{H}(L_F(x_1)) \right\| \|I_1 F(x_1)\| \\
 &\leq \left( 1 + \frac{1}{2}L_p(t_1)\tilde{h}(L_p(t_1)) \right) \left( \frac{-p(t_1)}{p'(t_1)} \right) = t_2 - t_1.
 \end{aligned}$$

Además, obtenemos

$$\|x_2 - x_0\| \leq \|x_2 - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \leq t_2 - t_1 + t_1 - t_0 = t_2 - t_0 \leq s - t_0,$$

luego  $x_2 \in B(x_0, s - t_0) \subset \Omega$ .

Ahora, sin más que aplicar inducción, es fácil ver que (I) y (II) son ciertas para todo  $x_n \in X$ . Supongamos que (I) y (II) se cumplen para  $x_n \in X$ , es decir, existe  $I_n$  con  $\|I_n\| \leq \frac{-1}{p'(t_n)}$  y  $\|I_n F(x_n)\| \leq \frac{-p(t_n)}{p'(t_n)}$ .

Por una parte se tiene que

$$\|x_n - x_0\| \leq t_n - t_0 \leq s - t_0,$$

de donde se sigue

$$\|L_F(x_n)\| \leq \|\Gamma_n\| \|F''(x_n)\| \|\Gamma_n F(x_n)\| \leq \frac{-1}{p'(t_n)} p''(t_n) \frac{-p(t_n)}{p'(t_n)} = L_p(t_n) < r,$$

siendo  $r$  el radio de convergencia de la serie (2.3). Siguiendo el mismo argumento usado antes sobre  $x_0$  y ahora sobre  $x_n$ , vemos que en estas condiciones  $x_{n+1}$  está bien definido. En efecto, tanto  $x_n$  como  $\Gamma_n F(x_n)$  están en  $\Omega$  y  $\tilde{H}(L_F(x_n))$  está bien definido, luego

$$x_{n+1} = x_n - \left( I + \frac{1}{2} L_F(x_n) \tilde{H}(L_F(x_n)) \right) \Gamma_n F(x_n) \in \Omega.$$

Así,  $x_{n+1}$  está bien definido y

$$\|\tilde{H}(L_F(x_n))\| = \left\| I + \sum_{k \geq 2} 2A_k L_F(x_n)^{k-1} \right\| \leq 1 + \sum_{k \geq 2} 2A_k L_p(t_n)^{k-1} = \tilde{h}(L_p(t_n)).$$

De la buena definición de  $x_{n+1}$  y de las acotaciones anteriores, obtenemos

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &\leq \left\| I + \frac{1}{2} L_F(x_n) \tilde{H}(L_F(x_n)) \right\| \|\Gamma_n F(x_n)\| \\ &\leq \left( 1 + \frac{1}{2} L_p(t_n) \tilde{h}(L_p(t_n)) \right) \left( \frac{-p(t_n)}{p'(t_n)} \right) = t_{n+1} - t_n, \end{aligned}$$

y por tanto

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leq \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_n - x_0\| \leq t_{n+1} - t_n + t_n - t_0 = t_{n+1} - t_0 \leq s - t_0.$$

Entonces, una vez visto que  $x_{n+1} \in B(x_0, s - t_0) \subset \Omega$ , vemos que (I) se cumple. Así,

$$\|I - \Gamma_n F'(x_{n+1})\| \leq \|\Gamma_n\| \|F'(x_n) - F'(x_{n+1})\| \leq \|\Gamma_n\| \int_{x_n}^{x_{n+1}} \|F''(x)\| dx$$

y, sin más que parametrizar en la integral y teniendo en cuenta que

$$\|x_n + \tau(x_{n+1} - x_n) - x_n\| \leq \tau \|x_{n+1} - x_n\| \leq \tau(t_{n+1} - t_n) = t_n + \tau(t_{n+1} - t_n) - t_n,$$

se sigue

$$\begin{aligned} \|I - \Gamma_n F'(x_{n+1})\| &\leq \|\Gamma_n\| \int_0^1 \|F''(x_n + \tau(x_{n+1} - x_n))\| \|x_{n+1} - x_n\| d\tau \\ &\leq \frac{-1}{p'(t_n)} \int_0^1 p''(t_n + \tau(t_{n+1} - t_n)) (t_{n+1} - t_n) d\tau \\ &= \frac{-1}{p'(t_n)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} p''(z) dz = 1 - \frac{p'(t_{n+1})}{p'(t_n)}. \end{aligned}$$

Ahora bien, puesto que la derivada de  $p$  es creciente y  $p'$  negativa, se llega a que

$$\|I - \Gamma_n F'(x_{n+1})\| < 1.$$

Como consecuencia del Lema de Banach ([101]), existe el operador

$$[\Gamma_n F'(x_{n+1})]^{-1} = [I - (I - \Gamma_n F'(x_{n+1}))]^{-1}$$

y, como  $\Gamma_{n+1} = [\Gamma_n F'(x_{n+1})]^{-1} \Gamma_n$ , se sigue que

$$\left\| [\Gamma_n F'(x_{n+1})]^{-1} \right\| \leq \frac{1}{1 - \|I - \Gamma_n F'(x_{n+1})\|} \leq \frac{p'(t_n)}{p'(t_{n+1})}.$$

Luego,

$$\|\Gamma_{n+1}\| \leq \left\| [\Gamma_n F'(x_{n+1})]^{-1} \right\| \|\Gamma_n\| \leq \frac{p'(t_n)}{p'(t_{n+1})} \frac{-1}{p'(t_n)} = \frac{-1}{p'(t_{n+1})}.$$

Para ver que se cumple (II),  $\|\Gamma_{n+1} F(x_{n+1})\| \leq \frac{-p(t_{n+1})}{p'(t_{n+1})}$ , nos apoyamos, como antes, en las descomposiciones de  $F$  y de  $p$  dadas en los lemas previos. Como

$$\begin{aligned} \|F(x_{n+1})\| &\leq \frac{1}{2} \|F''(x_n)\| \|\Gamma_n F(x_n)\|^2 \left\| \sum_{k \geq 2} 2(A_{k-1} - A_k) L_F(x_n)^{k-1} \right\| \\ &\quad + \frac{1}{8} \|F''(x_n)\| \|L_F(x_n)\|^2 \|\tilde{H}(L_F(x_n))\|^2 \|\Gamma_n F(x_n)\|^2 \\ &\quad + \left\| \int_0^1 (F''(x_n + \tau(x_{n+1} - x_n)) - F''(x_n))(1 - \tau)(x_{n+1} - x_n)^2 d\tau \right\|, \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que la sucesión de coeficientes  $\{A_k\}_{k \geq 2} \subset \mathbb{R}^+$  es decreciente, se sigue que

$$\begin{aligned} \|F(x_{n+1})\| &\leq \frac{1}{2} p(t_n) L_p(t_n) \sum_{k \geq 2} 2(A_{k-1} - A_k) L_p(t_n)^{k-1} \\ &\quad + \frac{1}{8} p(t_n) L_p(t_n)^3 \tilde{h}(L_p(t_n))^2 \\ &\quad + \int_0^1 (p''(t_n + \tau(t_{n+1} - t_n)) - p''(t_n))(1 - \tau)(t_{n+1} - t_n)^2 d\tau. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que  $\|F(x_{n+1})\| \leq p(t_{n+1})$  y

$$\|\Gamma_{n+1} F(x_{n+1})\| \leq \frac{-p(t_{n+1})}{p'(t_{n+1})}.$$

Entonces, por inducción hemos demostrado que  $x_k \in B(x_0, s - t_0) \subset \Omega$ , para toda  $k \geq 0$  y que  $\{t_n\}$  es una sucesión mayorizante de  $\{x_n\}$ . Teniendo

en cuenta el hecho de que  $\{t_n\}$  es una sucesión mayorizante de  $\{x_n\}$ , se sigue que

$$\|x_{n+m} - x_n\| \leq t_{n+m} - t_n, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (2.5)$$

y, como consecuencia,  $\{x_n\}$  es una sucesión de Cauchy, luego tiene límite. Denotamos por  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ . Ahora bien, puesto que  $\|F(x_n)\| \leq p(t_n)$ , tomando límites, obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|F(x_n)\| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} p(t_n) = p(s) = 0.$$

Por lo tanto,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(x_n) = 0$  y por la continuidad del operador  $F$ , se tiene que  $l = x^*$ , con  $x^*$  una solución de la ecuación  $F(x) = 0$ .

Por otra parte, si hacemos  $m \rightarrow \infty$  en (2.5) y tomamos  $n = 0$ , obtenemos  $\|x^* - x_0\| \leq s - t_0$ .

Por último, puesto que  $s > 0$  y  $s$  es la única solución simple de  $p(t) = 0$  en  $[a, b]$ , se tiene que

$$P(s) \leq s \Leftrightarrow -h(L_p(s)) \frac{p(s)}{p'(s)} \leq 0.$$

Entonces, por el teorema 2, se sigue la unicidad de solución en  $\overline{B(x_0, s - t_0)}$ , quedando así demostrado el teorema. ■

### Resultado principal de convergencia semilocal

Una vez visto este resultado de convergencia semilocal, queda abierto el estudio de la existencia de la función mayorizante. Como resulta evidente, ésta va a existir según las condiciones que se le exija al operador  $F$ . Como ya se mencionó, exigimos las que se conocen como condiciones de Kantorovich **(C1)**–**(C4)**, que son las condiciones que habitualmente se exigen para estudiar la convergencia de los procesos iterativos de tercer orden.

En vista de las condiciones que debe satisfacer nuestro operador  $F$ , nos planteamos determinar el tipo de función mayorizante a la que aplicaremos el proceso iterativo (2.2) y que satisfaga las condiciones que se exigen en el teorema 2.2.1. Parece evidente que una posible elección para esta función, puesto que tiene que ser Lipschitz en su segunda derivada, es que se tome un polinomio de grado tres con coeficiente director positivo.

$$p(t) = At^3 + Bt^2 + Ct + D, \quad A > 0.$$

Es claro que si se toma como punto de salida en la sucesión  $\{t_n\}$ ,  $t_0 = 0$ , para que se cumpla **(C1)**, debe satisfacerse la siguiente desigualdad  $\frac{-1}{p'(0)} \geq \beta$ , con

$\beta > 0$ , luego podemos tomar  $\frac{-1}{\beta} = C$ . Por **(C2)**,  $\frac{-p(0)}{p'(0)} \geq \eta > 0$  y además,

el término independiente del polinomio tiene que ser necesariamente positivo, entonces podemos considerar  $D = \frac{\eta}{\beta}$ . Notemos que en el caso en el que  $t_0 \neq 0$  se puede hacer una traslación.

Además, como  $p''(t) = 6At + 2B$  con  $A > 0$  y, como  $p''(t)$  es creciente, por **(C3)** basta tomar  $M = 2B$ , con  $M > 0$ . Más aún, esta función satisface la condición de Lipschitz para la segunda derivada, por lo tanto, se tiene

$$|p''(u) - p''(v)| = 6A|u - v| \text{ con } u, v \in [a, s].$$

Como  $A > 0$ , por **(C4)**, se sigue que  $6A = K$ . Como consecuencia de todo ello, podemos tomar la siguiente función mayorizante:

$$p(t) = \frac{K}{6}t^3 + \frac{M}{2}t^2 - \frac{1}{\beta}t + \frac{\eta}{\beta}, \text{ con } K, M, \beta, \eta > 0.$$

Si tomamos ahora  $[t_0, b]$  como el intervalo  $[0, s]$ , donde  $s$  es la menor raíz positiva de  $p(t)$ , se puede demostrar que la función  $p(t)$  satisface todas las hipótesis del teorema 2.2.1. Para ello, vamos a ver que esta función tiene una raíz negativa y dos positivas  $s$  y  $s^*$ , lo que es equivalente a decir que

$$\eta \leq \frac{4K + M^2\beta - M\beta\sqrt{M^2 + 2K/\beta}}{3\beta K(M + \sqrt{M^2 + 2K/\beta})},$$

de tal forma que  $s \leq \hat{t} \leq s^*$  y  $\hat{t}$  es el mínimo de  $p(t)$  en el intervalo  $[0, s]$ .

Como  $p(0) = \eta/\beta > 0$ , para demostrar que  $p(t)$  tiene una raíz positiva, basta ver que  $p(t)$  es estrictamente decreciente en  $[0, \hat{t}]$  y que  $p(\hat{t}) < 0$ . Como

$$p'(t) = \frac{K}{2}t^2 + Mt - \frac{1}{\beta},$$

se sigue  $p'(t) < 0$  en  $\left[ \frac{-M - \sqrt{M^2 + 2K/\beta}}{K}, \frac{-M + \sqrt{M^2 + 2K/\beta}}{K} \right]$ .

Por otro lado, sin más que sustituir en la expresión dada para  $p(t)$ , se sigue que

$$\begin{aligned} p(\hat{t}) &= \frac{K}{6} \left( \frac{-M + \sqrt{M^2 + 2K/\beta}}{K} \right)^2 \frac{2}{\beta(M + \sqrt{M^2 + 2K/\beta})} \\ &\quad + \frac{M}{2} \left( \frac{-M + \sqrt{M^2 + 2K/\beta}}{K} \right) \frac{2}{\beta(M + \sqrt{M^2 + 2K/\beta})} \\ &\quad - \frac{2}{\beta^2(M + \sqrt{M^2 + 2K/\beta})} + \frac{\eta}{\beta} \\ &= \frac{1}{3\beta(M + \sqrt{M^2 + 2K/\beta})} \left[ -\frac{4}{\beta} - \frac{M^2}{K} + \frac{M\sqrt{M^2 + 2K/\beta}}{K} \right] + \frac{\eta}{\beta}, \end{aligned}$$

y por hipótesis  $p(\hat{t}) \leq 0$ . Además,  $p(\hat{t}) = 0$  si y solo si  $s = s^*$ . Esto es debido a que, en este caso, la cadena de desigualdades  $s \leq \hat{t} \leq s^*$ , se reduce a  $s = \hat{t} = s^*$ .

*Nota 2.2.* Notemos que, un estudio análogo al realizado por Yamamoto en [154], donde se establecen algunos resultados de convergencia para el método de Halley, puede llevarse a cabo bajo las siguientes condiciones para el operador  $F$ :

- (Y1) existe un punto  $x_0 \in \Omega$  donde el operador  $\Gamma_0$  está definido. Sea  $\Phi(x) = \Gamma_0 F(x)$ ,  
 (Y2)  $\|\Phi(x_0)\| = \|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \eta$ ,  $\|\Phi''(x_0)\| = \|\Gamma_0 F''(x_0)\| \leq M$ ,  
 (Y3)  $\|\Phi''(x) - \Phi''(y)\| = \|\Gamma_0 F''(x) - \Gamma_0 F''(y)\| \leq K\|x - y\|$ ,  $K > 0$ ,  $x, y \in \Omega$ .  
 (Y4) La ecuación

$$p(t) = \frac{K}{6}t^3 + \frac{M}{2}t^2 - t + \eta, \quad \text{con } K, M, \eta > 0,$$

tiene una raíz negativa y dos positivas  $s$  y  $s^*$ .

En este caso en el que  $p(t)$  se toma normalizado, el hecho de que posea una raíz negativa y dos positivas  $s$  y  $s^*$  se traduce a la siguiente condición sobre  $\eta$ :

$$\eta \leq \frac{4K + M^2 - M\sqrt{M^2 + 2K}}{3K(M + \sqrt{M^2 + 2K})},$$

obteniéndose la igualdad si y sólo si  $s = s^*$ .

En la práctica, la aplicación del teorema 2.2.3 puede resultar complicada, ya que en él aparece una función  $p$  desconocida. Una vez comprobadas todas las condiciones exigidas para la función mayorizante  $p(t)$ , dadas en el teorema 2.2.1, tenemos asegurada la convergencia de la sucesión mayorizante  $\{t_n\}$  a la solución  $s$  de  $p(t) = 0$ . El siguiente resultado tiene especial interés, ya que si el operador  $F$  cumple ciertas condiciones, podemos tomar como función  $p$  en el teorema 2.2.3 el siguiente polinomio:

$$p(t) = \frac{K}{6}t^3 + \frac{M}{2}t^2 - \frac{1}{\beta}t + \frac{\eta}{\beta}, \quad \text{con } K, M, \beta, \eta > 0. \quad (2.6)$$

A continuación suponemos que  $r \geq 1/2$ , siendo  $r$  el radio de convergencia de la serie (2.3). Por el lema 1.2.2 (lema de Altman) se tiene  $|L_p(t)| < r$  y, como consecuencia de ello, el polinomio (2.6) satisface las condiciones exigidas en el teorema 2.2.1.

**Teorema 2.2.6** *Sea  $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$  un operador no lineal, dos veces diferenciable Fréchet en un abierto, convexo y no vacío  $\Omega \subseteq X$ , satisfaciendo (C1)–(C4). Si se cumple*

$$\eta \leq \frac{4K + M^2\beta - M\beta\sqrt{M^2 + 2K/\beta}}{3\beta K(M + \sqrt{M^2 + 2K/\beta})} \quad (2.7)$$

*y  $\overline{B(x_0, s)} \subseteq \Omega$ , entonces la sucesión  $\{x_n\}$  dada por (1.3), comenzando en  $x_0 \in X$ , converge a una solución de la ecuación (2.1). En este caso, las*

iteraciones  $x_n$  pertenecen a  $B(x_0, s)$  y la solución  $x^*$  es única en  $\overline{B(x_0, s)}$ . Además, se tiene que

$$\|x^* - x_n\| \leq s - t_n, \quad \text{para } n \geq 0.$$

*Demostración.* Notemos que las condiciones **(C1)**–**(C4)** se satisfacen para el polinomio dado en (2.6). Ahora, a partir de los resultados anteriores, la demostración es inmediata. ■

*Nota 2.3.* Notemos que el teorema 2.2.6 garantiza la convergencia de la sucesión (1.3), independientemente de los valores de los parámetros  $A_k$ ,  $k \geq 2$ , que se tomen a la hora de aplicar un proceso iterativo de la familia a la ecuación (2.1) para obtener una solución aproximada.

*Nota 2.4.* En el caso en que el radio de convergencia  $r$  de la serie (2.3) sea tal que  $r < 1/2$ , la condición que hay que exigir en el teorema 2.2.6 es  $|L_p(0)| < r$  o equivalentemente  $\beta\eta M < r$ , como se pone de manifiesto en el teorema 2.2.1.

*Nota 2.5.* A continuación, vamos a presentar una técnica alternativa para mejorar el dominio de unicidad de solución, empleada por Argyros y Chen ([16]) y, que usaremos en las secciones posteriores. La aplicación de esta técnica alternativa, puede facilitar la localización del dominio de unicidad, sobre todo cuando no se aplican sucesiones mayorizantes.

Veamos entonces cómo, mediante esta técnica alternativa, mejoramos el radio de unicidad dado en el teorema 2.2.6. Supongamos que existe otra solución  $y^*$  de  $F(x) = 0$  en  $B(x_0, s^*) \cap \Omega$ . Entonces,

$$0 = F(y^*) - F(x^*) = \int_0^1 F'(x^* + t(y^* - x^*))(y^* - x^*) dt.$$

Para obtener la unicidad, es suficiente con ver que el operador

$$\int_0^1 F'(x^* + t(y^* - x^*)) dt$$

es invertible. Probaremos equivalentemente la existencia del operador  $A^{-1}$ , donde  $A = \int_0^1 \Gamma_0 F'(x^* + t(y^* - x^*)) dt$ . Por el lema de Banach ([101]), se tiene que este operador es invertible si y sólo si  $\|I - A\| < 1$ . En efecto,

$$\|I - A\| \leq \|\Gamma_0\| \int_0^1 \|F'(x^* + t(y^* - x^*)) - F'(x_0)\| dt.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
& \|F'(x^* + t(y^* - x^*)) - F'(x_0)\| \\
&= \left\| \int_{x_0}^{x^* + t(y^* - x^*)} (F''(x) + F''(x_0) - F''(x_0)) \, dx \right\| \\
&\leq \int_0^1 \|F''(x_0 + \tau(x^* + t(y^* - x^*) - x_0)) - F''(x_0)\| \|x^* + t(y^* - x^*) - x_0\| \, d\tau \\
&\quad + \int_0^1 \|F''(x_0)\| \|x^* + t(y^* - x^*) - x_0\| \, d\tau.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Puesto que  $x^* \in \overline{B(x_0, s)}$  e  $y^* \in B(x_0, s^*) \cap \Omega$ , se tiene que  $\|x^* - x_0\| \leq s$  y  $\|y^* - x_0\| < s^*$ . Luego,

$$\begin{aligned}
\|I - A\| &\leq \frac{\beta K}{2} \int_0^1 (\|x^* - x_0\|(1-t) + t\|y^* - x_0\|)^2 \, dt \\
&\quad + \beta M \int_0^1 (\|x^* - x_0\|(1-t) + t\|y^* - x_0\|) \, dt \\
&< \frac{\beta K}{6} (s^2 + (s^*)^2 + ss^*) + \frac{\beta M}{2} (s + s^*).
\end{aligned}$$

Definimos ahora el polinomio:

$$q(r) = \frac{K}{6}r^2 + \left(\frac{K}{6}s + \frac{M}{2}\right)r + \frac{K}{6}s^2 + \frac{M}{2}s - \frac{1}{\beta},$$

y observamos que  $q(s^*) = (s + s^*)\left(\frac{K}{6}s^* + \frac{M}{2}\right) + \frac{K}{6}s^2 - \frac{1}{\beta}$ . Utilizando a continuación las conocidas fórmulas de Vieta, (véase [48]), tenemos que

$$-\frac{K}{6}(s + s^* + r_0) = \frac{M}{2} \quad \text{y} \quad \frac{K}{6}(ss^* + r_0(s + s^*)) = \frac{-1}{\beta},$$

donde  $r_0$ ,  $s$  y  $s^*$  son las raíces del polinomio (2.6). Entonces, vemos que  $q(s^*) = \frac{-K}{6}(ss^* + r_0(s + s^*)) - \frac{1}{\beta} = 0$ , y por lo tanto,  $\|I - A\| < 1$ . Luego, el operador es invertible y, como consecuencia, la solución es única en  $B(x_0, s^*) \cap \Omega$ . ■

Por otra parte, como cabe esperar, la familia de procesos iterativos (1.3) tiene  $R$ -orden de convergencia al menos tres, como se prueba en la siguiente sección.

### 2.2.2. $R$ -orden de convergencia de la familia

En esta sección vamos a intentar acotar inferiormente el  $R$ -orden de convergencia de la familia de procesos iterativos (1.3), viendo que éste es al menos

tres. Para ello, utilizaremos la caracterización dada por Potra y Ptak en [123], que es una consecuencia directa del teorema 6 visto en el capítulo de Preliminares.

Dado un proceso iterativo, denotamos por  $\{x_n\}$  la sucesión de aproximaciones que genera el proceso. Entonces, de acuerdo con Potra y Ptak es equivalente el que un proceso iterativo tenga  $R$ -orden al menos tres y que existan dos constantes  $C > 0$  y  $n_0 \geq 1$ , de manera que:

$$\|x_{n+2} - x_{n+1}\| \leq C\|x_{n+1} - x_n\|^3, \quad \text{a partir de un cierto } n_0. \quad (2.9)$$

**Teorema 2.2.7** *Sea  $F$  en las condiciones del teorema 2.2.6. Entonces, la familia de procesos iterativos (1.3), comenzando en  $x_0 \in \Omega$ , tiene  $R$ -orden de convergencia al menos tres.*

*Demostración.* Utilizando la caracterización dada por Potra y Ptak, o equivalentemente (2.9), para establecer el  $R$ -orden de convergencia de un proceso iterativo, probamos que los métodos de la familia (1.3) tienen al menos  $R$ -orden de convergencia al menos tres.

Teniendo en cuenta la expresión que tienen los procesos iterativos de la familia (1.3), se sigue que

$$\|x_{n+2} - x_{n+1}\| \leq \|H(L_F(x_{n+1}))\| \| \Gamma_{n+1} F(x_{n+1}) \|.$$

Ahora bien, puesto que  $L_p(t_{n+1}) \leq \frac{1}{2}$  y,  $\{A_k\}_{k \geq 0}$  es una sucesión decreciente con  $A_0 = 1$  y  $A_1 = \frac{1}{2}$ , entonces  $A_k \leq \frac{1}{2}$  para todo  $k \geq 2$  y

$$\|H(L_F(x_{n+1}))\| \leq 1 + \frac{1}{2}L_p(t_{n+1}) + \sum_{k \geq 2} A_k L_p(t_{n+1})^k \leq 1 + \frac{1}{4} + \sum_{k \geq 2} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{3}{2}.$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que la condición **(C1)** se cumple para todo  $n$  y que  $p'$  es creciente y negativa, se tiene que

$$\|\Gamma_n\| \leq \frac{-1}{p'(t_n)} < \frac{-1}{p'(s^*)} = \frac{-1}{\frac{K}{2}(s^*)^2 + Ms^* - \frac{1}{\beta}} = L.$$

Tan sólo queda ahora acotar  $\|F(x_{n+1})\|$ . Denotando por

$$\tilde{H}(L_F(x_n)) = I + \sum_{k \geq 2} 2A_k L_F(x_n)^{k-1},$$

tenemos:

$$\begin{aligned} F'(x_n)(x_{n+1} - x_n) &= -F'(x_n) \left[ I + \frac{1}{2}L_F(x_n)\tilde{H}(L_F(x_n)) \right] \Gamma_n F(x_n) \\ &= -F(x_n) - \frac{1}{2}F''(x_n)\Gamma_n F(x_n)\tilde{H}(L_F(x_n))\Gamma_n F(x_n) \end{aligned}$$

entonces, teniendo en cuenta el desarrollo de Taylor, se sigue que

$$\begin{aligned}
F(x_{n+1}) &= F(x_n) + F'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{1}{2}F''(x_n)(x_{n+1} - x_n)^2 \\
&\quad + \int_{x_n}^{x_{n+1}} (F''(x) - F''(x_n))(x_{n+1} - x) dx \\
&= \frac{1}{2}F''(x_n) \left[ (x_{n+1} - x_n)^2 - \Gamma_n F(x_n) \tilde{H}(L_F(x_n)) \Gamma_n F(x_n) \right] \\
&\quad + \int_{x_n}^{x_{n+1}} (F''(x) - F''(x_n))(x_{n+1} - x) dx.
\end{aligned}$$

Por una parte, haciendo el cambio  $x = x_n + t(x_{n+1} - x_n)$ , es fácil ver que

$$\left\| \int_{x_n}^{x_{n+1}} (F''(x) - F''(x_n))(x_{n+1} - x) dx \right\| \leq \frac{K}{6} \|x_{n+1} - x_n\|^3.$$

Ahora bien, como

$$\begin{aligned}
&(x_{n+1} - x_n)^2 - \Gamma_n F(x_n) \tilde{H}(L_F(x_n)) \Gamma_n F(x_n) \\
&= (x_{n+1} - x_n)^2 - [\Gamma_n F(x_n)]^2 - \Gamma_n F(x_n) \sum_{k \geq 2} 2A_k L_F(x_n)^{k-1} \Gamma_n F(x_n)
\end{aligned}$$

se sigue que

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x_n - \Gamma_n F(x_n)\| &\leq \left\| 2I + \frac{1}{2}L_F(x_n) \tilde{H}(L_F(x_n)) \right\| \|\Gamma_n F(x_n)\| \\
&\leq \left( 2 + \frac{1}{2}L_p(t_n) + \sum_{k \geq 2} A_k L_p(t_n)^k \right) \|\Gamma_n F(x_n)\| \\
&\leq \frac{5}{2} \|\Gamma_n F(x_n)\|,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x_n + \Gamma_n F(x_n)\| &\leq \left\| \frac{1}{2}L_F(x_n) \tilde{H}(L_F(x_n)) \right\| \|\Gamma_n F(x_n)\| \\
&\leq \left( \frac{1}{2} + \sum_{k \geq 2} A_k L_p(t_n)^{k-1} \right) \|\Gamma_n F''(x_n)\| \|\Gamma_n F(x_n)\|^2 \\
&\leq \|\Gamma_n F''(x_n)\| \|\Gamma_n F(x_n)\|^2
\end{aligned}$$

y

$$\left\| \sum_{k \geq 2} 2A_k L_F(x_n)^{k-1} \right\| \leq 2 \|\Gamma_n F''(x_n)\| \|\Gamma_n F(x_n)\|.$$

Como consecuencia de las anteriores cotas, podemos estimar la norma de  $F(x_{n+1})$  de la siguiente manera:

$$\|F(x_{n+1})\| \leq \frac{1}{2}M^2L \left(\frac{5}{2} + 2\right) \|\Gamma_n F(x_n)\|^3 + \frac{K}{6} \|x_{n+1} - x_n\|^3.$$

Por otro parte, tenemos que

$$\|\Gamma_n F(x_n)\| \leq \left\| \left( I + \frac{1}{2}L_F(x_n)\tilde{H}(L_F(x_n)) \right)^{-1} \right\| \|x_{n+1} - x_n\|,$$

y, por el lema de Banach, si

$$\left\| \frac{1}{2}L_F(x_n)\tilde{H}(L_F(x_n)) \right\| < 1,$$

existe el operador inverso de  $I + \frac{1}{2}L_F(x_n)\tilde{H}(L_F(x_n))$ , y además

$$\left\| \left( I + \frac{1}{2}L_F(x_n)\tilde{H}(L_F(x_n)) \right)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{1 - \left\| \frac{1}{2}L_F(x_n)\tilde{H}(L_F(x_n)) \right\|}.$$

Veamos entonces que existe el inverso de dicho operador. En efecto, teniendo en cuenta que la sucesión de coeficientes  $\{A_k\}_{k \geq 0}$  es decreciente con  $A_k \leq \frac{1}{2}$ ,  $\forall k \geq 2$ , y que  $L_p(t_n) \leq \frac{1}{2}$ , se sigue que

$$\left\| \frac{1}{2}L_F(x_n)\tilde{H}(L_F(x_n)) \right\| \leq \frac{1}{2}L_p(t_n) + \sum_{k \geq 2} |A_k|L_p(t_n)^k \leq \frac{1}{2} < 1.$$

Como consecuencia, se tiene que

$$\left\| \left( I + \frac{1}{2}L_F(x_n)\tilde{H}(L_F(x_n)) \right)^{-1} \right\| \leq 2,$$

y por lo tanto,

$$\|\Gamma_n F(x_n)\| \leq 2\|x_{n+1} - x_n\|.$$

Entonces,

$$\|F(x_{n+1})\| \leq \left( 18M^2L + \frac{K}{6} \right) \|x_{n+1} - x_n\|^3.$$

Ahora es sencillo ver que la familia de procesos iterativos (1.3) tiene  $R$ -orden de convergencia al menos tres sin más que tener en cuenta (2.9), puesto que

$$\begin{aligned} \|x_{n+2} - x_{n+1}\| &\leq \left\| I + \frac{1}{2}L_F(x_{n+1})\tilde{H}(L_F(x_{n+1})) \right\| \|\Gamma_{n+1} F(x_{n+1})\| \\ &\leq \frac{3}{2}L \left( 18M^2L + \frac{K}{6} \right) \|x_{n+1} - x_n\|^3 \\ &= \left( 27M^2L^2 + \frac{LK}{4} \right) \|x_{n+1} - x_n\|^3, \end{aligned}$$

con  $C = 27M^2L^2 + \frac{LK}{4} > 0$ . ■

*Nota 2.6.* Como casos particulares de la familia de procesos iterativos dada en (1.3), satisfaciendo la condición de que la sucesión de coeficientes  $\{A_k\}_{k \geq 2}$  sea decreciente, se tienen métodos iterativos con  $R$ -orden de convergencia al menos tres ya conocidos, como el método de Chebyshev, dado en (1.4) y los C-métodos (1.5), ambos con desarrollo finito. Y otros con desarrollo infinito, como el método de Super-Halley (1.6), el método de Halley (1.7), el método de Ostrowski (1.8), el método exponencial (1.10), el método logarítmico (1.11) o las familias de procesos iterativos dadas en (1.13) con  $\lambda \in [0, 1]$  y (1.14). Sin embargo, hay procesos iterativos que no cumplen esta condición como el método de Euler, cuyos coeficientes son:

$$A_k = \frac{1}{2^k(k+1)} \binom{2k}{k}, \quad k \geq 0,$$

o la familia de procesos iterativos dada en (1.13), cuando  $\lambda > 1$ .

Como veremos posteriormente, en la sección 2.3, se puede prescindir de la condición que exigimos sobre la sucesión de los coeficientes  $\{A_k\}_{k \geq 2}$ . La condición de que la sucesión  $\{A_k\}_{k \geq 2}$  sea decreciente se hace necesaria cuando mayorizamos la aproximación  $F(x_n)$  por  $p(t_n)$ , como consecuencia de la descomposición que tomamos para el operador  $F$  en el lema 2.2.4.

### 2.3. Estudio de la convergencia mediante relaciones de recurrencia

En esta sección introducimos otra técnica basada en la construcción de relaciones de recurrencia, con el objetivo de obtener un resultado de convergencia semilocal, para la familia de procesos iterativos dada en (1.3). Para ello, exigimos condiciones de Kantorovich para el operador  $F$ , **(C1)**–**(C4)**. Este tipo de condiciones usualmente eran tratadas mediante la técnica de sucesiones mayorizantes. Sin embargo, en ese caso, no es tarea fácil acotar el  $R$ -orden de convergencia de la familia, como puede verse en la sección 2.2. Veremos, que el uso de esta técnica, basada en relaciones de recurrencia, hace más sencillo el acotar el  $R$ -orden de convergencia de cualquier proceso iterativo, y en particular el de la familia (1.3).

Al igual que en la sección 2.2, probaremos que, bajo las condiciones **(C1)**–**(C4)** para el operador  $F$ , la familia de procesos iterativos dada en (1.3) es convergente a la solución de la ecuación (2.1), con la salvedad de que en este estudio no exigimos la condición de que la sucesión de coeficientes  $\{A_k\}_{k \geq 2}$  sea decreciente. Además, establecemos los dominios donde la solución puede localizarse y es única, junto con las estimaciones del error cometido cuando se aproxima la solución mediante los procesos iterativos de esta familia.

### 2.3.1. Construcción de las relaciones de recurrencia

Consideramos  $F$  un operador no lineal definido entre dos espacios de Banach  $X$  e  $Y$  y dos veces diferenciable Fréchet en un dominio  $\Omega \subseteq X$  abierto convexo y no vacío.

Por comodidad emplearemos el siguiente algoritmo para referirnos a la familia de procesos iterativos (1.3):

$$\begin{cases} y_n = x_n - \Gamma_n F(x_n), \\ x_{n+1} = G(x_n) = y_n + \frac{1}{2} L_F(x_n) \tilde{H}(L_F(x_n))(y_n - x_n), \\ \tilde{H}(L_F(x_n)) = I + \sum_{k \geq 2} 2A_k L_F(x_n)^{k-1}, \quad \{A_k\}_{k \geq 2} \subset \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (2.10)$$

A lo largo de la sección, suponemos que la serie  $\sum_{k \geq 2} 2A_k t^{k-1}$  es convergente para  $|t| < r$ , siendo  $r$  el radio de convergencia de la serie. Además, usaremos esta notación:

$$a_0 = M\beta\eta, \quad b_0 = K\beta\eta^2, \quad \nu(t) = \sum_{k \geq 2} 2A_k t^{k-2}, \quad (2.11)$$

A partir de las condiciones iniciales **(C1)**–**(C4)** para el operador  $F$  obtenemos las siguientes cotas en función de los parámetros  $a_0$  y  $b_0$ :

$$\|L_F(x_0)\| \leq \|\Gamma_0\| \|F''(x_0)\| \|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq a_0,$$

$$K \|\Gamma_0\| \|\Gamma_0 F(x_0)\|^2 \leq b_0,$$

$$\tilde{H}(L_F(x_0)) \text{ está bien definido si y sólo si } \|L_F(x_0)\| \leq a_0 < r.$$

Por lo tanto, es necesario que  $a_0 < r$ .

Ahora bien, si  $y_0 \in \Omega$ , se sigue

$$\|\tilde{H}(L_F(x_0))\| = \left\| I + \sum_{k \geq 2} 2A_k L_F(x_0)^{k-1} \right\| \leq 1 + \sum_{k \geq 2} 2A_k a_0^{k-1} = 1 + a_0 \nu(a_0),$$

$$\|I - \tilde{H}(L_F(x_0))\| = \left\| \sum_{k \geq 2} 2A_k L_F(x_0)^{k-1} \right\| \leq \sum_{k \geq 2} 2A_k a_0^{k-1} = a_0 \nu(a_0),$$

$$\|x_1 - y_0\| = \left\| \frac{1}{2} L_F(x_0) \tilde{H}(L_F(x_0)) \Gamma_0 F(x_0) \right\| \leq \frac{1}{2} a_0 (1 + a_0 \nu(a_0)) \|\Gamma_0 F(x_0)\|,$$

$$\|x_1 - x_0\| \leq \|x_1 - y_0\| + \|y_0 - x_0\| \leq \left( 1 + \frac{1}{2} a_0 (1 + a_0 \nu(a_0)) \right) \|\Gamma_0 F(x_0)\|.$$

Con el fin de generalizar estas cotas iniciales para cualquier paso en el proceso iterativo, definimos las sucesiones reales

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n f(a_n)^2 g(a_n, b_n), \quad n \geq 0, \\ b_{n+1} &= b_n f(a_n)^3 g(a_n, b_n)^2, \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde se consideran las siguientes funciones reales auxiliares

$$\begin{aligned} h(t) &= 1 + \frac{1}{2}t(1 + t\nu(t)), \\ f(t) &= \frac{1}{1 - th(t)}, \quad g(t, u) = \frac{t}{2} [t\nu(t) + h(t)^2 - 1] + \frac{u}{6}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Teniendo en cuenta las relaciones obtenidas a partir de las condiciones iniciales, damos las siguientes relaciones de recurrencia, que probaremos por inducción, para cualquier punto del proceso iterativo. Esto permitirá demostrar la convergencia de la familia de procesos iterativos dada en (2.10).

**Lema 2.3.1** *Suponemos que  $y_0, y_n, x_n \in \Omega$ , para  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $a_0 < r$ , con  $r$  el radio de convergencia de la serie (2.3),  $a_0 h(a_0) < 1$ , con  $h$  dada en (2.13), y las sucesiones reales auxiliares (2.12) son decrecientes, entonces se satisfacen las siguientes relaciones:*

$$[I_n] \text{ Existe } \Gamma_n = [F'(x_n)]^{-1} \text{ y } \|\Gamma_n\| \leq f(a_{n-1})\|\Gamma_{n-1}\|,$$

$$[II_n] \|\Gamma_n F(x_n)\| = \|y_n - x_n\| \leq f(a_{n-1})g(a_{n-1}, b_{n-1})\|\Gamma_{n-1} F(x_{n-1})\|,$$

$$[III_n] M\|\Gamma_n\|\|\Gamma_n F(x_n)\| \leq a_n \text{ y, existe } \tilde{H}(L_F(x_n)),$$

$$[IV_n] K\|\Gamma_n\|\|\Gamma_n F(x_n)\|^2 \leq b_n,$$

$$[V_n] \|x_{n+1} - y_n\| \leq \frac{1}{2}a_n(1 + a_n\nu(a_n))\|\Gamma_n F(x_n)\|,$$

$$[VI_n] \|x_{n+1} - x_n\| \leq h(a_n)\|\Gamma_n F(x_n)\|,$$

$$[VII_n] \|x_{n+1} - x_0\| \leq h(a_0) \left( \sum_{k=0}^n f(a_0)^k g(a_0, b_0)^k \right) \eta.$$

*Demostración.* Comenzamos verificando las condiciones [I<sub>n</sub>]-[VII<sub>n</sub>] para  $n = 1$ . En primer lugar, demostramos que existe el inverso del operador  $F'(x_1)$  y es acotado.

Puesto que

$$F'(x_1) - F'(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} F''(x) dx = \int_0^1 F''(x_0 + t(x_1 - x_0))(x_1 - x_0) dt,$$

tenemos

$$\|F'(x_1) - F'(x_0)\| \leq M\|x_1 - x_0\|.$$

Por lo tanto,

$$\|I - \Gamma_0 F'(x_1)\| \leq \|\Gamma_0\| \|F'(x_0) - F'(x_1)\| \leq \|\Gamma_0\| M \|x_1 - x_0\| \leq a_0 h(a_0)$$

y, como por hipótesis  $a_0 h(a_0) < 1$ , se sigue por el lema de Banach ([101]) que existe  $\Gamma_1$  y obtenemos [I<sub>1</sub>], puesto que

$$\begin{aligned} \|\Gamma_1\| &= \|\Gamma_1 F'(x_0) \Gamma_0\| \leq \left\| (\Gamma_0 F'(x_1))^{-1} \right\| \|\Gamma_0\| \leq \frac{\|\Gamma_0\|}{1 - \|I - \Gamma_0 F'(x_1)\|} \\ &\leq \frac{\|\Gamma_0\|}{1 - a_0 h(a_0)} = f(a_0) \|\Gamma_0\|. \end{aligned}$$

Ahora, probamos [II<sub>1</sub>]. Para ello, usaremos la siguiente descomposición integral para el operador  $F$ , obtenida a partir de la fórmula de Taylor:

$$F(x_{n+1}) = F(y_n) + F'(y_n)(x_{n+1} - y_n) + \int_{y_n}^{x_{n+1}} F''(x)(x_{n+1} - x) dx, \quad (2.14)$$

$$F(y_n) = F(x_n) + F'(x_n)(y_n - x_n) + \int_{x_n}^{y_n} F''(x)(y_n - x) dx. \quad (2.15)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} F'(y_n)(x_{n+1} - y_n) &= [F'(y_n) - F'(x_n)](x_{n+1} - y_n) + F'(x_n)(x_{n+1} - y_n) \\ &= \int_{x_n}^{y_n} F''(x)(x_{n+1} - y_n) dx - \frac{1}{2} F''(x_n) \tilde{H}(L_F(x_n))(y_n - x_n)^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Entonces, si hacemos los cambios  $x = x_n + t(y_n - x_n)$  en (2.15) y (2.16), y  $x = y_n + t(x_{n+1} - y_n)$  en (2.14), obtenemos

$$\begin{aligned} F(x_{n+1}) &= \int_0^1 \left( F''(x_n + t(y_n - x_n)) - F''(x_n) \right) (y_n - x_n)^2 (1-t) dt \\ &\quad + \int_0^1 F''(x_n) \left( I - \tilde{H}(L_F(x_n)) \right) (y_n - x_n)^2 (1-t) dt \\ &\quad + \int_0^1 F''(x_n + t(y_n - x_n))(y_n - x_n)(x_{n+1} - y_n) dt \\ &\quad + \int_0^1 F''(y_n + t(x_{n+1} - y_n))(x_{n+1} - y_n)^2 (1-t) dt. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Ahora bien, tomando normas para  $n = 0$  se sigue

$$\begin{aligned}
\|F(x_1)\| &\leq \int_0^1 \|F''(x_0 + t(y_0 - x_0)) - F''(x_0)\| \|y_0 - x_0\|^2 (1-t) dt \\
&\quad + \int_0^1 \|F''(x_0)\| \|I - \tilde{H}(L_F(x_0))\| \|y_0 - x_0\|^2 (1-t) dt \\
&\quad + \int_0^1 \|F''(x_0 + t(y_0 - x_0))\| \|y_0 - x_0\| \|x_1 - y_0\| dt \\
&\quad + \int_0^1 \|F''(y_0 + t(x_1 - y_0))\| \|x_1 - y_0\|^2 (1-t) dt,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

y

$$\begin{aligned}
&\|F(x_1)\| \\
&\leq \left( \frac{K\eta^2}{6} + \frac{M\eta}{2} a_0 (1 + \nu(a_0) + a_0 \nu(a_0)) + \frac{M\eta}{8} a_0^2 (1 + a_0 \nu(a_0))^2 \right) \| \Gamma_0 F(x_0) \|.
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
&\| \Gamma_1 F(x_1) \| \leq f(a_0) \| \Gamma_0 \| \| F(x_1) \| \\
&\leq f(a_0) \left( \frac{K\beta\eta^2}{6} + \frac{M\beta\eta}{2} a_0 (1 + (1 + a_0)\nu(a_0)) + \frac{M\beta\eta}{8} a_0^2 (1 + a_0 \nu(a_0))^2 \right) \| \Gamma_0 F(x_0) \| \\
&\leq f(a_0) \left( \frac{b_0}{6} + \frac{a_0^2}{2} (1 + (1 + a_0)\nu(a_0)) + \frac{a_0^3}{8} (1 + a_0 \nu(a_0))^2 \right) \| \Gamma_0 F(x_0) \|
\end{aligned}$$

y teniendo en cuenta la definición de  $g$  se sigue [II<sub>1</sub>]:

$$\| \Gamma_1 F(x_1) \| \leq f(a_0) g(a_0, b_0) \| \Gamma_0 F(x_0) \|.$$

Teniendo en cuenta las cotas obtenidas previamente, [III<sub>1</sub>] es inmediato

$$M \| \Gamma_1 \| \| \Gamma_1 F(x_1) \| \leq M f(a_0)^2 g(a_0, b_0) \| \Gamma_0 \| \| \Gamma_0 F(x_0) \| \leq a_1.$$

Entonces,  $\|L_F(x_1)\| \leq a_1$ , además, teniendo en cuenta que  $\{a_n\}$  es una sucesión decreciente, se sigue que  $a_1 < r$ . Por lo tanto, existe  $\tilde{H}(L_F(x_1))$  y

$$\begin{aligned}
\| \tilde{H}(L_F(x_1)) \| &= \left\| I + \sum_{k \geq 2} 2A_k L_F(x_1)^{k-1} \right\| \leq 1 + \sum_{k \geq 2} 2A_k a_1^{k-1} = 1 + a_1 \nu(a_1) \\
\| I - \tilde{H}(L_F(x_1)) \| &= \left\| \sum_{k \geq 2} 2A_k L_F(x_1)^{k-1} \right\| \leq \sum_{k \geq 2} 2A_k a_1^{k-1} = a_1 \nu(a_1).
\end{aligned}$$

Ahora, es fácil ver que [IV<sub>1</sub>] se cumple:

$$K \| \Gamma_1 \| \| \Gamma_1 F(x_1) \|^2 \leq K f(a_0)^3 g(a_0, b_0)^2 \| \Gamma_0 \| \| \Gamma_0 F(x_0) \|^2 \leq b_1.$$

Veamos que [V<sub>1</sub>]-[VII<sub>1</sub>] son ciertas. Por un lado, se tiene que

$$\begin{aligned} \|x_2 - y_1\| &\leq \left\| \frac{1}{2} L_F(x_1) \tilde{H}(L_F(x_1)) \right\| \left\| \Gamma_1 F(x_1) \right\| \leq \frac{1}{2} a_1 (1 + a_1 \nu(a_1)) \left\| \Gamma_1 F(x_1) \right\|, \\ \|x_2 - x_1\| &= \left\| I + \frac{1}{2} L_F(x_1) \tilde{H}(L_F(x_1)) \right\| \left\| \Gamma_1 F(x_1) \right\| \leq h(a_1) \left\| \Gamma_1 F(x_1) \right\|, \\ \|x_2 - x_0\| &\leq \|x_2 - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \leq h(a_1) \|y_1 - x_1\| + h(a_0) \|y_0 - x_0\|. \end{aligned}$$

Ahora bien, puesto que la sucesión  $\{a_n\}$  es decreciente y la función  $h$  es creciente, se sigue que  $h(a_1) < h(a_0)$ . Entonces,

$$\|x_2 - x_0\| \leq h(a_0) \left[ 1 + f(a_0) g(a_0, b_0) \right] \eta.$$

Por lo tanto,  $[V_1]$ - $[VII_1]$  son ciertas. Ahora, suponemos que  $[I_n]$ - $[VII_n]$  se cumplen y verificamos  $[I_{n+1}]$ - $[VII_{n+1}]$ . Por hipótesis se tiene que  $x_{j+1}, y_j \in \Omega, j = 1, \dots, n$ .

Puesto que

$$F'(x_{n+1}) - F'(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} F''(x) dx = \int_0^1 F''(x_n + t(x_{n+1} - x_n))(x_{n+1} - x_n) dt,$$

tomando normas se sigue

$$\|F'(x_{n+1}) - F'(x_n)\| \leq M \|x_{n+1} - x_n\|.$$

Por hipótesis de inducción el operador  $\Gamma_n$  existe, y además

$$\begin{aligned} \|I - \Gamma_n F'(x_{n+1})\| &\leq \|\Gamma_n\| \|F'(x_n) - F'(x_{n+1})\| \leq \|\Gamma_n\| M \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\leq M \|\Gamma_n\| h(a_n) \|\Gamma_n F(x_n)\| \leq a_n h(a_n). \end{aligned}$$

Como  $h$  es una función creciente,

$$\|I - \Gamma_n F'(x_{n+1})\| \leq a_n h(a_n) \leq a_0 h(a_0) < 1,$$

entonces, por el lema de Banach, existe  $\Gamma_{n+1}$  y se tiene  $[I_{n+1}]$ :

$$\begin{aligned} \|\Gamma_{n+1}\| &= \|\Gamma_{n+1} F'(x_n) \Gamma_n\| \leq \|(\Gamma_n F'(x_{n+1}))^{-1}\| \|\Gamma_n\| \leq \frac{\|\Gamma_n\|}{1 - \|I - \Gamma_n F'(x_{n+1})\|} \\ &\leq \frac{\|\Gamma_n\|}{1 - a_n h(a_n)} = f(a_n) \|\Gamma_n\|. \end{aligned}$$

Ahora, probamos  $[II_{n+1}]$ . Para ello, consideramos la descomposición (2.17), dada previamente. Tomando normas, obtenemos

$$\begin{aligned}
\|F(x_{n+1})\| &\leq \int_0^1 \|F''(x_n + t(y_n - x_n)) - F''(x_n)\| \|y_n - x_n\|^2 (1-t) dt \\
&\quad + \int_0^1 \|F''(x_n)\| \|I - \tilde{H}(L_F(x_n))\| \|y_n - x_n\|^2 (1-t) dt \\
&\quad + \int_0^1 \|F''(x_n + t(y_n - x_n))\| \|y_n - x_n\| \|x_{n+1} - y_n\| dt \\
&\quad + \int_0^1 \|F''(y_n + t(x_{n+1} - y_n))\| \|x_{n+1} - y_n\|^2 (1-t) dt.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Usando la hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned}
\|F(x_{n+1})\| &\leq \frac{K}{6} \|y_n - x_n\|^3 + \frac{M}{2} a_n (1 + \nu(a_n) + a_n \nu(a_n)) \|y_n - x_n\|^2 \\
&\quad + \frac{M}{8} a_n^2 (1 + a_n \nu(a_n))^2 \|y_n - x_n\|^2,
\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_{n+1} F(x_{n+1})\| &\leq f(a_n) \|\Gamma_n\| \|F(x_{n+1})\| \leq f(a_n) \|\Gamma_n F(x_n)\| \left( \frac{K}{6} \|\Gamma_n\| \|\Gamma_n F(x_n)\|^2 \right. \\
&\quad \left. + M \|\Gamma_n\| \|\Gamma_n F(x_n)\| \left( \frac{a_n}{2} (1 + (1 + a_n) \nu(a_n)) + \frac{a_n^2}{8} (1 + a_n \nu(a_n))^2 \right) \right) \\
&\leq f(a_n) \|\Gamma_n F(x_n)\| \left( \frac{b_n}{6} + \frac{a_n^2}{2} (1 + (1 + a_n) \nu(a_n)) + \frac{a_n^3}{8} (1 + a_n \nu(a_n))^2 \right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|\Gamma_{n+1} F(x_{n+1})\| \leq f(a_n) g(a_n, b_n) \|\Gamma_n F(x_n)\|.$$

A partir de las cotas obtenidas previamente, es sencillo ver que [III<sub>n+1</sub>] se cumple

$$M \|\Gamma_{n+1}\| \|\Gamma_{n+1} F(x_{n+1})\| \leq M f(a_n)^2 g(a_n, b_n) \|\Gamma_n\| \|\Gamma_n F(x_n)\| \leq a_{n+1},$$

y por tanto es inmediato que  $\|L_F(x_{n+1})\| \leq a_{n+1}$ .

Ahora bien, como  $\{a_n\}$  es una sucesión decreciente, se tiene que  $a_{n+1} < r$ . Entonces,  $\tilde{H}(L_F(x_{n+1}))$  existe y

$$\begin{aligned}
\|\tilde{H}(L_F(x_{n+1}))\| &\leq 1 + \sum_{k \geq 2} 2A_k a_{n+1}^{k-1} = 1 + a_{n+1} \nu(a_{n+1}), \\
\|I - \tilde{H}(L_F(x_{n+1}))\| &\leq \sum_{k \geq 2} 2A_k a_{n+1}^{k-1} = a_{n+1} \nu(a_{n+1}).
\end{aligned}$$

Además, teniendo en cuenta [IV<sub>n</sub>], es sencillo probar [IV<sub>n+1</sub>]:

$$\begin{aligned} K\|\Gamma_{n+1}\|\|\Gamma_{n+1}F(x_{n+1})\|^2 &\leq Kf(a_n)^3g(a_n, b_n)^2\|\Gamma_n\|\|\Gamma_nF(x_n)\|^2 \\ &\leq b_n f(a_n)^3g(a_n, b_n)^2 = b_{n+1}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \|x_{n+2} - y_{n+1}\| &\leq \frac{1}{2}a_{n+1}(1 + a_{n+1}\nu(a_{n+1}))\|\Gamma_{n+1}F(x_{n+1})\|, \\ \|x_{n+2} - x_{n+1}\| &\leq h(a_{n+1})\|\Gamma_{n+1}F(x_{n+1})\|. \end{aligned}$$

Además, puesto que la sucesión  $\{a_n\}$  es decreciente y, las funciones  $f$  y  $g$  son crecientes, se sigue que

$$f(a_n)g(a_n, b_n)\|\Gamma_nF(x_n)\| \leq \eta \prod_{k=0}^n f(a_k)g(a_k, b_k) = \left(f(a_0)g(a_0, b_0)\right)^{n+1} \eta.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|x_{n+2} - x_0\| &\leq h(a_{n+1})f(a_n)g(a_n, b_n)\|\Gamma_nF(x_n)\| + h(a_0) \left(\sum_{k=0}^n f(a_0)^k g(a_0, b_0)^k\right) \eta \\ &\leq h(a_0) \left(\sum_{k=0}^{n+1} f(a_0)^k g(a_0, b_0)^k\right) \eta. \end{aligned}$$

Por tanto, el resultado queda demostrado. ■

Una vez verificadas las relaciones de recurrencia  $[I_n]$ - $[VII_n]$ , pasamos a estudiar la convergencia de la sucesión que define la familia de procesos iterativos  $\{x_n\}$ , dada en (2.10).

### 2.3.2. Convergencia semilocal

Para establecer la convergencia de la sucesión  $\{x_n\}$ , dada en (2.10), probaremos que es una sucesión de Cauchy. Además, veremos que la sucesión converge a la solución  $x^*$  de la ecuación (2.1) y, estableceremos los dominios de existencia y unicidad de solución.

En primer lugar, damos unos lemas técnicos para las funciones reales  $f$ ,  $g$  y  $h$  dadas en (2.13), así como para las sucesiones auxiliares  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  definidas en (2.12). Estos lemas nos proporcionan propiedades de tal forma que, a partir de ellas, las relaciones de recurrencia se satisfacen.

**Lema 2.3.2** Sean  $f(t)$ ,  $g(t, u)$  y  $h(t)$  las funciones reales dadas en (2.13). Entonces,

- (i) Si  $a_0h(a_0) < 1$ ,  $f(t)$  es creciente y  $f(t) > 1$  para  $t \in (0, a_0)$ .
- (ii) Fijado  $t$ ,  $g(t, u)$  es creciente como función de  $u$ ,  $\forall u \in \mathbb{R}$ . Además, fijado  $u$ ,  $g(t, u)$  es creciente como función de  $t$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}^+$ .

*Demostración.* Por hipótesis  $a_0h(a_0) < 1$ , luego se sigue que  $th(t) < 1$  para  $t \in (0, a_0)$ . Ahora, teniendo en cuenta que

$$f(t) = \frac{1}{1 - th(t)}$$

es claro que la función  $f$  está bien definida y es creciente para  $t \in (0, a_0)$ . Además,  $f(0) = 1$ , por lo tanto se tiene que  $f(t) > 1$  para  $t \in (0, a_0)$ .

Por otra parte, (ii) es trivial, teniendo en cuenta la definición de  $g$ . ■

**Lema 2.3.3** Si  $a_0h(a_0) < 1$  y  $b_0 < \kappa_0$ , donde

$$\kappa_0 = 6(2 + a_0) + 3h(a_0)(-2(1 + 2a_0) + a_0h(a_0)(2a_0 - 1)),$$

las sucesiones  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$ , dadas en (2.12), son decrecientes. Además, se tiene que  $f(a_0)g(a_0, b_0) < 1$ .

*Demostración.* Por una parte, para que la sucesiones  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  sean monótonas decrecientes, es suficiente que se cumpla:

$$a_1 < a_0 \quad \text{y} \quad b_1 < b_0. \quad (2.20)$$

En efecto, por el lema 2.3.2, se tiene que  $f$  y  $g$  son funciones crecientes, entonces si se cumple (2.20), se tiene que

$$a_2 = a_1f(a_1)^2g(a_1, b_1) < a_0f(a_0)^2g(a_0, b_0) = a_1$$

y

$$b_2 = b_1f(a_1)^3g(a_1, b_1)^2 < b_0f(a_0)^3g(a_0, b_0)^2 = b_1.$$

Por lo tanto, sin mas que aplicar un proceso inductivo se sigue que  $a_{n+1} < a_n$  y  $b_{n+1} < b_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Por otra parte, la desigualdad (2.20) es equivalente a

$$f(a_0)^2g(a_0, b_0) < 1. \quad (2.21)$$

Además, como consecuencia de (2.21), obtenemos  $f(a_0)g(a_0, b_0) < 1$ . En efecto, como  $f(a_0) > 1$ , es inmediato que  $f(a_0)g(a_0, b_0) < f(a_0)^2g(a_0, b_0) < 1$ .

Ahora, teniendo en cuenta la definición de las funciones  $f$  y  $g$ , es fácil ver que (2.21) es equivalente a que

$$b_0 < \kappa_0 = 6(2 + a_0) + 3h(a_0)(-2(1 + 2a_0) + a_0h(a_0)(2a_0 - 1)). \quad \blacksquare$$

Antes de enunciar el resultado principal de convergencia semilocal para la familia de procesos iterativos (2.10), recordamos que la sucesión de puntos  $\{x_n\}$ , generada por los procesos iterativos (2.10), está bien definida cuando lo está el operador  $\tilde{H}(L_F(x_n))$ . Esto ocurre si y sólo si  $\|L_F(x_0)\| < r$  o equivalentemente si y sólo  $a_0 < r$ , donde denotábamos por  $r$  el radio de convergencia de la serie  $\sum_{k \geq 2} 2A_k t^{k-1}$ . Por lo tanto, es necesario imponer la condición de que  $a_0 < r$ .

**Teorema 2.3.4** Sea  $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$  un operador no lineal dos veces diferenciable Fréchet, satisfaciendo  $(C1)$ – $(C4)$ . Asumimos que  $a_0 < r$ ,  $a_0 h(a_0) < 1$  y  $b_0 < \kappa_0$ . Si  $B(x_0, R) \subset \Omega$ , donde  $R = \frac{h(a_0)\eta}{1-f(a_0)g(a_0, b_0)}$ , entonces la familia de procesos iterativos (2.10), comenzando en  $x_0$ , converge a la solución  $x^*$  de la ecuación (2.1). En este caso, la solución  $x^*$  y las iteraciones  $x_n$  pertenecen a  $\overline{B(x_0, R)}$  y  $x^*$  es única solución de (2.1) en  $B(x_0, \frac{2}{M\beta} - R) \cap \Omega$ .

*Demostración.* Por hipótesis tenemos que  $x_0 \in \Omega$  y, por las condiciones iniciales exigidas sobre el operador  $F$ , se sigue que

$$\|y_0 - x_0\| = \|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \eta < R \quad \text{y} \quad \|x_1 - x_0\| \leq h(a_0)\eta < R,$$

y por lo tanto,  $y_0, x_1 \in \Omega$ . Además,

$$\begin{aligned} \|y_1 - x_0\| &\leq \|y_1 - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \\ &\leq f(a_0)g(a_0, b_0)\eta + h(a_0)\eta < h(a_0)(1 + f(a_0)g(a_0, b_0))\eta < R, \end{aligned}$$

entonces, las relaciones de recurrencia  $[I_n]$ – $[VII_n]$  del lema 2.3.1 se satisfacen para  $n = 1$ . Ahora, aplicando un proceso inductivo, es sencillo probar por lema 2.3.1 que  $y_n, x_{n+1} \in \Omega$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . En efecto, teniendo en cuenta  $[II_n]$  y  $[VI_n]$  del lema 2.3.1, tenemos que

$$\begin{aligned} \|y_n - x_0\| &\leq \|y_n - x_n\| + \|x_n - x_0\| \\ &\leq \left(f(a_0)g(a_0, b_0)\right)^n \eta + h(a_0) \left(\sum_{k=0}^{n-1} f(a_0)^k g(a_0, b_0)^k\right) \eta \\ &< h(a_0) \left(\sum_{k=0}^n f(a_0)^k g(a_0, b_0)^k\right) \eta < R \end{aligned}$$

y

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leq h(a_0) \left(\sum_{k=0}^n f(a_0)^k g(a_0, b_0)^k\right) \eta < R.$$

Por lo tanto,  $y_n, x_{n+1} \in \Omega$ .

Además, a partir de las relaciones de recurrencia  $[II_n]$  y  $[VI_n]$ , se tiene que

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq h(a_n)\|\Gamma_n F(x_n)\| \leq h(a_0) \left(\prod_{k=0}^{n-1} f(a_k)g(a_k, b_k)\right) \eta.$$

Para establecer la convergencia de la sucesión  $\{x_n\}$ , dada en (2.10), probamos que es una sucesión de Cauchy. Sean  $n, m \in \mathbb{N}$ , verificamos que la distancia entre  $x_{n+m}$  y  $x_n$  es tan pequeña como queramos. Teniendo en cuenta que las sucesiones  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  son decrecientes y que  $f(a_0)g(a_0, b_0) < 1$ , se sigue que  $\{x_n\}$  es una sucesión de Cauchy, puesto que

$$\begin{aligned}
\|x_{n+m} - x_n\| &\leq \sum_{k=n}^{n+m-1} \|x_{k+1} - x_k\| \leq h(a_0) \sum_{k=n}^{n+m-1} \left( \prod_{j=0}^{k-1} f(a_j)g(a_j, b_j) \right) \eta \\
&\leq h(a_0) \sum_{k=n}^{n+m-1} \left( f(a_j)^k g(a_j, b_j)^k \right) \eta \\
&= h(a_0) \frac{1 - \left( f(a_0)g(a_0, b_0) \right)^m}{1 - f(a_0)g(a_0, b_0)} \eta \left( f(a_0)g(a_0, b_0) \right)^n.
\end{aligned}$$

Además, la sucesión  $\{x_n\}$  converge a la solución  $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  de la ecuación (2.1). En efecto, por una parte se tiene que

$$\|F(x_n)\| \leq \|F'(x_n)\Gamma_n F(x_n)\| \leq \|F'(x_n)\| \left( \prod_{k=0}^{n-1} f(a_k)g(a_k, b_k) \right) \eta,$$

y por otra, teniendo en cuenta el teorema del valor medio, se sigue que

$$\begin{aligned}
\|F'(x_n)\| &\leq \|F'(x_n) - F'(x_0)\| + \|F'(x_0)\| \leq \|F''(x)\| \|x_n - x_0\| + \|F'(x_0)\| \\
&\leq h(a_0)M \left( \sum_{k=0}^{n-1} f(a_0)^k g(a_0, b_0)^k \right) \eta + \|F'(x_0)\|,
\end{aligned}$$

es decir, la sucesión  $\{\|F'(x_n)\|\}$  está acotada. Luego,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|F(x_n)\| = 0$  y, por la continuidad del operador  $F$  en  $\overline{B(x_0, R)}$ , obtenemos que  $F(x^*) = 0$  y  $x^*$  es una solución de la ecuación  $F(x) = 0$ .

A continuación, probamos que  $x^*$  es la única solución de la ecuación (2.1) en  $B(x_0, \frac{2}{M\beta} - R) \cap \Omega$ . Para ello, consideramos  $y^* \in B(x_0, \frac{2}{M\beta} - R) \cap \Omega$  de manera que  $F(y^*) = 0$  y suponemos que  $y^*$  es distinto de  $x^*$ . Al igual que en el estudio mediante sucesiones mayorizantes, nota 2.5 de la sección 2.2, hacemos uso de la técnica empleada por Argyros y Chen ([16]) para demostrar la unicidad de la solución. En primer lugar, puesto que

$$0 = F(y^*) - F(x^*) = \int_0^1 F'(x^* + t(y^* - x^*)) dt (y^* - x^*),$$

el problema de ver que la solución de la ecuación  $F(x) = 0$  es única es equivalente a ver que el operador

$$\int_0^1 F'(x^* + t(y^* - x^*)) dt,$$

es invertible y esto a su vez equivale a ver que el operador

$$A = \int_0^1 \Gamma_0 F'(x^* + t(y^* - x^*)) dt$$

lo es. Y, por el lema de Banach se tiene que  $A$  es invertible si y sólo si  $\|I - A\| < 1$ .

Entonces, como

$$\|I - A\| \leq \|I_0\| \int_0^1 \|F'(x^* + t(y^* - x^*)) - F'(x_0)\| dt,$$

y

$$\begin{aligned} \|F'(x^* + t(y^* - x^*)) - F'(x_0)\| &= \left\| \int_{x_0}^{x^* + t(y^* - x^*)} F''(x) dx \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|F''(x_0 + \tau(x^* + t(y^* - x^*) - x_0))\| (\|x^* - x_0\|(1-t) + t\|y^* - x_0\|) d\tau. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $y^* \in B(x_0, \frac{2}{M\beta} - R) \cap \Omega$  y  $x^* \in \overline{B(x_0, R)} \cap \Omega$ , se sigue que  $\|y^* - x_0\| < \frac{2}{M\beta} - R$  y  $\|x^* - x_0\| \leq R$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|I - A\| &\leq \|I_0\| M \int_0^1 (\|x^* - x_0\|(1-t) + t\|y^* - x_0\|) dt \\ &< \frac{M\beta}{2} \left( R + \frac{2}{M\beta} - R \right) = 1, \end{aligned}$$

y por el lema de Banach, existe el inverso del operador  $A$ , y la unicidad de solución en  $B(x_0, \frac{2}{M\beta} - R) \cap \Omega$  queda demostrada. ■

### 2.3.3. Algunos procesos iterativos con $R$ -orden de convergencia al menos tres

Como casos particulares del teorema 2.3.4 de convergencia semilocal, que hemos obtenido para los procesos iterativos de la familia (2.10), tenemos los siguientes resultados para los métodos iterativos más conocidos con  $R$ -orden de convergencia al menos tres:

1. *Método de Chebyshev*. Para este proceso iterativo se tiene que las funciones  $\nu(t)$  y  $h(t)$ , dadas en (2.11) y (2.13) respectivamente, son:

$$\nu(t) = 0, \quad h(t) = 1 + \frac{t}{2}.$$

Entonces, como los coeficientes  $A_k$ , con  $k \geq 2$ , son cero para todo  $k \geq 2$ , se sigue que el radio de convergencia de la serie  $\sum_{k \geq 2} 2A_k t^{k-1}$  es  $r = +\infty$ . Por

lo tanto, en el caso de considerar el método de Chebyshev, las hipótesis del teorema 2.3.4 son ciertas si se cumplen estas dos condiciones:

$$a_0 < 1/2 \quad \text{y} \quad b_0 < \frac{3}{4}(2 + a_0)(2a_0 - 1)(-4 + 2a_0 + a_0^2). \quad (2.22)$$

2. *Método de Super-Halley.* Para este proceso iterativo se tiene que las funciones  $\nu(t)$  y  $h(t)$  dadas en (2.11) y (2.13) respectivamente, son:

$$\nu(t) = \sum_{k \geq 2} t^{k-2}, \quad h(t) = \frac{t-2}{2(t-1)}.$$

Luego  $r = 1$ . Teniendo en cuenta como vienen dadas estas funciones, las hipótesis del teorema 2.3.4 se satisfacen si

$$a_0 < 0.380778 \quad \text{y} \quad b_0 < \frac{3(8 - 32a_0 + 32a_0^2 - 9a_0^3 + 2a_0^4)}{4(a_0 - 1)^2}. \quad (2.23)$$

3. *Método de Halley.* Puesto que la función  $\nu(t)$ , dada en (2.11), para este proceso iterativo es

$$\nu(t) = \sum_{k \geq 2} \frac{1}{2^{k-1}} t^{k-2},$$

se tiene que  $r = 2$ . Por otra parte, la función  $h(t)$ , definida en (2.13), asociada al método de Halley es

$$h(t) = \frac{-2}{t-2},$$

entonces las hipótesis del teorema 2.3.4 se cumplen si

$$a_0 < 0.434624 \quad \text{y} \quad b_0 < \frac{6(4 - 12a_0 + 6a_0^2 + a_0^3)}{(a_0 - 2)^2}. \quad (2.24)$$

A continuación, hacemos un análisis comparativo con el estudio llevado a cabo por Candela y Marquina en [33] y [34] y por Gutiérrez y Hernández en [73] para los métodos de Chebyshev, Super-Halley y Halley. Para ello, representamos y comparamos en el plano las regiones de accesibilidad de las sucesiones (2.12), también conocidas como regiones de decrecimiento cúbico por su comportamiento cúbico, como veremos posteriormente en la sección 2.3.4 cuando analicemos el  $R$ -orden de convergencia de los procesos iterativos de la familia (2.10).

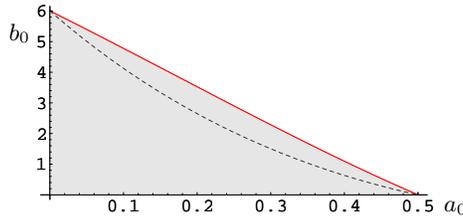
Comparamos en la figura 2.1 las regiones de accesibilidad para las sucesiones  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  obtenidas en (2.22) y en [34] que están asociadas al método de Chebyshev. En la figura 2.2 comparamos para los métodos de Super-Halley y Halley las regiones de accesibilidad para las sucesiones  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$ , obtenidas en nuestro estudio con las dadas por otros autores. En ambas figuras, los parámetros  $a_0$  y  $b_0$  recorren el eje de abscisas y ordenadas respectivamente.

En la figura 2.1, la región de decrecimiento cúbico asociada al método de Chebyshev y obtenida en [34] está limitada por la curva

$$b_0 = \frac{6(1 - 2a_0)(4 - 2a_0 - a_0^2)}{(2 + a_0)^2},$$

que representamos con una línea discontinua y, los segmentos de los ejes coordenados  $[0, 0.5]$  y  $[0, 6]$ . La línea continua representa la curva que limita la región de decrecimiento cúbico dada en (2.22)

$$b_0 = \frac{3}{4}(2 + a_0)(2a_0 - 1)(-4 + 2a_0 + a_0^2). \tag{2.25}$$



**Figura 2.1.** Regiones de decrecimiento cúbico para el método de Chebyshev bajo condiciones de Lipschitz para  $F''$

Como muestra la figura 2.1, la región de decrecimiento cúbico para el método de Chebyshev limitada por la curva (2.25) es mayor que la dada por Candela y Marquina en [34] y, por lo tanto, mejoramos la región de accesibilidad para el método de Chebyshev en cuanto a que hemos incrementado las posibilidades de elección de los parámetros  $a_0$  y  $b_0$ .

En figura 2.2 la región de decrecimiento cúbico obtenida en [73] para el método de Super-Halley está limitada por los segmentos de los ejes coordenados  $[0, 0.5]$  y  $[0, 6]$  y por la curva

$$b_0 = \frac{6(1 - 2a_0)(1 - a_0)(4 - 6a_0 + a_0^2)}{(2 - a_0)^2},$$

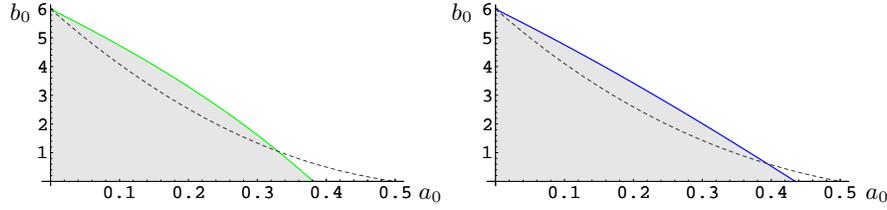
que representamos con línea discontinua. En el caso del método de Halley, la región de decrecimiento cúbico obtenida por Candela y Marquina en [33] queda limitada por la curva

$$b_0 = 3(1 - a_0)(2 - a_0)(1 - 2a_0),$$

representada al igual que en el caso anterior con trazo discontinuo y los segmentos de los ejes coordenados  $[0, 0.5]$  y  $[0, 6]$ .

Las líneas continuas representan las curvas que limitan las regiones de accesibilidad dadas a partir de (2.23) y (2.24).

Por tanto, cuando comparamos las regiones de accesibilidad obtenidas a partir del teorema 2.3.4 con las obtenidas en resultados anteriores por otros



**Figura 2.2.** Regiones de decrecimiento cúbico para los métodos de Super-Halley y Halley respectivamente, bajo condiciones de Lipschitz para  $F''$

autores, observamos en la figura 2.2 la mejora conseguida para estas regiones si  $a_0 < 0.330098$  en el caso del método de Super Halley y si  $a_0 < 0.393553$  para el método de Halley.

*Nota 2.7.* Notemos que el hecho de mejorar las regiones de decrecimiento cúbico en el caso del método de Chebyshev y sólo para ciertos valores del parámetro  $a_0$  para los métodos de Super-Halley y Halley se debe principalmente a que el estudio que presentamos generaliza todos los métodos de  $R$ -orden al menos tres. Por tanto, es posible que en casos particulares se puedan optimizar las cotas obtenidas para los valores  $a_0$  y  $b_0$ .

4. *Método de Ostrowski.* Para este proceso iterativo se tiene que las funciones  $\nu(t)$  y  $h(t)$  dadas en (2.11) y (2.13) respectivamente, son:

$$\nu(t) = \sum_{k \geq 2} \frac{1}{2^{2k-1}} \binom{2k}{k} t^{k-2}, \quad h(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}},$$

entonces  $r = 1$ . Por lo tanto, para este proceso iterativo las hipótesis del teorema 2.3.4 se cumplen si  $a_0 < 0.403042$  y

$$b_0 < 3 \left( 4 - 4a_0^2 - a_0^3 + 2a_0^4 - \frac{a_0(2a_0 - 1)}{1 + a_0} + \frac{4a_0^3 - 2a_0^2 - 4a_0 - 2}{\sqrt{1 + a_0}} \right).$$

5. *Método de Euler.* Puesto que la función  $\nu(t)$  es:

$$\nu(t) = \sum_{k \geq 2} \frac{1}{2^{k-1}(k+1)} \binom{2k}{k} t^{k-2},$$

se sigue que  $r = \frac{1}{2}$ . Además, la función  $h(t)$  asociada al método de Euler es:

$$h(t) = \frac{2}{1 + \sqrt{1-2t}}.$$

Entonces, si

$$a_0 < 0.365635 \quad \text{y} \quad b_0 < \frac{6(2 - 2\sqrt{1 - 2a_0} - 3a_0 + a_0^2)}{a_0},$$

se satisfacen las hipótesis del teorema 2.3.4.

6. *Método exponencial.* Las funciones  $\nu(t)$  y  $h(t)$  asociadas a este proceso son:

$$\nu(t) = \sum_{k \geq 2} \frac{2}{k+1} t^{k-2}, \quad h(t) = -\frac{\log(1-t)}{t},$$

por lo tanto  $r = 1$ . Teniendo en cuenta las condiciones impuestas en el teorema 2.3.4, la región de accesibilidad para el método exponencial queda limitada por las restricciones  $a_0 < 0.412273$  y

$$b_0 < \frac{3(2a_0(2+a_0) + (2+4a_0)\log(1-a_0) + (-1+2a_0)(\log(1-a_0))^2)}{a_0}.$$

7. *Método logarítmico.* Para este proceso iterativo se tiene que

$$\nu(t) = \sum_{k \geq 2} \frac{2}{(k+1)!} t^{k-2}, \quad h(t) = \frac{e^t - 1}{t},$$

y  $r = +\infty$ . En este caso la región de accesibilidad viene limitada por las restricciones:

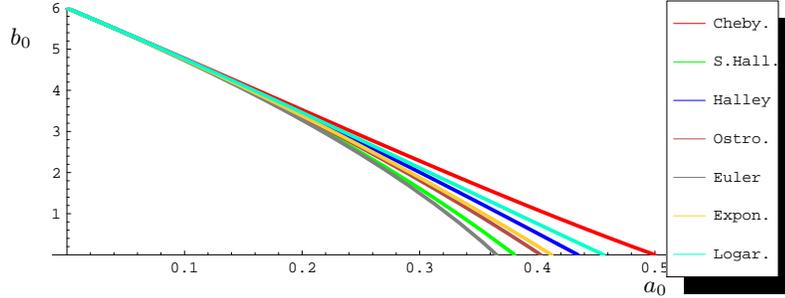
$$a_0 < 0.456586 \quad \text{y} \quad b_0 < \frac{3 + 6a_0^2 - 3e^{2a_0} + 6a_0(5 - 4e^{a_0} + e^{2a_0})}{a_0}.$$

Finalmente, mostramos en la figura 2.3 las regiones de accesibilidad obtenidas a partir de las restricciones de los parámetros  $a_0$  y  $b_0$  dadas en el teorema 2.3.4, para los procesos iterativos más conocidos de  $R$ -orden de convergencia al menos tres.

*Nota 2.8.* Notemos que en este estudio las cotas establecidas para el parámetro  $a_0$  en los procesos iterativos más conocidos de  $R$ -orden de convergencia al menos tres son aparentemente más restrictivas que las exigidas en el teorema de convergencia semilocal 2.3.4. Esto es debido a que el valor  $b_0$  tiene que ser positivo.

### 2.3.4. $R$ -orden de convergencia

Una vez que hemos estudiado la convergencia semilocal de la familia de procesos iterativos (2.10), vamos a establecer el  $R$ -orden de convergencia con el que la sucesión converge a la solución  $x^*$ , de la ecuación (2.1).



**Figura 2.3.** Regiones de decrecimiento cúbico de los procesos iterativos más conocidos con  $R$ -orden de convergencia al menos tres

**Lema 2.3.5** Sea  $\gamma = \frac{a_1}{a_0}$ , si  $a_0 h(a_0) < 1$  y  $b_0 < \kappa_0$ , donde

$$\kappa_0 = 6(2 + a_0) + 3h(a_0)(-2(1 + 2a_0) + a_0 h(a_0)(2a_0 - 1)),$$

se tiene que

(i)  $\gamma = f(a_0)^2 g(a_0, b_0) \in (0, 1)$ ,

(ii)  $f(\gamma t) < f(t)$ ,  $g(\gamma t, \gamma^2 u) < \gamma^2 g(t, u)$ ,  $\forall t, u > 0$  y  $\forall \gamma \in (0, 1)$ .

(iii)  $a_n < \gamma^{3^{n-1}} a_{n-1} < \gamma^{\frac{3^n - 1}{2}} a_0$ ,  $b_n < \left(\gamma^{3^{n-1}}\right)^2 b_{n-1} < \gamma^{3^n - 1} b_0$ ,  $\forall n \geq 1$ ,

(iv)  $f(a_n)g(a_n, b_n) < \gamma^{3^n} \Delta$ , donde  $\Delta = \frac{1}{f(a_0)}$ ,  $\forall n \geq 1$ .

*Demostración.* La demostración de (i) es inmediata por la definición de  $\gamma$  y las hipótesis. Ahora bien, como la función  $\nu(t)$  es creciente, tenemos que  $\nu(\gamma t) < \nu(t)$  y consecuentemente, para  $\gamma \in (0, 1)$ , se sigue (ii):

$$f(\gamma x) < f(x),$$

$$g(\gamma x, \gamma^2 y) < \gamma^2 \left( \frac{x^2}{2} \left( 1 + (1 + \gamma x)\nu(\gamma x) + \frac{\gamma x}{4} (1 + \gamma x \nu(\gamma x))^2 \right) + \frac{y}{6} \right) < \gamma^2 g(x, y).$$

Mediante un proceso inductivo probamos (iii). Si  $n = 1$ ,  $a_1 = \gamma a_0$ . Por otra parte,  $b_1 < \gamma^2 b_0$ , puesto que

$$b_1 = b_0 f(a_0)^3 g(a_0, b_0)^2 < b_0 \left( f(a_0)^2 g(a_0, b_0) \right)^2 = b_0 \gamma^2,$$

y  $f(a_0) > 1$ . Suponemos que (iii) es cierto para  $n$  y lo probamos para  $n + 1$ . Por el lema 2.3.2, las funciones  $f(t)$  y  $g(t, u)$  son crecientes. Entonces, teniendo en cuenta (ii) y por hipótesis de inducción, se sigue que

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n f(a_n)^2 g(a_n, b_n) \\ &< \gamma^{3^{n-1}} a_{n-1} f\left(\gamma^{3^{n-1}} a_{n-1}\right)^2 g\left(\gamma^{3^{n-1}} a_{n-1}, \left(\gamma^{3^{n-1}}\right)^2 b_{n-1}\right) \\ &< \gamma^{3^{n-1}} a_{n-1} f(a_{n-1})^2 \left(\gamma^{3^{n-1}}\right)^2 g(a_{n-1}, b_{n-1}) \\ &= \left(\gamma^{3^{n-1}}\right)^3 a_{n-1} f(a_{n-1})^2 g(a_{n-1}, b_{n-1}) = \gamma^{3^n} a_n. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$a_{n+1} < \gamma^{3^n} a_n < \gamma^{3^n} \gamma^{3^{n-1}} a_{n-1} < \dots < \gamma^{\frac{3^{n+1}-1}{2}} a_0.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= b_n f(a_n)^3 g(a_n, b_n)^2 \\ &\quad \left(\gamma^{3^{n-1}}\right)^2 b_{n-1} f\left(\gamma^{3^{n-1}} a_{n-1}\right)^3 g\left(\gamma^{3^{n-1}} a_{n-1}, \left(\gamma^{3^{n-1}}\right)^2 b_{n-1}\right)^2 \\ &< \left(\gamma^{3^{n-1}}\right)^2 b_{n-1} f(a_{n-1})^3 \left(\gamma^{3^{n-1}}\right)^{2^2} g(a_{n-1}, b_{n-1})^2 \\ &< \left(\gamma^{3^{n-1}}\right)^6 b_{n-1} f(a_{n-1})^3 g(a_{n-1}, b_{n-1})^2 = \left(\gamma^{3^n}\right)^2 b_n, \end{aligned}$$

luego

$$b_{n+1} < \left(\gamma^{3^n}\right)^2 b_n < \left(\gamma^{3^n}\right)^2 \left(\gamma^{3^{n-1}}\right)^2 b_{n-1} < \dots < \gamma^{3^{n+1}-1} b_0.$$

Finalmente, probamos (iv). Teniendo en cuenta las desigualdades obtenidas en (iii), tenemos que

$$\begin{aligned} f(a_n)g(a_n, b_n) &< f\left(\gamma^{\frac{3^n-1}{2}} a_0\right)g\left(\gamma^{\frac{3^n-1}{2}} a_0, \gamma^{3^n-1} b_0\right) < f(a_0)\gamma^{3^n-1}g(a_0, b_0) \\ &< \frac{\gamma^{3^n}}{f(a_0)} = \gamma^{3^n} \Delta. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

A continuación, probamos que la familia de procesos iterativos (2.10) tiene  $R$ -orden de convergencia al menos tres.

**Teorema 2.3.6** *En las hipótesis del teorema 2.3.4, la familia de procesos iterativos (2.10), comenzando en  $x_0$ , converge a la solución  $x^*$  de la ecuación (2.1) con  $R$ -orden de convergencia al menos tres. Además, se obtienen las siguientes estimaciones a priori del error:*

$$\|x^* - x_n\| < h(a_0 \gamma^{\frac{3^n-1}{2}}) \eta \frac{\gamma^{\frac{3^n-1}{2}} \Delta^n}{1 - \gamma^{3^n} \Delta}.$$

*Demostración.* Teniendo en cuenta el lema 2.3.5 y las relaciones de recurrencia  $[\text{II}_n]$  y  $[\text{VI}_n]$  del lema 2.3.1, se tiene que

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_k\| &\leq h(a_k) \left( \prod_{j=0}^{k-1} f(a_j)g(a_j, b_j) \right) \eta < h(a_0 \gamma^{\frac{3^k-1}{2}}) \left( \prod_{j=0}^{k-1} \gamma^{3^j} \Delta \right) \eta \\ &= h(a_0 \gamma^{\frac{3^k-1}{2}}) \gamma^{\frac{3^k-1}{2}} \Delta^k \eta. \end{aligned}$$

Entonces, obtenemos

$$\|x_{n+m} - x_n\| \leq \sum_{k=n}^{n+m-1} \|x_{k+1} - x_k\| < h(a_0 \gamma^{\frac{3^n-1}{2}}) \gamma^{\frac{3^n-1}{2}} \Delta^n \left( \sum_{k=0}^{m-1} \gamma^{\frac{3^n(3^k-1)}{2}} \Delta^k \right) \eta$$

Ahora, por la desigualdad de Bernoulli,  $(1+x)^k > 1+kx$ , tenemos que  $3^k - 1 > 2k$ , y por lo tanto

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - x_n\| &< h(a_0 \gamma^{\frac{3^n-1}{2}}) \gamma^{\frac{3^n-1}{2}} \Delta^n \left( \sum_{k=0}^{m-1} (\gamma^{3^n} \Delta)^k \right) \eta \\ &= h(a_0 \gamma^{\frac{3^n-1}{2}}) \gamma^{\frac{3^n-1}{2}} \Delta^n \eta \frac{1 - (\gamma^{3^n} \Delta)^m}{1 - \gamma^{3^n} \Delta}, \end{aligned} \tag{2.26}$$

para todo  $n, m \in \mathbb{N}$ . Entonces, si  $m \rightarrow \infty$  in (2.26), se obtiene

$$\|x^* - x_n\| < h(a_0 \gamma^{\frac{3^n-1}{2}}) \eta \frac{\gamma^{\frac{3^n-1}{2}} \Delta^n}{1 - \gamma^{3^n} \Delta} < \left( \gamma^{\frac{1}{2}} \right)^{3^n} \frac{R}{\gamma^{\frac{1}{2}}}.$$

Y por lo tanto, la familia de procesos iterativos (2.10) tiene  $R$ -orden de convergencia al menos tres, puesto que

$$\|x^* - x_n\| < C \delta^{3^n},$$

donde  $C = \frac{R}{\gamma^{\frac{1}{2}}} > 0$  y  $\delta = \gamma^{\frac{1}{2}} < 1$ . ■

*Nota 2.9.* Como consecuencia del teorema 2.3.6 queda demostrado que los procesos iterativos de Chebyshev, Super-Halley, Halley, Ostrowski, Euler, Exponencial y Logarítmico, entre otros, tienen  $R$ -orden de convergencia al menos tres, todos ellos recogidos en la familia (2.10).

*Ejemplo 2.10.* En el siguiente ejemplo damos cotas a priori del error, mejorando las cotas obtenidas por otros autores ([34]), cuando consideramos un proceso iterativo de la familia (2.10), como es el método de Chebyshev. Para ello, tomamos el operador  $F$  dado por  $F(x) = x^3 - 10$  y el punto de salida  $x_0 = 2$  y denotamos por  $x^*$  la raíz positiva de  $F(x) = 0$ . Damos una cota superior  $C$  de  $10^{11} \|x^* - x_2\|$ , donde  $x_2$  es la segunda iteración del método de

Chebyshev. Haciendo la misma descomposición que Candela y Marquina en [34]:

$$\|x^* - x_2\| \leq \|x^* - x_n\| + \|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - x_{n-2}\| + \dots + \|x_3 - x_2\|.$$

calculamos el menor valor de  $n$  de tal manera que  $\|x^* - x_n\|$  es de orden  $10^{-11}$ . En nuestro caso, si  $n = 3$  y hacemos los cálculos con diez cifras significativas, obtenemos  $C = 130931.5283$ . En efecto, tomando la descomposición

$$\|x^* - x_2\| \leq \|x^* - x_3\| + \|x_3 - x_2\|$$

y, considerando como dominio el intervalo abierto  $(1, 3)$ , obtenemos que  $\beta = 1/12$ ,  $\eta = 1/6$ ,  $M = 18$  y  $K = 6$ , y consecuentemente  $a_0 = 1/4$  y  $b_0 = 1/72$ . Por otra parte, teniendo en cuenta las cotas obtenidas en el teorema 2.3.6, se sigue que

$$\|x^* - x_3\| + \|x_3 - x_2\| < \left( h(a_0 \gamma^{\frac{3^3-1}{2}}) \frac{\gamma^{\frac{3^3-1}{2}} \Delta^3}{1 - \gamma^{3^3} \Delta} + h(a_2) \left( \prod_{j=0}^1 f(a_j) g(a_j, b_j) \right) \right) \eta.$$

A partir de los parámetros  $a_0$  y  $b_0$  calculamos estas estimaciones, consiguiendo una cota superior  $C$  de  $10^{11} \|x^* - x_2\|$ :

$$10^{11} \|x^* - x_2\| < C = 4.746560201 \times 10^{-6} + 130931.5282.$$

Para el mismo operador y el mismo proceso iterativo Candela y Marquina ([34]) obtienen  $C = 142360.9734$ , de manera que se mejora la cota del error.

## 2.4. Algunas aplicaciones a ecuaciones integrales y diferenciales

En esta sección ilustramos los resultados anteriores analizando algunas ecuaciones integrales y diferenciales para las que proporcionamos dominios de existencia y unicidad de solución, así como estimaciones a priori del error cometido al aplicar en la resolución de dichas ecuaciones la familia de métodos iterativos (1.3) o equivalentemente la familia (2.10).

### 2.4.1. Una ecuación integral

En el siguiente ejemplo, usamos el teorema 2.2.6 para obtener, a partir de la convergencia de la sucesión dada por (1.3), dominios de existencia y unicidad de solución para la ecuación integral no lineal de tipo Fredholm y segunda clase ([40]):

$$x(s) = f(s) + \lambda \int_a^b \kappa(s, t) x(t)^n dt, \tag{2.27}$$

donde  $x(s) \in \Omega \subseteq X = C([a, b])$ , denotando por  $C([a, b])$  el espacio de las funciones continuas definidas en el intervalo  $[a, b]$ ,  $\lambda$  es un número real,  $\kappa(s, t)$  es una función continua en dos variables, con  $s, t \in [0, 1]$ , y  $f(s) \in X$  es una función conocida, de tal forma que  $f(s) > 0$ ,  $s \in [a, b]$ . Las ecuaciones integrales (2.27) son un tipo de generalización de ecuaciones de la forma:

$$x(s) = \lambda \int_b^a \kappa(s, t)x(t)^n dt, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.28)$$

estudiadas por Davis en [40].

La clave al resolver estos problemas está en encontrar los inversos de ciertos operadores diferenciales. Esto se consigue teniendo en cuenta que, en algunos casos, resolver un problema de valores en la frontera ([53]), es equivalente a resolver una ecuación integral, como ocurre, por ejemplo, para la ecuación integral (2.27) para la cual obtener el operador  $\Gamma_0 = F'(x_0)^{-1}$  es relativamente sencillo.

En efecto, cuando el núcleo  $\kappa(s, t)$  es el núcleo de Green:

$$\kappa(s, t) = \begin{cases} \frac{(t-a)(s-b)}{b-a}, & a \leq t \leq s, \\ \frac{(t-b)(s-a)}{b-a}, & s \leq t \leq b, \end{cases} \quad (2.29)$$

resolver el problema de valores en la frontera

$$\begin{cases} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \lambda x(t)^n, \\ x(a) = f(a); x(b) = f(b), \end{cases}$$

con  $x \in C^2([a, b])$ , es equivalente a resolver la ecuación integral de Fredholm de segunda clase (véase [121]):

$$x(s) = \lambda \int_a^b \kappa(s, t)x(t)^n dt + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(s-a) + f(a).$$

A continuación, tratamos de encontrar una función  $x(s)$  que sea solución de la ecuación (2.27), equipada con la norma del máximo:

$$\|x\|_\infty := \max_{t \in [a, b]} |x(t)|, \quad x \in \Omega.$$

Para estudiar la convergencia de la sucesión (1.3) a una solución de la ecuación (2.27) podemos considerar  $\Omega = C([0, 1])$ .

Si tomamos por ejemplo  $n = 3$ , el problema de encontrar una solución de la ecuación (2.27) es equivalente a encontrar una solución de la ecuación  $F(x) = 0$ , donde  $F : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$  viene definida de la siguiente manera:

$$[F(x)](s) = x(s) - f(s) - \lambda \int_0^1 \kappa(s, t)x(t)^3 dt, \quad s \in [0, 1]. \quad (2.30)$$

Notemos que la primera y la segunda derivadas Fréchet del operador  $F$  son:

$$[F'(x)y](s) = y(s) - 3\lambda \int_0^1 \kappa(s, t)x(t)^2y(t) dt, \quad s \in [0, 1], \quad (2.31)$$

y

$$[F''(x)(y, z)](s) = -6\lambda \int_0^1 \kappa(s, t)x(t)z(t)y(t) dt, \quad s \in [0, 1]. \quad (2.32)$$

Tomamos como punto de salida la función  $x_0(s) = f(s)$ ,  $s \in [0, 1]$ . A continuación, calculamos los valores de las constantes  $\beta$ ,  $\eta$ ,  $M$ . Sea

$$A = \max_{s \in [0, 1]} \left| \int_0^1 \kappa(s, t) dt \right|$$

por el lema de Banach, es suficiente que

$$\|I - F'(x_0)\| \leq 3|\lambda|A\|x_0\|^2 < 1$$

para probar que  $\Gamma_0 = F'(x_0)^{-1}$  existe. Además, en este caso se tiene que

$$\|\Gamma_0\| \leq \frac{1}{1 - \|I - F'(x_0)\|} \leq \frac{1}{1 - 3|\lambda|A\|x_0\|^2} = \beta.$$

Notemos que

$$[F(x_0)](s) = -\lambda \int_0^1 \kappa(s, t)x_0(t)^3 dt,$$

entonces

$$\|F(x_0)\| \leq |\lambda|A\|x_0\|^3,$$

y por lo tanto,

$$\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \frac{|\lambda|A\|x_0\|^3}{1 - 3|\lambda|A\|x_0\|^2} = \eta.$$

Ahora, veamos cual es la constante positiva  $K$  del teorema 2.2.6. Es fácil verificar que

$$\|F''(x) - F''(y)\| \leq 6|\lambda|A\|x - y\|$$

y  $K = 6|\lambda|A$ .

Por otra parte, notemos que la segunda derivada Fréchet del operador  $F$  es no acotada en  $X$ , puesto que

$$\|F''(x)\| \leq 6|\lambda|A\|x\|. \quad (2.33)$$

Luego, bajo las condiciones de Kantorovich ([99], [100], [101]), no se pueden obtener dominios de existencia y unicidad de solución para la ecuación integral

$F(x) = 0$  y el operador  $F$  dado en (2.30). En esta situación, es necesario localizar previamente la raíz  $x^*$  en una bola. Para ello, usualmente se procede de la siguiente manera ([59]): si  $x^* \in X$  es una solución de (2.27), tomando normas en la ecuación

$$x^*(s) = y(s) + \lambda \int_0^1 \kappa(s, t) x^*(t)^3 dt,$$

debe cumplirse

$$\|x^*\| - |\lambda| A \|x^*\|^3 - f(s) \leq 0. \quad (2.34)$$

A continuación llevamos a cabo el estudio de un caso particular. Sea  $x_0$  la función  $x_0(s) = 1$ ,  $f(s) = x_0(s) = 1$  y consideramos como núcleo de la ecuación integral la función  $\kappa(s, t) = e^{s+t}$ . Obsérvese que siempre podemos elegir  $\lambda$  de tal forma que

$$3|\lambda| A \|x_0\|^2 < 1,$$

es decir,  $|\lambda| < \frac{1}{3A}$ , con  $A = e(e-1)$ . Entonces, si tomamos por ejemplo  $\lambda = \frac{1}{100}$ , se sigue a partir de (2.34) que  $\|x^*\| \leq r_1 = 1.05482$  y  $\|x^*\| \geq r_2 = 4.00859$ , donde  $r_1$  y  $r_2$  son las raíces positivas de la ecuación real  $z-1-\lambda Az^3 = 0$ . Consecuentemente, si buscamos una solución de tal manera que  $\|x^*\| < r_1$ , podemos considerar como dominio abierto, convexo y no vacío  $\Omega = B(1, r) \subseteq C([0, 1])$ , con  $r \in (r_1, r_2)$ . Tomando por ejemplo  $r = 3$ , teniendo en cuenta (2.33), se sigue que  $M = 18\lambda A$ . Ahora, una vez hallados los valores de los parámetros  $\eta$ ,  $\beta$ ,  $K$  y  $M$  obtenemos la siguiente función mayorizante:

$$p(t) = \lambda At^3 + 9\lambda At^2 - (1 - 3\lambda A)t + \lambda A, \quad (2.35)$$

que tiene una raíz negativa y dos raíces positivas  $s = 0.0558537$  y  $s^* = 1.66933$ . Además, se tiene que la condición (2.7) es cierta y  $B(1, s) \subseteq B(1, 3) = \Omega$ .

Como consecuencia, todas las condiciones del teorema 2.2.6 se satisfacen, y por lo tanto, la ecuación (2.27) tiene una solución en la bola cerrada  $\{u \in C([0, 1]) \mid \|u-1\| \leq s\}$  y es única en el dominio  $\{u \in C([0, 1]) \mid \|u-1\| < s^*\} \cap \Omega$ .

En la tabla 2.1 mostramos las estimaciones del error

$$\|x^* - x_n\| \leq s - t_n, \quad n \geq 0,$$

en las dos primeras iteraciones cuando aplicamos los métodos iterativos más conocidos de la familia (1.3), en la resolución de la ecuación  $F(x) = 0$ , con  $F$  el operador integral dado en (2.30).

	Chebyshev	C-método, $C = \frac{1}{2}$	Super-Halley	Halley
$s - t_1$	0.0000921389	0.0000155301	0.0000112332	0.0000527896
$s - t_2$	$2.18157 \cdot 10^{-8}$	$2.18152 \cdot 10^{-8}$	$2.18152 \cdot 10^{-8}$	$2.18153 \cdot 10^{-8}$

	Ostrowski	Exponencial	Logarítmico
$s - t_1$	0.0000320153	0.0000389416	0.0000662599
$s - t_2$	$2.18152 \cdot 10^{-8}$	$2.18152 \cdot 10^{-8}$	$2.18153 \cdot 10^{-8}$

**Tabla 2.1.** Estimaciones del error  $\|x^* - x_n\|$  para los procesos iterativos más conocidos de la familia (1.3)

Notemos que el análisis llevado a cabo en este capítulo sobre la convergencia en espacios de Banach para los procesos iterativos de la familia (1.3), está basado en las técnicas de sucesiones mayorizantes y de relaciones de recurrencia, exigiendo al operador  $F$  las condiciones de Kantorovich **(C1)**–**(C4)**. Hemos establecido, empleando estas dos técnicas, sendos resultados de convergencia semilocal, dominios de existencia y unicidad de solución de la ecuación  $F(x) = 0$ , así como estimaciones del error cometido en cada iteración al aproximar la solución, para los procesos iterativos de la familia (1.3).

Aunque la elección de una u otra técnica bajo las condiciones que hemos impuesto al operador  $F$  no resulta demasiado representativa, aparecen algunas diferencias como queda reflejado en el estudio realizado a lo largo del capítulo. Así, por ejemplo, en el caso de utilizar sucesiones mayorizantes se impone la condición de que la sucesión  $\{A_k\}$  sea decreciente en sentido no estricto. Recordemos que  $\{A_k\}$  es la sucesión de los coeficientes de la serie que determina un proceso iterativo de la familia (1.3). De esta forma, se excluyen procesos iterativos tan conocidos como el método de Euler.

Otra diferencia que cabe destacar es que tanto el dominio de existencia como el dominio de unicidad de solución obtenidos mediante la técnica de sucesiones mayorizantes es el mismo para todos los procesos iterativos de la familia (1.3). Mientras que con la técnica de relaciones de recurrencia los dominios de existencia y unicidad de solución que se obtienen son exclusivos o dependen del proceso iterativo elegido en la resolución de la ecuación  $F(x) = 0$ , como queda reflejado en los ejemplos.

Por último, haciendo un análisis comparativo entre las regiones de accesibilidad o regiones de decrecimiento cúbico ([33]), obtenidas al aplicar las distintas técnicas, encontramos una diferencia notable. En efecto, la condición (2.7) que se exige para garantizar la convergencia de todos los procesos iterativos de la familia (1.3) cuando empleamos sucesiones mayorizantes,

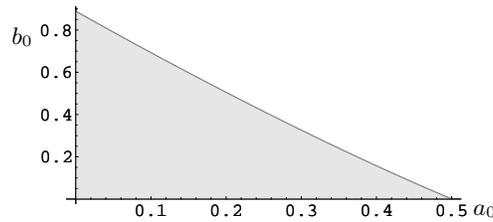
$$\eta \leq \frac{4K + M^2\beta - M\beta\sqrt{M^2 + 2K/\beta}}{3\beta K(M + \sqrt{M^2 + 2K/\beta})},$$

puede escribirse en función de los parámetros  $a_0 = M\beta\eta$  y  $b_0 = K\beta\eta^2$  de esta manera:

$$b_0 \leq \frac{1}{9} \left( 4 - 9a_0 + \sqrt{2(2 - 3a_0)^3} \right). \quad (2.36)$$

Recordemos que, a partir de estos parámetros  $a_0$  y  $b_0$  se definen las sucesiones de decrecimiento cúbico  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$ , definidas en (2.12), estrechamente ligadas a las relaciones de recurrencia dadas en el lema 2.3.1.

Entonces, podemos representar en el plano la región de accesibilidad asociada a todos los procesos iterativos de la familia (1.3), que se obtiene a partir de la restricción (2.7).



**Figura 2.4.** Región de decrecimiento cúbico asociada a los procesos iterativos de la familia (1.3) obtenida mediante la técnica de sucesiones mayorizantes

Como mostramos en la figura 2.4, la región de accesibilidad obtenida cuando empleamos sucesiones mayorizantes queda delimitada por la curva (2.36) y los segmentos de los ejes coordenados  $[0, 0.5]$  y  $[0, 8/9]$ , con  $a_0$  y  $b_0$  recorriendo los ejes de abscisas y ordenadas respectivamente.

Comparando esta región de accesibilidad y las obtenidas mediante las relaciones de recurrencia en la figura 2.3, se ve que la diferencia entre ellas es considerable. Obsérvese que la región de accesibilidad óptima es la asociada al método de Chebyshev y la región más pequeña es la asociada al método de Euler, delimitada por la curva

$$b_0 < \frac{6(2 - 2\sqrt{1 - 2a_0} - 3a_0 + a_0^2)}{a_0}$$

y los segmentos de los ejes coordenados  $[0, 0.365635]$  y  $[0, 6]$ , como se muestra en la figura 2.3. Por lo tanto, para los procesos iterativos más conocidos de la familia (1.3) aumentamos las posibilidades de elección de los parámetros  $a_0$  y  $b_0$  con la técnica de las relaciones de recurrencia siempre que  $a_0 \leq 0.365635$ , y en ocasiones si  $a_0 > 0.365635$ .

Como veremos en el capítulo 3, cuando se suavizan las condiciones sobre el operador  $F$ , el empleo de sucesiones mayorizantes complica en exceso el análisis de la convergencia semilocal. De ahí, la necesidad de recurrir a otra técnica que funcione mejor, como es el uso de las relaciones de recurrencia.

**2.4.2. Un problema de valor en la frontera**

A continuación estudiamos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = \phi(t, x(t)), \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{2.37}$$

Suponemos que la función  $\phi(t, u)$  es continua y tiene derivada segunda respecto a  $u$  en la región

$$0 \leq t \leq a, \quad |u - x_0(t)| \leq \delta, \quad x_0 \in X.$$

Para ello, consideramos el espacio  $X = \{x \in C^{(1)}([0, a]) \mid x(0) = 0\}$  con la siguiente norma:

$$\|x\| := \max_{t \in [0, a]} |x(t)| + \lambda \max_{t \in [0, a]} |x'(t)|, \tag{2.38}$$

donde  $\lambda > 0$  se determinará posteriormente. En el espacio  $C([0, a])$  consideramos la norma del máximo:

$$\|x\|_\infty := \max_{t \in [0, a]} |x(t)|, \quad x \in \Omega,$$

con  $\Omega = \{x \in X \mid \|x(t) - x_0(t)\| \leq \delta\}$  y  $F : \Omega \subseteq X \rightarrow C([0, a])$  el operador definido por

$$F(x(t)) = x'(t) - \phi(t, x(t)), \quad x \in \Omega. \tag{2.39}$$

Notemos que resolver el problema (2.37) es equivalente al de encontrar una solución de la ecuación  $F(x) = 0$ , donde  $F$  está definido en (2.39).

Para  $x_0 \in \Omega$  tenemos, sin más que calcular la primera derivada Fréchet del operador  $F$ ,

$$[F'(x_0)y](t) = y'(t) - \phi'_x(t, x_0(t))y(t), \quad t \in [0, a], \tag{2.40}$$

con  $y \in \Omega$ .

Sea  $\Gamma_0 = F(x_0)^{-1}$  e  $y(t) = \Gamma_0(\Theta(t))$ , de manera que  $y(t)$  es una solución de la ecuación diferencial

$$y'(t) = \Theta(t) + \phi'_x(t, x_0(t))y(t),$$

es decir,

$$\Gamma_0(\Theta(t)) = y(t) = \Psi(t) \int_0^t \frac{\Theta(s)}{\Psi(s)} ds,$$

con  $\Psi(t) = \exp\left(\int_0^t \phi'_x(s, x_0(s)) ds\right)$ .

Observemos que

$$\max_{t \in [0, a]} |y(t)| \leq a \frac{\max_{t \in [0, a]} |\Psi(t)|}{\min_{t \in [0, a]} |\Psi(t)|} \|\Theta\|$$

y

$$\max_{t \in [0, a]} |y'(t)| \leq \max_{t \in [0, a]} |\phi'_x(t, x_0(t))| \max_{t \in [0, a]} |y(t)| + \|\Theta\| \leq \Delta \|\Theta\|,$$

$$\text{con } y(t) = \Gamma_0(\Theta(t)) \text{ y } \Delta = 1 + a \max_{t \in [0, a]} |\phi'_x(t, x_0(t))| \frac{\max_{t \in [0, a]} |\Psi(t)|}{\min_{t \in [0, a]} |\Psi(t)|}.$$

Como consecuencia,

$$\|\Gamma_0\| \leq \lambda \Delta + a \frac{\max_{t \in [0, a]} |\Psi(t)|}{\min_{t \in [0, a]} |\Psi(t)|}, \quad (2.41)$$

y

$$\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \|\Gamma_0\| \|F(x_0)\| \leq \|\Gamma_0\| |x'_0(t) - \phi(t, x_0(t))|. \quad (2.42)$$

Además, calculando la segunda derivada Fréchet del operador  $F$ , se sigue que

$$[F''(x)(y, z)](t) = -\phi''_{x^2}(t, x(t))y(t)z(t), \quad t \in [0, a],$$

con  $y, z \in \Omega$ . Por tanto,

$$\|F''(x)\| \leq |\phi''_{x^2}(t, x(t))| \quad (2.43)$$

y

$$\|F''(u) - F''(v)\| \leq |\phi''_{u^2}(t, u(t)) - \phi''_{v^2}(t, v(t))|. \quad (2.44)$$

Ahora, estamos en condiciones de establecer resultados de existencia y unicidad de solución para el problema de valor inicial (2.37). Para ello, empleamos las dos técnicas analizadas en este capítulo, sucesiones mayorizantes y relaciones de recurrencia, a partir de las cuales hemos obtenido los teoremas de convergencia 2.2.6 y 2.3.4.

**Teorema 2.4.1** *Para  $x_0 \in \Omega$  supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:*

- (i)  $|x'_0(t) - \phi(t, x_0(t))| \leq A$ ,
- (ii)  $|\phi'_x(t, x_0(t))| \leq B$ ,
- (iii)  $|\phi''_{x^2}(t, x(t))| \leq M, \quad \forall x \in \Omega$ ,
- (iv)  $|\phi''_{u^2}(t, u(t)) - \phi''_{v^2}(t, v(t))| \leq K|u - v|, \quad t \in [0, a], \quad |u - x_0(t)| \leq \delta$  y  $|v - x_0(t)| \leq \delta$ .

Sean  $\beta = \lambda(1 + aBe^{2aB}) + ae^{2aB}$  y  $\eta = A\beta$ . Si el polinomio

$$p(t) = \frac{K}{6}t^3 + \frac{M}{2}t^2 - \frac{1}{\beta}t + \frac{\eta}{\beta},$$

tiene dos raíces  $s$  y  $s^*$  tales que  $s \leq s^*$  y se cumple que  $m \leq \delta$ , siendo  $m$  el mínimo de  $p(t)$ , entonces la familia de procesos iterativos (2.10), comenzando en  $x_0$ , converge a una solución  $x^*$  del problema de valor inicial (2.37), que está definida en  $[0, a]$ . Además,

$$|x^* - x_0(t)| \leq s, \quad t \in [0, a],$$

y la solución es única en la región

$$|u - x_0(t)| \leq s^*.$$

*Demostración.* La demostración se sigue sin más que tener en cuenta que

$$\max_{t \in [0, a]} |\Psi(t)| \leq e^{aB}, \quad \min_{t \in [0, a]} |\Psi(t)| \geq e^{-aB}.$$

A partir de la cota dada en (2.41),  $\|I_0\| \leq \lambda(1 + aBe^{2aB}) + ae^{2aB} = \beta$ . Ahora, a partir de (2.42) obtenemos  $\|I_0 F(x_0)\| \leq A\beta = \eta$  y análogamente teniendo en cuenta (2.43) y (2.44) se sigue  $\|F''(x)\| \leq M$  y  $\|F''(u) - F''(v)\| \leq K|u - v|$  respectivamente con lo que el resultado es consecuencia inmediata de teorema 2.2.6. ■

*Nota 2.11.* Notemos que, si tomamos  $\beta = ae^{2aB}$  y el polinomio  $p$  tiene dos raíces positivas distintas, podemos garantizar la existencia y unicidad de solución tomando  $\lambda$  suficientemente pequeño.

Procediendo de manera análoga a lo hecho en la demostración del teorema 2.4.1, el siguiente resultado es consecuencia inmediata del teorema 2.3.4.

**Teorema 2.4.2** *Para  $x_0 \in \Omega$  supongamos que se cumplen las condiciones (i)–(iv) del teorema 2.4.1. Sean  $\beta = \lambda(1 + aBe^{2aB}) + ae^{2aB}$ ,  $\eta = A\beta$ ,  $a_0 = M\beta\eta$ ,  $b_0 = K\beta\eta^2$  y  $\nu(t) = \sum_{k \geq 2} 2A_k t^{k-2}$ . Si  $a_0 < r$ , con  $r$  el radio de convergencia de la serie  $\nu(t)$ ,  $a_0 h(a_0) < 1$  y  $f(a_0)^2 g(a_0, b_0) < 1$ , con  $f$ ,  $g$  y  $h$  dadas en (2.13). Entonces, si  $R \leq \delta$ , donde  $R = \frac{h(a_0)\eta}{1 - f(a_0)g(a_0, b_0)}$ , la familia de procesos iterativos (2.10), comenzando en  $x_0$ , converge a una solución  $x^*$  del problema de valor inicial (2.37), definida en  $[0, a]$ . Además,*

$$|x^* - x_0(t)| \leq R, \quad t \in [0, a],$$

y la solución es única en la región

$$|u - x_0(t)| < \frac{2}{M\beta} - R, \quad u \in \Omega.$$

*Nota 2.12.* Notemos que si tomamos  $\beta = ae^{2aB}$  y se cumplen las condiciones del teorema 2.4.2, podemos garantizar la existencia y unicidad de solución tomando  $\lambda$  suficientemente pequeño.

A continuación comparamos los resultados obtenidos y, para ello consideramos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = t + \frac{\text{sen}^2(x(t))}{6}, \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (2.45)$$

Resolver este problema es equivalente al de encontrar una solución de la ecuación  $F(x) = 0$ , donde consideramos el espacio  $X = \{x \in C^{(1)}([0, 1]) \mid x(0) = 0\}$  con la norma (2.38) y  $F : X \rightarrow C([0, 1])$  el operador definido por

$$F(x(t)) = x'(t) - t - \frac{\text{sen}^2(x(t))}{6}, \quad x \in \Omega.$$

Consideramos la norma del máximo en el espacio  $C([0, 1])$ . Si tomamos la aproximación inicial  $x_0(t) = 0$ , se sigue a partir de la expresión de la primera derivada Fréchet del operador  $F$  (2.40) que

$$[F'(x_0)y](t) = y'(t) - \frac{\text{sen}(2x(t))}{6}y(t), \quad t \in [0, 1], \quad y \in X$$

y

$$\Gamma_0(\Theta(t)) = \int_0^t \Theta(s)ds.$$

Entonces,

$$\|\Gamma_0\| \leq \lambda + 1 = \beta,$$

y

$$\|\Gamma_0 F(x_0)\| = \left\| \int_0^t F(x_0)(s)ds \right\| = \left\| \frac{-t^2}{2} \right\| \leq \lambda + \frac{1}{2} = \eta.$$

Además, calculando la segunda derivada Fréchet del operador  $F$ , se sigue que

$$[F''(x)(y, z)](t) = \frac{-1}{3} \cos(2x(t))y(t)z(t), \quad t \in [0, 1], \quad y, z \in X$$

luego

$$\|F''(x)\| \leq \frac{1}{3} = M,$$

y por el teorema del valor medio

$$\|F''(u) - F''(v)\| \leq \frac{2}{3}|u - v|,$$

entonces,  $K = \frac{2}{3}$ . Así, tenemos que

$$p(t) = \frac{1}{9}t^3 + \frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{\lambda + 1}t + \frac{2\lambda - 1}{2\lambda + 2}.$$

Usando el programa *Mathematica* 5.0 y realizando los cálculos con seis cifras significativas obtenemos que, este polinomio tiene dos raíces reales positivas que coinciden prácticamente con  $s = 0.57676$  y  $s^* = 1.94163$  para  $\lambda$  suficientemente pequeño. Por tanto, a partir del teorema 2.4.1 podemos asegurar que el problema de valor inicial (2.45) tiene solución  $x^*$  definida en  $[0, 1]$  de tal manera que

$$|x^* - x_0(t)| = |x^*| \leq 0.57676, \quad t \in [0, a].$$

Además, la solución es única en la región

$$|u - x_0(t)| = |u| \leq 1.94163.$$

Obsérvese que tanto el dominio de existencia como el dominio de unicidad de solución  $x^*$  para el problema (2.45) es el mismo para todos los procesos iterativos de la familia (2.10).

Por otra parte, aplicando el teorema 2.4.2 también se puede garantizar la convergencia de los procesos iterativos más conocidos de la familia (2.10), como el método de Chebyshev (1.4), los C-métodos (1.5), Super-Halley (1.6), Halley (1.7), Ostrowski (1.8), exponencial (1.10) y el logarítmico (1.11). Todos estos procesos iterativos convergen a la solución  $x^*$  del problema (2.45), comenzando en  $x_0(t) = 0$ . Sin embargo, a diferencia del análisis anterior, cuando se emplea la técnica de relaciones de recurrencia los dominios de existencia y unicidad de solución dependen del proceso iterativo que apliquemos al resolver la ecuación. Así por ejemplo, para el problema (2.45) tenemos para cada uno de los procesos iterativos citados el dominio de existencia de solución:

$$|x^* - x_0(t)| \leq R, \quad t \in [0, 1],$$

y el de unicidad de solución

$$|u - x_0(t)| < \frac{2}{M\beta} - R, \quad u \in \Omega,$$

siendo  $R$  y  $\frac{2}{M\beta} - R$  los valores mostrados en la tabla 2.2.

	Chebyshev	C-método ( $C = \frac{1}{2}$ )	Super-Halley	Halley
$R$	0.571109	0.591039	0.595142	0.581862
$\frac{2}{M\beta} - R$	5.42889	5.40896	5.40486	5.4181

	Ostrowski	Exponencial	Logarítmico
$R$	0.584136	0.577931	0.586227
$\frac{2}{M\beta} - R$	5.41586	5.42207	5.41377

**Tabla 2.2.** Radios de existencia y unicidad de solución para el problema de valor inicial (2.45)

En vista de los resultados recogidos en la tabla 2.2, observamos que al utilizar la técnica de relaciones de recurrencia mejoramos, para todos los procesos iterativos considerados, el dominio de unicidad de solución de (2.45) obtenido con la técnica de sucesiones mayorizantes. Obsérvese también que los dominios de existencia de solución obtenidos mediante estas dos técnicas son similares.



## Condiciones de tipo Kantorovich para operadores con derivada segunda acotada

### 3.1. Introducción

Al igual que en el capítulo 2, consideramos el problema de resolver la ecuación

$$F(x) = 0 \quad (3.1)$$

mediante procesos iterativos, siendo  $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$ ,  $\Omega$  un subconjunto abierto, convexo y no vacío de  $X$  y  $X$  e  $Y$  espacios de Banach.

Dado un proceso iterativo, es conocido que el análisis de la convergencia a una solución de la ecuación (3.1) puede tratarse desde tres perspectivas distintas, dependiendo de las condiciones que se exijan. Teniendo en cuenta esto, los resultados de convergencia pueden ser locales, semilocales y globales, si respectivamente se imponen condiciones sobre la solución de (3.1), condiciones sobre la aproximación inicial  $x_0$  o bien condiciones sobre el operador  $F$ .

Inicialmente, véanse ([99], [100], [131], [132]), para probar un resultado de convergencia semilocal de un proceso iterativo con  $R$ -orden de convergencia al menos tres en espacios de Banach, se exigían las condiciones sobre el operador  $F$  en el punto de salida  $x_0$ :

(C1) Existe un punto  $x_0 \in \Omega$  donde el operador  $T_0 = [F'(x_0)]^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$  está definido y  $\|T_0\| \leq \beta$ ,

(C2)  $\|T_0 F(x_0)\| \leq \eta$ ,

y estas otras dos sobre los operadores  $F''$  y  $F'''$ :

$$\|F''(x)\| \leq M, \quad \|F'''(x)\| \leq N, \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.2)$$

Después, la condición  $\|F'''(x)\| \leq N$ ,  $x \in \Omega$ , fue reemplazada por otra condición más suave para el operador derivada segunda:

$$\|F''(x) - F''(y)\| \leq K\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \Omega, \quad K \geq 0,$$

es decir, una condición de Lipschitz continuidad para  $F''$ .

La mayor parte de los resultados de convergencia semilocal que aparecen en la literatura tienen como condición la necesidad de que el operador  $F''$  esté acotado en el dominio  $\Omega$ , donde la solución  $x^*$  existe, es decir:  $\|F''(x)\| \leq M$ ,  $x \in \Omega$ . Usualmente, para probar un resultado de convergencia semilocal de un proceso iterativo con  $R$ -orden al menos tres, se consideran las condiciones **(C1)** y **(C2)** sobre el operador  $F$ , más estas otras dos:

$$\begin{aligned} \text{(C3)} \quad & \|F''(x)\| \leq M, \quad \forall x \in \Omega, \\ \text{(C4)} \quad & \|F''(x) - F''(y)\| \leq K\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \Omega, \quad K \geq 0, \end{aligned}$$

conocidas como condiciones de Kantorovich ([101]). Notemos que el análisis de la convergencia semilocal de la familia de procesos iterativos (1.3) se ha estudiado en el capítulo 2 en estas condiciones para el operador  $F$ , mediante las técnicas de sucesiones mayorizantes y de las relaciones de recurrencia.

En este capítulo analizamos la convergencia semilocal de la familia (1.3) suavizando estas condiciones de Kantorovich. Así, por ejemplo, comenzaremos cambiando la condición **(C4)** por una condición más suave de tipo Hölder para el operador derivada segunda:

$$\|F''(x) - F''(y)\| \leq K\|x - y\|^p, \quad \forall x, y \in \Omega, \quad K \geq 0, \quad p \in (0, 1]. \quad (3.3)$$

Notemos que las condiciones **(C4)** y (3.3) significan que el operador  $F''$  es Lipschitz continuo en  $\Omega$  y Hölder continuo en  $\Omega$  respectivamente (véase [15]).

El hecho de suavizar las condiciones habituales a la hora de probar un resultado de convergencia semilocal de un proceso iterativo con  $R$ -orden de convergencia al menos tres en espacios de Banach viene justificado en situaciones, como por ejemplo al considerar ecuaciones integrales no lineales de tipo Fredholm y segunda clase (véase [40]):

$$x(s) = f(s) + \lambda \int_b^a \kappa(s, t)H(x(t)) dt, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.4)$$

con  $x(s) \in X$ ,  $H(x(s))$  una función no lineal,  $f$  una función continua dada de forma que  $f(s) > 0$ ,  $s \in [a, b]$  y el núcleo  $\kappa(s, t)$  una función continua y positiva en  $[a, b] \times [a, b]$ . Si consideramos, por ejemplo,  $H(x(t)) = x(t)^{2+1/n}$ , el operador  $F''$  asociado a esta ecuación integral no satisface la condición **(C4)**, pero sí la condición (3.3).

Posteriormente, observaremos que las condiciones **(C4)** y (3.3) pueden suavizarse de la siguiente manera ([55]):

$$\|F''(x) - F''(y)\| \leq \omega(\|x - y\|), \quad \forall x, y \in \Omega, \quad (3.5)$$

donde  $\omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  es continua, creciente y tal que  $\omega(0) = 0$ . Esta última condición generaliza las situaciones Lipschitz y Hölder consideradas anteriormente para  $F''$ , sin más que tomar  $\omega(z) = Kz$  o  $\omega(z) = Kz^p$  respectivamente.

Además, esta condición es fácilmente aplicable cuando la derivada segunda del operador  $F$  que define la ecuación (3.1) viene dada por una suma de

operadores Lipschitz y Hölder. Por ejemplo, si  $H(x(t)) = (bx(t)^{2+q} + ax(t)^m)$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $q \in (0, 1]$  y  $m \in \mathbb{N}$  en la ecuación integral no lineal (3.4).

Todas estas suavizaciones serán consideradas en el caso de que el operador  $F''$  esté acotado en  $\Omega$ , es decir, si  $\|F''(x)\| \leq M, \forall x \in \Omega$ .

En el análisis de la convergencia semilocal de la familia (1.3), que llevamos a cabo en este capítulo, consideramos esta situación en la que el operador  $F''$  esté acotado en  $\Omega$ , con las modificaciones de las condiciones de Kantorovich comentadas anteriormente. Veremos también que la condición de que el operador  $F''$  esté acotado en  $\Omega$  es suficiente para obtener un resultado de convergencia semilocal para (1.3).

### 3.2. Sucesiones mayorizantes para condiciones Hölder

Recordamos que en el capítulo 2 hemos probado un resultado de convergencia semilocal para la familia de procesos iterativos (1.3), considerando condiciones de Kantorovich, donde se exige una condición de Lipschitz **(C4)** para  $F''$ . Ese tipo de condiciones permite habitualmente la utilización de sucesiones mayorizantes. Sin embargo, cuando se pretende suavizar las condiciones de Kantorovich, ésta técnica se complica en exceso y hay que recurrir a otro tipo de procedimientos, como por ejemplo la técnica basada en la construcción de relaciones de recurrencia. Como veremos en esta sección, algunas suavizaciones aún permiten la utilización de sucesiones mayorizantes. En este apartado presentamos un estudio de la convergencia de la familia de procesos iterativos (1.3) mediante sucesiones mayorizantes bajo condiciones de Kantorovich, donde modificamos **(C4)**.

Bajo las condiciones de tipo Kantorovich **(C1)**, **(C2)**, **(C3)** y (3.3) es posible construir una función mayorizante de la forma:

$$q(t) = \frac{K}{(1+p)(2+p)}t^{2+p} + \frac{M}{2}t^2 - \frac{1}{\beta}t + \frac{\eta}{\beta}, \quad \text{con } K, M, \beta, \eta > 0. \quad (3.6)$$

Sin embargo, como veremos, en este caso no suele ser sencillo acotar el  $R$ -orden de convergencia del proceso iterativo considerado bajo las nuevas condiciones para el operador  $F''$ . Por ello, usaremos la técnica basada en las relaciones de recurrencia, y a partir de ellas, demostraremos la convergencia semilocal de (1.3) y acotaremos el  $R$ -orden de convergencia con relativa comodidad.

Observemos que si analizamos las derivadas de la función dada en (3.6), vemos que  $q'(t)$  es creciente si  $t \geq 0$  y, como  $q'(0) < 0$  y  $q'(t) > 0$  para  $t$  suficientemente grande, la ecuación  $q'(t) = 0$  tiene una única solución positiva que denotamos por  $\hat{t}$ . Por tanto,  $\hat{t}$  es un mínimo de  $q(t)$ . Entonces, una condición necesaria y suficiente para que  $q(t)$  tenga dos raíces positivas  $s$  y  $s^*$  es que  $q(\hat{t}) \leq 0$ . Notemos que si  $q(\hat{t}) = 0$  se sigue que  $s = s^* = \hat{t}$ .

Supongamos que  $q(\hat{t}) \leq 0$ . En este caso, la función real  $q$  dada en (3.6) es decreciente y convexa en el intervalo  $[0, \hat{t}]$ . Además, la sucesión  $\{t_n\}$  obtenida

al aplicar la familia (1.3) a la ecuación  $q(t) = 0$  viene dada en (2.2), algoritmo que recordamos a continuación:

$$\begin{cases} t_{n+1} = Q(t_n) = t_n - h(L_q(t_n)) \frac{q(t_n)}{q'(t_n)}, & \text{donde} \\ h(L_q(t_n)) = 1 + \frac{1}{2} L_q(t_n) + \sum_{k \geq 2} A_k L_q(t_n)^k & \{A_k\}_{k \geq 2} \subset \mathbb{R}^+, \end{cases}$$

con  $\{A_k\}_{k \geq 0}$  sucesión decreciente y  $|L_q(t)| < r$ , siendo  $r$  el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{k \geq 0} A_k t^k, \quad \text{donde } A_0 = 1, A_1 = \frac{1}{2} \quad (3.7)$$

(para poder asegurar así la buena definición de  $h$  en el intervalo  $[0, \hat{t}]$ ).

Suponemos entonces que  $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$  es un operador tres veces diferenciable Fréchet en un abierto, convexo y no vacío  $\Omega \subseteq X$  satisfaciendo las condiciones **(C1)**–**(C3)** y

**(M4)**  $\|F'''(x) - F'''(y)\| \leq K \|x - y\|^p$ ,  $\forall x, y \in \Omega$ ,  $K \geq 0$ ,  $p \in [0, 1]$ ,

**(M5)** la ecuación  $q(t) = 0$ , con  $q(t)$  dada en (3.6), tiene dos raíces positivas  $s$  y  $s^*$  de tal forma que  $s \leq s^*$ .

**(M6)** Si además  $p \in (0, 1)$ , entonces  $\|F'''(x)\| \leq q'''(t)$  cuando  $\|x - x_0\| \leq t - t_0 \leq s - t_0$ .

**Teorema 3.2.1** *En las condiciones anteriores, **(C1)**–**(C3)** y **(M4)**–**(M6)**, si  $B(x_0, \hat{t}) \subset \Omega$ , entonces la sucesión dada en (1.3) está bien definida y converge a una solución  $x^*$  de la ecuación (3.1), siendo  $x^*$  la única solución de (3.1) en  $\overline{B(x_0, s)}$ . Además,*

$$\|x^* - x_n\| \leq s - t_n, \quad n \geq 0.$$

En primer lugar, damos las condiciones necesarias para que la sucesión escalar  $\{t_n\}$  dada en (2.2) sea creciente y converja a  $s$  en el intervalo  $[0, \hat{t}]$  con  $q(t)$  definida en (3.6). Además, en estas condiciones, la sucesión  $\{t_n\}$  mayoriza a la sucesión  $\{x_n\}$  dada en (1.3).

**Lema 3.2.2** *Sea  $q$  la función real definida en (3.6) y  $s$  la única solución simple de  $q(t) = 0$  en  $[0, \hat{t}]$ . Entonces, la sucesión dada por (2.2) es creciente y converge a  $s$  de forma creciente.*

*Demostración.* La demostración es inmediata a partir de los resultados vistos en el capítulo 2; en particular, la demostración del teorema 2.2.1.

**Lema 3.2.3** *En las condiciones del teorema 3.2.1, la sucesión  $\{t_n\}$  dada por (2.2) con  $t_0 = 0$  y  $q$  la función real definida en (3.6) es mayorizante de la sucesión  $\{x_n\}$  dada en (1.3). Es decir,  $\|x_{n+1} - x_n\| \leq t_{n+1} - t_n$ ,  $n \geq 0$ .*

*Demostración.* Para cada  $n \geq 0$ , demostramos lo siguiente:

- [I<sub>n</sub>] Existe  $\Gamma_n = F'(x_n)^{-1}$  y  $\|\Gamma_n\| \leq \frac{-1}{q'(t_n)}$ ,
- [II<sub>n</sub>]  $\|F''(x_n)\| \leq q''(t_n)$ ,
- [III<sub>n</sub>]  $\|\Gamma_n F(x_n)\| \leq \frac{-q(t_n)}{q'(t_n)}$ ,
- [IV<sub>n</sub>]  $\|x_{n+1} - x_n\| \leq t_{n+1} - t_n$ ,  $n \geq 0$ .

Lo demostramos por inducción sobre  $n$ . Para  $n = 0$ , [I<sub>0</sub>]-[IV<sub>0</sub>] se siguen a partir de las condiciones (C1)-(C3) y (M4)-(M6). Supongamos que son ciertas [I<sub>n</sub>]-[IV<sub>n</sub>] y probamos [I<sub>n+1</sub>]-[IV<sub>n+1</sub>].

En primer lugar, veamos que  $x_{n+1}$  está bien definido. En efecto, como

$$\|L_F(x_n)\| \leq \|\Gamma_n\| \|F''(x_n)\| \|\Gamma_n F(x_n)\| \leq \frac{-1}{q'(t_n)} q''(t_n) \frac{-q(t_n)}{q'(t_n)} = L_q(t_n) < r,$$

se sigue que  $L_F(x_n)$  está bien definido. Además, tanto  $x_n$  como  $\Gamma_n F(x_n)$  están en  $\Omega$  y  $\tilde{H}(L_F(x_n))$  está bien definido, donde  $\tilde{H}(L_F(x_n)) = I + \sum_{k \geq 2} 2A_k L_F(x_n)^{k-1}$ . Luego se sigue que

$$x_{n+1} = x_n - \left( I + \frac{1}{2} L_F(x_n) \tilde{H}(L_F(x_n)) \right) \Gamma_n F(x_n) \in \Omega.$$

Por tanto,  $x_{n+1}$  está bien definido. Además,  $x_{n+1} \in B(x_0, s) \subset \Omega$  por cumplirse [IV<sub>k</sub>] con  $k = 0, 1, \dots, n$ :

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leq t_{n+1} - t_0 \leq s - t_0.$$

Veamos [I<sub>n+1</sub>]-[IV<sub>n+1</sub>]. En primer lugar, probamos que existe  $\Gamma_{n+1}$ . Por una parte, se tiene que

$$\int_{x_0}^{x_{n+1}} F''(x) dx = \int_{x_0}^{x_{n+1}} (F''(x) - F''(x_0)) dx + \int_{x_0}^{x_{n+1}} F''(x_0) dx$$

Ahora bien, puesto que  $\Gamma_0$  existe, entonces, sin más que parametrizar la integral y teniendo en cuenta que

$$\|x_0 + \tau(x_{n+1} - x_0) - x_0\| \leq \tau \|x_{n+1} - x_0\| \leq \tau(t_{n+1} - t_0) = t_0 + \tau(t_{n+1} - t_0) - t_0,$$

se sigue

$$\begin{aligned} \|I - \Gamma_0 F'(x_{n+1})\| &\leq \|\Gamma_0\| \int_0^1 \|F''(x_0 + \tau(x_{n+1} - x_0)) - F''(x_0)\| \|x_{n+1} - x_0\| d\tau \\ &\quad + \|\Gamma_0\| \int_0^1 \|F''(x_0)\| \|x_{n+1} - x_0\| d\tau \\ &\leq \beta K \|x_{n+1} - x_0\|^{p+1} \int_0^1 \tau^p d\tau + \beta M \|x_{n+1} - x_0\|. \end{aligned}$$

Luego  $\|I - \Gamma_0 F'(x_{n+1})\| \leq \beta q'(t_{n+1}) + 1 < 1$ , puesto que  $q'(t_{n+1}) < 0$  por hipótesis. Entonces, por el lema de Banach, existe  $(\Gamma_0 F'(x_{n+1}))^{-1}$  y

$$\|(\Gamma_0 F'(x_{n+1}))^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|I - \Gamma_0 F'(x_{n+1})\|} \leq \frac{q'(t_0)}{q'(t_{n+1})}.$$

Por tanto, existe  $\Gamma_{n+1} = (\Gamma_0 F'(x_{n+1}))^{-1} \Gamma_0$  y se cumple  $[\text{I}_{n+1}]$ .

Para ver  $[\text{II}_{n+1}]$ , basta tener en cuenta la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned} \|F''(x_{n+1})\| &\leq \|F''(x_{n+1}) - F''(x_0)\| + \|F''(x_0)\| \leq K\|x_{n+1} - x_0\|^p + M \\ &\leq Kt_{n+1}^p + M = q''(t_{n+1}). \end{aligned}$$

Para comprobar  $[\text{III}_{n+1}]$ , es decir,  $\|\Gamma_{n+1} F(x_{n+1})\| \leq \frac{-q(t_{n+1})}{q'(t_{n+1})}$ , nos apoyamos en las siguientes descomposiciones de  $F$  y de  $q$ , similares a las dadas en los lemas técnicos 2.2.4 y 2.2.5 del capítulo 2, pero con otro resto integral:

$$\begin{aligned} F(x_{n+1}) &= \frac{1}{2} F''(x_n) \Gamma_n F(x_n) \left( \sum_{k \geq 2} 2(A_{k-1} - A_k) L_F(x_n)^{k-1} \right) \Gamma_n F(x_n) \\ &\quad + \frac{1}{8} F''(x_n) \left( L_F(x_n) \tilde{H}(L_F(x_n)) \Gamma_n F(x_n) \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{x_n}^{x_{n+1}} F'''(x) (x_{n+1} - x)^2 dx, \end{aligned} \tag{3.8}$$

y

$$\begin{aligned} q(t_{n+1}) &= \frac{1}{2} q(t_n) \sum_{k \geq 2} 2(A_{k-1} - A_k) L_q(t_n)^k + \frac{1}{8} q(t_n) L_q(t_n)^3 \tilde{h}(L_q(t_n))^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 q'''(t_n + \tau(t_{n+1} - t_n)) (1 - \tau)^2 (t_{n+1} - t_n)^3 d\tau, \end{aligned}$$

con  $\tilde{h}(L_q(t_n)) = 1 + \sum_{k \geq 2} 2A_k L_q(t_n)^{k-1}$ .

Haciendo el cambio de variable  $x = x_n + \tau(x_{n+1} - x_n)$  en la descomposición (3.8) y tomando normas, obtenemos

$$\begin{aligned} \|F(x_{n+1})\| &\leq \frac{1}{2} \|F''(x_n)\| \|\Gamma_n F(x_n)\|^2 \left( \sum_{k \geq 2} 2|A_{k-1} - A_k| \|L_F(x_n)\|^{k-1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{8} \|F''(x_n)\| \|L_F(x_n)\|^2 \|\tilde{H}(L_F(x_n))\|^2 \|\Gamma_n F(x_n)\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \|F'''(x_n + \tau(x_{n+1} - x_n))\| (1 - \tau)^2 \|x_{n+1} - x_n\|^3 d\tau. \end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta que la sucesión de coeficientes  $\{A_k\}_{k \geq 2} \subset \mathbb{R}^+$  es decreciente, se tiene

$$\begin{aligned}
 \|F(x_{n+1})\| &\leq \frac{1}{2}q''(t_n) \left( \frac{-q(t_n)}{q'(t_n)} \right)^2 \left( \sum_{k \geq 2} 2(A_{k-1} - A_k)L_q(t_n)^{k-1} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{8}q''(t_n)L_q(t_n)^2 \tilde{h}(L_q(t_n))^2 \left( \frac{-q(t_n)}{q'(t_n)} \right)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \|F'''(x_n + \tau(x_{n+1} - x_n))\| (1 - \tau)^2 \|x_{n+1} - x_n\|^3 d\tau \\
 &\leq \frac{1}{2}q(t_n) \sum_{k \geq 2} 2(A_{k-1} - A_k)L_q(t_n)^k + \frac{1}{8}q(t_n)L_q(t_n)^3 \tilde{h}(L_q(t_n))^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 q'''(t_n + \tau(t_{n+1} - t_n)) (1 - \tau)^2 (t_{n+1} - t_n)^3 d\tau = q(t_{n+1}),
 \end{aligned}$$

y se sigue [III<sub>n+1</sub>]:

$$\|\Gamma_{n+1}F(x_{n+1})\| \leq \|\Gamma_{n+1}\| \|F(x_{n+1})\| \leq \frac{-q(t_{n+1})}{q'(t_{n+1})}$$

Por tanto,

$$\|L_F(x_{n+1})\| \leq \|\Gamma_{n+1}\| \|F''(x_{n+1})\| \|\Gamma_{n+1}F(x_{n+1})\| \leq L_q(t_{n+1}) < r$$

y  $L_F(x_{n+1})$  está bien definido. Además, tanto  $x_{n+1}$  como  $\Gamma_{n+1}F(x_{n+1})$  son elementos que están en  $\Omega$  y  $\tilde{H}(L_F(x_{n+1}))$  está bien definido, luego

$$x_{n+2} = x_{n+1} - \left( I + \frac{1}{2}L_F(x_{n+1})\tilde{H}(L_F(x_{n+1})) \right) \Gamma_{n+1}F(x_{n+1}) \in \Omega,$$

y

$$\begin{aligned}
 \|x_{n+2} - x_{n+1}\| &\leq \left\| I + \frac{1}{2}L_F(x_{n+1})\tilde{H}(L_F(x_{n+1})) \right\| \|\Gamma_{n+1}F(x_{n+1})\| \\
 &\leq \left( 1 + \frac{1}{2}L_q(t_{n+1})\tilde{h}(L_q(t_{n+1})) \right) \left( \frac{-q(t_{n+1})}{q'(t_{n+1})} \right) = t_{n+2} - t_{n+1}.
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\|x_{n+2} - x_0\| \leq \|x_{n+2} - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_0\| \leq t_{n+2} - t_0$$

y  $x_{n+2} \in B(x_0, s) \subset \Omega$ . ■

*Nota 3.1.* Obsérvese que la condición **(C3)** puede reemplazarse por una condición más suave:  $\|F''(x_0)\| \leq M$ , puesto que ésta es suficiente para probar el resultado de convergencia semilocal. Esta situación se corresponde con las analizadas posteriormente en el capítulo 4, donde estudiamos la convergencia semilocal para operadores con derivada segunda no acotada.

*Nota 3.2.* Notemos que si en la demostración del lema 3.2.3, tomásemos las descomposiciones de  $F$  y de  $p$ , dadas en los lemas 2.2.4 y 2.2.5 del capítulo 2, donde el operador  $F''$  satisface una condición de Lipschitz **(C4)**, los restos integrales que aparecen allí son:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} (F''(x) - F''(x_n))(x_{n+1} - x) dx$$

para el operador  $F$  en un punto  $x_{n+1}$  y,

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (q''(t) - q''(t_n))(t_{n+1} - t) dt$$

para la función  $q$  en un punto  $t_{n+1}$ . Ahora bien, la desigualdad  $\|F(x_{n+1})\| \leq q(t_{n+1})$  es cierta si y sólo si

$$K\|x_{n+1} - x_n\|^{p+2} \int_0^1 \tau^p(1 - \tau) d\tau \leq K \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t^p - t_n^p)(t_{n+1} - t) dt,$$

o bien, si y sólo si

$$(t_{n+1} - t_n)^{p+2} \int_0^1 \tau^p(1 - \tau) d\tau \leq \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t^p - t_n^p)(t_{n+1} - t) dt.$$

Haciendo el cambio de variable  $u = \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n}$ , obtenemos

$$(t_{n+1} - t_n)^{p+2} \int_0^1 u^p(1 - u) du = \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_n)^p(t_{n+1} - t) dt.$$

Por tanto,  $\|F(x_{n+1})\| \leq q(t_{n+1})$  si y sólo si

$$(t - t_n)^p \leq t^p - t_n^p, \quad t \in [t_n, t_{n+1}]. \quad (3.9)$$

Considerando una función auxiliar  $g(v) = \frac{(1 - v)^p}{1 - v^p}$  con  $v = \frac{t_n}{t}$ , se sigue que  $g'(v) = \frac{p(1 - v)^{p-1}(v^{p-1} - 1)}{(1 - v^p)^2} > 0$  para  $p \in [0, 1)$  y la desigualdad (3.9) no se cumple.

Este hecho hace que optemos por otra descomposición para el operador  $F$  en un punto  $x_{n+1}$ , cuando el operador  $F''$  satisface una condición de Hölder (3.3). En este caso, el resto integral que tomamos en la demostración del lema 3.2.3, involucra al operador  $F'''$ , de ahí que debamos imponer la condición adicional **(M6)** para el operador  $F'''$ . De esta manera, obtenemos un resultado de convergencia para la familia de procesos iterativos (1.3).

*Demostración del teorema 3.2.1.* A partir del lema 3.2.3, de los resultados conocidos sobre sucesiones mayorizantes y del hecho de que la sucesión escalar

$\{t_n\}$  sea convergente, se sigue que la sucesión  $\{x_n\}$  dada en (1.3) converge a  $x^*$ . Tomando límites cuando  $n \rightarrow \infty$  en (1.3), obtenemos que  $F(x^*) = 0$ . Además, si  $m \geq 0$ ,  $\|x_{n+m} - x_n\| \leq t_{n+m} - t_n$ ,  $n \geq 0$ , y haciendo tender  $m$  a infinito, obtenemos  $\|x^* - x_n\| \leq s - t_n$ ,  $n \geq 0$ . ■

*Nota 3.3.* Al igual que en capítulo 2 usamos la técnica dada en la Nota 2.5 para refinar el dominio de unicidad de solución. Veamos entonces cómo, mediante la técnica empleada por Argyros y Chen, mejoramos el radio de unicidad dado en el teorema 3.2.1. Supongamos que existe otra solución  $y^*$  de  $F(x) = 0$  en  $B(x_0, s^*) \cap \Omega$ . Entonces,

$$0 = F(y^*) - F(x^*) = \int_0^1 F'(x^* + t(y^* - x^*))(y^* - x^*) dt. \quad (3.10)$$

Para obtener la unicidad, es suficiente con ver que el operador

$$\int_0^1 F'(x^* + t(y^* - x^*)) dt$$

es invertible. Probaremos equivalentemente la existencia del operador  $A^{-1}$ , donde  $A = \int_0^1 \Gamma_0 F'(x^* + t(y^* - x^*)) dt$ . Por el lema de Banach ([101]), se tiene que este operador es invertible si y sólo si  $\|I - A\| < 1$ . En efecto,

$$\|I - A\| \leq \|\Gamma_0\| \int_0^1 \|F'(x^* + t(y^* - x^*)) - F'(x_0)\| dt,$$

y a partir de la cota dada para  $\|F'(x^* + t(y^* - x^*)) - F'(x_0)\|$  en (2.8), se sigue

$$\begin{aligned} \|I - A\| &\leq \frac{\beta K}{p+1} \int_0^1 \|x^* + t(y^* - x^*) - x_0\|^{p+1} dt \\ &\quad + \beta M \int_0^1 (\|x^* - x_0\|(1-t) + t\|y^* - x_0\|) dt \\ &< \frac{\beta K}{p+1} \int_0^1 ((1-t)s + ts^*)^{p+1} dt + \beta M \int_0^1 ((1-t)s + ts^*) dt \\ &= \frac{\beta K}{(p+2)(p+1)^2} \frac{(s^*)^{p+2} - s^{p+2}}{s^* - s} + \frac{\beta M}{2}(s + s^*). \end{aligned}$$

Definimos ahora la función real

$$T(r) = \frac{K}{(p+2)(p+1)^2}(r^{p+2} - s^{p+2}) + \frac{M}{2}(r^2 - s^2) - \frac{1}{\beta}(r - s),$$

y observamos que  $T(s^*) = \frac{p}{p+1}(s^* - s) \left( \frac{M}{2}(s^* + s) - \frac{1}{\beta} \right)$ . En efecto, puesto que  $s^*$  y  $s$  son las raíces positivas de la función real  $q$  definida en (3.6), se sigue que

$$\frac{K}{(p+2)(p+1)^2}((s^*)^{p+2} - s^{p+2}) = \frac{1}{p+1} \left( -\frac{M}{2}((s^*)^2 - s^2) + \frac{1}{\beta}(s^* - s) \right).$$

Por otra parte, podemos escribir la función real definida en (3.6) como  $q(t) = (t-s)(t-s^*)g(t)$ , con  $g(t)$  una función de tal manera que  $g(s) \neq 0 \neq g(s^*)$ . Es fácil ver, igualando los coeficientes de grado dos y grado uno, que

$$\frac{-1}{\beta} = \frac{-Kg_0}{(p+2)(p+1)}(s^* + s)$$

y

$$\frac{M}{2} = \frac{Kg_0}{(p+2)(p+1)},$$

donde hemos denotado por  $g_0$  el término independiente de  $g(t)$ . Por tanto,  $\frac{M}{2}(s^* + s) = \frac{1}{\beta}$  y suponiendo que  $s^* \neq s$ , obtenemos que  $T(s^*) = 0$  y  $\|I - A\| < 1$ . Luego, el operador  $A$  es invertible y, como consecuencia, la solución es única en  $B(x_0, s^*) \cap \Omega$ . ■

De acuerdo con las condiciones impuestas en el teorema 3.2.1, la función real  $q(t)$ , dada en (3.6), tiene dos raíces positivas  $s$  y  $s^*$  de tal forma que  $s \leq s^*$ . Por tanto, podemos escribir

$$q(t) = (t-s)(t-s^*)g(t), \quad (3.11)$$

con  $g(t)$  una función de tal manera que  $g(s) \neq 0 \neq g(s^*)$ .

Denotando por

$$\begin{aligned} A(t) &= (-2(s-t) - 4(s^* - t) + (s^* - t)^3 K(t))g(t)^3 + 2(s^* - t)^3(s-t)g'(t)^3 \\ &\quad - 2(s^* - t)^2(2(s^* - t) + 3(s-t))g(t)g'(t)^2 \\ &\quad + (s^* - t)g(t)^2(6(s^* + s - 2t)g'(t) + (s^* - t)^2g''(t)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(t) &= (-2(s^* - t) - 4(s-t) + (s-t)^3 K(t))g(t)^3 + 2(s-t)^3(s^* - t)g'(t)^3 \\ &\quad - 2(s-t)^2(2(s-t) + 3(s^* - t))g(t)g'(t)^2 \\ &\quad + (s-t)g(t)^2(6(s + s^* - 2t)g'(t) + (s-t)^2g''(t)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(t) &= (-6(s-t)^2 K(t))g(t)^3 - 10(s-t)^2g(t)g'(t)^2 + 2(s-t)^3g'(t)^3 \\ &\quad + (s-t)g(t)^2(12g'(t) + (s-t)g''(t)), \end{aligned}$$

$$D(t) = 2(-2g(t) + (s-t)g'(t))^3,$$

$$K(t) = \frac{q''(t_n)^2}{q'(t_n)^2} \sum_{k \geq 2} 2A_k L_q(t_n)^{k-2},$$

damos el siguiente resultado que nos proporciona estimaciones del error para la familia de métodos iterativos (1.3), cuando utilizamos funciones del tipo (3.6).

**Teorema 3.2.4** *En las condiciones del teorema 3.2.1 se tienen las siguientes cotas de error para la familia de métodos iterativos (1.3), aplicada a funciones del tipo (3.6):*

(i) Si  $s < s^*$ , entonces

$$\frac{\Theta^{3^n}}{\sqrt{m_1} - \Theta^{3^n}}(s^* - s) \leq s - t_n \leq \frac{\Delta^{3^n}}{\sqrt{M_1} - \Delta^{3^n}}(s^* - s),$$

donde  $\Theta = \sqrt{m_1} \frac{s}{s^*}$ ,  $\Delta = \sqrt{M_1} \frac{s}{s^*}$ ,  $m_1 = \min\{L_1(t) | t \in [0, s]\}$ ,  $M_1 = \max\{L_1(t) | t \in [0, s]\}$  y  $L_1(t) = \frac{A(t)}{B(t)}$ .

(ii) Si  $s = s^*$ , entonces

$$m_2^n s \leq s - t_n \leq M_2^n s,$$

donde  $m_2 = \min\{L_2(t) | t \in [0, s]\}$ ,  $M_2 = \max\{L_2(t) | t \in [0, s]\}$  y  $L_2(t) = \frac{C(t)}{D(t)}$ .

*Demostración.* Teniendo en cuenta (3.11), en el caso en que  $s < s^*$ , tenemos que

$$\begin{aligned} q'(t) &= -((s-t) + (s^* - t))g(t) + (s-t)(s^* - t)g'(t) \\ q''(t) &= 2g(t) - 2((s-t) + (s^* - t))g'(t) + (s-t)(s^* - t)g''(t). \end{aligned}$$

Entonces, si denotamos por  $a_n = s - t_n$  y  $b_n = s^* - t_n$ , para todo  $n \geq 0$ , se sigue

$$\begin{aligned} q(t_n) &= a_n b_n g(t_n), & q'(t_n) &= -(a_n + b_n)g(t_n) + a_n b_n g'(t_n) \\ q''(t_n) &= 2g(t_n) - 2(a_n + b_n)g'(t_n) + a_n b_n g''(t_n), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= s - t_{n+1} = s - t_n + h(L_q(t_n)) \frac{q(t_n)}{q'(t_n)} \\ &= \frac{1}{2q'(t_n)^3} \left( 2a_n q'(t_n)^3 + 2q(t_n)q'(t_n)^2 + q(t_n)^2 q''(t_n) \right. \\ &\quad \left. + \frac{q(t_n)^3 q''(t_n)^2}{q'(t_n)^2} \sum_{k \geq 2} 2A_k L_q(t_n)^{k-2} \right). \end{aligned}$$

Simplificando en esta expresión, llegamos a que

$$a_{n+1} = \frac{a_n^3}{2q'(t_n)^3} A(t_n).$$

Análogamente,

$$b_{n+1} = \frac{b_n^3}{2q'(t_n)^3} B(t_n).$$

Entonces,

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_n^3 A(t_n)}{b_n^3 B(t_n)},$$

y se sigue que

$$m_1 \frac{a_n^3}{b_n^3} \leq \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq M_1 \frac{a_n^3}{b_n^3},$$

por tanto

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} &\leq M_1 \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^3 \leq \dots \leq M_1^{\frac{3^{n+1}-1}{2}} \left(\frac{a_0}{b_0}\right)^{3^{n+1}} = \frac{\Delta^{3^{n+1}}}{\sqrt{M_1}}, \\ \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} &\geq m_1 \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^3 \leq \dots \leq m_1^{\frac{3^{n+1}-1}{2}} \left(\frac{a_0}{b_0}\right)^{3^{n+1}} = \frac{\Theta^{3^{n+1}}}{\sqrt{m_1}}. \end{aligned}$$

Ahora, como  $b_{n+1} = s^* - s + a_{n+1}$ , obtenemos

$$\frac{\Theta^{3^{n+1}}}{\sqrt{m_1} - \Theta^{3^{n+1}}}(s^* - s) \leq s - t_{n+1} \leq \frac{\Delta^{3^{n+1}}}{\sqrt{M_1} - \Delta^{3^{n+1}}}(s^* - s).$$

Si  $s^* = s$ , entonces  $a_n = b_n$  y

$$a_{n+1} = \frac{a_n^4 C(t_n)}{a_n^3 D(t_n)}.$$

Por tanto,

$$m_2^{n+1} s \leq s - t_{n+1} \leq M_2^{n+1} s. \quad \blacksquare$$

Notemos que el teorema 3.2.4 es sin duda teórico, pero dependiendo del valor que tome  $p \in (0, 1]$  podrá tener cierta aplicación práctica. Además, notemos que para que las estimaciones anteriores sean suficientemente buenas, debe cumplirse que  $\Delta < 1$ ,  $\Theta < 1$ ,  $m_2 < 1$  y  $M_2 < 1$ . Por tanto, podremos asegurar en estas condiciones  $R$ -orden al menos tres si  $s^* \neq s$  y  $R$ -orden al menos uno si  $s^* = s$ .

*Ejemplo 3.4.* A continuación, analizamos la ecuación integral no lineal de tipo Fredholm y segunda clase ([93]) dada en (3.4) con  $H(x(t)) = x(t)^{2+1/n}$ :

$$x(s) = f(s) + \lambda \int_b^a \kappa(s, t) x(t)^{2+1/n} dt, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.12)$$

donde  $x(s) \in \Omega \subseteq X = C([a, b])$ ,  $f \in X$  una función continua dada, de tal forma que  $f(s) > 0$ ,  $s \in [a, b]$ , el núcleo  $\kappa(s, t)$  es una función continua y positiva en  $[a, b] \times [a, b]$  y  $\lambda$  es un número real. En este caso, no se satisfacen las condiciones habituales, **(C1)**–**(C4)**, empleadas para probar un resultado de convergencia semilocal de un proceso iterativo con  $R$ -orden al menos tres en espacios de Banach.

Por ejemplo, cuando el núcleo  $\kappa(s, t)$  es el núcleo de Green (2.29), que recordamos a continuación

$$\kappa(s, t) = \begin{cases} \frac{(t-a)(s-b)}{b-a}, & a \leq t \leq s, \\ \frac{(t-b)(s-a)}{b-a}, & s \leq t \leq b, \end{cases}$$

la correspondiente ecuación integral es equivalente al problema de valor en la frontera

$$\begin{cases} \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \lambda x(t)^{2+1/n}, \\ x(a) = f(a); x(b) = f(b). \end{cases}$$

Resolvemos la ecuación  $F(x) = 0$  en lugar de (3.12), donde el operador  $F$  viene dado como sigue:

$$F : \Omega \subseteq C([a, b]) \rightarrow C([a, b]), \quad \Omega = \{x \in C([a, b]) \mid x(s) \geq 0, s \in [a, b]\},$$

y

$$F(x)(s) = x(s) - f(s) - \lambda \int_b^a \kappa(s, t)x(t)^{2+1/n} dt.$$

Consideramos la norma del máximo

$$\|x\|_\infty := \max_{t \in [a, b]} |x(t)|, \quad x \in \Omega.$$

La primera y segunda derivadas de  $F$  están definidas por:

$$F'(x)y(s) = y(s) - \lambda(2 + 1/n) \int_b^a \kappa(s, t)x(t)^{1+1/n}y(t) dt, \quad y \in \Omega$$

y

$$F''(x)(y, z)(s) = -\lambda(2 + 1/n)(1 + 1/n) \int_b^a \kappa(s, t)x(t)^{1/n}y(t)z(t) dt, \quad y, z \in \Omega.$$

Si el operador  $F''$  satisface una condición de Lipschitz **(C4)**, entonces

$$\|F''(x_1) - F''(x_2)\| \leq K\|x_1 - x_2\|, \quad \forall x_1, x_2 \in \Omega,$$

para algún  $K > 0$ . Considerando, por ejemplo,  $[a, b] = [0, 1]$ ,  $\kappa(s, t) = 1$  y  $x_2(t) = 0$ ,

$$\|F''(x_1) - F''(x_2)\| = |\lambda|(2 + 1/n)(1 + 1/n) \int_0^1 |x_1(t)|^{1/n} dt.$$

En este caso, el hecho de que  $\|F''(x_1) - F''(x_2)\| \leq K\|x_1 - x_2\|$  sea cierto es equivalente a decir que se satisface la siguiente desigualdad:

$$|\lambda|(2+1/n)(1+1/n) \int_0^1 |x_1(t)|^{1/n} dt \leq K \max_{s \in [0,1]} \{x_1(s)\}, \quad (3.13)$$

para toda  $x_1 \in \Omega$ , para algún  $K > 0$ . Pero esto no es cierto, si consideramos por ejemplo las funciones:

$$x_j(t) = \frac{t}{j}, \quad j \geq 1, \quad t \in [0, 1].$$

Analizando (3.13) con estas funciones  $x_j(t)$ , se sigue:

$$|\lambda|(2+1/n) \frac{1}{j^{1/n}} \leq K \frac{1}{j} \quad \Leftrightarrow \quad j^{1-1/n} \leq \frac{K}{|\lambda|(2+1/n)}, \quad \forall j \geq 1.$$

Esta desigualdad no es cierta cuando  $j \rightarrow \infty$ . Por tanto, el operador  $F''$  no satisface una condición de Lipschitz **(C4)**, pero sí una condición de Hölder (3.3).

$$\begin{aligned} & \| (F''(x_1) - F''(x_2))(y, z) \| \\ &= |\lambda|(2+1/n)(1+1/n) \max_{s \in [a,b]} \left| \int_b^a \kappa(s, t) (x_1(t)^{1/n} - x_2(t)^{1/n}) y(t) z(t) dt \right| \\ &\leq |\lambda|(2+1/n)(1+1/n) \max_{s \in [a,b]} \left\{ \int_b^a \kappa(s, t) |x_1(t) - x_2(t)|^{1/n} |y(t)| |z(t)| dt \right\}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\|F''(x_1) - F''(x_2)\| \leq K |x_1(t) - x_2(t)|^{1/n},$$

donde  $K = |\lambda|(2+1/n)(1+1/n)A$  y  $A = \max_{s \in [a,b]} \int_b^a \kappa(s, t) dt$ .

Por otra parte, veamos que la condición de que el operador  $F'''$  esté acotado no se satisface. En efecto,  $F'''$  viene definida como:

$$F'''(x)(y, z, u)(s) = -\lambda(2+1/n)(1+1/n)(1/n) \int_b^a \kappa(s, t) x(t)^{1/n-1} y(t) z(t) u(t) dt,$$

para toda  $y, z, u \in \Omega$ . Por tanto,

$$\|F'''(x)\| \leq |\lambda|(2+1/n)(1+1/n)1/nA \|x\|^{1/n-1},$$

luego el operador  $F'''$  no está acotado (pensemos por ejemplo en funciones  $x(s) \in C([a, b])$  cercanas al cero).

Esta condición sobre el operador  $F'''$  es bastante restrictiva, pero al igual que hemos suavizado la condición de Lipschitz sobre el operador  $F''$  también podemos suavizar la condición para el operador  $F'''$ , mediante otra para el operador  $F''$ , como vamos a ver en las siguientes secciones 3.3 y 3.4.

### 3.3. Relaciones de recurrencia para condiciones Hölder

En esta sección vamos a estudiar la existencia y unicidad de solución de una ecuación no lineal (3.1), a partir de las condiciones de Kantorovich con condición de Hölder (3.3) para el operador derivada segunda  $F''$ . Este estudio es una suavización del anterior donde rebajamos la condición sobre el operador derivada tercera  $F'''$  por una condición sobre  $F''$ .

Consideramos la ecuación (3.1), donde  $F$  es un operador no lineal dos veces diferenciable Fréchet, definido en un dominio  $\Omega$  abierto convexo y no vacío de un espacio de Banach  $X$ , con valores en otro espacio de Banach  $Y$ . Seguimos la técnica de las relaciones de recurrencia para realizar el estudio de la convergencia semilocal de la familia de procesos iterativos (1.3) a una solución de (3.1).

A lo largo de esta sección utilizaremos por comodidad el siguiente algoritmo que define también la familia de procesos iterativos (1.3):

$$\begin{cases} y_n = x_n - \Gamma_n F(x_n), \\ x_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} L_F(x_n) \tilde{H}(L_F(x_n))(y_n - x_n), \\ \tilde{H}(L_F(x_n)) = I + \sum_{k \geq 2} 2A_k L_F(x_n)^{k-1}, \quad \{A_k\}_{k \geq 2} \subseteq \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Obsérvese que no exigimos que la sucesión de coeficientes  $\{A_k\}_{k \geq 0}$  sea decreciente, condición que debemos imponer en el estudio de la convergencia de la familia (1.3) cuando usamos la técnica de sucesiones mayorizantes.

#### 3.3.1. Construcción de las relaciones de recurrencia

Consideramos las condiciones de Kantorovich **(C1)**–**(C3)** y la condición

$$\mathbf{(H4)} \quad \|F''(x) - F''(y)\| \leq K \|x - y\|^p, \quad \forall x, y \in \Omega, \quad K > 0, \quad p \in [0, 1].$$

Usamos la siguiente notación:

$$a_0 = M\beta\eta, \quad b_0 = K\beta\eta^{1+p}, \quad \nu(t) = \sum_{k \geq 2} 2A_k x^{k-2}. \quad (3.14)$$

De las condiciones iniciales, deducimos:

$$\|L_F(x_0)\| \leq \|\Gamma_0\| \|F''(x_0)\| \|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq M\beta\eta = a_0,$$

$$K \|\Gamma_0\| \|\Gamma_0 F(x_0)\|^{1+p} \leq K\beta\eta^{1+p} = b_0.$$

Por otra parte, podemos hablar de la existencia de  $\tilde{H}(L_F(x_0))$  sí y sólo sí  $\|L_F(x_0)\| < r$ , por el teorema 1.3.1. Por lo tanto, exigiremos que  $a_0 < r$ , siendo  $r$  el radio de convergencia de la serie (3.7). A partir de aquí, si  $y_0 \in \Omega$ , obtenemos las siguientes cotas:

$$\begin{aligned} \|\tilde{H}(L_F(x_0))\| &= \left\| I + \sum_{k \geq 2} 2A_k L_F(x_0)^{k-1} \right\| \leq 1 + \sum_{k \geq 2} 2A_k a_0^{k-1} = 1 + a_0 \nu(a_0), \\ \|x_1 - y_0\| &= \left\| \frac{1}{2} L_F(x_0) \tilde{H}(L_F(x_0)) \Gamma_0 F(x_0) \right\| \leq \frac{1}{2} a_0 (1 + a_0 \nu(a_0)) \|y_0 - x_0\|, \\ \|x_1 - x_0\| &\leq \|x_1 - y_0\| + \|y_0 - x_0\| \leq \left( 1 + \frac{1}{2} a_0 (1 + a_0 \nu(a_0)) \right) \eta, \end{aligned}$$

Además,  $\|I - \tilde{H}(L_F(x_0))\| = \left\| \sum_{k \geq 2} 2A_k L_F(x_0)^{k-1} \right\| \leq \sum_{k \geq 2} 2A_k a_0^{k-1} = a_0 \nu(a_0)$ .

A continuación, intentamos generalizar estas cotas iniciales a cualquier paso del proceso iterativo. Para ello, definimos las siguientes sucesiones auxiliares reales

$$a_{n+1} = a_n f(a_n)^2 g(a_n, b_n), \quad b_{n+1} = b_n f(a_n)^{2+p} g(a_n, b_n)^{1+p}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.15)$$

donde

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{1 - th(t)}, \quad h(t) = \left( 1 + \frac{1}{2} t(1 + t\nu(t)) \right), \\ g(t, u) &= \frac{t^2}{2} \left[ 1 + (1 + t)\nu(t) + \frac{t}{4}(1 + t\nu(t))^2 \right] + \frac{u}{(1 + p)(2 + p)}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

A partir de estas funciones y sucesiones reales definidas probaremos mediante un proceso inductivo una serie de relaciones de recurrencia que permitirá obtener un resultado de convergencia para la familia de procesos iterativos (1.3).

**Lema 3.3.1** *Supongamos que  $y_0, y_n, x_n \in \Omega$ , para  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $a_0 < r$ , con  $r$  el radio de convergencia de la serie (3.7),  $a_0 h(a_0) < 1$  y las sucesiones auxiliares  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$ , dadas por (3.15), son decrecientes, entonces las siguientes relaciones de recurrencia se satisfacen:*

$$[I_n] \text{ Existe } \Gamma_n = F'(x_n)^{-1} \text{ y } \|\Gamma_n\| \leq f(a_{n-1}) \|\Gamma_{n-1}\|,$$

$$[II_n] \|\Gamma_n F(x_n)\| = \|y_n - x_n\| \leq f(a_{n-1}) g(a_{n-1}, b_{n-1}) \|\Gamma_{n-1} F(x_{n-1})\|,$$

$$[III_n] M \|\Gamma_n\| \|\Gamma_n F(x_n)\| \leq a_n \text{ y existe } \tilde{H}(L_F(x_n)),$$

$$[IV_n] K \|\Gamma_n\| \|\Gamma_n F(x_n)\|^{1+p} \leq b_n,$$

$$[V_n] \|x_{n+1} - y_n\| \leq \frac{1}{2} a_n (1 + a_n \nu(a_n)) \|\Gamma_n F(x_n)\|,$$

$$[VI_n] \|x_{n+1} - x_n\| \leq h(a_n) \|\Gamma_n F(x_n)\|,$$

$$[VII_n] \|x_{n+1} - x_0\| \leq h(a_0) \left( \sum_{k=0}^n f(a_0)^k g(a_0, b_0)^k \right) \eta.$$

*Demostración.* Comenzamos comprobando que las condiciones [I<sub>n</sub>]-[VII<sub>n</sub>] son ciertas para  $n = 1$  y después probaremos por inducción que se cumplen para todo  $n \in \mathbb{N}$ . En primer lugar, veamos que el operador inverso de  $F'(x_1)$  existe y está acotado. Puesto que

$$F'(x_1) - F'(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} F''(x) dx = \int_0^1 F''(x_0 + t(x_1 - x_0))(x_1 - x_0) dt,$$

tomando normas, se sigue

$$\|F'(x_1) - F'(x_0)\| \leq M \|x_1 - x_0\|.$$

Entonces,

$$\|I - \Gamma_0 F'(x_1)\| \leq \|\Gamma_0\| \|F'(x_0) - F'(x_1)\| \leq h(a_0) a_0 < 1,$$

y, por el Lema de Banach ([101]), existe  $\Gamma_1$  y se sigue [I<sub>1</sub>]:

$$\begin{aligned} \|\Gamma_1\| &= \|\Gamma_1 F'(x_0) \Gamma_0\| \leq \left\| (\Gamma_0 F'(x_1))^{-1} \right\| \|\Gamma_0\| \leq \frac{\|\Gamma_0\|}{1 - \|I - \Gamma_0 F'(x_1)\|} \\ &\leq \frac{\|\Gamma_0\|}{1 - h(a_0) a_0} = f(a_0) \|\Gamma_0\|. \end{aligned}$$

Ahora, probamos [II<sub>1</sub>]. Para ello, usamos la descomposición integral del operador  $F$  dada en (2.17), obtenida a partir de la fórmula de Taylor. Tomando normas, para  $n = 0$ , teniendo en cuenta (2.18) se sigue

$$\begin{aligned} &\|F(x_1)\| \\ &\leq \left( \frac{K\eta^{1+p}}{(1+p)(2+p)} + \frac{M\eta}{2} a_0 (1 + \nu(a_0) + a_0 \nu(a_0)) + \frac{M\eta}{8} a_0^2 (1 + a_0 \nu(a_0))^2 \right) \|\Gamma_0 F(x_0)\| \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \|\Gamma_1 F(x_1)\| &\leq f(a_0) \|\Gamma_0\| \|F(x_1)\| \\ &\leq f(a_0) \left( \frac{b_0}{(1+p)(2+p)} + \frac{a_0^2}{2} (1 + (1 + a_0) \nu(a_0)) + \frac{a_0^3}{8} (1 + a_0 \nu(a_0))^2 \right) \|\Gamma_0 F(x_0)\|, \end{aligned}$$

y por la definición de  $g$  obtenemos [II<sub>1</sub>]:

$$\|\Gamma_1 F(x_1)\| \leq f(a_0) g(a_0, b_0) \|\Gamma_0 F(x_0)\|.$$

Por lo tanto,

$$M \|\Gamma_1\| \|\Gamma_1 F(x_1)\| \leq a_0 f(a_0)^2 g(a_0, b_0) = a_1,$$

y  $\|L_F(x_1)\| \leq a_1$ .

Ahora, teniendo en cuenta que  $\{a_n\}$  es una sucesión decreciente, se sigue que  $a_1 < r$ . Entonces, existe  $\tilde{H}(L_F(x_1))$  y

$$\|\tilde{H}(L_F(x_1))\| = \left\| I + \sum_{k \geq 2} 2A_k L_F(x_1)^{k-1} \right\| \leq 1 + \sum_{k \geq 2} 2A_k a_1^{k-1} = 1 + a_1 \nu(a_1),$$

con lo que queda demostrado [III<sub>1</sub>]. Como consecuencia se tiene [IV<sub>1</sub>]:

$$\begin{aligned} & K \| \Gamma_1 \| \| \Gamma_1 F(x_1) \|^{1+p} \\ & \leq K \beta \eta^{1+p} f(a_0)^{2+p} g(a_0, b_0)^{1+p} = b_0 f(a_0)^{2+p} g(a_0, b_0)^{1+p} = b_1. \end{aligned}$$

Comprobamos ahora [V<sub>1</sub>]-[VII<sub>1</sub>]. Por un lado,

$$\|x_2 - y_1\| \leq \left\| \frac{1}{2} L_F(x_1) \tilde{H}(L_F(x_1)) \right\| \| \Gamma_1 F(x_1) \| \leq \frac{1}{2} a_1 (1 + a_1 \nu(a_1)) \| \Gamma_1 F(x_1) \|$$

y

$$\|x_2 - x_1\| = \left\| I + \frac{1}{2} L_F(x_1) \tilde{H}(L_F(x_1)) \right\| \| \Gamma_1 F(x_1) \| \leq h(a_1) \| \Gamma_1 F(x_1) \|.$$

Además,

$$\|x_2 - x_0\| \leq \|x_2 - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \leq h(a_1) \|y_1 - x_1\| + h(a_0) \|y_0 - x_0\|,$$

y teniendo en cuenta que la sucesión  $\{a_n\}$  es decreciente y la función  $h$  es creciente, se sigue que

$$\|x_2 - x_0\| \leq h(a_0) (1 + f(a_0)g(a_0, b_0)) \eta.$$

Ahora, sin más que aplicar un proceso inductivo, se sigue que las relaciones de recurrencia [I<sub>n</sub>]-[VII<sub>n</sub>] son ciertas para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Por hipótesis tenemos que  $x_{j+1}, y_j \in \Omega, j = 1, \dots, n$ . Si

$$F'(x_{n+1}) - F'(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} F''(x) dx = \int_0^1 F''(x_n + t(x_{n+1} - x_n))(x_{n+1} - x_n) dt,$$

sin más que tomar normas, se sigue

$$\|F'(x_{n+1}) - F'(x_n)\| \leq M \|x_{n+1} - x_n\|.$$

Entonces, por hipótesis de inducción, existe el operador  $\Gamma_n$  y

$$\begin{aligned} \|I - \Gamma_n F'(x_{n+1})\| & \leq \| \Gamma_n \| \| F'(x_n) - F'(x_{n+1}) \| \leq \| \Gamma_n \| M \| x_{n+1} - x_n \| \\ & \leq M \| \Gamma_n \| h(a_n) \| \Gamma_n F(x_n) \| \leq a_n h(a_n) \leq a_0 h(a_0) < 1, \end{aligned}$$

ahora, por el Lema de Banach, existe  $\Gamma_{n+1}$  y se sigue [I<sub>n+1</sub>]:

$$\begin{aligned} \|\Gamma_{n+1}\| &\leq \|(\Gamma_n F'(x_{n+1}))^{-1}\| \|\Gamma_n\| \leq \frac{\|\Gamma_n\|}{1 - \|I - \Gamma_n F'(x_{n+1})\|} \\ &\leq \frac{\|\Gamma_n\|}{1 - a_n h(a_n)} = f(a_n) \|\Gamma_n\|. \end{aligned}$$

Probemos ahora [II<sub>n+1</sub>]. A partir de [III<sub>n</sub>], se tiene que  $\|L_F(x_n)\| \leq a_n < r$ , y como  $\{a_n\}$  es una sucesión decreciente, existe  $\tilde{H}$  y

$$\|I - \tilde{H}(L_F(x_n))\| = \left\| \sum_{k \geq 2} 2A_k L_F(x_n)^{k-1} \right\| \leq \sum_{k \geq 2} 2A_k a_n^{k-1} = a_n \nu(a_n).$$

Ahora, haciendo uso de las hipótesis de inducción y teniendo en cuenta la cota obtenida para  $\|F(x_{n+1})\|$  en (2.19) se tiene:

$$\begin{aligned} \|F(x_{n+1})\| &\leq \left( \frac{K \|\Gamma_n F(x_n)\|^{1+p}}{(1+p)(2+p)} + \frac{M \|\Gamma_n F(x_n)\|}{2} a_n (1 + (1 + a_n) \nu(a_n)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{M \|\Gamma_n F(x_n)\|}{8} a_n^2 (1 + a_n \nu(a_n))^2 \right) \|\Gamma_n F(x_n)\|. \end{aligned}$$

Además, teniendo en cuenta [III<sub>n</sub>] y [IV<sub>n</sub>] y la cota obtenida para  $\|\Gamma_{n+1}\|$ , se sigue

$$\begin{aligned} \|\Gamma_{n+1} F(x_{n+1})\| &\leq f(a_n) \|\Gamma_n\| \|F(x_{n+1})\| \\ &\leq f(a_n) \left( \frac{b_n}{(1+p)(2+p)} + \frac{a_n^2}{2} (1 + (1 + a_n) \nu(a_n)) + \frac{a_n^3}{8} (1 + a_n \nu(a_n))^2 \right) \|\Gamma_n F(x_n)\|, \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\|\Gamma_{n+1} F(x_{n+1})\| \leq f(a_n) g(a_n, b_n) \|\Gamma_n F(x_n)\|.$$

Además, obtenemos

$$M \|\Gamma_{n+1}\| \|\Gamma_{n+1} F(x_{n+1})\| \leq M \|\Gamma_n\| f(a_n)^2 g(a_n, b_n) \|\Gamma_n F(x_n)\| \leq a_{n+1}.$$

y  $\|L_F(x_{n+1})\| \leq a_{n+1}$ . Además, puesto que la sucesión  $\{a_n\}$  es decreciente,  $\|L_F(x_{n+1})\| < r$  y existe  $\tilde{H}(L_F(x_{n+1}))$  satisfaciendo

$$\left\| \tilde{H}(L_F(x_{n+1})) \right\| \leq 1 + \sum_{k \geq 2} 2A_k a_{n+1}^{k-1} = 1 + a_{n+1} \nu(a_{n+1}),$$

con lo que queda demostrado [III<sub>n+1</sub>].

Ahora, teniendo en cuenta [IV<sub>n</sub>], es fácil ver que:

$$\begin{aligned} K \|\Gamma_{n+1}\| \|\Gamma_{n+1} F(x_{n+1})\|^{1+p} &\leq K \|\Gamma_n\| f(a_n)^{2+p} g(a_n, b_n)^{1+p} \|\Gamma_n F(x_n)\|^{1+p} \\ &\leq b_n f(a_n)^{2+p} g(a_n, b_n)^{1+p} = b_{n+1}, \end{aligned}$$

luego [IV<sub>n+1</sub>] queda demostrado.

Finalmente, veamos que se cumplen [V<sub>n+1</sub>]-[VII<sub>n+1</sub>]:

$$\begin{aligned}\|x_{n+2} - y_{n+1}\| &\leq \left\| \frac{1}{2} L_F(x_{n+1}) \tilde{H}(L_F(x_{n+1})) \right\| \| \Gamma_{n+1} F(x_{n+1}) \| \\ &\leq \frac{1}{2} a_{n+1} (1 + a_{n+1} \nu(a_{n+1})) \| \Gamma_{n+1} F(x_{n+1}) \|\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\|x_{n+2} - x_{n+1}\| &\leq \left\| I + \frac{1}{2} L_F(x_{n+1}) \tilde{H}(L_F(x_{n+1})) \right\| \| \Gamma_{n+1} F(x_{n+1}) \| \\ &\leq h(a_{n+1}) \| \Gamma_{n+1} F(x_{n+1}) \|\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta [VII<sub>n</sub>] y puesto que las funciones  $f$  y  $g$  son crecientes en una y dos variables respectivamente, [VII<sub>n+1</sub>] se sigue aplicando la desigualdad triangular.

$$\begin{aligned}\|x_{n+2} - x_0\| &\leq h(a_0) \left( f(a_0) g(a_0, b_0) \right)^{n+1} \eta + h(a_0) \left( \sum_{k=0}^n f(a_0)^k g(a_0, b_0)^k \right) \eta. \\ &= h(a_0) \left( \sum_{k=0}^{n+1} f(a_0)^k g(a_0, b_0)^k \right) \eta.\end{aligned}$$

Con lo que el lema queda demostrado. ■

### 3.3.2. Convergencia semilocal

Una vez establecidas y demostradas las relaciones de recurrencia, pasamos a probar la convergencia de la familia de procesos iterativos (1.3).

A partir de las propiedades de las funciones reales  $f$  y  $g$ , descritas en (3.16), y del comportamiento de las sucesiones reales  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$ , dadas en (3.15), probaremos la convergencia de la sucesión  $\{x_n\}$  que aparece en (1.3). Para ello, llevamos a cabo un análisis de las sucesiones y funciones reales auxiliares y damos lemas técnicos que nos proporcionen propiedades de las funciones reales  $f$  y  $g$ , así como de las sucesiones  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$ .

**Lema 3.3.2** Sean  $f(t)$ ,  $g(t, u)$  y  $h(t)$  las funciones reales dadas en (3.16). Entonces,

- (i) Si  $h(a_0)a_0 < 1$ ,  $f(t)$  es creciente y  $f(t) > 1$  para  $t \in (0, a_0)$ .
- (ii) Fijado  $t$ ,  $g(t, u)$  es creciente como función de  $u$ . Además, fijado  $u$ ,  $g(t, u)$  es creciente como función de  $t$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}^+$ .

*Demostración.* La demostración se sigue a partir de la demostración del lema 2.3.2, sección 2.3. ■

**Lema 3.3.3** Si  $h(a_0)a_0 < 1$  y  $b_0 < \kappa_0$ , donde

$$\kappa_0 = \frac{1}{2}(1+p)(2+p)\left(2(2+a_0) + h(a_0)(-2(1+2a_0) + a_0h(a_0)(-1+2a_0))\right),$$

las sucesiones  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$ , dadas en (3.15), son decrecientes. Además,  $f(a_0)g(a_0, b_0) < 1$ .

*Demostración.* La demostración es análoga a la demostración del lema 2.3.3, sección 2.3, con  $p = 1$ . ■

*Nota 3.5.* El estudio que presentamos es una generalización que engloba todos los métodos de  $R$ -orden al menos tres cuando el operador  $F''$  satisface una condición de Lipschitz para  $F''$ , o bien, de  $R$ -orden al menos  $2+p$ , cuando satisface una condición de Hölder para  $F''$ , como veremos al estudiar el  $R$ -orden de la familia de procesos iterativos (1.3) en la siguiente sección. Por ello, las condiciones exigidas para los valores de  $a_0$  y  $b_0$  pueden parecer bastante restrictivas. Sin embargo, en los casos particulares, cuando se estudian cualquiera de los procesos iterativos más conocidos, estas condiciones se trasforman en otras más sencillas de lo que en un principio se puede esperar.

A continuación, mostramos a modo ilustrativo, como se traducen las condiciones del lema 3.3.3 en los casos del método de Chebyshev y el método de Super-Halley cuando  $p = \frac{1}{3}$ . Representamos en el plano real las regiones de accesibilidad de las sucesiones (3.15) asociadas a los métodos de Chebyshev y Super-Halley.

Para el método de Chebyshev ([71]):

$$x_{n+1} = x_n - \left(I + \frac{1}{2}L_F(x_n)\right)\Gamma_n F(x_n), \quad n \geq 0,$$

se tiene que las funciones  $\nu(t)$  y  $h(t)$  dadas en (3.14) y (3.16) respectivamente son:

$$\nu(t) = 0 \quad \text{y} \quad h(t) = 1 + \frac{t}{2}.$$

Para el método de Super-Halley:

$$x_{n+1} = x_n - \left(I + \frac{1}{2}L_F(x_n)(I - L_F(x_n))^{-1}\right)\Gamma_n F(x_n), \quad n \geq 0,$$

$$\nu(t) = \sum_{k \geq 2} t^{k-2} \quad \text{y} \quad h(t) = \frac{t-2}{2(t-1)}.$$

Entonces, las condiciones del lema 3.3.3

$$h(a_0)a_0 < 1 \quad \text{y} \quad b_0 < \kappa_0$$

se reducen respectivamente a

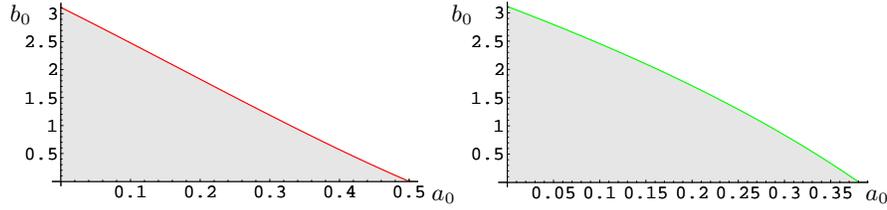
$$a_0 < \frac{1}{2}, \quad b_0 < \frac{(1+p)(2+p)(2+a_0)(-1+2a_0)(-4+2a_0+a_0^2)}{8}$$

y

$$a_0 < 0.380778, \quad b_0 < \frac{(1+p)(2+p)(8-32a_0+32a_0^2-9a_0^3+2a_0^4)}{8(a_0-1)^2}.$$

Estos valores de los parámetros  $a_0$  y  $b_0$  son los que delimitan las regiones de accesibilidad asociadas a los métodos de Chebyshev y Super-Halley (véase la figura 3.1). Estas regiones, también conocidas como regiones de decrecimiento cúbico, delimitan la zona del plano real donde los métodos iterativos son convergentes.

Notemos que en ambas casos los parámetros  $a_0$  y  $b_0$  recorren respectivamente el eje de abcisas y ordenadas.



**Figura 3.1.** Regiones de accesibilidad asociadas respectivamente a los métodos de Chebyshev y Super-Halley en condiciones Hölder con  $p = 1/3$

**Teorema 3.3.4** Sea  $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$  un operador no lineal dos veces diferenciable Fréchet satisfaciendo **(C1)**–**(C3)** y **(H4)**. Asumimos que  $a_0 < r$ , con  $r$  el radio de convergencia de la serie (3.7),  $a_0 h(a_0) < 1$  y  $b_0 < \kappa_0$ . Si  $B(x_0, R) \subset \Omega$ , donde  $R = \frac{h(a_0)\eta}{1-f(a_0)g(a_0, b_0)}$ , entonces la familia de procesos iterativos (1.3), comenzando en  $x_0$ , converge a una solución  $x^*$  de la ecuación (3.1). En este caso, la solución  $x^*$  y las iteraciones  $x_n$  pertenecen a  $B(x_0, R)$  y  $x^*$  es la única solución de (3.1) en  $B(x_0, \frac{2}{M\beta} - R) \cap \Omega$ .

*Demostración.* Por hipótesis tenemos que  $x_0 \in \Omega$ , y a partir de las condiciones iniciales que satisface el operador  $F$ , se sigue que  $y_0, x_1 \in \overline{B(x_0, R)}$ :

$$\|y_0 - x_0\| = \|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \eta < R \quad \text{y} \quad \|x_1 - x_0\| \leq h(a_0)\eta < R.$$

Puesto que  $h(a_0) > 1$ , tenemos que  $y_1 \in \overline{B(x_0, R)}$ :

$$\|y_1 - x_0\| \leq \|y_1 - x_1\| + \|x_1 - x_0\| < h(a_0)(1 + f(a_0)g(a_0, b_0))\eta < R.$$

Entonces, las relaciones de recurrencia descritas en el lema 3.3.1 son ciertas para  $n = 1$ . Ahora, aplicando un proceso inductivo y el lema 3.3.1, es fácil obtener que  $y_n, x_{n+1} \in \Omega$ , para toda  $n \geq 0$ :

$$\|y_n - x_0\| \leq \|y_n - x_n\| + \|x_n - x_0\| \leq h(a_0) \left( \sum_{k=0}^n f(a_0)^k g(a_0, b_0)^k \right) \eta < R,$$

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leq h(a_0) \left( \sum_{k=0}^n f(a_0)^k g(a_0, b_0)^k \right) \eta < R.$$

Para establecer la convergencia de la sucesión  $\{x_n\}$  dada por la familia de procesos iterativos (1.3) es suficiente probar que es una sucesión de Cauchy.

A partir de las relaciones de recurrencia dadas en el lema 3.3.1 y teniendo en cuenta que  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  son sucesiones decrecientes tenemos

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq h(a_k) \|G_k F(x_k)\| \leq h(a_0) \left( \prod_{j=0}^{k-1} f(a_j) g(a_j, b_j) \right) \eta$$

$$\leq h(a_0) (f(a_0) g(a_0, b_0))^k \eta.$$

Entonces, dados  $n, m \in \mathbb{N}$ , se sigue:

$$\|x_{n+m} - x_n\| \leq \sum_{k=n}^{n+m-1} \|x_{k+1} - x_k\| \leq \sum_{k=n}^{n+m-1} h(a_0) (f(a_0) g(a_0, b_0))^k \eta$$

$$= h(a_0) \frac{1 - (f(a_0) g(a_0, b_0))^m}{1 - f(a_0) g(a_0, b_0)} (f(a_0) g(a_0, b_0))^n \eta, \quad (3.17)$$

y, puesto que  $f(a_0) g(a_0, b_0) < 1$ , queda demostrado que la sucesión es de Cauchy.

Ahora, tomando  $n = 0$  en (3.17), obtenemos que  $x_m \in B(x_0, R)$ :

$$\|x_m - x_0\| < h(a_0) \frac{1 - (f(a_0) g(a_0, b_0))^m}{1 - f(a_0) g(a_0, b_0)} \eta < \frac{h(a_0) \eta}{1 - f(a_0) g(a_0, b_0)} = R.$$

Además, si  $m \rightarrow \infty$ , obtenemos:

$$\|x^* - x_0\| \leq \frac{h(a_0) \eta}{1 - f(a_0) g(a_0, b_0)} = R.$$

Por lo tanto,  $x^* \in \overline{B(x_0, R)}$ .

Además la sucesión  $\{x_n\}$  converge a la solución  $x^*$  de (3.1). En efecto, por una parte tenemos que

$$\|F(x_n)\| \leq \|F'(x_n)\| \|G_n F(x_n)\| \leq \|F'(x_n)\| \left( \prod_{k=0}^{n-1} f(a_k) g(a_k, b_k) \right) \eta.$$

Por otra parte, teniendo en cuenta el teorema del valor medio, se sigue que

$$\begin{aligned} \|F'(x_n)\| &\leq \|F'(x_n) - F'(x_0)\| + \|F'(x_0)\| \leq \|F''(x)\| \|x_n - x_0\| + \|F'(x_0)\| \\ &\leq Mh(a_0) \frac{1 - (f(a_0)g(a_0, b_0))^n}{1 - f(a_0)g(a_0, b_0)} \eta + \|F'(x_0)\|, \end{aligned}$$

y la sucesión  $\{\|F'(x_n)\|\}$  está acotada. Entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|F'(x_n)\| = 0$ . Como  $F$  es un operador dos veces diferenciable Fréchet, se sigue por la continuidad de  $F$  que  $F(x^*) = 0$  y, como consecuencia,  $x^*$  es una solución de (3.1).

Vemos ahora que la solución es única. Al igual que en la sección 3.2, hacemos uso del técnica empleada por Argyros y Chen. Sea  $y^*$  tal que  $F(y^*) = 0$ , es decir una solución del operador  $F$  con  $y^* \in B(x_0, \frac{2}{M\beta} - R) \cap \Omega$ . Supongamos que  $y^*$  es una solución distinta de  $x^*$ . Entonces, teniendo en cuenta (3.10), si existe el operador  $A^{-1}$ , donde  $A = \int_0^1 \Gamma_0 F'(x^* + t(y^* - x^*)) dt$ , se sigue fácilmente que  $y^* - x^* = 0$  y, por tanto, la unicidad de solución en  $B(x_0, \frac{2}{M\beta} - R) \cap \Omega$ .

Entonces, como

$$\begin{aligned} F'(x^* + t(y^* - x^*)) - F'(x_0) &= \int_{x_0}^{x^* + t(y^* - x^*)} F''(x) dx \\ &= \int_0^1 F''(x_0 + \tau(x^* + t(y^* - x^*) - x_0)) ((x^* - x_0)(1 - t) + t(y^* - x_0)) d\tau, \end{aligned}$$

tomando normas, obtenemos

$$\|F'(x^* + t(y^* - x^*)) - F'(x_0)\| \leq M (\|x^* - x_0\|(1 - t) + t\|y^* - x_0\|).$$

Por otra parte, como  $y^* \in B(x_0, \frac{2}{M\beta} - R) \cap \Omega$  y  $x^* \in \overline{B(x_0, R)} \cap \Omega$ , tenemos que  $\|y^* - x_0\| < \frac{2}{M\beta} - R$  y  $\|x^* - x_0\| \leq R$ . Por lo tanto,

$$\|I - A\| \leq \|\Gamma_0\| M \int_0^1 \|x^* - x_0\|(1 - t) + t\|y^* - x_0\| dt < 1,$$

y, por el lema de Banach, existe el inverso del operador  $A$ , con lo que queda demostrada la unicidad de solución en  $B(x_0, \frac{2}{M\beta} - R) \cap \Omega$ . ■

### 3.3.3. $R$ -orden de convergencia

Una vez estudiada la convergencia semilocal de la familia de procesos iterativos (1.3), vemos que converge a la solución  $x^*$  de la ecuación (3.1) con al menos  $R$ -orden de convergencia  $2 + p$ .

**Lema 3.3.5** Sea  $\gamma = \frac{a_1}{a_0}$ . En las hipótesis del lema 3.3.3 se tiene:

$$(i) \quad \gamma = f(a_0)^2 g(a_0, b_0) \in (0, 1).$$

$$(ii) \quad f(\gamma t) < f(t), \quad g(\gamma t, \gamma^{1+p} u) < \gamma^{1+p} g(t, u), \quad \forall t, u > 0 \text{ y } \forall \gamma \in (0, 1).$$

$$(iii) \quad a_{n+1} < \gamma^{(2+p)^n} a_n < \gamma^{\frac{(2+p)^{n+1}-1}{1+p}} a_0, \quad \forall n \geq 1$$

$$b_{n+1} < \left( \gamma^{(2+p)^n} \right)^{1+p} b_n < \gamma^{(2+p)^{n+1}-1} b_0, \quad \forall n \geq 1.$$

$$(iv) \quad f(a_{n+1})g(a_{n+1}, b_{n+1}) < \gamma^{(2+p)^{n+1}} \Delta, \quad \text{donde } \Delta = \frac{1}{f(a_0)}, \quad \forall n \geq 1.$$

*Demostración.* La demostración de (i) y (ii) es inmediata a partir de las definiciones de  $\gamma$  y de las funciones. Para demostrar (iii) empleamos inducción. Por una parte, se tiene que  $a_1 = \gamma a_0 < a_0$  y, puesto que  $f(a_0) > 1$ , obtenemos

$$b_1 = f(a_0)^{2+p} g(a_0, b_0)^{1+p} b_0 < \left( f(a_0)^2 g(a_0, b_0) \right)^{1+p} b_0 = \gamma^{1+p} b_0.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta lo anterior si  $n = 1$ ,

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 f(a_1)^2 g(a_1, b_1) < a_1 f(\gamma a_0)^2 g(\gamma a_0, \gamma^{1+p} b_0) \\ &< a_1 \gamma^{1+p} f(a_0)^2 g(a_0, b_0) = \gamma^{2+p} a_1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} b_2 &= b_1 f(a_1)^{2+p} g(a_1, b_1)^{1+p} < \gamma^{1+p} b_0 f(\gamma a_0)^{2+p} g(\gamma a_0, \gamma^{1+p} b_0)^{1+p} \\ &< \gamma^{1+p} b_0 f(a_0)^{2+p} (\gamma^{1+p})^{1+p} g(a_0, b_0)^{1+p} = (\gamma^{1+p})^{2+p} b_1. \end{aligned}$$

Supongamos cierto (iii) para  $n + 1$  y probemos para  $n + 2$ . Como vimos en el lema 3.3.2 las funciones  $f(t)$  y  $g(t, u)$  son crecientes en una y dos variables respectivamente. Entonces, a partir de esta propiedad y de la hipótesis de inducción, se sigue (iii). En efecto,

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_{n+1} f(a_{n+1})^2 g(a_{n+1}, b_{n+1}) \\ &< \gamma^{(2+p)^n} a_n f\left(\gamma^{(2+p)^n} a_n\right)^2 g\left(\gamma^{(2+p)^n} a_n, \left(\gamma^{(2+p)^n}\right)^{1+p} b_n\right) \\ &< \gamma^{(2+p)^n} a_n f(a_n)^2 \left(\gamma^{(2+p)^n}\right)^{1+p} g(a_n, b_n) \\ &= \left(\gamma^{(2+p)^n}\right)^{2+p} a_n f(a_n)^2 g(a_n, b_n) = \gamma^{(2+p)^{n+1}} a_{n+1}. \end{aligned}$$

Ahora, es fácil ver que

$$a_{n+2} < \gamma^{(2+p)^{n+1}} a_{n+1} < \gamma^{(2+p)^{n+1}} \gamma^{(2+p)^n} a_n < \dots < \gamma^{\frac{(2+p)^{n+2}-1}{1+p}} a_0.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
b_{n+2} &= b_{n+1}f(a_{n+1})^{2+p}g(a_{n+1}, b_{n+1})^{1+p} \\
&< (\gamma^{(2+p)^n})^{1+p} b_n f(a_n)^{2+p} (\gamma^{(2+p)^n})^{(1+p)^2} g(a_n, b_n)^{1+p} \\
&< (\gamma^{(2+p)^n})^{(2+p)(1+p)} b_n f(a_n)^{2+p} g(a_n, b_n)^{1+p} = (\gamma^{(2+p)^{n+1}})^{1+p} b_{n+1},
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
b_{n+2} &< (\gamma^{(2+p)^{n+1}})^{1+p} b_{n+1} < (\gamma^{(2+p)^{n+1}})^{1+p} (\gamma^{(2+p)^n})^{1+p} b_n \\
&< \dots < \gamma^{(2+p)^{n+2}-1} b_0.
\end{aligned}$$

Para concluir, demostramos (iv). Teniendo en cuenta las desigualdades obtenidas en (iii), tenemos

$$\begin{aligned}
f(a_{n+1})g(a_{n+1}, b_{n+1}) &< f\left(\gamma^{\frac{(2+p)^{n+1}-1}{1+p}} a_0\right) g\left(\gamma^{\frac{(2+p)^{n+1}-1}{1+p}} a_0, \gamma^{(2+p)^{n+1}-1} b_0\right) \\
&< f(a_0)g(a_0, b_0)\gamma^{(2+p)^{n+1}-1} = \frac{\gamma^{(2+p)^{n+1}}}{f(a_0)} = \gamma^{(2+p)^{n+1}} \Delta,
\end{aligned}$$

donde  $\Delta = \frac{1}{f(a_0)}$ . ■

En el siguiente resultado se establecen las cotas del error a priori y el  $R$ -orden de convergencia de la familia de procesos iterativos dada por (1.3).

**Teorema 3.3.6** *En las hipótesis del teorema 3.3.4, la familia de procesos iterativos (1.3), comenzando en  $x_0$ , converge a la solución  $x^*$  de la ecuación (3.1) con  $R$ -orden de convergencia al menos  $2 + p$ . Además, se obtienen las siguientes estimaciones a priori del error*

$$\|x^* - x_n\| < h\left(\gamma^{\frac{(2+p)^n-1}{1+p}} a_0\right) \frac{\gamma^{\frac{(2+p)^n-1}{1+p}} \Delta^n}{1 - \gamma^{(2+p)^n} \Delta} \eta.$$

*Demostración.* Como consecuencia de los lemas anteriores se sigue que:

$$\prod_{j=0}^{k-1} f(a_j)g(a_j, b_j) \leq \prod_{j=0}^{k-1} \gamma^{(2+p)^j} \Delta = \gamma^{\frac{(2+p)^k-1}{1+p}} \Delta^k.$$

Además, teniendo en cuenta las relaciones de recurrencia obtenidas en el párrafo 3.3.1, se sigue:

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x_k\| &\leq h(a_k)\|I_k F(x_k)\| < h\left(\gamma^{\frac{(2+p)^k-1}{1+p}} a_0\right) \eta \prod_{j=0}^{k-1} f(a_j)g(a_j, b_j) \\
&< h\left(\gamma^{\frac{(2+p)^k-1}{1+p}} a_0\right) \eta \gamma^{\frac{(2+p)^k-1}{1+p}} \Delta^k.
\end{aligned}$$

Entonces, dados  $n, m \in \mathbb{N}$ , tenemos

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - x_n\| &\leq \sum_{k=n}^{n+m-1} \|x_{k+1} - x_k\| < \sum_{k=n}^{n+m-1} h\left(\gamma^{\frac{(2+p)^k-1}{1+p}} a_0\right) \eta \gamma^{\frac{(2+p)^k-1}{1+p}} \Delta^k \\ &< h\left(\gamma^{\frac{(2+p)^n-1}{1+p}} a_0\right) \eta \gamma^{\frac{(2+p)^n-1}{1+p}} \Delta^n \left(\sum_{k=0}^{m-1} \gamma^{\frac{(2+p)^n[(2+p)^k-1]}{1+p}} \Delta^k\right). \end{aligned}$$

Ahora, sin más que aplicar la desigualdad de Bernoulli,  $(1+x)^k > 1+kx$ , donde  $x > -1, x \neq 0$  y  $k > 1, k \in \mathbb{N}$ , tenemos para todo  $n, m \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - x_n\| &< h\left(\gamma^{\frac{(2+p)^n-1}{1+p}} a_0\right) \eta \gamma^{\frac{(2+p)^n-1}{1+p}} \Delta^n \left(\sum_{k=0}^{m-1} (\gamma^{(2+p)^n} \Delta)^k\right) \\ &= h\left(\gamma^{\frac{(2+p)^n-1}{1+p}} a_0\right) \eta \gamma^{\frac{(2+p)^n-1}{1+p}} \Delta^n \frac{1 - (\gamma^{(2+p)^n} \Delta)^m}{1 - \gamma^{(2+p)^n} \Delta}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Por lo tanto, si  $m \rightarrow \infty$  en (3.18), obtenemos:

$$\|x^* - x_n\| < h\left(\gamma^{\frac{(2+p)^n-1}{1+p}} a_0\right) \eta \frac{\gamma^{\frac{(2+p)^n-1}{1+p}} \Delta^n}{1 - \gamma^{(2+p)^n} \Delta} < \left(\gamma^{\frac{1}{1+p}}\right)^{(2+p)^n} \frac{R}{\gamma^{\frac{1}{1+p}}},$$

con lo que queda demostrado que la familia de procesos iterativos tiene al menos  $R$ -orden  $2+p$ , puesto que

$$\|x^* - x_n\| < C\delta^{(2+p)^n},$$

con  $C = \frac{R}{\gamma^{\frac{1}{1+p}}}$  una constante real positiva y  $\delta = \gamma^{\frac{1}{1+p}} < 1$ . ■

### 3.4. Relaciones de recurrencia para condiciones $\omega$ -condicionadas

En esta sección, seguimos la técnica de relaciones de recurrencia para realizar el estudio de la convergencia de la familia de procesos iterativos (1.3) a una solución de la ecuación (3.1), considerando una modificación de las condiciones de Kantorovich. Nos planteamos la posibilidad de suavizar en el estudio de la convergencia la condición de Hölder **(H4)** para el operador  $F''$  por una condición  $\omega$ -condicionada (3.5) para  $F''$ :

$$\|F''(x) - F''(y)\| \leq \omega(\|x - y\|), \forall x, y \in \Omega,$$

donde  $\omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  es continua, creciente y cumple  $\omega(0) = 0$ . Notemos que esta última condición generaliza la condición de Hölder **(H4)** con  $\omega(z) = Kz^p$  y también la condición de Lipschitz **(C4)** con  $\omega(z) = Kz$  y  $K$  una constante positiva. Estas últimas son las que habitualmente se utilizan a la hora de probar un resultado de convergencia semilocal para un proceso iterativo con  $R$ -orden de convergencia al menos tres.

### 3.4.1. Construcción de las relaciones de recurrencia

En esta sección, al igual que en las anteriores, consideramos la ecuación (3.1), donde  $F$  es un operador no lineal dos veces diferenciable Fréchet, definido en un dominio  $\Omega$  abierto, convexo y no vacío contenido en un espacio de Banach  $X$  y con valores en otro espacio de Banach  $Y$ . Además, suponemos que el operador  $F$  satisface las condiciones iniciales **(C1)**–**(C3)** y

**(W4)**  $\|F''(x) - F''(y)\| \leq \omega(\|x - y\|), \forall x, y \in \Omega$ , donde  $\omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  es continua, creciente y tal que  $\omega(0) = 0$ ,

**(W5)** Existe una función  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$  continua, no decreciente y tal que  $\omega(\tau z) \leq \varphi(\tau)\omega(z)$ , para  $\tau \in [0, 1]$  y  $z \in \mathbb{R}^+$ . Denotamos por  $N = \int_0^1 \varphi(\tau)(1 - \tau)d\tau$ .

El objetivo que pretendemos es probar que, bajo las condiciones **(C1)**–**(C3)** más las condiciones **(W4)** y **(W5)**, la familia de procesos iterativos (1.3) converge a una solución de la ecuación (3.1). También, encontramos los dominios donde la solución está localizada y es única junto con unas estimaciones del error cometido al aproximar la solución mediante un proceso iterativo de esta familia.

*Nota 3.6.* Los condiciones **(C1)**–**(C3)** son las mismas que consideramos en el caso Hölder para  $F''$  y tan sólo cambiamos **(H4)** por **(W4)**, condición  $\omega$ -condicionada para el operador  $F''$ . Además, añadimos la condición **(W5)** que permite mejorar la estimación del error, pero que no es restrictiva, puesto que siempre podemos considerar  $\varphi(\tau) = 1$ .

A lo largo de toda la sección, denotaremos

$$a_0 = M\beta\eta, \quad b_0 = \beta\omega(\eta)\eta, \quad c_0 = f(a_0)g(a_0, b_0).$$

A partir de estos parámetros, construimos las siguientes sucesiones reales:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n c_n f(a_n), \quad n \geq 0, \\ b_{n+1} &= b_n c_n \varphi(c_n) f(a_n) \quad n \geq 0, \\ c_{n+1} &= f(a_{n+1})g(a_{n+1}, b_{n+1}), \quad n \geq 0, \end{aligned} \tag{3.19}$$

donde consideramos las funciones reales auxiliares  $h$  y  $f$  dadas en (3.16), sección 3.3.1, y modificamos la función  $g$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} g(t, u) &= \frac{t^2}{2} \left( 1 + (1+t)\nu(t) + \frac{t}{4}(1+t\nu(t))^2 \right) + Nu, \\ \nu(t) &= \sum_{k \geq 2} 2A_k t^{k-2}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales deducimos

$$\|L_F(x_0)\| \leq \|\Gamma_0\| \|F''(x_0)\| \|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq M \|\Gamma_0\| \|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq M\beta\eta = a_0,$$

$$\|\Gamma_0\| \omega(\|y_0 - x_0\|) \|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \beta\omega(\eta)\eta = b_0,$$

Además, existe  $\tilde{H}(L_F(x_0))$  siempre que  $\|L_F(x_0)\| \leq a_0 < r$ , siendo  $r$  el radio de convergencia de la serie (3.7). Por lo tanto, exigiremos que  $a_0 < r$ .

Ahora bien, por las condiciones anteriores, si  $y_0 \in \Omega$ , obtenemos lo siguiente

$$\|\tilde{H}(L_F(x_0))\| = \left\| I + \sum_{k \geq 2} 2A_k L_F(x_0)^{k-1} \right\| \leq 1 + \sum_{k \geq 2} 2A_k a_0^{k-1} = 1 + a_0\nu(a_0),$$

$$\|I - \tilde{H}(L_F(x_0))\| = \left\| \sum_{k \geq 2} 2A_k L_F(x_0)^{k-1} \right\| \leq \sum_{k \geq 2} 2A_k a_0^{k-1} = a_0\nu(a_0).$$

Y a partir de aquí, es fácil ver que

$$\|x_1 - y_0\| = \left\| \frac{1}{2} L_F(x_0) \tilde{H}(L_F(x_0)) \Gamma_0 F(x_0) \right\| \leq \frac{1}{2} a_0 (1 + a_0\nu(a_0)) \|y_0 - x_0\|,$$

$$\|x_1 - x_0\| \leq \|x_1 - y_0\| + \|y_0 - x_0\| \leq h(a_0)\eta.$$

Teniendo en cuenta lo anterior damos las siguientes relaciones de recurrencia que demostraremos por inducción para cualquier punto del proceso iterativo. Esto permitirá demostrar la convergencia de la familia de procesos iterativos (1.3), al igual que en el estudio anterior cuando exigimos la condición de Hölder para  $F''$ .

**Lema 3.4.1** *Supongamos que  $y_0, y_n, x_n \in \Omega$ , para  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $a_0 < r$ , con  $r$  el radio de convergencia de la serie (3.7),  $a_0 h(a_0) < 1$ ,  $c_0 < 1$  y las sucesiones auxiliares reales  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  y  $\{c_n\}$  dadas en (3.19) son decrecientes, entonces se cumplen las siguientes relaciones de recurrencia:*

$$[I_n] \text{ Existe } \Gamma_n = [F'(x_n)]^{-1} \text{ y } \|\Gamma_n\| \leq f(a_{n-1}) \|\Gamma_{n-1}\|,$$

$$[II_n] \|\Gamma_n F(x_n)\| = \|y_n - x_n\| \leq c_{n-1} \|\Gamma_{n-1} F(x_{n-1})\|,$$

$$[III_n] M \|\Gamma_n\| \|\Gamma_n F(x_n)\| \leq a_n \text{ y existe } \tilde{H}(L_F(x_n)),$$

$$[IV_n] \|\Gamma_n\| \omega(\|y_n - x_n\|) \|\Gamma_n F(x_n)\| \leq b_n,$$

$$[V_n] \|x_{n+1} - y_n\| \leq \frac{1}{2} a_n (1 + a_n\nu(a_n)) \|\Gamma_n F(x_n)\|,$$

$$[VI_n] \|x_{n+1} - x_n\| \leq h(a_n) \|\Gamma_n F(x_n)\|,$$

$$[VII_n] \|x_{n+1} - x_0\| \leq h(a_0) \left( \sum_{k=0}^n c_0^k \right) \eta.$$

*Demostración.* Comenzamos probando que las condiciones  $[I_n]$ - $[VII_n]$  se cumplen para  $n = 1$ .

Primero, veamos que existe el operador inverso de  $F'(x_1)$  y es acotado. Puesto que

$$F'(x_1) - F'(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} F''(x) dx = \int_0^1 F''(x_0 + t(x_1 - x_0))(x_1 - x_0) dt,$$

tomando normas, se sigue que

$$\|F'(x_1) - F'(x_0)\| \leq M\|x_1 - x_0\|.$$

Por lo tanto,

$$\|I - \Gamma_0 F'(x_1)\| \leq \|\Gamma_0\| \|F'(x_1) - F'(x_0)\| \leq a_0 h(a_0).$$

Ahora bien, si  $a_0 h(a_0) < 1$ , por el lema de Banach ([101]),  $\Gamma_1$  existe y  $[I_1]$  se sigue:

$$\begin{aligned} \|\Gamma_1\| &= \|\Gamma_1 F'(x_0) \Gamma_0\| \leq \left\| (\Gamma_0 F'(x_1))^{-1} \right\| \|\Gamma_0\| \leq \frac{\|\Gamma_0\|}{1 - \|I - \Gamma_0 F'(x_1)\|} \\ &\leq \frac{\|\Gamma_0\|}{1 - a_0 h(a_0)} = f(a_0) \|\Gamma_0\|. \end{aligned}$$

Al igual que en el estudio anterior, cuando  $F''$  satisface una condición de Hölder, para probar  $[II_1]$  hacemos uso de la descomposición integral para el operador  $F$ , obtenida a partir de la fórmula de Taylor en (2.17). Entonces, teniendo en cuenta la cota para  $\|F(x_1)\|$  obtenida en (2.18) y a partir de las condiciones iniciales, obtenemos

$$\begin{aligned} \|F(x_1)\| &\leq N\omega(\|y_0 - x_0\|)\|y_0 - x_0\|^2 + \frac{M}{2} a_0 \nu(a_0) \|y_0 - x_0\|^2 \\ &\quad + \frac{M}{2} a_0 (1 + a_0 \nu(a_0)) \|y_0 - x_0\|^2 + \frac{M}{8} a_0^2 (1 + a_0 \nu(a_0))^2 \|y_0 - x_0\|^2. \end{aligned}$$

Además, como

$$\beta\omega(\|y_0 - x_0\|)\eta \leq \beta\omega(\eta)\eta = b_0,$$

tenemos

$$\begin{aligned} \|\Gamma_1 F(x_1)\| &\leq f(a_0) \|\Gamma_0\| \|F(x_1)\| \\ &\leq f(a_0) \left( b_0 + \frac{a_0^2}{2} \left( 1 + (1 + a_0)\nu(a_0) + \frac{a_0}{4} (1 + a_0 \nu(a_0))^2 \right) \right) \|\Gamma_0 F(x_0)\| \end{aligned}$$

y, por la definición de  $g$ , se sigue  $[II_1]$ :

$$\|T_1 F(x_1)\| \leq f(a_0)g(a_0, b_0)\|T_0 F(x_0)\| = c_0\|T_0 F(x_0)\|.$$

Como consecuencia, obtenemos [III<sub>1</sub>]:

$$M\|T_1\|\|T_1 F(x_1)\| \leq Mf(a_0)\|T_0\|c_0\|T_0 F(x_0)\| \leq a_0c_0f(a_0) = a_1,$$

y  $\|L_F(x_1)\| \leq a_1$ . Ahora bien, puesto que la sucesión  $\{a_n\}$  es decreciente, se sigue que  $a_1 < r$  y que  $\tilde{H}(L_F(x_1))$  existe, además

$$\|\tilde{H}(L_F(x_1))\| = \left\| I + \sum_{k \geq 2} 2A_k L_F(x_1)^{k-1} \right\| \leq 1 + \sum_{k \geq 2} 2A_k a_1^{k-1} = 1 + a_1\nu(a_1),$$

$$\|I - \tilde{H}(L_F(x_1))\| = \left\| \sum_{k \geq 2} 2A_k L_F(x_1)^{k-1} \right\| \leq \sum_{k \geq 2} 2A_k a_1^{k-1} = a_1\nu(a_1).$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la hipótesis  $c_0 < 1$ , se obtiene [IV<sub>1</sub>]:

$$\begin{aligned} & \|T_1\|\omega(\|y_1 - x_1\|)\|T_1 F(x_1)\| \\ & \leq f(a_0)\|T_0\|\omega(c_0\|T_0 F(x_0)\|)c_0\|T_0 F(x_0)\| \\ & \leq f(a_0)\beta\varphi(c_0)\omega(\eta)c_0\eta = b_0c_0\varphi(c_0)f(a_0) = b_1. \end{aligned}$$

Como consecuencia de lo anterior, obtenemos [V<sub>1</sub>]-[VII<sub>1</sub>]:

$$\|x_2 - y_1\| \leq \left\| \frac{1}{2}L_F(x_1)\tilde{H}(L_F(x_1)) \right\| \|T_1 F(x_1)\| \leq \frac{1}{2}a_1(1 + a_1\nu(a_1))\|T_1 F(x_1)\|,$$

$$\|x_2 - x_1\| \leq \|x_2 - y_1\| + \|y_1 - x_1\| \leq h(a_1)\|T_1 F(x_1)\|,$$

$$\|x_2 - x_0\| \leq \|x_2 - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \leq h(a_1)\|y_1 - x_1\| + h(a_0)\|y_0 - x_0\|$$

y, como  $h$  es una función creciente y la sucesión  $\{a_n\}$  es decreciente, se sigue

$$\|x_2 - x_0\| \leq h(a_0)(1 + c_0)\eta.$$

Ahora, suponemos que [I<sub>n</sub>]-[VII<sub>n</sub>] son ciertas y usando un proceso inductivo probamos que [I<sub>n+1</sub>]-[VII<sub>n+1</sub>] se cumplen. Por hipótesis, tenemos que  $x_{j+1}, y_j \in \Omega$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Si

$$F'(x_{n+1}) - F'(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} F''(x)dx = \int_0^1 F''(x_n + t(x_{n+1} - x_n))(x_{n+1} - x_n)dt,$$

tomando normas, se sigue

$$\|F'(x_{n+1}) - F'(x_n)\| \leq M\|x_{n+1} - x_n\|.$$

Entonces, por hipótesis de inducción, existe el operador  $\Gamma_n$  y

$$\begin{aligned} \|I - \Gamma_n F'(x_{n+1})\| &\leq \|\Gamma_n\| \|F'(x_{n+1}) - F'(x_n)\| \leq \|\Gamma_n\| M \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\leq M \|\Gamma_n\| h(a_n) \|\Gamma_n F(x_n)\| \leq a_n h(a_n) \leq a_0 h(a_0) < 1. \end{aligned}$$

Ahora, por el lema de Banach,  $\Gamma_n$  existe y se sigue  $[\mathbf{I}_{n+1}]$ :

$$\begin{aligned} \|\Gamma_{n+1}\| &= \|\Gamma_{n+1} F'(x_n) \Gamma_n\| \leq \|(\Gamma_n F'(x_{n+1}))^{-1}\| \|\Gamma_n\| \\ &\leq \frac{\|\Gamma_n\|}{1 - \|I - \Gamma_n F'(x_{n+1})\|} \leq \frac{\|\Gamma_n\|}{1 - a_n h(a_n)} = f(a_n) \|\Gamma_n\|. \end{aligned}$$

Por  $[\mathbf{III}_n]$  tenemos que  $\|L_F(x_n)\| \leq a_n < r$  y, como la sucesión  $\{a_n\}$  es decreciente,  $\tilde{H}(L_F(x_n))$  existe y

$$\|I - \tilde{H}(L_F(x_n))\| = \left\| \sum_{k \geq 2} 2A_k L_F(x_n)^{k-1} \right\| \leq \sum_{k \geq 2} 2A_k a_n^{k-1} = a_n \nu(a_n).$$

Ahora, al igual que en el caso  $n = 1$ , para probar  $[\mathbf{II}_{n+1}]$ , hacemos uso de la descomposición integral para el operador  $F$ , obtenida a partir de la fórmula de Taylor en (2.17), y tomando normas

$$\begin{aligned} \|F(x_{n+1})\| &\leq N\omega(\|y_n - x_n\|) \|y_n - x_n\|^2 \\ &\quad + \frac{M}{2} \left[ a_n (1 + (1 + a_n)\nu(a_n)) + \frac{a_n^2}{4} (1 + a_n\nu(a_n))^2 \right] \|y_n - x_n\|^2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} &\|\Gamma_{n+1} F(x_{n+1})\| \\ &\leq f(a_n) \left[ Nb_n + \frac{a_n^2}{2} \left( 1 + (1 + a_n)\nu(a_n) + \frac{a_n}{4} (1 + a_n\nu(a_n))^2 \right) \right] \|\Gamma_n F(x_n)\|. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la definición de  $g$ , obtenemos  $[\mathbf{II}_{n+1}]$ :

$$\|\Gamma_{n+1} F(x_{n+1})\| \leq f(a_n) g(a_n, b_n) \|\Gamma_n F(x_n)\| = c_n \|\Gamma_n F(x_n)\|.$$

Entonces,

$$M \|\Gamma_{n+1}\| \|\Gamma_{n+1} F(x_{n+1})\| \leq M f(a_n) \|\Gamma_n\| c_n \|\Gamma_n F(x_n)\| \leq a_n c_n f(a_n) = a_{n+1},$$

y  $\|L_F(x_{n+1})\| \leq a_{n+1}$ . Además, como  $a_{n+1} < r$ , existe  $\tilde{H}(L_F(x_{n+1}))$  y

$$\|\tilde{H}(L_F(x_{n+1}))\| \leq 1 + \sum_{k \geq 2} 2A_k a_{n+1}^{k-1} = 1 + a_{n+1} \nu(a_{n+1}),$$

$$\|I - \tilde{H}(L_F(x_{n+1}))\| \leq \sum_{k \geq 2} 2A_k a_{n+1}^{k-1} = a_{n+1} \nu(a_{n+1}),$$

luego se sigue [III<sub>n+1</sub>].

Ahora, sin más que tener en cuenta que la sucesión  $\{c_n\}$  es decreciente y  $c_0 < 1$ , es fácil ver [IV<sub>n+1</sub>]:

$$\begin{aligned} & \| \Gamma_{n+1} \| \omega(\|y_{n+1} - x_{n+1}\|) \| \Gamma_{n+1} F(x_{n+1}) \| \\ & \leq f(a_n) \| \Gamma_n \| \omega(c_n \|y_n - x_n\|) c_n \| \Gamma_n F(x_n) \| \\ & \leq f(a_n) \| \Gamma_n \| \varphi(c_n) \omega(\|y_n - x_n\|) c_n \| \Gamma_n F(x_n) \| \leq b_{n+1}. \end{aligned}$$

Finalmente, a partir de las relaciones de recurrencia que acabamos de demostrar, es fácil ver que

$$\begin{aligned} \|x_{n+2} - y_{n+1}\| & \leq \left\| \frac{1}{2} L_F(x_{n+1}) \tilde{H}(L_F(x_{n+1})) \right\| \| \Gamma_{n+1} F(x_{n+1}) \| \\ & \leq \frac{1}{2} a_{n+1} (1 + a_{n+1} \nu(a_{n+1})) \| \Gamma_{n+1} F(x_{n+1}) \|, \\ \|x_{n+2} - x_{n+1}\| & \leq \|x_{n+2} - y_{n+1}\| + \|y_{n+1} - x_{n+1}\| \leq h(a_{n+1}) \| \Gamma_{n+1} F(x_{n+1}) \|. \end{aligned}$$

Además, por [VII<sub>n</sub>]

$$\begin{aligned} \|x_{n+2} - x_0\| & \leq \|x_{n+2} - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_0\| \\ & \leq h(a_{n+1}) \| \Gamma_{n+1} F(x_{n+1}) \| + h(a_0) \left( \sum_{k=0}^n c_0^k \right) \eta, \end{aligned}$$

y como la sucesión  $\{a_n\}$  es decreciente y las funciones  $f$  y  $g$  son crecientes en una y dos variables respectivamente, entonces

$$\|x_{n+2} - x_0\| \leq h(a_0) \left( \prod_{k=0}^n c_0 \right) \eta + h(a_0) \left( \sum_{k=0}^n c_0^k \right) \eta = h(a_0) \left( \sum_{k=0}^{n+1} c_0^k \right) \eta.$$

Por lo tanto, el teorema queda demostrado. ■

Una vez probadas las relaciones de recurrencia [I<sub>n</sub>]-[VII<sub>n</sub>], pasamos a estudiar la convergencia de la sucesión  $\{x_n\}$ , que proporciona la familia de procesos iterativos (1.3). Veremos que la sucesión converge a una solución  $x^*$  de la ecuación (3.1). Además, estudiaremos el caso de funciones  $\omega$  cuasi-homogéneas, es decir, el caso en el que la función  $\omega$  satisface una desigualdad del siguiente tipo:  $\omega(tz) \leq t^p \omega(z)$ ,  $p \in [0, 1]$ . Esto va a permitir obtener  $R$ -orden de convergencia al menos  $2 + p$ .

### 3.4.2. Convergencia semilocal

Para establecer la convergencia de la sucesión  $\{x_n\}$ , dada en (1.3), tenemos que probar que es una sucesión de Cauchy, puesto que está definida en un espacio de Banach. También probaremos la unicidad de solución.

Al igual que en el estudio de la sección 3.3.2, realizado bajo una condición de Hölder para  $F''$ , proponemos unos resultados técnicos que proporcionen propiedades de las funciones reales dadas en (3.16) y (3.20), así como para las sucesiones dadas en (3.19). A partir de las propiedades obtenidas para las funciones reales y del comportamiento de las sucesiones reales probaremos la convergencia de la sucesión  $\{x_n\}$ .

**Lema 3.4.2** Sean  $\nu, h, f$  y  $g$  las funciones reales dadas en (3.16) y (3.20). Entonces, se tiene

- (i) Si  $h(a_0)a_0 < 1$ ,  $f(t)$  es creciente y  $f(t) > 1$  para  $t \in (0, a_0)$ .
- (ii) Fijado  $t$ ,  $g(t, u)$  es creciente como función de  $u$ . Además, fijado  $u$ ,  $g(t, u)$  es creciente como función de  $t$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}^+$ .

*Demostración.* Análoga a la dada en el lema 3.3.2 bajo una condición de Hölder para el operador  $F''$ . ■

**Lema 3.4.3** Sea  $\gamma = c_0 f(a_0)$ ,  $\varphi(c_0) \leq 1$  y  $b_0 < \kappa_0$ , donde

$$\kappa_0 = 2 + a_0 + \frac{1}{2}h(a_0)(-2(1 + 2a_0) + a_0h(a_0)(-1 + 2a_0)).$$

Entonces, si  $h(a_0)a_0 < 1$ , las sucesiones  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  y  $\{c_n\}$ , dadas en (3.19), son decrecientes. Además,  $c_0 < 1$ .

*Demostración.* Por una parte, para que la sucesiones  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  y  $\{c_n\}$  sean decrecientes, es suficiente que se cumpla:

$$a_1 < a_0 \quad \text{y} \quad b_1 < b_0, \quad (3.21)$$

Si se cumple (3.21), es inmediato que  $c_1 < c_0$ . Además, por el lema 3.4.2,  $f$  y  $g$  son funciones crecientes y por hipótesis  $\varphi$  también lo es, entonces

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 c_1 f(a_1) < a_0 c_0 f(a_0) = a_1, \\ b_2 &= b_1 c_1 \varphi(c_1) f(a_1) < b_0 c_0 \varphi(c_0) f(a_0) = b_1, \\ c_2 &= f(a_1) g(a_1, b_1) < f(a_0) g(a_0, b_0) = c_1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, sin mas que aplicar un proceso inductivo, se sigue que  $a_{n+1} < a_n$ ,  $b_{n+1} < b_n$  y  $c_{n+1} < c_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Por otra parte,  $a_1 < a_0$  es equivalente a que  $\gamma < 1$ . Además, como  $\gamma < 1$  obtenemos  $c_0 < 1$ , puesto que  $f(a_0) > 1$ .

Ahora, por la definición de las funciones  $f$  y  $g$ , es fácil ver que

$$\gamma < 1 \Leftrightarrow b_0 < \kappa_0 = 2 + a_0 + \frac{1}{2}h(a_0)(-2(1 + 2a_0) + a_0h(a_0)(-1 + 2a_0)). \quad \blacksquare$$

**Lema 3.4.4** En las hipótesis del lema 3.4.3, se tiene:

$$(i) \quad \gamma = c_0 f(a_0) \in (0, 1).$$

$$(ii) \quad \forall t, u > 0 \text{ y } \gamma \in (0, 1), \quad f(\gamma t) < f(t), \quad g(\gamma t, \gamma u) < \gamma g(t, u).$$

$$(iii) \quad a_{n+1} < \gamma^{2^n} a_n < \gamma^{2^{n+1}-1} a_0, \quad b_{n+1} < \gamma^{2^n} b_n < \gamma^{2^{n+1}-1} b_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(iv) \quad c_{n+1} < \gamma^{2^n} c_n, \quad c_{n+1} < \gamma^{2^{n+1}} \Delta, \quad \Delta = \frac{1}{f(a_0)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Demostración.* La demostración de (i) y (ii) es inmediata a partir, de las definiciones de  $\gamma$ ,  $f$  y  $g$ . A continuación, demostramos (iii) y (iv) usando inducción. Para el caso  $n = 1$ , tenemos que:

$$a_2 = a_1 c_1 f(a_1) < a_1 \gamma c_0 f(a_0) = \gamma^2 a_1$$

y

$$b_2 = b_1 c_1 \varphi(c_1) f(a_1) < b_1 \gamma c_0 f(a_0) = \gamma^2 b_1.$$

Por otra parte,

$$c_2 = f(a_2) g(a_2, b_2) < f(\gamma^2 a_1) g(\gamma^2 a_1, \gamma^2 b_1) < \gamma^2 f(a_1) g(a_1, b_1) = \gamma^2 c_1.$$

Ahora, aplicando inducción, por el lema 3.4.2 y lema 3.4.3, se sigue:

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_{n+1} c_{n+1} f(a_{n+1}) < \gamma^{2^n} a_n \gamma^{2^n} c_n f(\gamma^{2^n} a_n) \\ &< \left(\gamma^{2^n}\right)^2 a_n c_n f(a_n) < \left(\gamma^{2^n}\right)^2 a_{n+1} = \gamma^{2^{n+1}} a_{n+1}, \\ b_{n+2} &= b_{n+1} c_{n+1} \varphi(c_{n+1}) f(a_{n+1}) < \gamma^{2^n} b_n \gamma^{2^n} c_n \varphi(c_n) f(\gamma^{2^n} a_n) \\ &< \left(\gamma^{2^n}\right)^2 b_n c_n \varphi(c_n) f(a_n) = \gamma^{2^{n+1}} b_{n+1}, \\ c_{n+2} &= f(a_{n+2}) g(a_{n+2}, b_{n+2}) < f(\gamma^{2^{n+1}} a_{n+1}) g(\gamma^{2^{n+1}} a_{n+1}, \gamma^{2^{n+1}} b_{n+1}) \\ &< \gamma^{2^{n+1}} c_{n+1}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} a_{n+2} &< \gamma^{2^{n+1}} a_{n+1} < \gamma^{2^{n+1}} \gamma^{2^n} a_n < \dots < \gamma^{2^{n+2}-1} a_0, \\ b_{n+2} &< \gamma^{2^{n+1}} b_{n+1} < \gamma^{2^{n+1}} \gamma^{2^n} b_n < \dots < \gamma^{2^{n+2}-1} b_0, \end{aligned}$$

y consecuentemente

$$\begin{aligned} c_{n+2} &= f(a_{n+2}) g(a_{n+2}, b_{n+2}) < f(\gamma^{2^{n+2}-1} a_0) g(\gamma^{2^{n+2}-1} a_0, \gamma^{2^{n+2}-1} b_0) \\ &< f(a_0) \gamma^{2^{n+2}-1} g(a_0, b_0) = \gamma^{2^{n+2}} \frac{c_0}{\gamma} = \frac{\gamma^{2^{n+2}}}{f(a_0)} = \gamma^{2^{n+2}} \Delta, \end{aligned}$$

donde  $\Delta = \frac{1}{f(a_0)}$ . ■

**Teorema 3.4.5** Sea  $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$  un operador no lineal dos veces diferenciable Fréchet, satisfaciendo **(C1)**–**(C3)**, **(W4)** y **(W5)**. Asumimos que  $a_0 < r$ , con  $r$  el radio de convergencia de la serie (3.7),  $a_0 h(a_0) < 1$ ,  $b_0 < \kappa_0$  y  $\varphi(c_0) \leq 1$ . Si  $B(x_0, R) \subset \Omega$ , donde  $R = \frac{h(a_0)\eta}{1-c_0}$ , entonces la familia de procesos iterativos (1.3), comenzando en  $x_0$ , converge a una solución  $x^*$  de la ecuación (3.1) con al menos  $R$ -orden dos. En este caso, la solución  $x^*$  y las iteraciones  $x_n$  pertenecen a  $B(x_0, R)$  y  $x^*$  es única en  $B(x_0, \frac{2}{M\beta} - R) \cap \Omega$ . Además, se obtienen las siguientes estimaciones a priori del error

$$\|x^* - x_n\| < h(\gamma^{2^n-1}a_0)\eta\gamma^{2^n-1}\Delta^n \frac{1}{1-\gamma^{2^n}\Delta}.$$

*Demostración.* Por las hipótesis del teorema, es evidente que  $x_0 \in \Omega$ . También es claro que  $y_0, x_1 \in \overline{B(x_0, R)} \subset \Omega$ , sin más que tener en cuenta las condiciones iniciales **(C1)**–**(C3)**, **(W4)** y **(W5)**. Además, por el lema 3.4.1,  $y_1 \in \overline{B(x_0, R)} \subset \Omega$  y por lo tanto, aplicando un proceso inductivo se sigue que  $y_n, x_n \in \overline{B(x_0, R)} \subset \Omega$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$ .

A continuación establecemos la convergencia de la sucesión  $\{x_n\}$  dada por la familia de procesos iterativos (1.3), probando que es una sucesión de Cauchy.

Como consecuencia de los tres lemas anteriores se sigue que:

$$\prod_{j=0}^{k-1} c_j < \prod_{j=0}^{k-1} \gamma^{2^j} \Delta = \gamma^{2^k-1} \Delta^k.$$

Ahora, por las relaciones de recurrencia [II<sub>n</sub>] y [VII<sub>n</sub>], tenemos que

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq h(a_k)\|L_k F(x_k)\| < h(\gamma^{2^k-1}a_0)\eta \prod_{j=0}^{k-1} c_j < h(\gamma^{2^k-1}a_0)\eta \gamma^{2^k-1} \Delta^k.$$

Entonces, dados  $n, m \in \mathbb{N}$ , se sigue:

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - x_n\| &\leq \sum_{k=n}^{n+m-1} \|x_{k+1} - x_k\| < \sum_{k=n}^{n+m-1} h(\gamma^{2^k-1}a_0)\eta\gamma^{2^k-1}\Delta^k \\ &< h(\gamma^{2^n-1}a_0)\gamma^{2^n-1}\Delta^n \left( \sum_{k=0}^{m-1} \gamma^{2^n[2^k-1]}\Delta^k \right) \eta. \end{aligned}$$

Sin más que aplicar ahora la desigualdad de Bernoulli para  $x = 1$ , ( $2^k - 1 > k$ ), como  $\gamma < 1$  y  $\Delta < 1$ , concluimos que la sucesión  $\{x_n\}$  es de Cauchy. Además, para todo  $n, m \in \mathbb{N}$ , se cumple la siguiente desigualdad:

$$\|x_{n+m} - x_n\| < h(\gamma^{2^n-1}a_0)\gamma^{2^n-1}\Delta^n \frac{1 - (\gamma^{2^n}\Delta)^m}{1 - \gamma^{2^n}\Delta}. \quad (3.22)$$

Denotamos por  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$  y probamos que la sucesión  $\{x_n\}$  converge a la solución  $x^*$  de (3.1). Por una parte, se tiene que

$$\|F(x_n)\| \leq \|F'(x_n)\Gamma_n F(x_n)\| \leq \|F'(x_n)\| \|\Gamma_n F(x_n)\|.$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \|F'(x_n)\| &\leq \|F'(x_n) - F'(x_0)\| + \|F'(x_0)\| \leq \|F''(x)\| \|x_n - x_0\| + \|F'(x_0)\| \\ &\leq Mh(a_0) \left( \sum_{k=0}^{n-1} c_0^k \right) \eta + \|F'(x_0)\| \end{aligned}$$

se tiene que la sucesión  $\{\|F'(x_n)\|\}$  está acotada. Entonces, puesto que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Gamma_n F(x_n)\| = 0$ , tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|F(x_n)\| = 0$ . Como consecuencia de que el operador  $F$  es dos veces diferenciable-Fréchet, se sigue por la continuidad de  $F$  que  $F(x^*) = 0$ , y por lo tanto  $x^*$  es una solución de la ecuación (3.1).

Ahora, si  $n = 0$  en (3.22):

$$\|x_m - x_0\| < h(a_0) \frac{1 - (\gamma\Delta)^m}{1 - \gamma\Delta} \eta < R,$$

y  $x_m \in B(x_0, R)$ . Además, puesto que  $\Delta < 1$ , cuando  $m \rightarrow \infty$ , obtenemos:

$$\|x^* - x_0\| \leq \frac{h(a_0)\eta}{1 - \gamma\Delta} = R.$$

Por lo tanto,  $x^* \in \overline{B(x_0, R)}$ .

Por otra parte, vamos a probar que la familia de procesos iterativos (1.3) tiene como mínimo el mismo  $R$ -orden que el método de Newton. Sin más que tomar  $m \rightarrow \infty$  en (3.22), tenemos:

$$\|x^* - x_n\| \leq \gamma^{2^n - 1} \Delta^n \frac{h(\gamma^{2^n - 1} a_0)\eta}{1 - \gamma^{2^n} \Delta} < \gamma^{2^n} \frac{R}{\gamma},$$

con lo que queda demostrado que la familia de procesos iterativos tiene al menos  $R$ -orden dos, puesto que

$$\|x^* - x_n\| < B\gamma^{2^n},$$

con  $B = \frac{R}{\gamma}$  una constante real positiva y  $\gamma < 1$ .

Finalmente, analizamos la unicidad de solución. Procediendo de manera análoga al análisis de la unicidad de solución del teorema 3.3.4, lo hacemos por reducción al absurdo. Para ello, supongamos que existe una solución  $y^*$  distinta de  $x^*$  de tal forma que  $F(y^*) = 0$  e  $y^* \in B(x_0, \frac{2}{M\beta} - R) \cap \Omega$ . Ver la

unicidad de solución en  $B(x_0, \frac{2}{M\beta} - R) \cap \Omega$  es equivalente a ver que existe el operador  $A^{-1}$ , donde

$$A = \int_0^1 \Gamma_0 F'(x^* + t(y^* - x^*)) dt.$$

Como

$$\begin{aligned} F'(x^* + t(y^* - x^*)) - F'(x_0) &= \int_{x_0}^{x^* + t(y^* - x^*)} F''(x) dx \\ &= \int_0^1 F''(x_0 + \tau(x^* + t(y^* - x^*) - x_0)) ((x^* - x_0)(1 - t) + t(y^* - x_0)) d\tau, \end{aligned}$$

tomando normas queda

$$\|F'(x^* + t(y^* - x^*)) - F'(x_0)\| \leq M (\|x^* - x_0\|(1 - t) + t\|y^* - x_0\|).$$

Puesto que  $y^* \in B(x_0, \frac{2}{M\beta} - R) \cap \Omega$  y  $x^* \in \overline{B(x_0, R)}$  tenemos que  $\|y^* - x_0\| < \frac{2}{M\beta} - R$  y  $\|x^* - x_0\| \leq R$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|I - A\| &\leq \|\Gamma_0\| \int_0^1 \|F'(x^* + t(y^* - x^*)) - F'(x_0)\| dt \\ &\leq \|\Gamma_0\| M \int_0^1 (\|x^* - x_0\|(1 - t) + t\|y^* - x_0\|) dt < \frac{M\beta}{2} \left( R + \frac{2}{M\beta} - R \right) = 1, \end{aligned}$$

y, por el lema de Banach,  $A^{-1}$  existe, y entonces  $y^* = x^*$ . ■

### 3.4.3. $R$ -orden de convergencia

Notemos que el hecho de tomar  $\omega$  cuasi-homogénea de orden  $p$ ,  $\omega(tz) \leq t^p \omega(z)$ , es un caso particular de **(W4)**, hipótesis que imponíamos en las condiciones iniciales de convergencia  $\omega(tz) \leq \varphi(t)\omega(z)$ , donde  $\varphi(t) = t^p$  y  $N = \frac{1}{(1+p)(2+p)}$ . En este caso, el análisis de la convergencia semilocal para las funciones  $\omega$ -condicionadas es el mismo que para las funciones  $\omega$  cuasi-homogéneas. Las relaciones de recurrencia se siguen satisfaciendo y tan sólo quedan modificadas las sucesiones descritas en (3.19) y la función real  $g$ , dada en (3.20), quedando ahora las mismas funciones auxiliares (3.16) que fueron empleadas en el estudio de la convergencia para el caso en el que  $F''$  satisface una condición de Hölder **(H4)**. Si  $\omega$  es cuasi-homogénea en el sentido anterior, las sucesiones escalares son ahora definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n c_n f(a_n), \quad n \geq 0, \\ b_{n+1} &= b_n c_n^{1+p} f(a_n), \quad n \geq 0, \\ c_{n+1} &= f(a_{n+1}) g(a_{n+1}, b_{n+1}), \quad n \geq 0. \end{aligned} \tag{3.23}$$

También como consecuencia directa de la cuasi-homogeneidad de la función  $\omega$ , la relación de recurrencia  $[IV_n]$  queda así:

$$\begin{aligned}
 & \|\Gamma_n\| \omega(\|y_n - x_n\|) \|\Gamma_n F(x_n)\| \\
 & \leq \|\Gamma_{n-1}\| \omega(c_{n-1} \|y_{n-1} - x_{n-1}\|) c_{n-1} f(a_{n-1}) \|\Gamma_{n-1} F(x_{n-1})\| \\
 & \leq \|\Gamma_{n-1}\| \varphi(c_{n-1}) \omega(\|y_{n-1} - x_{n-1}\|) c_{n-1} f(a_{n-1}) \|\Gamma_{n-1} F(x_{n-1})\| \\
 & = \|\Gamma_{n-1}\| \omega(\|y_{n-1} - x_{n-1}\|) (c_{n-1})^{1+p} f(a_{n-1}) \|\Gamma_{n-1} F(x_{n-1})\| \leq b_n.
 \end{aligned}$$

A continuación, estudiamos la convergencia de la sucesión  $\{x_n\}$ , cuando  $\omega$  es cuasi-homogénea de orden  $p$ , y obtenemos su  $R$ -orden de convergencia. Para ello, analizamos el comportamiento de las sucesiones reales  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  y  $\{c_n\}$ , descritas en (3.23).

De la misma manera que en la sección anterior, obtenemos los siguientes resultados. Sean  $f(t)$ ,  $g(t, u)$  y  $h(t)$  funciones reales dadas en (3.16). Entonces,

- (i) Si  $h(a_0)a_0 < 1$ ,  $f(t)$  es creciente y  $f(t) > 1$  para  $t \in (0, a_0)$ .
- (ii) Fijado  $t$ ,  $g(t, u)$  es creciente como función de  $u$ . Además, fijado  $u$ ,  $g(t, u)$  es creciente como función de  $t$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}^+$ .
- (iii)  $\forall t, u > 0$  y  $\gamma \in (0, 1)$  se tiene que

$$\begin{aligned}
 f(\gamma t) & < f(t) \\
 g(\gamma t, \gamma^{1+p}u) & < \gamma^{1+p}g(t, u).
 \end{aligned}$$

Además, al igual que en los lemas 3.4.3 y 3.4.4, tenemos las siguientes propiedades para las sucesiones  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  y  $\{c_n\}$ , dadas en (3.23):

Sean  $a_0 < r$ ,  $a_0 h(a_0) < 1$ ,  $\kappa_0 > 0$  y  $b_0 < \kappa_0$ , donde

$$\kappa_0 = \frac{1}{2}(1+p)(2+p)(2(2+a_0) + h(a_0))(-2(1+2a_0) + a_0(-1+2a_0)h(a_0)),$$

entonces

- (i)  $\gamma = c_0 f(a_0) < 1$ .
- (ii) Las sucesiones  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  y  $\{c_n\}$  son decrecientes.
- (iii)  $a_{n+1} < \gamma^{(2+p)^n} a_n < \gamma^{\frac{(2+p)^{n+1}-1}{1+p}} a_0$ ,  
 $b_{n+1} < \left(\gamma^{(2+p)^n}\right)^{1+p} b_n < \gamma^{(2+p)^{n+1}-1} b_0$ ,  $\forall n \geq 1$ .
- (iv)  $c_{n+1} < \left(\gamma^{(2+p)^n}\right)^{1+p} c_n$ ,  $c_{n+1} < \gamma^{(2+p)^{n+1}} \Delta$ ,  $\Delta = \frac{1}{f(a_0)}$ ,  $\forall n \geq 1$ .

Como consecuencia de lo anterior, en el caso en el que  $\omega$  es cuasi-homogénea de orden  $p$ , el teorema de convergencia semilocal 3.4.5, se sigue cumpliendo. Pero además, la familia de procesos iterativos (1.3) tiene  $R$ -orden de convergencia al menos  $2+p$ , como demostramos en el siguiente resultado.

**Teorema 3.4.6** Sea  $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$  un operador no lineal dos veces diferenciable Fréchet, satisfaciendo (C1)–(C3), (W4) y (W5), siendo  $\omega$  cuasi-homogénea de orden  $p$ . Asumimos que  $a_0 < r$ , con  $r$  el radio de convergencia de la serie (3.7),  $a_0 h(a_0) < 1$  y  $b_0 < \kappa_0$ . Si  $B(x_0, R) \subset \Omega$ , donde  $R = \frac{h(a_0)\eta}{1-c_0}$ , entonces la familia de procesos iterativos (1.3), comenzando en  $x_0$ , converge a una solución  $x^*$  de la ecuación (3.1) con  $R$ -orden de convergencia al menos  $2 + p$ . Además, se obtienen las siguientes estimaciones a priori del error

$$\|x^* - x_n\| < h\left(\gamma^{\frac{(2+p)^n-1}{1+p}} a_0\right) \frac{\gamma^{\frac{(2+p)^n-1}{1+p}} \Delta^n}{1 - \gamma^{(2+p)^n} \Delta} \eta.$$

*Demostración.* Teniendo en cuenta que

$$\prod_{j=0}^{k-1} c_j \leq \prod_{j=0}^{k-1} \gamma^{(2+p)^j} \Delta = \gamma^{\frac{(2+p)^k-1}{1+p}} \Delta^k,$$

y, a partir de las relaciones de recurrencia [II<sub>n</sub>] y [VII<sub>n</sub>] del lema 3.4.1, se tiene que

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_k\| &\leq h(a_k) \|I_k F(x_k)\| < h\left(\gamma^{\frac{(2+p)^k-1}{1+p}} a_0\right) \eta \prod_{j=0}^{k-1} c_j \\ &< h\left(\gamma^{\frac{(2+p)^k-1}{1+p}} a_0\right) \eta \gamma^{\frac{(2+p)^k-1}{1+p}} \Delta^k. \end{aligned}$$

Entonces, dados  $n, m \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - x_n\| &\leq \sum_{k=n}^{n+m-1} \|x_{k+1} - x_k\| < \sum_{k=n}^{n+m-1} h\left(\gamma^{\frac{(2+p)^k-1}{1+p}} a_0\right) \eta \gamma^{\frac{(2+p)^k-1}{1+p}} \Delta^k \\ &< h\left(\gamma^{\frac{(2+p)^n-1}{1+p}} a_0\right) \eta \gamma^{\frac{(2+p)^n-1}{1+p}} \Delta^n \left(\sum_{k=0}^{m-1} \gamma^{\frac{(2+p)^n + (2+p)^k - 1}{1+p}} \Delta^k\right). \end{aligned}$$

Aplicando ahora la desigualdad de Bernoulli,  $((1+x)^k > 1+kx)$ , con  $x = 1+p$ , se sigue  $(2+p)^k - 1 > (1+p)k$  y

$$\|x_{n+m} - x_n\| < h\left(\gamma^{\frac{(2+p)^n-1}{1+p}} a_0\right) \eta \gamma^{\frac{(2+p)^n-1}{1+p}} \Delta^n \frac{1 - (\gamma^{(2+p)^n} \Delta)^m}{1 - \gamma^{(2+p)^n} \Delta}, \quad (3.24)$$

para todo  $n, m \in \mathbb{N}$ . Ahora bien, si  $m \rightarrow \infty$  en (3.24), se sigue

$$\|x^* - x_n\| < \gamma^{\frac{(2+p)^n-1}{1+p}} \Delta^n \frac{h\left(\gamma^{\frac{(2+p)^n-1}{1+p}} a_0\right) \eta}{1 - \gamma^{(2+p)^n} \Delta} < \left(\gamma^{\frac{1}{1+p}}\right)^{(2+p)^n} \frac{R}{\gamma^{\frac{1}{1+p}}}.$$

Por lo tanto, la familia de procesos iterativos (1.3), en el caso  $\omega$  cuasi-homogénea de orden  $p$ , tiene al menos  $R$ -orden de convergencia  $2 + p$ . ■

### 3.4.4. Aplicación a algunas ecuaciones integrales no lineales de tipo Hammerstein

Una posibilidad interesante que surge a partir del estudio de la convergencia de procesos iterativos es obtener resultados de existencia y unicidad de soluciones a la hora de resolver diferentes tipos de ecuaciones. Además, también podemos obtener una aproximación de la solución a partir de una discretización del problema. Estas son las dos aplicaciones que vamos a considerar en esta sección.

#### Localización de soluciones

En primer lugar, aplicamos los resultados previos para obtener dominios de existencia y unicidad de solución para la siguiente ecuación integral no lineal de tipo Hammerstein, ([52]):

$$x(s) = f(s) + \int_0^1 \kappa(s, t)(x(t)^{5/2} + x(t)^3/5) dt, \quad s \in [0, 1], \quad (3.25)$$

donde  $x \in C([0, 1])$ ,  $s, t \in [0, 1]$ , el núcleo  $\kappa(s, t)$  de esta ecuación es la función de Green:

$$\kappa(s, t) = \begin{cases} t(s-1), & 0 \leq t \leq s, \\ (t-1)s, & s \leq t \leq 1, \end{cases}$$

y  $f$  es una función continua conocida, de tal forma que  $f(s) > 0$ ,  $s \in [0, 1]$ . En este ejemplo consideraremos  $f(s) = 1$ .

Resolver (3.25) es equivalente a resolver la ecuación  $F(x) = 0$ , donde  $F : \Omega \subseteq C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ , viene dada de la siguiente manera:

$$[F(x)](s) = x(s) - f(s) - \int_0^1 \kappa(s, t)(x(t)^{5/2} + x(t)^3/5) dt, \quad s \in [0, 1], \quad (3.26)$$

y  $\Omega$  es un dominio apropiado abierto, convexo y no vacío. Observemos que la primera y la segunda derivadas de Fréchet para el operador  $F$  son

$$[F'(x)y](s) = y(s) - \int_0^1 \kappa(s, t) \left( \frac{5}{2}x(t)^{3/2} + \frac{3}{5}x(t)^2 \right) y(t) dt,$$

y

$$[F''(x)yz](s) = - \int_0^1 \kappa(s, t) \left( \frac{15}{4}x(t)^{1/2} + \frac{6}{5}x(t) \right) z(t)y(t) dt. \quad (3.27)$$

Notemos que, la segunda derivada Fréchet de este operador,  $F''$ , no satisface una condición de Lipschitz **(C4)**, ni tampoco satisface una condición de Hölder **(H4)**, pero el operador  $F''$  viene dado por una suma de operadores Lipschitz y Hölder, por lo que  $F''$  satisface las condiciones **(W4)** y **(W5)** del

teorema 3.4.6 , por ello podemos aproximar una solución de la ecuación (3.26) mediante un proceso iterativo de la familia (1.3). Consideramos, por ejemplo, el método de Super-Halley:

$$x_{n+1} = x_n - \left( I + \frac{1}{2} L_F(x_n) (I - L_F(x_n))^{-1} \right) \Gamma_n F(x_n).$$

Queremos encontrar una función  $x^*$  que sea una solución de (3.25) en el espacio de las funciones continuas en el intervalo  $[0, 1]$ ,  $x^* \in X = C([0, 1])$ , considerando la norma del máximo:

$$\|x\|_\infty := \max_{t \in [0,1]} |x(t)|, \quad x \in X.$$

En este caso, teniendo en cuenta que la solución  $x^*$  tiene que satisfacer la ecuación (3.25), tenemos:

$$\|x^*\| \leq 1 + \frac{1}{8} \|x^*\|^{5/2} + \frac{1}{40} \|x^*\|^3,$$

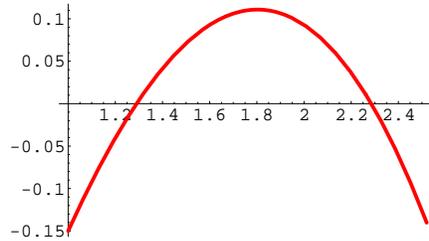
es decir,

$$\|x^*\| - \frac{1}{8} \|x^*\|^{5/2} - \frac{1}{40} \|x^*\|^3 - 1 \leq 0. \quad (3.28)$$

Como se muestra en la figura 3.2, (3.28) se satisface para una función continua  $x$ , de tal manera que  $\|x\| < r_1$  y  $\|x\| > r_2$ , donde  $r_1$  y  $r_2$  son las raíces positivas de la ecuación

$$t - \frac{1}{8} t^{5/2} - \frac{1}{40} t^3 - 1 = 0.$$

Como consecuencia, si buscamos una solución  $x^*$  de la ecuación integral (3.25)



**Figura 3.2.** Prelocalización de una solución  $x^*$  de (3.25)

de tal manera que  $\|x^*\| < r_1$ , denotando por  $r_1$  la raíz positiva más pequeña,  $r_1 = 1.28982$ , podemos considerar  $\Omega = B(0, r) \subseteq C([0, 1])$ , con  $r \in (r_1, r_2)$ ,

como un dominio abierto, convexo y no vacío. Por ejemplo, elegimos  $r = 1.7$ . En primer lugar, vamos a probar que se satisfacen las condiciones **(C1)**–**(C3)**, **(W4)** y **(W5)**. Si elegimos como punto de salida  $x_0(s) = 1$ , entonces teniendo en cuenta que las funciones  $\varphi$  y  $\omega$  son respectivamente  $\varphi(\tau) = \tau^{1/2}$  y

$$\omega(z) = \frac{15}{32}z^{1/2} + \frac{3}{20}z,$$

se tiene que  $A = \max_{s \in [0,1]} \left| \int_0^1 \kappa(s,t) dt \right| = \frac{1}{8}$ ,  $N = \int_0^1 \varphi(\tau)(1-\tau) d\tau = \frac{4}{15}$ . Por lo tanto,

$$F(x_0)(s) = - \int_0^1 \kappa(s,t) \left(1 + \frac{1}{5}\right) dt$$

y  $\|F(x_0)\| \leq 3/20$ . Ahora bien, como  $\|I - F'(x_0)\| \leq 31/80 < 1$ ,  $\Gamma_0$  está definido y  $\|\Gamma_0\| \leq 80/49 = \beta$ . Además,  $\eta = 12/49$  y  $\|F''(x)\| \leq 0.866175 = M$ , por lo tanto tenemos las constantes  $\beta$ ,  $\eta$  y  $M$  de las condiciones **(C1)**–**(C3)**. A partir de las funciones  $\varphi$  y  $\omega$  obtenemos **(W4)** y **(W5)**.

Notemos que el radio de convergencia de la serie (3.7) asociada al método de Super-Halley es  $r = 1$ .

Ahora, las condiciones del teorema 3.4.6 se satisfacen y podemos establecer el dominio de existencia y el de unicidad de solución para la ecuación integral (3.25). En efecto,  $a_0 = M\beta\eta = 0.346326 < r = 1$ ,  $a_0h(a_0) = 0.438069 < 1$ ,  $b_0 = \beta\eta\omega(\eta) = 0.0107437 < \kappa_0 = \frac{2a_0^4 - 9a_0^3 + 32a_0^2 - 32a_0 + 8}{8(1-a_0)^2} = 0.450469$ , entonces  $\gamma = c_0f(a_0) = 0.710306 < 1$ . Por lo tanto, la ecuación (3.25) tiene una solución  $x^*$  en  $B(1, 0.515552) \subset B(0, 1.7)$ , que es única en  $B(1, 0.898712)$ . Notemos que en este caso  $p = 1/2$ , por lo que podemos garantizar  $R$ -orden de convergencia al menos  $5/2$  cuando aplicamos un proceso iterativo de la familia (1.3), en la resolución de la ecuación integral (3.25).

### Aproximación numérica de soluciones

A continuación, consideramos la siguiente ecuación integral no lineal de tipo Fredholm y segunda clase:

$$x(s) = f(s) + \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{s}{s+t} x(t)^{17/8} dt, \quad s \in [0, 1], \quad (3.29)$$

con  $f$  una función continua dada de tal forma que  $f(s) > 0$ ,  $s \in [0, 1]$ . Obtenemos una aproximación numérica de la solución usando el método de Super-Halley. Queremos encontrar una función  $x^* \in X = C([0, 1])$ , solución de la ecuación (3.29), en el espacio de las funciones continuas  $C([0, 1])$ , donde consideramos la norma del máximo. Para ello, tomamos la ecuación  $F(x) = 0$ , con el operador  $F : \Omega \subseteq C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$  definido en  $\Omega$  un subconjunto abierto, convexo y no vacío, de esta forma:

$$[F(x)](s) = x(s) - f(s) - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{s}{s+t} x(t)^{17/8} dt, \quad s \in [0, 1]. \quad (3.30)$$

Como una aplicación del teorema 3.4.6, damos dominios de existencia y unicidad de solución para la ecuación (3.29).

Observamos que la primera y segunda derivadas de Fréchet para el operador  $F$  son

$$[F'(x)y](s) = y(s) - \frac{17}{32} \int_0^1 \frac{s}{s+t} x(t)^{9/8} y(t) dt, \quad s \in [0, 1],$$

y

$$[F''(x)(y, z)](s) = -\frac{153}{256} \int_0^1 \frac{s}{s+t} x(t)^{1/8} z(t)y(t) dt, \quad s \in [0, 1].$$

Si elegimos como primera aproximación la función continua  $x_0(s) = 1$  y  $f(s) = x_0(s)$ , entonces  $A = \max_{s \in [0, 1]} \left| \int_0^1 \frac{s}{s+t} dt \right| = \max_{s \in [0, 1]} \left( s \ln \frac{s+1}{s} \right) = \ln 2$ . Las funciones  $\varphi$  y  $\omega$  son  $\varphi(\tau) = \tau^{1/8}$  y  $\omega(z) = \frac{153}{256} \ln 2 z^{1/8}$ , por lo tanto  $N = \int_0^1 \tau^{1/8} (1-\tau) d\tau = \frac{64}{153}$ . Calculamos ahora los valores de  $\beta$ ,  $\eta$  y  $M$ . Así,

$$[F(x_0)](s) = -\frac{1}{4} \int_0^1 \frac{s}{s+t} dt \quad y \quad \|F(x_0)\| = \frac{\ln 2}{4},$$

$$\|I - F'(x_0)\| \leq \frac{17 \ln 2}{32} < 1,$$

entonces  $\Gamma_0$  existe y

$$\|\Gamma_0\| \leq \frac{32}{32 - 17 \ln 2} = 1.58287 = \beta,$$

$$\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \frac{8 \ln 2}{32 - 17 \ln 2} = 0.27429 = \eta.$$

Notemos que el operador derivada segunda no está acotado. Sin embargo, si  $x^* \in C([0, 1])$  es una solución de (3.29), tomando normas, se cumple

$$\|x^*\| - \frac{\ln 2}{4} \|x^*\|^{17/8} - 1 \leq 0,$$

y esto es cierto en  $B(0, 1.30519)$ . Por lo tanto, consideramos  $F : B(0, 1.30519) \subseteq C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$  y obtenemos

$$\|F''(x)\| \leq 0.428288 = M.$$

Consecuentemente,  $a_0 = M\beta\eta = 0.185947$ ,  $b_0 = N\beta\omega(\eta)\eta = 0.0640022$  y  $c_0 = f(a_0)g(a_0, b_0) = 0.0888722$ . Entonces, se satisfacen las condiciones del teorema 3.4.6 y la ecuación (3.29) tiene una solución  $x^* \in B(1, 0.335427)$  y

es única  $B(1, 2.61476)$ . En este caso,  $p = 1/8$  y por tanto podemos garantizar un  $R$ -orden de convergencia al menos  $17/8$ , cuando aplicamos en la resolución de (3.29), un proceso iterativo de la familia (1.3).

Finalmente, realizamos un estudio numérico de la ecuación (3.29) para obtener una aproximación numérica a la solución. Empleamos un proceso de discretización de manera que aproximamos la integral mediante la fórmula de cuadratura de Gauss-Legendre:

$$\int_0^1 f(t) dt \approx \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \beta_j f(t_j), \tag{3.31}$$

donde  $\beta_j$  son los pesos y  $t_j$  los nodos. Y obtenemos un sistema de ecuaciones no lineal.

Si  $m = 8$  y denotamos  $x_i = x(t_i)$ ,  $i = 1, \dots, 8$ , entonces la ecuación (3.29) puede expresarse como el siguiente sistema no lineal:

$$x_i = 1 + \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{t_i}{t_i + t} x(t)^{\frac{17}{8}} dt,$$

$$x_i \approx 1 + \frac{t_i}{8} \sum_{j=1}^8 \beta_j \frac{x_j^{\frac{17}{8}}}{t_i + t_j}, \quad i = 1, \dots, 8,$$

donde los pesos  $\beta_j$  y los nodos  $t_j$  están tabulados en la tabla 3.1.

$j$	1	2	3	4
$t_j$	0.01985507	0.10166676	0.237233795	0.40828268
$\beta_j$	0.10122854	0.22381034	0.31370665	0.36268378
$j$	5	6	7	8
$t_j$	0.59171732	0.762766205	0.89833324	0.98014493
$\beta_j$	0.36268378	0.31370665	0.22381034	0.10122854

**Tabla 3.1.** Pesos y nodos para la fórmula de cuadratura de Gauss-Legendre (3.31)

Denotando por  $a_{ij} = \frac{1}{8} \frac{t_i \beta_j}{t_i + t_j}$ , el sistema anterior puede escribirse de la siguiente manera

$$x_i = 1 + \sum_{j=1}^8 a_{ij} x_j^{\frac{17}{8}}, \quad i = 1, \dots, 8. \tag{3.32}$$

Y si denotamos por  $A = (a_{ij})$ , con  $i, j = 1, \dots, 8$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_8)^T$  y  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$ , el sistema puede escribirse de forma matricial como sigue:

$$\mathbf{x} = \mathbf{1} + A\mathbf{x}^{\frac{17}{8}}.$$

Resolver este sistema es equivalente a resolver la ecuación  $F(\mathbf{x}) = 0$ , donde

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{1} - A\mathbf{x}^{\frac{17}{8}}.$$

Llamamos  $D_k(x)$  a la matriz diagonal con las componentes del vector  $(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$  en la diagonal, entonces

$$F'(\mathbf{x})(\mathbf{y}) = \left[ I - \frac{17}{8}AD_{9/8}(\mathbf{x}) \right] \mathbf{y},$$

$$F''(\mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = -\frac{153}{64}A \begin{pmatrix} x_1^{1/8} z_1 y_1 \\ \vdots \\ x_8^{1/8} z_8 y_8 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, se tiene

$$\|F''(\mathbf{x})\| = \frac{153}{64}\|A\|\|\mathbf{x}\|^{1/8}.$$

Además, como  $F''(\mathbf{x})$  es un operador bilineal simétrico, tenemos el siguiente operador lineal

$$F''(\mathbf{x})(-, \mathbf{z}) = -\frac{153}{64}A \begin{pmatrix} x_1^{1/8} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_8^{1/8} z_8 \end{pmatrix} (-).$$

Para encontrar una aproximación de una solución para la ecuación  $F(\mathbf{x}) = 0$  aplicando el método de Super-Halley, realizamos los siguientes pasos; Conociendo  $\bar{x}_k \in \mathbb{R}^m$ :

Resolvemos el sistema lineal:

$$F'(\bar{x}_k)\bar{c}_k = -F(\bar{x}_k), \quad \text{donde } \bar{c}_k = \bar{y}_k - \bar{x}_k,$$

Resolvemos el sistema lineal:

$$[F'(\bar{x}_k) + F''(\bar{x}_k)\bar{c}_k]\bar{d}_k = -F(\bar{x}_k) + \frac{1}{2}F''(\bar{x}_k)\bar{c}_k^2.$$

Definimos el siguiente punto:

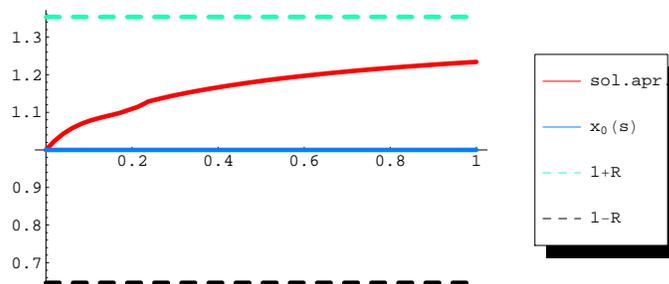
$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + \bar{d}_k.$$

$i$	1	2	3	4
$x_i$	1.02366	1.07758	1.12846	1.16793
$i$	5	6	7	8
$x_i$	1.19602	1.2149	1.22667	1.23276

**Tabla 3.2.** Aproximación numérica de una solución de (3.29)

Entonces obtenemos en la cuarta iteración del método de Super-Halley la aproximación a la solución que aparece en la tabla 3.2.

Interpolando la función que pasa a través de los puntos  $(t_i, x_i)$   $i = 1, \dots, 8$ , y teniendo en cuenta que hemos tomado como aproximación inicial  $x_0(s) = 1$ , obtenemos gráficamente la solución que aparece en la figura 3.3. También observamos que la aproximación interpolada de la solución se encuentra dentro del dominio de existencia de soluciones obtenido a partir del teorema 3.4.6.



**Figura 3.3.** Aproximación y región de existencia de soluciones de (3.29)

### 3.5. Relaciones de recurrencia para condiciones más suaves que las anteriores

En esta sección nos planteamos la posibilidad de rebajar aún más las condiciones de Kantorovich sobre el operador  $F''$  en el estudio de la convergencia de la familia de procesos iterativos (1.3) a una solución de la ecuación (3.1), exigiendo tan sólo las condiciones iniciales **(C1)**–**(C3)** para el operador  $F$ . Como veremos, bajo estas condiciones y mediante la técnica de relaciones de

recurrencia, es posible asegurar la convergencia semilocal de los procesos iterativos (1.3) a una solución de la ecuación (3.1) con  $R$ -orden de convergencia al menos dos.

### 3.5.1. Construcción de las relaciones de recurrencia

Consideramos la ecuación (3.1), donde  $F$  es un operador no lineal dos veces diferenciable Fréchet, definido en un dominio  $\Omega$  abierto, convexo y no vacío contenido en un espacio de Banach  $X$  y con valores en un espacio de Banach  $Y$ .

Realizamos el estudio de la convergencia de la familia de procesos iterativos (1.3) mediante la técnica de relaciones de recurrencia y probamos que, bajo las condiciones iniciales para el operador  $F$  **(C1)**–**(C3)**, la familia de procesos iterativos (1.3) converge a una solución de la ecuación (3.1). También damos los dominios de existencia y unicidad de solución, junto con estimaciones del error cometido al aproximar una solución.

Notemos que a partir de las condiciones iniciales deducimos

$$\|L_F(x_0)\| \leq \|G_0\| \|F''(x_0)\| \|G_0 F(x_0)\| \leq M\beta\eta.$$

Denotando por  $a_0 = M\beta\eta$ , si  $a_0 < r$ , siendo  $r$  el radio de convergencia de la serie (3.7),  $x_1$  está bien definido, puesto que  $H(L_F(x_0))$  existe y

$$\|H(L_F(x_0))\| \leq \sum_{k \geq 0} \|A_k L_F(x_0)^k\| \leq \sum_{k \geq 0} A_k a_0^k.$$

Además,

$$\|x_1 - x_0\| \leq \|H(L_F(x_0))\| \|G_0 F(x_0)\| \leq \left( \sum_{k \geq 0} A_k a_0^k \right) \|G_0 F(x_0)\|.$$

A lo largo de toda la sección consideramos las siguientes funciones reales auxiliares  $h$ ,  $f$  y  $g$ :

$$h(t) = \sum_{k \geq 0} A_k t^k, \quad f(t) = \frac{1}{1 - th(t)}, \quad g(t) = h(t) \left( 1 + \frac{t}{2} h(t) \right) - 1, \quad (3.33)$$

y a partir del parámetro  $a_0$  construimos la siguiente sucesión real

$$a_{n+1} = a_n f(a_n) g(a_n), \quad n \geq 0. \quad (3.34)$$

A continuación establecemos las relaciones de recurrencia que nos permitirán demostrar la convergencia de la familia de procesos iterativos (1.3) bajo las condiciones **(C1)**–**(C3)**.

**Lema 3.5.1** *Supongamos que  $x_n \in \Omega$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $a_0 < r$ , siendo  $r$  el radio de convergencia de la serie (3.7),  $a_0 h(a_0) < 1$ , y la sucesión auxiliar real  $\{a_n\}$  dada en (3.34) es decreciente, entonces se cumplen las siguientes relaciones de recurrencia:*

$$[I_n] \text{ Existe } \Gamma_n = [F'(x_n)]^{-1} \text{ y } \|\Gamma_n\| \leq f(a_{n-1})\|\Gamma_{n-1}\|,$$

$$[II_n] \|\Gamma_n F(x_n)\| \leq f(a_{n-1})g(a_{n-1})\|\Gamma_{n-1}F(x_{n-1})\|,$$

$$[III_n] \|\Gamma_n\|\|F''(x_n)\|\|\Gamma_n F(x_n)\| \leq a_n \text{ y existe } H(L_F(x_n)),$$

$$[IV_n] \|x_{n+1} - x_n\| \leq h(a_n)\|\Gamma_n F(x_n)\|,$$

$$[V_n] \|x_{n+1} - x_0\| \leq h(a_0) \left( \sum_{k=0}^n (f(a_0)g(a_0))^k \right) \|\Gamma_0 F(x_0)\|.$$

*Demostración.* Demostramos el resultado mediante un proceso inductivo para  $n$ . En primer lugar, probamos que las condiciones  $[I_n]$ - $[V_n]$  son ciertas para  $n = 1$ .

Primero, veamos que existe el operador inverso de  $F'(x_1)$  y es acotado. Como

$$F'(x_1) - F'(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} F''(x)dx = \int_0^1 F''(x_0 + t(x_1 - x_0))(x_1 - x_0)dt,$$

tomando normas, se sigue que

$$\|F'(x_1) - F'(x_0)\| \leq M\|x_1 - x_0\| \leq Mh(a_0)\eta,$$

entonces

$$\|I - \Gamma_0 F'(x_1)\| \leq \|\Gamma_0\|\|F'(x_1) - F'(x_0)\| \leq a_0 h(a_0) < 1.$$

Por el lema de Banach,  $\Gamma_1$  existe y  $[I_1]$  se sigue:

$$\begin{aligned} \|\Gamma_1\| &= \|\Gamma_1 F'(x_0)\Gamma_0\| \leq \left\| (\Gamma_0 F'(x_1))^{-1} \right\| \|\Gamma_0\| \leq \frac{\|\Gamma_0\|}{1 - \|I - \Gamma_0 F'(x_1)\|} \\ &\leq \frac{\|\Gamma_0\|}{1 - a_0 h(a_0)} = f(a_0)\|\Gamma_0\|. \end{aligned}$$

A partir de la fórmula de Taylor, se sigue

$$F(x_{n+1}) = F(x_n) + F'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} F''(x)(x_{n+1} - x) dx, \tag{3.35}$$

para  $x_{n+1} \in \Omega$ . Por otra parte,

$$\begin{aligned}
F'(x_n)(x_{n+1} - x_n) &= -F'(x_n) \left( \Gamma_n F(x_n) + \left( \sum_{k \geq 1} A_k L_F(x_n)^k \right) \Gamma_n F(x_n) \right) \\
&= -F(x_n) - F''(x_n) \left( \Gamma_n F(x_n) \sum_{k \geq 1} A_k L_F(x_n)^{k-1} \right) \Gamma_n F(x_n).
\end{aligned}$$

Entonces, haciendo el cambio  $x = x_n + t(x_{n+1} - x_n)$  en (3.35), obtenemos

$$\begin{aligned}
F(x_{n+1}) &= -F''(x_n) \left( \Gamma_n F(x_n) \left( \sum_{k \geq 1} A_k L_F(x_n)^{k-1} \right) \Gamma_n F(x_n) \right) \\
&\quad + \int_0^1 F''(x_n + t(x_{n+1} - x_n))(x_{n+1} - x_n)^2(1-t) dt.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Entonces, tomando normas en la descomposición (3.36), obtenemos

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_1 F(x_1)\| &\leq f(a_0) \|\Gamma_0\| \left( \|F''(x_0)\| \|\Gamma_0 F(x_0)\|^2 \left( \sum_{k \geq 1} A_k \|L_F(x_0)\|^{k-1} \right) \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 \|F''(x_0 + t(x_1 - x_0))\| \|x_1 - x_0\|^2(1-t) dt \right) \\
&\leq f(a_0) \left( \sum_{k \geq 1} A_k a_0^k + \int_0^1 a_0 h(a_0)^2(1-t) dt \right) \|\Gamma_0 F(x_0)\| \\
&\leq f(a_0) \left( h(a_0) - 1 + \frac{1}{2} a_0 h(a_0)^2 \right) \|\Gamma_0 F(x_0)\|
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la definición de  $g$  se sigue [II<sub>1</sub>]:

$$\|\Gamma_1 F(x_1)\| \leq f(a_0) g(a_0) \|\Gamma_0 F(x_0)\|.$$

Como consecuencia obtenemos [III<sub>1</sub>]:

$$\|\Gamma_1\| \|F''(x_1)\| \|\Gamma_1 F(x_1)\| \leq f(a_0)^2 g(a_0) a_0 = a_1,$$

y  $\|L_F(x_1)\| \leq a_1$ . Ahora, puesto que la sucesión  $\{a_n\}$  es decreciente,  $a_1 < r$  y  $H(L_F(x_1))$  existe. Además,

$$\|H(L_F(x_1))\| = \left\| \sum_{k \geq 0} A_k L_F(x_1)^k \right\| \leq \sum_{k \geq 0} A_k a_1^k = h(a_1)$$

y se siguen [IV<sub>1</sub>] y [V<sub>1</sub>]:

$$\begin{aligned}
\|x_2 - x_1\| &\leq \|H(L_F(x_1))\| \|\Gamma_1 F(x_1)\| \leq h(a_1) \|\Gamma_1 F(x_1)\| \\
\|x_2 - x_0\| &\leq \|x_2 - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \leq h(a_1) \|\Gamma_1 F(x_1)\| + h(a_0) \|\Gamma_0 F(x_0)\|.
\end{aligned}$$

Como  $h$  es una función creciente y la sucesión  $\{a_n\}$  es decreciente, obtenemos [V<sub>1</sub>]:

$$\|x_2 - x_0\| \leq h(a_0)(1 + f(a_0)g(a_0))\|I_0F(x_0)\|.$$

Ahora, suponemos que [I<sub>n</sub>]-[V<sub>n</sub>] se cumplen y probamos que [I<sub>n+1</sub>]-[V<sub>n+1</sub>] son ciertas. Por hipótesis, tenemos que  $x_{j+1} \in \Omega$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Si

$$F'(x_{n+1}) - F'(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} F''(x)dx = \int_0^1 F''(x_n + t(x_{n+1} - x_n))(x_{n+1} - x_n)dt,$$

tomando normas, se sigue

$$\|I - I_n F'(x_{n+1})\| \leq \|I_n\| M h(a_n) \|I_n F(x_n)\| \leq a_n h(a_n) < 1,$$

puesto que  $h$  es creciente y, por hipótesis, la sucesión  $\{a_n\}$  es decreciente. Entonces, por el lema de Banach, existe el operador  $I_{n+1}$  y se sigue [I<sub>n+1</sub>]:

$$\begin{aligned} \|I_{n+1}\| &= \|I_{n+1} F'(x_n) I_n\| \leq \| (I_n F'(x_{n+1}))^{-1} \| \|I_n\| \\ &\leq \frac{\|I_n\|}{1 - \|I - I_n F'(x_{n+1})\|} \leq \frac{\|I_n\|}{1 - a_n h(a_n)} = f(a_n) \|I_n\|. \end{aligned}$$

Ahora, al igual que en el caso  $n = 1$ , para probar [II<sub>n+1</sub>], hacemos uso de la descomposición (3.36). Teniendo en cuenta la definición de  $g$  y la hipótesis de inducción, obtenemos [II<sub>n+1</sub>]:

$$\begin{aligned} \|I_{n+1} F(x_{n+1})\| &\leq f(a_n) \left( h(a_n) - 1 + a_n \frac{1}{2} h(a_n)^2 \right) \|I_n F(x_n)\| \\ &= f(a_n) g(a_n) \|I_n F(x_n)\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|I_{n+1}\| \|F''(x_{n+1})\| \|I_{n+1} F(x_{n+1})\| \leq f(a_n)^2 g(a_n) a_n = a_{n+1},$$

y  $\|L_F(x_{n+1})\| \leq a_{n+1} < r$ , por lo que  $H(L_F(x_{n+1}))$  existe, con

$$\|H(L_F(x_{n+1}))\| \leq \sum_{k \geq 0} A_k a_{n+1}^k = h(a_{n+1}).$$

Ahora,

$$\|x_{n+2} - x_{n+1}\| \leq \|H(L_F(x_{n+1}))\| \|I_{n+1} F(x_{n+1})\| \leq h(a_{n+1}) \|I_{n+1} F(x_{n+1})\|,$$

$$\begin{aligned} \|x_{n+2} - x_0\| &\leq \|x_{n+2} - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_0\| \\ &\leq h(a_{n+1}) \|I_{n+1} F(x_{n+1})\| + h(a_0) \left( \sum_{k=0}^n (f(a_0)g(a_0))^k \right) \eta, \end{aligned}$$

y por hipótesis:

$$\begin{aligned} \|x_{n+2} - x_0\| &\leq h(a_0) (f(a_0)g(a_0))^{n+1} \eta + h(a_0) \left( \sum_{k=0}^n (f(a_0)g(a_0))^k \right) \eta \\ &= h(a_0) \left( \sum_{k=0}^{n+1} (f(a_0)g(a_0))^k \right) \eta. \end{aligned}$$

Con lo que el teorema queda demostrado. ■

Previo al estudio de la convergencia de la sucesión  $\{x_n\}$ , que define la familia de procesos iterativos (1.3), damos unos resultados técnicos que proporcionan propiedades de las funciones y de la sucesión real dadas en (3.33) y (3.34) respectivamente.

### 3.5.2. Convergencia semilocal y $R$ -orden de convergencia

En este párrafo, establecemos la convergencia de la sucesión  $\{x_n\}$ , dada en (1.3), apoyándonos en propiedades de las funciones y de la sucesión auxiliar  $\{a_n\}$  que damos a continuación.

**Lema 3.5.2** Sean  $h$ ,  $f$  y  $g$  las funciones reales dadas en (3.33). Entonces, se tiene que  $g(t)$  es creciente para  $t > 0$ . Además, si  $a_0 h(a_0) < 1$ ,  $f(t)$  es creciente y  $f(t) > 1$  para  $t \in (0, a_0)$ .

*Demostración.* La demostración es inmediata a partir de las definiciones de las funciones  $h$ ,  $f$  y  $g$ . ■

**Lema 3.5.3** Sean  $h$ ,  $f$  y  $g$  las funciones reales dadas en (3.33). Entonces, si  $a_0 h(a_0) < 1$  y  $f(a_0)^2 g(a_0) < 1$ , la sucesión  $\{a_n\}$  dada en (3.34) es decreciente. Además,  $f(a_0)g(a_0) < 1$ .

*Demostración.* Probamos el resultado mediante un proceso inductivo. Por hipótesis,  $a_1 = f(a_0)^2 g(a_0) a_0 < a_0$ . Además, teniendo en cuenta que  $f(a_0) > 1$ , se sigue que  $f(a_0)g(a_0) < 1$ . Suponemos que  $a_k < a_{k-1}$  para todo  $k \leq n$ . Entonces,

$$a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow f(a_n)^2 g(a_n) < 1,$$

desigualdad cierta puesto que  $f(a_n)^2 g(a_n) < f(a_0)^2 g(a_0) < 1$ . Por tanto, la sucesión  $\{a_n\}$  es decreciente. ■

**Lema 3.5.4** Sea  $\gamma = \frac{a_1}{a_0}$ . En las hipótesis del lema 3.5.3 se cumple lo siguiente:

- (i)  $\gamma = f(a_0)^2 g(a_0) \in (0, 1)$ ,
- (ii)  $f(\gamma t) < f(t)$ ,  $g(\gamma t) < \gamma g(t)$ ,  $\forall t > 0$  y  $\forall \gamma \in (0, 1)$ .
- (iii)  $a_{n+1} < \gamma^{2^n} a_n < \gamma^{2^{n+1}-1} a_0$ ,  $\forall n \geq 1$ ,

(iv)  $f(a_{n+1})g(a_{n+1}) < \gamma^{2^{n+1}} \Delta$ , donde  $\Delta = \frac{1}{f(a_0)}$ ,  $\forall n \geq 1$ .

*Demostración.* Las demostraciones de (i) y (ii) son inmediatas a partir de las definiciones de  $\gamma$ ,  $f$  y  $g$ . Para demostrar (iii) empleamos inducción. Por hipótesis,  $a_1 = \gamma a_0 < a_0$ . Si  $n = 1$ ,

$$a_2 = a_1 f(a_1)^2 g(a_1) < \gamma^2 a_0 f(a_0)^2 g(a_0) = \gamma^2 a_1.$$

Suponemos cierto para  $n + 1$  y probamos para  $n + 2$ . Como vimos en el lema 3.5.2 las funciones  $f$  y  $g$  son crecientes. Entonces, a partir de esta propiedad y de la hipótesis de inducción, se sigue (iii). En efecto,

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_{n+1} f(a_{n+1})^2 g(a_{n+1}) < \gamma^{2^n} a_n f(\gamma^{2^n} a_n)^2 g(\gamma^{2^n} a_n) \\ &< \gamma^{2^n} a_n f(a_n)^2 \gamma^{2^n} g(a_n) = \gamma^{2^{n+1}} a_{n+1}. \end{aligned}$$

Ahora, es fácil ver que

$$a_{n+2} < \gamma^{2^{n+1}} a_{n+1} < \gamma^{2^{n+1}} \gamma^{2^n} a_n < \dots < \gamma^{2^{n+2}-1} a_0.$$

Para concluir demostramos (iv). Teniendo en cuenta las desigualdades obtenidas en (iii),

$$\begin{aligned} f(a_{n+1})g(a_{n+1}) &< f(\gamma^{2^{n+1}-1} a_0) g(\gamma^{2^{n+1}-1} a_0) \\ &< f(a_0)g(a_0) \gamma^{2^{n+1}-1} = \frac{\gamma^{2^{n+1}}}{f(a_0)} = \gamma^{2^{n+1}} \Delta, \end{aligned}$$

donde  $\Delta = \frac{1}{f(a_0)}$ . ■

A continuación, como consecuencia de las propiedades de las funciones y sucesión auxiliar, dadas en los lemas 3.5.2, 3.5.3 y 3.5.4, establecemos la convergencia de la sucesión  $\{x_n\}$ , dada en (1.3). Notemos que al exigir menos condiciones al operador  $F''$ , el  $R$ -orden de convergencia que obtenemos es menor, pudiendo sólo garantizar  $R$ -orden al menos dos, como probamos en el siguiente resultado.

**Teorema 3.5.5** *Sea  $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$  un operador no lineal dos veces diferenciable Fréchet satisfaciendo (C1)–(C3). Asumimos que  $a_0 < r$ ,  $a_0 h(a_0) < 1$  y  $f(a_0)^2 g(a_0) < 1$ . Si  $B(x_0, R) \subset \Omega$ , donde  $R = \frac{h(a_0)\eta}{1-f(a_0)g(a_0)}$ , entonces la familia de procesos iterativos (1.3), comenzando en  $x_0$ , converge a una solución  $x^*$  de la ecuación (3.1) con  $R$ -orden de convergencia al menos dos. En este caso, la solución  $x^*$  y las iteraciones  $x_n$  pertenecen a  $\overline{B(x_0, R)}$  y  $x^*$  es única en  $B(x_0, \frac{2}{M\beta} - R)$ . Además, se obtienen las siguientes estimaciones a priori del error*

$$\|x^* - x_n\| < h(\gamma^{2^n-1} a_0) \frac{\gamma^{2^n-1} \Delta^n}{1 - \gamma^{2^n} \Delta} \eta.$$

*Demostración.* Por hipótesis del teorema es claro que  $x_0 \in \Omega$  y, teniendo en cuenta **(C1)**–**(C3)**, se sigue que  $x_1 \in \overline{B(x_0, R)} \subset \Omega$ . Además, aplicando un proceso inductivo y el lema 3.5.1 obtenemos que  $x_n \in \overline{B(x_0, R)} \subset \Omega$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Ahora, teniendo en cuenta las relaciones de recurrencia del lema 3.5.1,

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_k\| &\leq h(a_k) \|\Gamma_k F(x_k)\| < h(\gamma^{2^k-1} a_0) \eta \prod_{j=0}^{k-1} f(a_j) g(a_j, b_j) \\ &< h(\gamma^{2^k-1} a_0) \eta \gamma^{2^k-1} \Delta^k. \end{aligned}$$

Para establecer la convergencia de la sucesión  $\{x_n\}$  dada por la familia de procesos iterativos (1.3) probamos que es una sucesión de Cauchy. Para ello, consideramos  $n, m \in \mathbb{N}$ , entonces

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - x_n\| &\leq \sum_{k=n}^{n+m-1} \|x_{k+1} - x_k\| < \sum_{k=n}^{n+m-1} h(\gamma^{2^k-1} a_0) \eta \gamma^{2^k-1} \Delta^k \\ &< h(\gamma^{2^n-1} a_0) \eta \gamma^{2^n-1} \Delta^n \left( \sum_{k=0}^{m-1} \gamma^{2^{[2^k-1]}} \Delta^k \right). \end{aligned}$$

Ahora, sin más que aplicar la desigualdad de Bernoulli,  $(1+x)^k > 1+kx$ , con  $x = 1$ , tenemos  $2^k - 1 > k$  y por tanto

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - x_n\| &< h(\gamma^{2^n-1} a_0) \eta \gamma^{2^n-1} \Delta^n \left( \sum_{k=0}^{m-1} (\gamma^{2^n} \Delta)^k \right) \\ &= h(\gamma^{2^n-1} a_0) \eta \gamma^{2^n-1} \Delta^n \frac{1 - (\gamma^{2^n} \Delta)^m}{1 - \gamma^{2^n} \Delta}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

para todo  $n, m \in \mathbb{N}$ , por lo que concluimos que la sucesión  $\{x_n\}$  es de Cauchy.

Tomando  $n = 0$  en (3.37), se sigue que  $x_m \in B(x_0, R)$ , para todo  $m \in \mathbb{N}$ :

$$\|x_m - x_0\| < h(a_0) \frac{1 - (\gamma \Delta)^m}{1 - \gamma \Delta} \eta < R.$$

Además,  $\{x_n\}$  converge a la solución  $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  de (3.1). Tomando  $n = 0$  en (3.37) y  $m \rightarrow \infty$ ,

$$\|x^* - x_0\| \leq h(a_0) \frac{1}{1 - f(a_0)g(a_0)} \eta = R.$$

y  $x^* \in \overline{B(x_0, R)}$ . Por otra parte, notemos que la sucesión  $\{\|F'(x_n)\|\}$  es acotada, puesto que

$$\begin{aligned} \|F'(x_n)\| &\leq \|F'(x_n) - F'(x_0)\| + \|F'(x_0)\| \leq \|F''(x)\| \|x_n - x_0\| + \|F'(x_0)\| \\ &\leq Mh(a_0) \left( \sum_{k=0}^{n-1} (f(a_0)g(a_0))^k \right) \eta + \|F'(x_0)\|. \end{aligned}$$

Entonces, como  $\|F(x_n)\| \leq \|F'(x_n)\| \|I_n F(x_n)\|$ , y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|I_n F(x_n)\| = 0$ , se sigue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|F(x_n)\| = 0$ . Por tanto, por la continuidad del operador  $F$  obtenemos que  $F(x^*) = 0$  y  $x^*$  es una solución de la ecuación (3.1). Por otra parte, si  $m \rightarrow \infty$  en (3.37) obtenemos:

$$\|x^* - x_n\| < h (\gamma^{2^n} - 1) a_0 \eta \frac{\gamma^{2^n - 1} \Delta^n}{1 - \gamma^{2^n} \Delta} < \gamma^{2^n} \frac{R}{\gamma},$$

con lo que queda demostrado que la familia de procesos iterativos tiene  $R$ -orden de convergencia al menos dos.

Para probar la unicidad, se procede de igual modo que en la demostración del teorema 3.4.5. ■

Como hemos visto en las aplicaciones a algunas ecuaciones integrales, el hecho de que el operador  $F''$  esté acotado en un subconjunto  $\Omega$  abierto, convexo y no vacío del espacio de Banach  $X$  considerado sigue siendo una condición que no se satisface generalmente. Esto conlleva el que se deba prelocalizar una solución de la ecuación  $F(x) = 0$  en una región apropiada, donde el operador  $F''$  esté acotado, para poder así establecer los dominios de existencia y unicidad de soluciones. En el siguiente capítulo, evitamos esta situación suavizando **(C3)** y exigiendo que  $F''$  esté sólomente acotado en la aproximación inicial.



## Otras modificaciones de las condiciones de Kantorovich

### 4.1. Introducción

En este capítulo analizamos la convergencia semilocal de la familia (1.3) para el caso en el que el operador  $F''$  no esté acotado en  $\Omega$  considerando modificaciones de las condiciones de Kantorovich para el operador  $F''$ . Obtenemos resultados de convergencia semilocal para la familia de procesos iterativos (1.3) en condiciones suaves para el operador  $F''$ . Hasta ahora hemos visto que la familia de procesos iterativos (1.3) proporciona una sucesión  $\{x_n\}$  que converge, bajo ciertas modificaciones de las condiciones de Kantorovich **(C1)**–**(C4)**, a una solución  $x^*$  de la ecuación

$$F(x) = 0, \quad (4.1)$$

siendo  $F$  un operador no lineal definido entre dos espacios de Banach  $X$  e  $Y$ ,  $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$ , y  $\Omega$  un subconjunto abierto, convexo y no vacío de  $X$ .

En particular, la condición **(C3)** exige que el operador  $F''$  esté acotado en el dominio  $\Omega$ , donde la solución  $x^*$  existe, es decir:  $\|F''(x)\| \leq M, \forall x \in \Omega$ . Sin embargo, existen muchas situaciones donde el operador  $F''$  no está acotado o esta condición es difícil de comprobar, como por ejemplo en algunos problemas donde aparecen ecuaciones integrales no lineales. En estos problemas, como ya se ha dicho antes, hay que localizar la solución previamente en un conjunto apropiado  $\Omega$  donde el operador  $F''$  esté acotado. Se puede evitar esta situación suavizando las condiciones de Kantorovich y exigiendo que el operador  $F''$  esté sólomente acotado en la aproximación inicial, es decir,  $\|F''(x_0)\| \leq \alpha$ , siendo  $\alpha$  una constante real positiva (condición **(S3)**).

En primer lugar, realizamos un análisis de la convergencia semilocal para la familia de procesos iterativos (1.3) mediante la técnica de las sucesiones mayorizantes asumiendo que el operador  $F$  satisface las condiciones **(C1)**, **(C2)**, **(S3)** y **(C4)**. En un estudio posterior, suavizamos la condición **(C4)** para el operador  $F''$ , exigiendo **(W4)**.

*Nota 4.1.* Notemos que la modificación de **(C4)** por una condición Hölder para  $F''$  ya está estudiada mediante la técnica de sucesiones mayorizantes en la sección 3.2 del capítulo 3. En ese estudio, como se observa en la nota 3.1, la condición **(C3)** puede ser reemplazada por una condición más suave **(S3)**; sin embargo, como consecuencia de la descomposición que se toma para el operador  $F$ , es necesario exigir la condición **(M6)** para el operador  $F'''$ . En el análisis de la convergencia semilocal que realizamos a continuación evitamos mediante la técnica de las relaciones de recurrencia tener que imponer condiciones a  $F'''$ , situación no deseable, y además generalizamos la modificación al estudiar la convergencia bajo la condición **(W4)** para el operador  $F''$ .

## 4.2. Sucesiones mayorizantes para condiciones Lipschitz

Consideramos el problema de aproximar una solución de la ecuación (4.1) aplicando un proceso iterativo de la familia (1.3). Analizamos y probamos un resultado de convergencia semilocal para la familia de procesos iterativos (1.3) mediante la técnica de sucesiones mayorizantes, bajo las siguientes hipótesis. Suponemos que  $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$  es un operador dos veces diferenciable Fréchet en un abierto, convexo y no vacío  $\Omega \subseteq X$  satisfaciendo las condiciones:

- (C1)** Existe un punto  $x_0 \in \Omega$  donde el operador  $\Gamma_0 = [F'(x_0)]^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$  está definido y  $\|\Gamma_0\| \leq \beta$ ,
- (C2)**  $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \eta$ ,
- (S3)**  $\|F'''(x_0)\| \leq \alpha$ ,
- (C4)**  $\|F''(x) - F''(y)\| \leq K\|x - y\|$ ,  $x, y \in \Omega$ ,  $K > 0$ .

Para ello, damos en primer lugar un resultado general de convergencia similar al teorema 2.2.3 del capítulo 2, que establece condiciones suficientes de convergencia, en términos de una función mayorizante  $p(t)$  arbitraria, para la sucesión  $\{x_n\}$ , dada en (1.3), y proporciona los dominios de existencia y unicidad de solución para la ecuación (4.1). En lo que sigue denotamos por  $r$  el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{k \geq 0} A_k t^k, \quad \text{donde } A_0 = 1, A_1 = \frac{1}{2}. \quad (4.2)$$

**Teorema 4.2.1** *Sea  $x_0 \in \Omega$  un punto en el que existe  $\Gamma_0 = F'(x_0)^{-1}$  y sea  $t_0 \in [a, b]$  de tal forma que  $p(t_0) > 0$ , donde  $p$  es una función real, decreciente y convexa en  $[a, b]$ , tal que  $p(a) > 0 > p(b)$ . Además  $p'(t) \neq 0$  y  $p'''(t) \geq 0$  en el intervalo  $[a, s]$ , con  $s$  la única solución simple de  $p(t) = 0$  en  $[a, b]$ , y  $|L_p(t)| < r$  en  $[a, s]$ . Entonces, si se cumplen las siguientes condiciones:*

- (I)  $\|\Gamma_0\| \leq \frac{-1}{p'(t_0)}$ ,
- (II)  $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \frac{-p(t_0)}{p'(t_0)}$ ,

- (III)  $\|F''(x_0)\| \leq p''(t_0)$ ,  
 (IV)  $\|F''(x) - F''(y)\| \leq |p''(u) - p''(v)|$  con  $x, y \in \Omega$ ,  $u, v \in [a, s]$ ,

y  $B(x_0, s - t_0) \subset \Omega$ , la sucesión dada en (1.3) está bien definida y converge a una solución  $x^*$  de la ecuación (4.1), siendo  $x^*$  la única solución de (4.1) en  $\overline{B(x_0, s - t_0)}$ . Además, se tiene que

$$\|x^* - x_n\| \leq s - t_n \quad \text{para } n \geq 0.$$

*Demostración.* Sin más que seguir la demostración del teorema 2.2.3, las condiciones (I) y (II) se satisfacen al cambiar  $x_0$  por  $x_k$ . Tan sólo queda comprobar que la condición (III) se cumple, para todo  $k \in \mathbb{N}$ , es decir,  $\|F''(x_k)\| \leq p''(t_k)$ .

Teniendo en cuenta que la sucesión  $\{t_n\}$  dada en (2.2) mayoriza a la sucesión (1.3), se tiene que

$$\|x_k - x_0\| \leq t_k - t_0 \leq s - t_0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Ahora bien, como por hipótesis, la función  $p$  es convexa y  $p''$  es creciente en  $[t_0, s]$ , se sigue que

$$\|F''(x_k)\| \leq \|F''(x_k) - F''(x_0)\| + \|F''(x_0)\| \leq p''(t_k) - p''(t_0) + p''(t_0) = p''(t_k),$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ , y el resultado queda demostrado. ■

En vista de las nuevas condiciones **(C1)**, **(C2)**, **(S3)** y **(C4)** que debe satisfacer el operador  $F$ , al igual que en el capítulo 2, nos planteamos tomar como función mayorizante un polinomio de grado tres con coeficiente director positivo

$$p(t) = At^3 + Bt^2 + Ct + D, \quad A > 0,$$

a la que aplicaremos el proceso iterativo (2.2) y exigiremos que cumpla las condiciones del teorema 4.2.1.

Notemos que podemos tomar como punto de salida  $t_0 = 0$  en la sucesión  $\{t_n\}$  (en otro caso se puede hacer una traslación).

Teniendo en cuenta **(C1)** se tiene que  $\frac{-1}{p'(0)} \geq \beta$ , con  $\beta > 0$ , de donde se sigue que  $\frac{-1}{\beta} = C$ . Por **(C2)**,  $\frac{-p(0)}{p'(0)} \geq \eta > 0$ , luego podemos tomar como término independiente del polinomio  $D = \frac{\eta}{\beta}$ . Además, como  $p''(0) = 2B$ , teniendo en cuenta **(S3)** basta tomar  $\alpha = 2B$ , con  $\alpha > 0$ . Más aún, esta función cumple la condición de Lipschitz para el operador derivada segunda, por lo tanto, se cumple que

$$|p''(u) - p''(v)| = 6A|u - v| \quad \text{con } u, v \in [a, s].$$

Como  $A > 0$ , por **(C4)**, se sigue que  $6A = K$ . Como consecuencia de todo ello, tomamos como función mayorizante:

$$p(t) = \frac{K}{6}t^3 + \frac{\alpha}{2}t^2 - \frac{1}{\beta}t + \frac{\eta}{\beta}, \quad \text{con } K, \alpha, \beta, \eta > 0. \quad (4.3)$$

A continuación, demostramos que esta función  $p(t)$  cumple todas las hipótesis del teorema 4.2.1. Para ello, tomaremos el intervalo  $[t_0, b]$  como  $[0, s]$ , donde  $s$  es la menor raíz positiva de  $p(t)$ , y vamos a ver que esta función tiene una raíz negativa y dos positivas  $s$  y  $s^*$ , de tal forma que  $s \leq \hat{t} \leq s^*$ , lo que es equivalente a decir que

$$\eta \leq \frac{4K + \alpha^2\beta - \alpha\beta\sqrt{\alpha^2 + 2K/\beta}}{3\beta K(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2K/\beta})}, \quad (4.4)$$

siendo  $\hat{t}$  el mínimo de  $p(t)$  en el intervalo  $[0, s]$ .

Como  $p(0) = \frac{\eta}{\beta} > 0$ , para demostrar que  $p(t)$  tiene una raíz positiva, basta ver que  $p(t)$  es estrictamente decreciente en  $[0, \hat{t}]$  y que  $p(\hat{t}) < 0$ . Como

$$p'(t) = \frac{K}{2}t^2 + \alpha t - \frac{1}{\beta},$$

se sigue  $p'(t) < 0$  en  $\left[ \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 2K/\beta}}{K}, \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2K/\beta}}{K} \right]$ .

Ahora, sustituyendo en la expresión dada para  $p(t)$ , se sigue que

$$\begin{aligned} p(\hat{t}) &= \frac{K}{6} \left( \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2K/\beta}}{K} \right)^2 \frac{2}{\beta(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2K/\beta})} \\ &\quad + \frac{\alpha}{2} \left( \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2K/\beta}}{K} \right) \frac{2}{\beta(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2K/\beta})} \\ &\quad - \frac{2}{\beta^2(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2K/\beta})} + \frac{\eta}{\beta} \\ &= \frac{1}{3\beta(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2K/\beta})} \left[ -\frac{4}{\beta} - \frac{\alpha^2}{K} + \frac{\alpha\sqrt{\alpha^2 + 2K/\beta}}{K} \right] + \frac{\eta}{\beta}, \end{aligned}$$

y por hipótesis se sigue que  $p(\hat{t}) \leq 0$ . Además, la igualdad  $p(\hat{t}) = 0$  es cierta sí y sólo sí  $s = s^*$ . Esto es debido a que en este caso la cadena de desigualdades  $s \leq \hat{t} \leq s^*$  se convierte en una cadena de igualdades  $s = \hat{t} = s^*$ .

*Nota 4.2.* Al igual que Yamamoto en [154], en el caso en que  $p(t)$  se tome normalizado, es decir,

$$p(t) = \frac{K}{6}t^3 + \frac{\alpha}{2}t^2 - t + \eta, \quad \text{con } K, \alpha, \eta > 0,$$

el hecho de que el polinomio  $p(t)$  posea una raíz negativa y dos positivas  $s$  y  $s^*$  se reduce a la siguiente condición:

$$\eta \leq \frac{4K + \alpha^2 - \alpha\sqrt{\alpha^2 + 2K}}{3K(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2K})}.$$

Notemos que las condiciones **(C1)**, **(C2)**, **(S3)** y **(C4)** para el operador  $F$  se satisfacen para la función mayorizante (4.3). Por lo tanto, a partir del teorema 4.2.1 obtenemos el siguiente resultado principal de convergencia semilocal para la familia de procesos iterativos (1.3).

**Teorema 4.2.2** *Sea  $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$  un operador no lineal, dos veces diferenciable Fréchet en un abierto, convexo y no vacío  $\Omega \subseteq X$ , satisfaciendo **(C1)**, **(C2)**, **(S3)** y **(C4)**. Si se cumple la condición (4.4) y  $B(x_0, s) \subseteq \Omega$ , entonces la sucesión  $\{x_n\}$  dada en (1.3), comenzando en  $x_0$ , converge a una solución de la ecuación (4.1). En este caso, la solución  $x^*$  y las iteraciones  $x_n$  pertenecen a  $B(x_0, s)$  y  $x^*$  es única en  $B(x_0, s)$ . Además, se tiene que*

$$\|x^* - x_n\| \leq s - t_n \quad \text{para } n \geq 0. \quad \blacksquare$$

*Nota 4.3.* Notemos que la condición impuesta en el teorema 4.2.1, sobre el grado de convexidad logarítmico de la función mayorizante,  $|L_p(t)| < r$ , con  $r$  el radio de convergencia de la serie (4.2), para el caso  $r < 1/2$ , puede ser cambiada por esta otra  $\beta\eta\alpha < r$  puesto que  $|L_p(t)| \leq \beta\eta\alpha$ .

*Nota 4.4.* Empleando la técnica de Argyros y Chen ([16]), ampliamos el dominio de unicidad de solución dado en el teorema 4.2.2, obteniendo así el dominio  $B(x_0, s^*) \cap \Omega$ . Para demostrar la unicidad en  $B(x_0, s^*) \cap \Omega$ , suponemos que existe otra solución  $y^*$  de (4.1), con  $y^* \in B(x_0, s^*) \cap \Omega$ . De manera análoga a la demostración realizada en el capítulo 2, la unicidad de solución se sigue, por el lema de Banach, sí y sólo sí el operador

$$\int_0^1 F'(x^* + t(y^* - x^*)) dt$$

es invertible, o equivalentemente si  $A = \int_0^1 \Gamma_0 F'(x^* + t(y^* - x^*)) dt$  lo es. Obsérvese que

$$\|I - A\| \leq \|\Gamma_0\| \int_0^1 \|F'(x^* + t(y^* - x^*)) - F'(x_0)\| dt,$$

y

$$\begin{aligned} \|F'(x^* + t(y^* - x^*)) - F'(x_0)\| &= \left\| \int_{x_0}^{x^* + t(y^* - x^*)} [F''(x) + F''(x_0) - F''(x_0)] dx \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|F''(x_0 + \tau(x^* + t(y^* - x^*) - x_0)) - F''(x_0)\| \|x^* + t(y^* - x^*) - x_0\| d\tau \\ &+ \int_0^1 \|F''(x_0)\| \|x^* + t(y^* - x^*) - x_0\| d\tau, \end{aligned}$$

Como  $x^* \in \overline{B(x_0, s)}$  e  $y^* \in B(x_0, s^*) \cap \Omega$  tenemos que  $\|x^* - x_0\| \leq s$  y  $\|y^* - x_0\| < s^*$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|I - A\| &\leq \frac{\beta K}{2} \int_0^1 \left( \|x^* - x_0\|(1-t) + t\|y^* - x_0\| \right)^2 dt \\ &\quad + \beta \alpha \int_0^1 \left( \|x^* - x_0\|(1-t) + t\|y^* - x_0\| \right) dt \\ &< \frac{\beta K}{6} (s^2 + (s^*)^2 + ss^*) + \frac{\beta \alpha}{2} (s + s^*). \end{aligned}$$

Definimos ahora el polinomio

$$q(r) = \frac{K}{6} r^2 + \left( \frac{K}{6} s + \frac{\alpha}{2} \right) r + \frac{K}{6} s^2 + \frac{\alpha}{2} s - \frac{1}{\beta},$$

y observamos que  $q(s^*) = (s + s^*) \left( \frac{K}{6} s^* + \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{K}{6} s^2 - \frac{1}{\beta}$ . Utilizando a continuación las conocidas fórmulas de Cardano, tenemos que

$$\frac{-K}{6} (s + s^* - r_0) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{y} \quad \frac{K}{6} (ss^* - r_0(s + s^*)) = \frac{-1}{\beta},$$

donde  $-r_0$ ,  $s$  y  $s^*$  son las raíces del polinomio (4.3). Entonces, vemos que  $q(s^*) = \frac{-K}{6} (ss^* - r_0(s + s^*)) - \frac{1}{\beta} = 0$ , y por lo tanto,  $\|I - A\| < 1$ . Luego existe el operador  $A^{-1}$  y la unicidad de solución en  $B(x_0, s^*) \cap \Omega$  queda demostrada. ■

Como  $\|x^* - x_n\| \leq s - t_n$ , podemos encontrar estimaciones a posteriori del error para la sucesión  $\{x_n\}$ , dada en (1.3), en términos de la sucesión real  $\{t_n\}$ , definida en (2.2), que se obtiene a partir de un polinomio de grado tres (4.3). Para dar estimaciones del error utilizamos un procedimiento dado por Ostrowski ([117]) y empleado por Gutiérrez y Hernández ([71]) que permite acotar el error en función de las raíces del polinomio (4.3) al aplicar la familia de procesos iterativos (1.3).

**Teorema 4.2.3** *En las condiciones de teorema 4.2.1, se tienen las siguientes cotas de error para la familia de métodos iterativos (1.3) aplicada al polinomio (4.3):*

(i) Si  $s < s^*$ , sea  $\Delta = \frac{s}{s^*} \sqrt{\phi}$  y

$$\phi = \frac{2(r_0 + s)^2 + 2(s^* - s)^2 - 3(r_0 + s)(s^* - s) - 4(r_0 + 2s - s^*)^2 A_2}{(r_0 + s)^2}.$$

Entonces

$$s - t_n \approx \frac{\Delta^{3^n}}{\sqrt{\phi} - \Delta^{3^n}} (s^* - s), \quad n \geq 0,$$

cuando  $\Delta < 1$  y  $\phi > 0$ .

(ii) Si  $s = s^*$ , sea  $\rho = \frac{1}{8} \left( 3 - \sum_{k \geq 2} \frac{A_k}{2^{k-2}} \right)$ . Entonces

$$s - t_n \approx \rho^n s, \quad n \geq 0.$$

*Demostración.* Escribimos el polinomio (4.3) con  $K > 0$  de la forma  $p(t) = \frac{K}{6}(s-t)(s^*-t)(r_0+t)$  y denotamos  $a_n = s - t_n$  y  $b_n = s^* - t_n$ , para todo  $n \geq 0$ . Entonces, en el caso en que  $s < s^*$ , definimos

$$Q(t_n) = \left( \frac{b_n}{a_n} \right)^3 \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{s - P(t_n)}{s^* - P(t_n)} \frac{(s^* - t_n)^3}{(s - t_n)^3},$$

con  $P(t_n)$ , definida en (2.2), es la función de iteración que define la sucesión real  $\{t_n\}$ . Sin más que operar, se ve que

$$\lim_{t \rightarrow s} Q(t) = (s^* - s)^2 \lim_{t \rightarrow s} \frac{s - P(t)}{(s - t)^3} = \phi.$$

Si  $t \rightarrow s$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , se sigue que

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \approx \phi \left( \frac{a_n}{b_n} \right)^3 \approx \dots \approx \frac{1}{\sqrt{\phi}} \left( \frac{s}{s^*} \sqrt{\phi} \right)^{3^n},$$

y por lo tanto

$$s - t_{n+1} \approx \frac{\Delta^{3^{n+1}}}{\sqrt{\phi} - \Delta^{3^{n+1}}} (s^* - s), \quad n \geq 0.$$

Por otra parte, si  $s^* = s$ , entonces  $a_n = b_n$  y definimos

$$R(t_n) = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{s - P(t_n)}{s - t_n}.$$

Procediendo análogamente, para  $t \rightarrow s$ , se sigue que

$$\lim_{t \rightarrow s} R(t) = \lim_{t \rightarrow s} \frac{s - P(t)}{(s - t)} = \frac{1}{8} \left( 3 - \sum_{k \geq 2} \frac{A_k}{2^{k-2}} \right) < 1,$$

puesto que  $\{A_k\}$  es considerada como sucesión decreciente con  $A_k \leq \frac{1}{2}$ , para todo  $k \geq 2$ . Por tanto, si  $t \rightarrow s$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , se sigue que

$$s - t_{n+1} \approx s \left( \frac{1}{8} \left( 3 - \sum_{k \geq 2} \frac{A_k}{2^{k-2}} \right) \right)^{n+1}, \quad n \geq 0. \quad \blacksquare$$

### 4.3. Relaciones de recurrencia para condiciones $\omega$ -condicionadas

En esta sección presentamos un estudio de la convergencia semilocal para la familia de procesos iterativos (1.3) usando la técnica de las relaciones de recurrencia. Seguimos considerando el problema de aproximar una solución de la ecuación (4.1) aplicando un proceso iterativo de la familia (1.3). Suponemos que el operador  $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$  es dos veces diferenciable Fréchet en un abierto, convexo y no vacío  $\Omega \subseteq X$ , y que satisface las condiciones de tipo Kantorovich **(C1)**, **(C2)** y **(S3)** más las condiciones siguientes:

- (S4)**  $\|F''(x) - F''(y)\| \leq \omega(\|x - y\|), \forall x, y \in \Omega$ , donde  $\omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  es continua, creciente y tal que  $\omega(0) = 0$ ,  
**(S5)** Existe una función  $\varphi \in C([0, 1])$ , con  $\varphi(t) \leq 1$ , tal que  $\omega(\tau z) \leq \varphi(\tau)\omega(z)$ , para  $\tau \in [0, 1]$  y  $z \in \mathbb{R}^+$ .

Denotamos  $A = \int_0^1 \varphi(\tau) d\tau$  y  $B = \int_0^1 \varphi(\tau)(1 - \tau) d\tau$ .

Notemos que la condición **(S4)** generaliza trivialmente las condiciones Lipschitz y Hölder continuas para  $F''$  sin más que tomar  $\omega(z) = Kz$  o  $\omega(z) = Kz^p$  respectivamente. Además, la condición **(S5)** no es restrictiva ya que siempre podemos considerar  $\varphi(t) = 1$ , como consecuencia de que la función  $\omega$  es una función creciente.

#### 4.3.1. Construcción de las relaciones de recurrencia

Obsérvese que a partir de las condiciones iniciales deducimos

$$\|L_F(x_0)\| \leq \|I_0\| \|F''(x_0)\| \|I_0 F(x_0)\| \leq \alpha\beta\eta.$$

Denotando por  $a_0 = \alpha\beta\eta$ , si  $a_0 < r$ , con  $r$  el radio de convergencia de la serie (4.2),  $x_1$  está bien definido, puesto que  $H(L_F(x_0))$  existe y

$$\|H(L_F(x_0))\| \leq \sum_{k \geq 0} \|A_k L_F(x_0)^k\| \leq \sum_{k \geq 0} A_k a_0^k.$$

Luego,

$$\|x_1 - x_0\| \leq \|H(L_F(x_0))\| \|I_0 F(x_0)\| \leq \left( \sum_{k \geq 0} A_k a_0^k \right) \|I_0 F(x_0)\|.$$

A lo largo de toda la sección, denotaremos además

$$b_0 = \beta\omega(h(a_0)\eta)\eta, \quad c_0 = f(a_0, b_0)g(a_0, b_0).$$

donde consideramos las siguientes funciones reales auxiliares  $h$ ,  $f$  y  $g$ :

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \sum_{k \geq 0} A_k t^k & f(t, u) &= \frac{1}{1 - h(t)(t + Au)} \\
 g(t, u) &= h(t) \left( 1 + h(t) \left( \frac{t}{2} + Bu \right) \right) - 1.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

A partir de los parámetros  $a_0, b_0, c_0$  construimos las siguientes sucesiones reales

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &= (a_n + b_n)c_n f(a_n, b_n), \quad n \geq 0, \\
 b_{n+1} &= b_n c_n \varphi(c_n) f(a_n, b_n) \quad n \geq 0, \\
 c_{n+1} &= f(a_{n+1}, b_{n+1})g(a_{n+1}, b_{n+1}), \quad n \geq 0.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

A continuación establecemos las siguientes relaciones de recurrencia que permitirán demostrar la convergencia de la familia de procesos iterativos (1.3).

**Lema 4.3.1** *Supongamos que  $x_n \in \Omega$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $a_0 < r$ , con  $r$  el radio de convergencia de la serie (4.2),  $h(a_0)(a_0 + Ab_0) < 1$  y las sucesiones auxiliares reales  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  y  $\{c_n\}$ , dadas en (4.6), son decrecientes, entonces se cumplen las siguientes relaciones de recurrencia:*

$$[I_n] \text{ Existe } \Gamma_n = [F'(x_n)]^{-1} \text{ y } \|\Gamma_n\| \leq f(a_{n-1}, b_{n-1})\|\Gamma_{n-1}\|,$$

$$[II_n] \|\Gamma_n F(x_n)\| \leq c_{n-1}\|\Gamma_{n-1} F(x_{n-1})\| \leq c_0^n \|\Gamma_0 F(x_0)\|,$$

$$[III_n] \|\Gamma_n\| \|F''(x_n)\| \|\Gamma_n F(x_n)\| \leq a_n \text{ y existe } H(L_F(x_n)),$$

$$[IV_n] \|x_{n+1} - x_n\| \leq h(a_n)\|\Gamma_n F(x_n)\|,$$

$$[V_n] \|x_{n+1} - x_0\| \leq h(a_0) \left( \sum_{k=0}^n c_0^k \right) \|\Gamma_0 F(x_0)\|,$$

$$[VI_n] \|\Gamma_n\| \omega(\|x_{n+1} - x_n\|) \|\Gamma_n F(x_n)\| \leq b_n.$$

*Demostración.* Demostramos el resultado mediante un proceso inductivo para  $n$ . En primer lugar, probamos que las condiciones [I<sub>1</sub>]-[VI<sub>1</sub>] son ciertas.

Primero, veamos que existe el operador inverso de  $F'(x_1)$  y es acotado. Puesto que

$$\begin{aligned}
 F'(x_1) - F'(x_0) &= \int_0^1 (F''(x_0 + t(x_1 - x_0)) - F''(x_0))(x_1 - x_0) dt \\
 &\quad + \int_0^1 F''(x_0)(x_1 - x_0) dt,
 \end{aligned}$$

tomando normas, se sigue que

$$\|F'(x_1) - F'(x_0)\| \leq (A\omega(\|x_1 - x_0\|) + \alpha) \|x_1 - x_0\| \leq h(a_0) (A\omega(h(a_0)\eta) + \alpha) \eta.$$

Ahora,

$$\|I - \Gamma_0 F'(x_1)\| \leq \|\Gamma_0\| \|F'(x_1) - F'(x_0)\| \leq h(a_0)(a_0 + Ab_0) < 1.$$

Por el lema de Banach,  $\Gamma_1$  existe y  $[\mathbf{I}_1]$  se sigue

$$\begin{aligned} \|\Gamma_1\| &= \|\Gamma_1 F'(x_0) \Gamma_0\| \leq \left\| (\Gamma_0 F'(x_1))^{-1} \right\| \|\Gamma_0\| \leq \frac{\|\Gamma_0\|}{1 - \|I - \Gamma_0 F'(x_1)\|} \\ &\leq \frac{\|\Gamma_0\|}{1 - h(a_0)(a_0 + Ab_0)} = f(a_0, b_0) \|\Gamma_0\|. \end{aligned}$$

Por la fórmula de Taylor para  $x_{n+1} \in \Omega$ , tenemos:

$$\begin{aligned} F(x_{n+1}) &= F(x_n) + F'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{1}{2} F''(x_n)(x_{n+1} - x_n)^2 \\ &\quad + \int_{x_n}^{x_{n+1}} (F''(x) - F''(x_n))(x_{n+1} - x) dx, \end{aligned} \quad (4.7)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} F'(x_n)(x_{n+1} - x_n) &= -F'(x_n) \left( \Gamma_n F(x_n) + \left( \sum_{k \geq 1} A_k L_F(x_n)^k \right) \Gamma_n F(x_n) \right) \\ &= -F'(x_n) - F''(x_n) \left( \Gamma_n F(x_n) \sum_{k \geq 1} A_k L_F(x_n)^{k-1} \right) \Gamma_n F(x_n). \end{aligned}$$

Entonces, haciendo el cambio  $x = x_n + t(x_{n+1} - x_n)$  en (4.7), obtenemos

$$\begin{aligned} &F(x_{n+1}) \\ &= F''(x_n) \left( -\Gamma_n F(x_n) \left( \sum_{k \geq 1} A_k L_F(x_n)^{k-1} \right) \Gamma_n F(x_n) + \frac{1}{2} (x_{n+1} - x_n)^2 \right) \\ &\quad + \int_0^1 (F''(x_n + t(x_{n+1} - x_n)) - F''(x_n)) (x_{n+1} - x_n)^2 (1-t) dt. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ahora, teniendo en cuenta la descomposición (4.8) y tomando normas, obtenemos

$$\begin{aligned} \|\Gamma_1 F(x_1)\| &\leq f(a_0, b_0) \left( \alpha \beta \eta \left( \sum_{k \geq 1} A_k a_0^{k-1} \right) + \alpha \beta \eta \frac{1}{2} h(a_0)^2 \right. \\ &\quad \left. + \beta \int_0^1 \omega(h(a_0) \eta) h(a_0)^2 \eta \varphi(t) (1-t) dt \right) \|\Gamma_0 F(x_0)\| \\ &\leq f(a_0, b_0) \left( h(a_0) - 1 + h(a_0)^2 \left( \frac{1}{2} a_0 + Bb_0 \right) \right) \|\Gamma_0 F(x_0)\| \end{aligned}$$

y por la definición de  $g$  se sigue [II<sub>1</sub>]:

$$\|T_1 F(x_1)\| \leq f(a_0)g(a_0, b_0)\|T_0 F(x_0)\| = c_0\|T_0 F(x_0)\|.$$

Por otra parte,

$$\|F''(x_1)\| \leq \|F''(x_1) - F''(x_0)\| + \|F''(x_0)\| \leq \omega(h(a_0)\eta) + \alpha,$$

y obtenemos [III<sub>1</sub>]:

$$\begin{aligned} \|T_1\| \|F''(x_1)\| \|T_1 F(x_1)\| &\leq f(a_0, b_0) (\beta\omega(h(a_0)\eta)\eta + \beta\alpha\eta) c_0 \\ &\leq f(a_0, b_0) (b_0 + a_0) c_0 = a_1. \end{aligned}$$

Como consecuencia se sigue que  $\|L_F(x_1)\| \leq a_1$  y, puesto que la sucesión  $\{a_n\}$  es decreciente,  $a_1 < r$  y  $H(L_F(x_1))$  existe. Además,

$$\|H(L_F(x_1))\| = \left\| \sum_{k \geq 0} A_k L_F(x_1)^k \right\| \leq \sum_{k \geq 0} A_k a_1^k = h(a_1)$$

luego, se sigue [IV<sub>1</sub>] y [V<sub>1</sub>]:

$$\|x_2 - x_1\| \leq \|H(L_F(x_1))\| \|T_1 F(x_1)\| \leq h(a_1)\|T_1 F(x_1)\|$$

$$\|x_2 - x_0\| \leq \|x_2 - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \leq h(a_1)\|T_1 F(x_1)\| + h(a_0)\|T_0 F(x_0)\|.$$

Como  $h$  es una función creciente y la sucesión  $\{a_n\}$  es decreciente, obtenemos [V<sub>1</sub>]:

$$\|x_2 - x_0\| \leq h(a_0)(1 + c_0)\|T_0 F(x_0)\|.$$

Ahora, es fácil ver [VI<sub>1</sub>]:

$$\begin{aligned} \|T_1\| \omega(\|x_2 - x_1\|) \|T_1 F(x_1)\| &\leq f(a_0, b_0) \beta\omega(h(a_0)c_0\eta)c_0\eta \\ &\leq f(a_0, b_0) b_0 c_0 \varphi(c_0) = b_1. \end{aligned}$$

Suponemos que [I<sub>n</sub>]-[VI<sub>n</sub>] se cumplen y probamos que [I<sub>n+1</sub>]-[VI<sub>n+1</sub>] son ciertas. Por hipótesis,  $x_{j+1} \in \Omega$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Si

$$\begin{aligned} F'(x_{n+1}) - F'(x_n) &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} F''(x) dx \\ &= \int_0^1 (F''(x_n + t(x_{n+1} - x_n)) - F''(x_n)) (x_{n+1} - x_n) dt \\ &\quad + \int_0^1 F''(x_n) (x_{n+1} - x_n) dt, \end{aligned}$$

tomando normas, se sigue

$$\begin{aligned}\|I - F'(x_{n+1})\| &\leq \| \Gamma_n \| (A\omega(\|x_{n+1} - x_n\|) + \|F''(x_n)\|) \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\leq h(a_n) (Ab_n + a_n) < 1,\end{aligned}$$

puesto que  $h$  es creciente y por hipótesis las sucesiones  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  son decrecientes. Entonces, por el lema de Banach, existe el operador  $\Gamma_{n+1}$  y se sigue  $[\mathbf{I}_{n+1}]$ :

$$\begin{aligned}\|\Gamma_{n+1}\| &= \|\Gamma_{n+1}F'(x_n)\Gamma_n\| \leq \|(\Gamma_n F'(x_{n+1}))^{-1}\| \|\Gamma_n\| \\ &\leq \frac{\|\Gamma_n\|}{1 - \|I - \Gamma_n F'(x_{n+1})\|} \leq \frac{\|\Gamma_n\|}{1 - h(a_n)(Ab_n + a_n)} = f(a_n, b_n) \|\Gamma_n\|.\end{aligned}$$

Ahora, al igual que en el caso  $n = 1$ , para probar  $[\mathbf{II}_{n+1}]$ , hacemos uso de la descomposición obtenida para el operador  $F$  a partir de la fórmula de Taylor (4.8). Sin más que tomar normas, obtenemos

$$\begin{aligned}&\|F(x_{n+1})\| \\ &\leq \|F''(x_n)\| \left( \|\Gamma_n F(x_n)\|^2 \left( \sum_{k \geq 1} A_k \|L_F(x_n)\|^{k-1} \right) + \frac{1}{2} \|x_{n+1} - x_n\|^2 \right) \\ &\quad + \int_0^1 \omega(t\|x_{n+1} - x_n\|) \|x_{n+1} - x_n\|^2 (1-t) dt.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la definición de  $g$  y la hipótesis de inducción, se sigue  $[\mathbf{II}_{n+1}]$ :

$$\begin{aligned}&\|\Gamma_{n+1}F(x_{n+1})\| \\ &\leq f(a_n, b_n) \left( h(a_n) - 1 + a_n \frac{1}{2} h(a_n)^2 + Bb_n h(a_n)^2 \right) \|\Gamma_n F(x_n)\| \\ &= f(a_n, b_n) g(a_n, b_n) \|\Gamma_n F(x_n)\| = c_n \|\Gamma_n F(x_n)\|.\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\|F''(x_{n+1})\| \leq \|F''(x_{n+1}) - F''(x_n)\| + \|F''(x_n)\| \leq \omega(\|x_{n+1} - x_n\|) + \|F''(x_n)\|,$$

y  $[\mathbf{III}_{n+1}]$  se sigue:

$$\begin{aligned}&\|\Gamma_{n+1}\| \|F''(x_{n+1})\| \|\Gamma_{n+1}F(x_{n+1})\| \\ &\leq f(a_n, b_n) \|\Gamma_n\| (\omega(\|x_{n+1} - x_n\|) + \|F''(x_n)\|) \|\Gamma_n F(x_n)\| c_n \\ &\leq f(a_n, b_n) (b_n + a_n) c_n = a_{n+1}.\end{aligned}$$

Por tanto,  $\|L_F(x_{n+1})\| \leq a_{n+1} < r$  y  $H(L_F(x_{n+1}))$  existe. Además,

$$\|H(L_F(x_{n+1}))\| \leq \sum_{k \geq 0} A_k a_{n+1}^k = h(a_{n+1}).$$

Ahora, es fácil ver  $[IV_{n+1}]$  y  $[V_{n+1}]$ :

$$\|x_{n+2} - x_{n+1}\| \leq \|H(L_F(x_{n+1}))\| \| \Gamma_{n+1} F(x_{n+1}) \| \leq h(a_{n+1}) \| \Gamma_{n+1} F(x_{n+1}) \|,$$

$$\begin{aligned} \|x_{n+2} - x_0\| &\leq \|x_{n+2} - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_0\| \\ &\leq h(a_{n+1}) \| \Gamma_{n+1} F(x_{n+1}) \| + h(a_0) \left( \sum_{k=0}^n c_0^k \right) \| \Gamma_0 F(x_0) \|. \end{aligned}$$

Como la sucesión  $\{a_n\}$  es decreciente y la función  $h$  es creciente,

$$\begin{aligned} \|x_{n+2} - x_0\| &\leq h(a_0) c_0^{n+1} \| \Gamma_0 F(x_0) \| + h(a_0) \left( \sum_{k=0}^n c_0^k \right) \| \Gamma_0 F(x_0) \| \\ &= h(a_0) \left( \sum_{k=0}^{n+1} c_0^k \right) \| \Gamma_0 F(x_0) \|. \end{aligned}$$

Finalmente, a partir de las relaciones de recurrencia que acabamos de demostrar, obtenemos  $[VI_{n+1}]$ :

$$\| \Gamma_{n+1} \| \omega(\|x_{n+2} - x_{n+1}\|) \| \Gamma_{n+1} F(x_{n+1}) \| \leq b_{n+1}.$$

Y el teorema queda demostrado. ■

#### 4.3.2. Convergencia semilocal

Antes de analizar la convergencia de la sucesión  $\{x_n\}$ , dada en (1.3), damos unos resultados técnicos que proporcionan propiedades de las funciones y sucesiones reales dadas en (4.5) y (4.6) respectivamente. A partir de estas propiedades probaremos la convergencia de la sucesión  $\{x_n\}$ .

**Lema 4.3.2** Sean  $h$ ,  $f$  y  $g$  las funciones reales dadas en (4.5).

- (i) Si  $h(a_0)(a_0 + Ab_0) < 1$ ,  $f(t, u)$  es creciente y  $f(t, u) > 1$  para  $t \in (0, a_0)$  y  $u \in (0, b_0)$ .
- (ii) Fijado  $t$ ,  $g(t, u)$  es creciente como función de  $u$ . Además, fijado  $u$ ,  $g(t, u)$  es creciente como función de  $t$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}^+$ .

*Demostración.* La demostración es inmediata a partir de las definiciones de las funciones  $h$ ,  $f$  y  $g$ . ■

**Lema 4.3.3** Sean  $h$ ,  $f$  y  $g$  las funciones reales dadas en (4.5). Entonces, si  $h(a_0)(a_0 + Ab_0) < 1$  y  $(a_0 + b_0)c_0 f(a_0, b_0) < a_0$ , las sucesiones  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  y  $\{c_n\}$ , dadas en (4.6), son decrecientes. Además,  $c_0 < 1$ .

*Demostración.* Probamos que la sucesiones  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  y  $\{c_n\}$  son monótonas decrecientes mediante un proceso inductivo. En primer lugar,  $b_1 < b_0$  sí y sólo sí  $c_0\varphi(c_0)f(a_0, b_0) < 1$ . Por hipótesis,  $a_1 = (a_0 + b_0)c_0f(a_0, b_0) < a_0$ , se sigue entonces que  $c_0f(a_0, b_0) < 1$ , puesto que  $b_0 \geq 0$ , y teniendo en cuenta que  $f(a_0, b_0) > 1$ , se tiene que  $c_0 < 1$  y  $b_1 < b_0$ . Luego por el lema 4.3.2, obtenemos también que  $c_1 < c_0$ .

Suponemos que  $a_k < a_{k-1}$ ,  $b_k < b_{k-1}$  y  $c_k < c_{k-1}$  para todo  $k \leq n$ . Entonces, como  $\varphi(c_n) \leq 1$ ,

$$b_{n+1} < b_n \Leftrightarrow c_n\varphi(c_n)f(a_n, b_n) < 1 \Leftrightarrow c_nf(a_n, b_n) < 1,$$

es cierto puesto que,  $c_nf(a_n, b_n) < c_0f(a_0, b_0) < 1$  y, por tanto, la sucesión  $\{b_n\}$  es decreciente. Teniendo en cuenta la hipótesis de inducción y el lema 4.3.2, se ve que  $\{a_n\}$  y  $\{c_n\}$  también lo son. ■

Estas propiedades de las funciones y de sucesiones auxiliares obtenidas en los lemas anteriores 4.3.2 y 4.3.3, permiten establecer el siguiente resultado de convergencia para la sucesión  $\{x_n\}$ , dada en (1.3).

**Teorema 4.3.4** *Sea  $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$  un operador no lineal dos veces diferenciable Fréchet satisfaciendo (C1), (C2), (S3)–(S5). Asumimos que  $a_0 < r$ , con  $r$  el radio de convergencia de la serie (4.2),  $h(a_0)(a_0 + Ab_0) < 1$  y  $(a_0 + b_0)c_0f(a_0, b_0) < a_0$ . Si  $B(x_0, R) \subset \Omega$ , donde  $R = \frac{h(a_0)\eta}{1-c_0}$ , entonces la familia de procesos iterativos (1.3), comenzando en  $x_0$ , converge a una solución  $x^*$  de la ecuación (4.1). En este caso, la solución  $x^*$  y las iteraciones  $x_n$  pertenecen a  $\overline{B(x_0, R)}$ .*

*Demostración.* Por las hipótesis del teorema, es evidente que  $x_0 \in \Omega$  y por las condiciones (C1), (C2), (S3)–(S5), es claro que  $x_1 \in \overline{B(x_0, R)} \subset \Omega$ . Además, aplicando un proceso inductivo y el lema 4.3.1 se sigue que  $x_n \in \overline{B(x_0, R)} \subset \Omega$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$ .

Por otra parte, teniendo en cuenta las relaciones de recurrencia del lema 4.3.1, vamos a probar que la sucesión  $\{x_n\}$  es de Cauchy. En efecto,

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq h(a_k)\|I_k F(x_k)\| \leq h(a_k)c_0^k\|I_0 F(x_0)\|$$

ahora, considerando  $n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - x_n\| &\leq \sum_{k=n}^{n+m-1} \|x_{k+1} - x_k\| \leq \left( \sum_{k=n}^{n+m-1} h(a_k)c_0^k \right) \eta \\ &\leq h(a_n)c_0^n \left( \sum_{k=0}^{m-1} c_0^k \right) \eta \leq h(a_n)c_0^n \frac{1-c_0^m}{1-c_0} \eta, \end{aligned} \quad (4.9)$$

por lo que concluimos que la sucesión  $\{x_n\}$  es de Cauchy. Además,  $\{x_n\}$  converge a la solución  $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  de (4.1). En efecto, por una parte la sucesión  $\{\|F'(x_n)\|\}$  es acotada, puesto que

$$\begin{aligned} \|F'(x_n)\| &\leq \|F'(x_n) - F'(x_0)\| + \|F'(x_0)\| \leq \|F''(x)\| \|x_n - x_0\| + \|F'(x_0)\| \\ &\leq A\omega(\|x_n - x_0\|) \|x_n - x_0\| + \alpha \|x_n - x_0\| + \|F'(x_0)\| \end{aligned}$$

y, por otra parte,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Gamma_n F(x_n)\| = 0$ . Ahora bien, como

$$\|F(x_n)\| = \|F'(x_n) \Gamma_n F(x_n)\| \leq \|F'(x_n)\| \|\Gamma_n F(x_n)\|$$

se sigue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|F(x_n)\| = 0$  y, por la continuidad del operador  $F$ , obtenemos que  $F(x^*) = 0$  y  $x^*$  es una solución de la ecuación (4.1). Además, es claro que  $x^* \in \overline{B}(x_0, R)$ , sin más que tomar  $n = 0$  en (4.9) y  $m \rightarrow \infty$

$$\|x^* - x_0\| \leq \frac{h(a_0)\eta}{1 - c_0} = R. \quad \blacksquare$$

Terminamos dando un resultado que proporciona un dominio de unicidad de soluciones para la ecuación (4.1).

**Teorema 4.3.5** *En las condiciones del teorema 4.3.4, suponemos que existe una raíz positiva  $\overline{R}$  de la ecuación*

$$\frac{\beta A}{\overline{R} - R} \int_R^{\overline{R}} \omega(u)u \, du + \frac{\beta \alpha}{2}(R + \overline{R}) - 1 = 0. \quad (4.10)$$

Entonces, la solución  $x^*$  de (4.1) es única en  $B(x_0, \overline{R}) \cap \Omega$ .

*Demostración.* Suponemos que existe  $y^* \in B(x_0, \overline{R}) \cap \Omega$ , solución de la ecuación (4.1), distinta de  $x^*$ . Entonces,

$$0 = \Gamma_0 (F(y^*) - F(x^*)) = \int_0^1 \Gamma_0 F'(x^* + t(y^* - x^*)) \, dt (y^* - x^*).$$

Si existe  $L^{-1}$ , donde  $L = \int_0^1 \Gamma_0 F'(x^* + t(y^* - x^*)) \, dt$ , entonces  $x^* = y^*$ . Como

$$\|I - L\| \leq \|\Gamma_0\| \int_0^1 \|F'(x^* + t(y^* - x^*)) - F'(x_0)\| \, dt,$$

y

$$F'(x^* + t(y^* - x^*)) - F'(x_0) = \int_{x_0}^{x^* + t(y^* - x^*)} [F''(x) + F''(x_0) - F''(x_0)] \, dx,$$

tomando normas, se sigue

$$\begin{aligned} &\|F'(x^* + t(y^* - x^*)) - F'(x_0)\| \\ &\leq \int_0^1 (\omega(\tau \|x^* + t(y^* - x^*)\|) + \alpha) (\|x^* - x_0\|(1 - t) + t\|y^* - x_0\|) \, d\tau. \end{aligned}$$

Como  $y^* \in B(x_0, \bar{R}) \cap \Omega$  y  $x^* \in \overline{B(x_0, \bar{R})} \cap \Omega$ , obtenemos que  $\|y^* - x_0\| < \bar{R}$  y  $\|x^* - x_0\| \leq R$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} \|I - L\| &\leq \beta A \int_0^1 \omega(\|x^* + t(y^* - x^*) - x_0\|) \|x^* + t(y^* - x^*) - x_0\| dt \\ &\quad + \beta \alpha \int_0^1 \|x^* + t(y^* - x^*) - x_0\| dt \\ &< \frac{\beta A}{\bar{R} - R} \int_R^{\bar{R}} \omega(u) u du + \frac{\beta \alpha}{2} (R + \bar{R}). \end{aligned}$$

Por el lema de Banach, existe  $L^{-1}$  si  $\bar{R}$  cumple (4.10). Con lo que queda probada la unicidad de solución en  $B(x_0, \bar{R}) \cap \Omega$ . ■

## 4.4. Aplicaciones

### 4.4.1. Ecuaciones integrales de tipo Fredholm

En esta sección, basándonos en la técnica de funciones mayorizantes y usando el resultado dado en el teorema 4.2.2, obtenemos dominios de existencia y unicidad de solución para la ecuación integral no lineal (2.27) de tipo Fredholm y segunda clase ([40]) considerada en el capítulo 2. Recordamos a continuación esta ecuación integral no lineal:

$$x(s) = f(s) + \lambda \int_0^1 \kappa(s, t) x(t)^n dt, \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.11)$$

donde  $\lambda$  es un número real,  $\kappa(s, t)$  es una función continua en dos variables, con  $s, t \in [0, 1]$ ,  $f(s)$  es una función conocida y continua en  $[0, 1]$ .

Al igual que en el capítulo 2, el objetivo de este estudio es encontrar una función  $x^* \in C([0, 1])$  que sea solución de la ecuación (4.11). Para ello, consideramos el espacio  $C([0, 1])$  equipado con la norma del máximo,  $\|x\|_\infty := \max_{t \in [0, 1]} |x(t)|$ ,  $x \in X$ . Notemos que el problema de encontrar una solución de la ecuación (4.11) es equivalente al de encontrar una solución de la ecuación  $F(x) = 0$ , donde  $F : \Omega \subseteq C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$  viene dada de la siguiente manera:

$$[F(x)](s) = x(s) - f(s) - \lambda \int_0^1 \kappa(s, t) x(t)^n dt, \quad s \in [0, 1].$$

Sin pérdida de generalidad, tomamos  $n = 3$  en (4.11). Elegimos como punto de salida la función  $x_0(s) = 1$ ,  $f(s) = x_0(s)$  y el núcleo degenerado  $\kappa(s, t) = e^{s+t}$ .

Notemos que en este caso, al considerar el núcleo degenerado, podemos obtener el operador  $(F'(x))^{-1}$  y afinar más los parámetros  $\beta$  y  $\eta$ .

Sea  $\theta(s) \in C([0, 1])$ , de tal manera que

$$[F'(x)y](s) = \theta(s) = y(s) - 3\lambda e^s \int_0^1 e^t x(t)^2 y(t) dt, \quad s \in [0, 1],$$

entonces,  $F'(x)^{-1}(\theta(s)) = y(s)$ .

Denotando por  $J_y = \int_0^1 e^t x(t)^2 y(t) dt$ , se tiene

$$e^s x(s)^2 \theta(s) = e^s x(s)^2 y(s) - 3\lambda e^{2s} x(s)^2 J_y$$

e integrando, obtenemos

$$\int_0^1 e^s x(s)^2 \theta(s) ds = J_y \left( 1 - 3\lambda \int_0^1 e^{2s} x(s)^2 ds \right)$$

Por lo tanto, sin más que despejar  $J_y$ , se sigue que el operador  $F'(x)^{-1}$  viene dado por la expresión:

$$F'(x)^{-1}(\theta(s)) = \theta(s) + \frac{3\lambda e^s}{1 - 3\lambda \int_0^1 e^{2s} x(s)^2 ds} \int_0^1 e^s x(s)^2 \theta(s) ds, \quad (4.12)$$

para toda  $\theta(s) \in C([0, 1])$ . En particular, para  $x_0(s) = 1$ , obtenemos a partir de (4.12)

$$F'(x_0)^{-1}(\theta(s)) = \theta(s) + \frac{6\lambda e^s}{2 - 3\lambda(e^2 - 1)} \int_0^1 e^s \theta(s) ds. \quad (4.13)$$

Notemos que la segunda derivada del operador  $F$  no está acotada, puesto que  $\|F''(x)\| \leq 6|\lambda|A\|x\|$ , siendo

$$A = \max_{s \in [0, 1]} \left| \int_0^1 \kappa(s, t) dt \right|.$$

Por lo tanto, en las condiciones habituales de Kantorovich **(C1)**–**(C4)**, no se pueden obtener los dominios de existencia y unicidad de solución para la ecuación (4.11). En esta situación, es necesario localizar la solución en un conjunto apropiado  $\Omega$  donde el operador  $F''$  esté acotado. A partir de las nuevas condiciones de convergencia impuestas al operador en el teorema 4.2.2, evitamos la prelocalización de la solución. Bajo estas condiciones para el operador  $F$ , podemos dar dominios de existencia y unicidad de solución de la ecuación (4.11).

A continuación, trabajando con seis cifras significativas y considerando  $\lambda = 0.03$ , obtenemos a partir de (4.13) los siguientes valores de los parámetros  $\beta$  y  $\eta$ :

$$\|I_0\| \leq \beta = 1.59 \quad \text{y} \quad \|I_0 F(x_0)\| \leq \eta = 0.196666.$$

Además,  $\|F''(x_0)\| \leq 0.840739 = \alpha$ . Por otra parte, es fácil ver que

$$\|F''(x) - F''(y)\| \leq 6|\lambda|A\|x - y\|,$$

con  $A = e(e - 1)$ , y entonces  $K = 0.840739$ .

Consecuentemente, obtenemos que la función mayorizante (4.3) es:

$$p(t) = 0.12369 - 0.628931 t + 0.42037 t^2 + 0.140123 t^3. \tag{4.14}$$

Este polinomio posee una raíz negativa  $r_0 = -4.13663$  y dos positivas  $s = 0.237271$  y  $s^* = 0.899357$ . Entonces, se cumplen las condiciones del teorema 4.2.2 y la ecuación (4.11) tiene una solución  $x^* \in \overline{B(1, s)}$ , que es única en  $B(1, s^*) \cap \Omega$ .

En la tabla 4.1 mostramos estimaciones a priori del error

$$\|x^* - x_n\| \leq s - t_n, \quad n \geq 0,$$

para los métodos iterativos más conocidos que contempla la familia de procesos iterativos (1.3).

	Chebyshev	C-método ( $C = \frac{1}{2}$ )	Super-Halley	Halley
$s - t_1$	0.0147531	0.00795676	0.00553274	0.0108406
$s - t_2$	0.0000108005	$4.25233 \cdot 10^{-7}$	$2.73179 \cdot 10^{-7}$	$2.62565 \cdot 10^{-6}$
$s - t_3$	$2.12811 \cdot 10^{-7}$	$2.12811 \cdot 10^{-7}$	$2.12811 \cdot 10^{-7}$	$2.12811 \cdot 10^{-7}$

	Ostrowski	Exponencial	Logarítmico
$s - t_1$	0.00820207	0.00908772	0.0123306
$s - t_2$	$8.41234 \cdot 10^{-7}$	$1.2587 \cdot 10^{-6}$	$4.67097 \cdot 10^{-6}$
$s - t_3$	$2.12811 \cdot 10^{-7}$	$2.12811 \cdot 10^{-7}$	$2.12811 \cdot 10^{-7}$

**Tabla 4.1.** Estimaciones a priori del error  $\|x^* - x_n\| \leq s - t_n, n \geq 0$

Estas estimaciones del error pueden mejorarse puesto que conocemos las tres raíces del polinomio mayorizante (4.14). A partir del teorema 4.2.3, obtenemos las siguientes cotas a posteriori del error para la familia de métodos iterativos (1.3):

$$s - t_n \approx \frac{\Delta^{3^n}}{\sqrt{\phi} - \Delta^{3^n}}(s^* - s), \quad n \geq 0, \tag{4.15}$$

cuando  $\Delta < 1$  y  $\phi > 0$ , siendo

$$\phi = \frac{2(r_0 + s)^2 + 2(s^* - s)^2 - 3(r_0 + s)(s^* - s) - 4(r_0 + 2s - s^*)^2 A_2}{(r_0 + s)^2}$$

y  $\Delta = \frac{s}{s^*} \sqrt{\phi}$ . La condición  $\phi > 0$  para el polinomio (4.14) se traduce en la condición  $A_2 < 0.46898$ . Esto hace que sólo podamos dar estas estimaciones del error para ciertos métodos de la familia (1.3), como se muestra en la tabla 4.2.

	Chebyshev	Halley	Ostrowski
$s - t_1$	0.0327533	0.0149005	0.00631375
$s - t_2$	0.000178063	$8.46182 \cdot 10^{-6}$	$2.87066 \cdot 10^{-7}$
$s - t_3$	$3.30353 \cdot 10^{-11}$	$1.65664 \cdot 10^{-15}$	$2.77606 \cdot 10^{-20}$
$s - t_4$	$2.11124 \cdot 10^{-31}$	$1.2432 \cdot 10^{-44}$	$2.51057 \cdot 10^{-59}$
$s - t_5$	$5.51084 \cdot 10^{-92}$	$5.25382 \cdot 10^{-132}$	$1.85696 \cdot 10^{-176}$

	Exponencial	Logarítmico
$s - t_1$	0.00915169	0.0207486
$s - t_2$	$1.24588 \cdot 10^{-6}$	0.000030739
$s - t_3$	$3.27558 \cdot 10^{-18}$	$1.09627 \cdot 10^{-13}$
$s - t_4$	$5.95284 \cdot 10^{-53}$	$4.97343 \cdot 10^{-39}$
$s - t_5$	$3.57298 \cdot 10^{-157}$	$4.64381 \cdot 10^{-115}$

**Tabla 4.2.** Estimaciones a posteriori del error (4.15)

Por otra parte, si hacemos un estudio comparativo con el realizado mediante la técnica de las relaciones de recurrencia, se observa que para este valor de  $\lambda = 0.03$  sólo se satisfacen las condiciones del teorema 4.3.4 para los métodos de Chebyshev, Halley, exponencial y logarítmico. A modo comparativo con el estudio realizado mediante la técnica de sucesiones mayorizantes, presentamos en la tabla 4.3 los dominios de existencia y unicidad de solución para los procesos iterativos que satisfacen las condiciones obtenidas a partir de las relaciones de recurrencia.

	Chebyshev	Halley	Exponencial	Logarítmico
existencia	$\overline{B(1, 0.416987)}$	$\overline{B(1, 0.462943)}$	$\overline{B(1, 0.486724)}$	$\overline{B(1, 0.444379)}$
unicidad	$B(1, 0.737427)$	$B(1, 0.694072)$	$B(1, 0.671313)$	$B(1, 0.711685)$

**Tabla 4.3.** Dominios de existencia y unicidad de solución obtenidos mediante la técnica de las relaciones de recurrencia

Obsérvese que mientras que la técnica de sucesiones mayorizantes proporciona unos dominios de existencia y unicidad para todos los métodos iterativos considerados de  $R$ -orden al menos tres, la técnica de las relaciones de recurrencia sólo lo hace para alguno de ellos. Además, los dominios de existencia y unicidad obtenidos mediante la técnica de sucesiones mayorizantes son mejores que los conseguidos con relaciones de recurrencia.

Para finalizar con este ejemplo, mostramos las tres primeras aproximaciones  $x_n(s)$  a la solución de la ecuación (4.11) con ocho cifras significativas, obtenidas mediante un proceso iterativo de la familia (1.3), el método de

Chebyshev:

$$x_1(s) = 1 + 0.076555926 e^s,$$

$$x_2(s) = 1 + 0.077429251 e^s,$$

$$x_3(s) = 1 + 0.077429253 e^s.$$

#### 4.4.2. Un problema de valores en la frontera

En el siguiente ejemplo mostramos, mediante un problema de valores en la frontera ([54]), una situación en la que el operador  $F$  asociado a este problema es un operador no acotado que satisface una condición  $w$ -condicionada **(S4)** para  $F''$ . Usamos el teorema 4.3.4 para obtener, desde la convergencia de la familia de procesos iterativos (1.3), dominios de existencia y unicidad de solución.

Consideramos el problema de valores en la frontera:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + x(t)^{2+p} + \lambda x(t)^3 = 0, & p \in (0, 1], \lambda \in \mathbb{R}, \\ x(0) = 0; x(1) = 0, \end{cases} \quad (4.16)$$

con  $x \in C^2([0, 1])$ ,  $t \in [0, 1]$ . Para obtener la solución numérica discretizamos. Para ello, dividimos el intervalo  $[0, 1]$  en  $n$  subintervalos de longitud  $h = 1/n$  y denotamos por  $\{v_k\}$  los puntos de esta partición

$$0 = v_0 < v_1 < v_2 < \dots < v_n = 1.$$

Una aproximación estándar para la derivada segunda viene dada por

$$x_i'' = \frac{x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}}{h^2}, \quad x_i = x(v_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

que llevada al problema de valores en la frontera lo transforma en un sistema de ecuaciones no lineales con incógnitas  $x_1, \dots, x_{n-1}$ .

Las condiciones en la frontera son remplazadas por  $x_0 = 0 = x_n$  y definimos el operador  $F: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  dado por

$$F(\bar{x}) = A\bar{x} + \Phi(\bar{x}),$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \Phi(\bar{x}) = h^2 \begin{pmatrix} x_1^{2+p} + \lambda x_1^3 \\ x_2^{2+p} + \lambda x_2^3 \\ \vdots \\ x_{n-2}^{2+p} + \lambda x_{n-2}^3 \\ x_{n-1}^{2+p} + \lambda x_{n-1}^3 \end{pmatrix}$$

y  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})^t$ . Notemos que resolver este sistema es equivalente a encontrar una solución de la ecuación  $F(\bar{x}) = 0$ .

Además, se tiene que  $F'(\bar{x})$  es un operador lineal que viene dado por

$$F'(\bar{x})(\bar{u}) = A + h^2((2+p)D_{1+p}(\bar{x}) + 3\lambda D_2(\bar{x}))\bar{u}, \quad \forall \bar{u} \in \mathbb{R}^{n-1},$$

donde denotamos por  $D_k(\bar{x})$  la matriz diagonal que tiene por elementos las componentes del vector  $(x_1^k, \dots, x_{n-1}^k)$ , y  $F''(\bar{x})$  es un operador bilineal definido por la matriz

$$F''(\bar{x})(\bar{u}, \bar{v}) = h^2 \begin{pmatrix} ((2+p)(1+p)x_1^p + 6\lambda x_1)u_1 v_1 \\ ((2+p)(1+p)x_2^p + 6\lambda x_2)u_2 v_2 \\ \vdots \\ ((2+p)(1+p)x_{n-1}^p + 6\lambda x_{n-1})u_{n-1} v_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Por otra parte, sea  $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$  y  $A \in M(n-1 \times n-1)$ ,  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n-1}$ , consideramos las normas de  $\bar{x}$  y  $A$ :

$$\|\bar{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n-1} |x_i|, \quad \|A\| = \sup_{\substack{\bar{x} \in \mathbb{R}^{n-1} \\ \bar{x} \neq 0}} \frac{\|A\bar{x}\|_\infty}{\|\bar{x}\|_\infty} = \max_{1 \leq i \leq n-1} \left( \sum_{j=1}^{n-1} |a_{ij}| \right).$$

Es claro que el operador derivada segunda no es acotado, puesto que

$$\begin{aligned} \|F''(\bar{x})\| &\leq h^2 \left( (2+p)(1+p) \left\| \text{diag} \{x_i^p\}_{1 \leq i \leq n-1} \right\| + 6\lambda \left\| \text{diag} \{x_i\}_{1 \leq i \leq n-1} \right\| \right) \\ &= h^2 ((2+p)(1+p) \|\bar{x}\|^p + 6\lambda \|\bar{x}\|) \end{aligned}$$

Por lo tanto, bajo las condiciones habituales de Kantorovich, **(C1)**–**(C4)**, no podemos obtener dominios de existencia y unicidad de soluciones para  $F(\bar{x}) = 0$ . En esta situación, es necesario localizar una solución en un conjunto apropiado donde el operador  $F''$  esté acotado (véase [59]). Sin embargo, a partir de las nuevas condiciones impuestas al operador  $F''$  en el teorema 4.3.4, evitamos la prelocalización. De hecho, este operador satisface una condición **(S4)**. En efecto, notemos que para todo  $\bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}^{n-1}$ , tenemos

$$(F''(\bar{y}) - F''(\bar{z}))(\bar{u}, \bar{v}) = h^2 \begin{pmatrix} l_1 u_1 v_1 \\ l_2 u_2 v_2 \\ \vdots \\ l_{n-1} u_{n-1} v_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^{n-1},$$

donde  $l_i = (2+p)(1+p)(y_i^p - z_i^p) + 6\lambda(y_i - z_i)$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ . Por tanto, tomando normas,

$$\begin{aligned}
& \|F''(\bar{y}) - F''(\bar{z})\| \\
&= h^2 \left( (2+p)(1+p) \left\| \text{diag} \{y_i^p - z_i^p\}_{1 \leq i \leq n-1} \right\| + 6\lambda \left\| \text{diag} \{y_i - z_i\}_{1 \leq i \leq n-1} \right\| \right) \\
&= h^2 \left( (2+p)(1+p) \max_{1 \leq i \leq n-1} |y_i^p - z_i^p| + 6\lambda \max_{1 \leq i \leq n-1} |y_i - z_i| \right) \\
&\leq h^2 \left( (2+p)(1+p) \max_{1 \leq i \leq n-1} |y_i - z_i|^p + 6\lambda \|\bar{y} - \bar{z}\| \right) \\
&= h^2 \left( (2+p)(1+p) \|\bar{y} - \bar{z}\|^p + 6\lambda \|\bar{y} - \bar{z}\| \right),
\end{aligned}$$

de manera que,  $\omega(z) = h^2(2+p)(1+p)z^p + 6\lambda z$  y  $\varphi(t) = t^p$ .

Llevamos a cabo un estudio para un caso particular, donde  $p = 1/2$  y  $\lambda = 1/5$ , y aproximamos la solución de la ecuación por el método de Super-Halley, el proceso iterativo incluido en la familia (1.3) con  $A_k = 1/2$ ,  $k \geq 1$ , y  $r = 1$ . Para probar la convergencia de la familia de procesos iterativos (1.3) a una solución de (4.16) o equivalentemente de  $F(\bar{x}) = 0$ , tomamos  $n = 10$  y como aproximación inicial  $\bar{u}_0 = 15 \sin(\pi \bar{x})$ . Esta elección es razonable si buscamos una solución positiva que cumpla las condiciones de frontera. Considerando 16 cifras significativas, esta aproximación inicial nos proporciona el siguiente vector

$$\bar{u}_0 = \begin{pmatrix} 4.635254915624211 \\ 8.816778784387097 \\ 12.13525491562421 \\ 14.26584774442730 \\ 15 \\ 14.26584774442730 \\ 12.13525491562421 \\ 8.816778784387097 \\ 4.635254915624211 \end{pmatrix}.$$

Después de dos iteraciones aplicando el método de Super-Halley, obtenemos

$$\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 1.158081984971777 \\ 2.300659662378067 \\ 3.350975016333844 \\ 4.155485746165061 \\ 4.495516921280982 \\ 4.155485746165061 \\ 3.350975016333844 \\ 2.300659662378067 \\ 1.158081984971777 \end{pmatrix}.$$

Elegimos  $\bar{u}_2$  como aproximación inicial  $\bar{x}_0$  para el teorema 4.3.4. Entonces, tomando  $\bar{x}_0 = \bar{u}_2$ , las condiciones de convergencia del teorema 4.3.4 se cumplen para la familia (1.3). Para este valor  $\bar{x}_0$  obtenemos las siguientes constantes  $\beta$ ,  $\alpha$  y  $\eta$ :

$$\| \Gamma_0 \| \leq 8.42974 = \beta, \quad \| \Gamma_0 F(\bar{x}_0) \| \leq 0.120491 = \eta,$$

y

$$\| F''(\bar{x}_0) \| \leq 0.133456 = \alpha.$$

En estas condiciones, obtenemos dominios de existencia y unicidad de solución de (4.16) para los procesos iterativos más conocidos de la familia (1.3), que mostramos en la tabla 4.4.

	Chebyshev	Super-Halley	Halley
existencia	$\overline{B(\bar{x}_0, 0.15638)}$	$\overline{B(\bar{x}_0, 0.16085)}$	$\overline{B(\bar{x}_0, 0.15843)}$
unicidad	$B(\bar{x}_0, 1.29529)$	$B(\bar{x}_0, 1.29118)$	$B(\bar{x}_0, 1.29341)$
	Exponencial	Logarítmico	Euler
existencia	$\overline{B(\bar{x}_0, 0.1592)}$	$\overline{B(\bar{x}_0, 0.1577)}$	$\overline{B(\bar{x}_0, 0.1611)}$
unicidad	$B(\bar{x}_0, 1.29267)$	$B(\bar{x}_0, 1.29408)$	$B(\bar{x}_0, 1.29099)$

**Tabla 4.4.** Dominios de existencia y unicidad de soluciones para (4.16)

Denotando por  $\bar{x}_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_9^{(n)})^t$  la  $n$ -ésima iteración y usando 16 cifras significativas, consideramos como solución numérica aproximada de (4.16), la obtenida en la segunda iteración aplicando el método de Super-Halley, que mostramos en la tabla 4.5.

$x_1^{(2)}$	$x_2^{(2)}$	$x_3^{(2)}$
1.452151195022353	2.878890931592748	4.165005508273268
$x_4^{(2)}$	$x_5^{(2)}$	$x_6^{(2)}$
5.097090993740699	5.442625226296638	5.097090993740699
$x_7^{(2)}$	$x_8^{(2)}$	$x_9^{(2)}$
4.165005508273268	2.878890931592748	1.452151195022353

**Tabla 4.5.** Solución numérica de (4.16) obtenida aplicando el método de Super-Halley

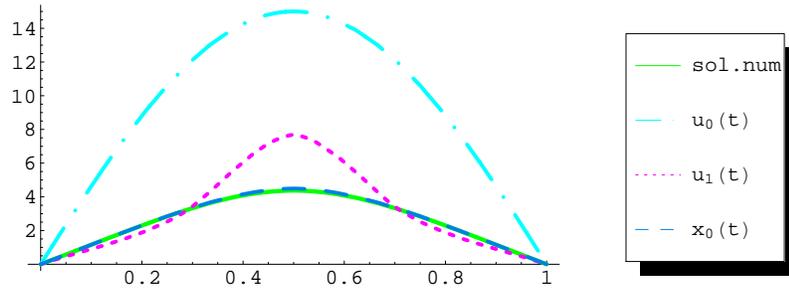
Aplicando el método de Super-Halley de la siguiente forma: conocido  $\bar{x}_k \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,

- Resolvemos el sistema lineal  $F'(\bar{x}_k)\bar{c}_k = -F(\bar{x}_k)$ ,
- Resolvemos el sistema lineal:

$$(F'(\bar{x}_k) + F''(\bar{x}_k)\bar{c}_k)\bar{d}_k = -F(\bar{x}_k) + \frac{1}{2}F''(\bar{x}_k)\bar{c}_k^2,$$

- Definimos el siguiente punto  $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + \bar{d}_k$ ,

e interpolando la función  $x_n(t)$  que pasa por los puntos  $(v_i, x_i^{(n)})$ ,  $i = 1, \dots, 9$ , obtenemos graficamente en la figura 4.1 la solución numérica  $x_2(t)$ , así como las dos primeras aproximaciones  $u_1(t)$  y  $x_0(t) = u_2(t)$ , pasando a través de los puntos  $(v_i, u_i^{(n)})$ ,  $i = 1, \dots, 9$ .



**Figura 4.1.** Aproximaciones a una solución de (4.16) mediante el método de Super-Halley

## Ecuaciones cuadráticas

### 5.1. Introducción

El uso de procesos iterativos de  $R$ -orden tres o, en general, de  $R$ -orden mayor que dos para la aproximación de una solución de una ecuación no es usual en la práctica, debido fundamentalmente al coste operacional que conlleva, pero existen situaciones en las que el aumento de la velocidad de convergencia justifica su uso. Así por ejemplo, estos procesos iterativos se usan exitosamente en problemas donde se requiere una rápida convergencia como es el caso de sistemas de tipo Stiff ([78]).

En este capítulo, consideramos el problema de aproximar una solución  $x^*$  de una ecuación no lineal

$$F(x) = 0, \tag{5.1}$$

donde tomamos el operador  $F$  como un operador cuadrático y definido entre espacios de Banach. Esto nos permite estudiar situaciones tan diversas como son la ecuación algebraica de Riccati ([6], [49]), la ecuación integral de Chandrasekhar ([10], [39]), que surge del estudio de transferencia radiactiva ([24]), transporte de neutrones ([25]) de la teoría cinética de gases, o simplemente el cálculo de las raíces de un polinomio de segundo grado ([43], [44], [97], [98]). En estos casos, la aplicación de procesos iterativos de  $R$ -orden al menos tres, como por ejemplo el método de Chebyshev ([16], [48]), el método de Halley ([60], [63]) o el método de Super-Halley ([50], [71], [73]) tiene interés práctico.

Es conocido ([71]), que la utilización de familias de procesos iterativos dependientes de parámetros permite optimizar su aplicación en determinadas situaciones. Así, por ejemplo, en [75] se obtiene un proceso iterativo de cuarto orden para aproximar la raíz cuadrada de un número real a partir del estudio de una familia uniparamétrica de procesos iterativos de tercer orden.

Teniendo en cuenta el resultado de Gander y las expresiones de los métodos de  $R$ -orden al menos tres más conocidos consideramos la familia  $(q - 3)$ -paramétrica de procesos iterativos dados por el algoritmo (1.3), que recordamos a continuación

$$\begin{cases} x_{n+1} = G(x_n) = x_n - H(L_F(x_n))\Gamma_n F(x_n) \\ H(L_F(x_n)) = I + \frac{1}{2}L_F(x_n) + \sum_{k=2}^{q-2} A_k L_F(x_n)^k, \quad A_k \in \mathbb{R}^+, \quad k \geq 2. \end{cases}$$

A partir del resultado de Gander, es inmediato en el caso real, que esta familia de procesos iterativos tiene al menos orden de convergencia tres, puesto que  $H(0) = 1$ ,  $H'(0) = \frac{1}{2}$  y  $|H''(0)| < \infty$ , y tratamos de conseguir valores para los parámetros  $A_2, A_3, \dots, A_{q-2}$  que nos permitan obtener un orden de convergencia prefijado  $q$  ( $q \in \mathbb{N}$ ). De esta manera, tomando valores apropiados para los parámetros, conseguimos orden de convergencia prefijado  $q$ , con  $q \geq 4$ . Veremos que estos parámetros son, salvo un factor  $2^k$ , los conocidos números de Catalan ([45], [38], [149], [82]) que vienen definidos de la siguiente forma:

$$C_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}, \quad k \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5.2)$$

Esta situación se generaliza a espacios de Banach en la sección 5.3, obteniendo  $R$ -orden de convergencia al menos cuatro, sin más que fijar el parámetro  $A_2 = 1/2$ . Además, también podemos obtener un  $R$ -orden de convergencia prefijado  $q$ , con  $q > 4$ , pero al contrario de lo que ocurre en  $\mathbb{R}$  o en  $\mathbb{C}$ , es necesario exigir ciertas condiciones.

A modo de ejemplo, presentamos un caso práctico en el que aplicamos procesos iterativos de la familia con  $R$ -órdenes de convergencia altos a ecuaciones integrales cuadráticas de tipo Fredholm y de segunda clase ([40]), de la forma

$$x(s) = f(s) + \lambda \int_a^b \kappa(s, t)x(t)^2 dt,$$

donde  $\lambda$  es una constante real,  $f(s) \in X$  es una función conocida y  $\kappa(s, t)$  es el núcleo de la ecuación integral. Para ello, consideraremos el espacio de Banach  $X = C([a, b])$  de todas las funciones continuas definidas en el intervalo real  $[a, b]$  con la norma del máximo.

Posteriormente, en la sección 5.4, llevamos a cabo en el plano complejo extendido,  $\mathbb{C}_\infty$ , un análisis cualitativo de las propiedades de la familia de procesos iterativos, bajo un punto de vista distinto al anterior. Basándonos en la teoría desarrollada por otros autores sobre funciones iterativas racionales de variable compleja (véanse [9], [8], [27], [102], [105], [106]), analizamos numérica y dinámicamente la convergencia de la familia de procesos iterativos cuando éstos son aplicados a polinomios cuadráticos en  $\mathbb{C}$ .

## 5.2. Ecuaciones cuadráticas reales

En el caso real, cuando la función  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es cuadrática, se tiene que  $F^{(j)}(t) = 0$  para todo  $j \geq 3$  y, podemos representarla de esta forma

$$F(t) = \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0, \quad \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0 \in \mathbb{R}. \quad (5.3)$$

Por otra parte, sabemos que la ecuación  $F(t) = 0$  tiene dos raíces reales diferentes  $r_1 < r_2$  siempre que  $\alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2 > 0$ , condición que a partir de este momento exigiremos.

Como ya se ha indicado, consideramos la familia  $(q-3)$ -paramétrica de procesos iterativos dada por el algoritmo

$$\begin{cases} t_{k+1} = G(t_k) = t_k - H_q(L_F(t_k)) \frac{F(t_k)}{F'(t_k)}, & k \geq 0, \\ H_q(t) = \sum_{j=0}^{q-2} A_j t^j, & A_0 = 1, A_1 = \frac{1}{2}, A_j \in \mathbb{R}^+, j = 2, 3, \dots, q-2, \end{cases} \quad (5.4)$$

siendo  $q \geq 4$ . Obsérvese que para  $q = 2$  se tiene el método de Newton, con  $H_2(t) = 1$ , y, para  $q = 3$ , obtenemos el método de Chebyshev, puesto que  $H_3(t) = 1 + \frac{1}{2}t$ .

Como consecuencia del resultado de Gander dado en la sección 1.1, todos los procesos iterativos de esta familia tienen orden de convergencia al menos tres para  $q \geq 3$ . Tratamos de obtener los valores óptimos de los parámetros  $A_2, A_3, \dots, A_{q-2}$ , de manera que el proceso iterativo correspondiente tenga orden de convergencia  $q \geq 4$ , fijado el valor de  $q \in \mathbb{N}$ . Notemos que al ser procesos iterativos de orden tres y disponer de  $q-3$  parámetros, el valor máximo que podemos conseguir para el orden de convergencia es  $3 + q - 3 = q$ .

De esta manera, considerando la ecuación  $F(t) = 0$  con  $F$  dada en (5.3), podemos fijar a priori el orden de convergencia con el cual queremos aproximar una determinada solución de la ecuación.

### 5.2.1. Construcción de procesos iterativos con orden de convergencia prefijado

Teniendo en cuenta la caracterización dada por Schröder, el proceso iterativo considerado en (5.4) tiene orden de convergencia  $q$ , si

$$G(\alpha) = \alpha, \quad G'(\alpha) = G''(\alpha) = \dots = G^{(q-1)}(\alpha) = 0, \quad G^{(q)}(\alpha) \neq 0, \quad (5.5)$$

denotando por  $\alpha$  la solución de la ecuación  $F(t) = 0$  que aproximamos. Obsérvese que  $\alpha$  puede ser  $r_1$  o  $r_2$ .

Teniendo en cuenta que  $H_q(0) = 1$  para cualquier  $q \in \mathbb{N}$ , resulta evidente, por la propia definición de  $G$  en (5.4) que  $G(\alpha) = \alpha$ .

Por otra parte, considerando la igualdad

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{F(t)}{F'(t)} \right) = 1 - L_F(t)$$

y que  $F$  es cuadrática, obtenemos

$$\frac{d}{dt} (L_F(t)) \frac{F(t)}{F'(t)} = (1 - 2L_F(t))L_F(t).$$

Como consecuencia, se tiene que

$$\begin{aligned} G'(t) &= 1 - \sum_{j=0}^{q-2} j A_j L_F(t)^{j-1} (1 - 2L_F(t)) L_F(t) - \sum_{j=0}^{q-2} A_j L_F(t)^j (1 - L_F(t)) \\ &= (1 - A_0) + (-2A_1 + A_0)L_F(t) \\ &\quad + \sum_{j=2}^{q-2} ((2j-1)A_{j-1} - (j+1)A_j)L_F(t)^j + (2q-3)A_{q-2}L_F(t)^{q-1}. \end{aligned}$$

Entonces, puesto que  $A_0 = 1$  y  $A_1 = 1/2$  obtenemos la siguiente igualdad

$$G'(t) = \sum_{j=2}^{q-2} ((2j-1)A_{j-1} - (j+1)A_j)L_F(t)^j + (2q-3)A_{q-2}L_F(t)^{q-1}. \quad (5.6)$$

A partir de (5.6) y tratando de que se cumpla (5.5), resulta evidente el procedimiento a seguir. En primer lugar anulamos todos los coeficientes de las potencias  $L_F(t)^j$ , con  $2 \leq j \leq q-2$ , que aparecen en (5.6), o lo que es lo mismo, buscamos los coeficientes  $A_j$ , con  $j = 2, \dots, q-2$ , de tal manera que satisfacen esta relación de recurrencia,

$$\frac{A_j}{A_{j-1}} = \frac{2j-1}{j+1} \quad j = 2, \dots, q-2. \quad (5.7)$$

Por otra parte, los números de Catalan (5.2), (véanse [45], [149]), definidos de la siguiente forma:

$$C_j = \frac{1}{j+1} \binom{2j}{j} \quad j \in \mathbb{N},$$

satisfacen esta otra relación de recurrencia,

$$\frac{C_j}{C_{j-1}} = \frac{2(2j-1)}{j+1}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

De manera que, la relación (5.7) se cumple si tomamos como coeficientes  $A_j$  los números de Catalan salvo un factor  $2^j$ , esto es:

$$A_j = \frac{1}{2^j} C_j, \quad 0 \leq j \leq q-2. \quad (5.8)$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que

$$L_F(t) = \frac{2\alpha_2^2(t-r_1)(t-r_2)}{(\alpha_1 + 2\alpha_2 t)^2},$$

podemos considerar

$$L_F(t) = (t - \alpha)h(t), \quad (5.9)$$

con  $h(t) \neq 0$  para  $t \neq \bar{\alpha}$ , donde  $\bar{\alpha}$  es la otra raíz de la ecuación  $F(t) = 0$ . Entonces, si tomamos como coeficientes  $A_j$  los dados en (5.8), obtenemos la igualdad

$$G'(t) = (2q - 3)A_{q-2}(t - \alpha)^{q-1}h(t)^{q-1}, \quad (5.10)$$

lo que nos facilitará la prueba de (5.5).

**Teorema 5.2.1** *El proceso iterativo (5.4) con los coeficientes  $A_j$  dados en (5.8) tiene orden de convergencia  $q$ ,  $q \geq 4$ .*

*Demostración.* Resulta evidente que los valores dados en (5.8) para los coeficientes  $A_j$  nos lleva a la expresión (5.10). Así, aplicando la fórmula de Leibnitz para la derivada del producto en (5.10), y teniendo en cuenta (5.9), llegamos a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} G^{(j+1)}(t) &= (2q - 3)A_{q-2} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} ((t - \alpha)^{q-1})^{(i)} (h(t)^{q-1})^{(j-i)} \\ &= (2q - 3)A_{q-2} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (q-1)(q-2) \cdots (q-i) ((t - \alpha)^{q-1-i}) (h(t)^{q-1})^{(j-i)}. \end{aligned}$$

Por tanto,  $G'(\alpha) = G''(\alpha) = \cdots = G^{(q-1)}(\alpha) = 0$ . Además

$$G^{(q)}(\alpha) = (2q - 3)(q - 1)!A_{q-2}h(\alpha)^{q-1} \neq 0. \quad \blacksquare$$

Consecuentemente, los procesos iterativos dados por el algoritmo (5.4) con  $A_j$  definidos en (5.8),

$$\begin{cases} t_{k+1} = G(t_k) = t_k - H_q(L_F(t_k)) \frac{F(t_k)}{F'(t_k)}, & k \geq 0, \\ H_q(t) = \sum_{j=0}^{q-2} \frac{1}{2^j} C_j t^j, & C_j = \frac{1}{j+1} \binom{2j}{j}, \end{cases} \quad (5.11)$$

tienen  $R$ -orden de convergencia  $q \geq 4$ , con  $q \in \mathbb{N}$ . Notemos que este resultado es válido sea cual sea la raíz que aproximemos.

### 5.2.2. Convergencia semilocal

Para probar la convergencia semilocal de la familia de procesos iterativos construida anteriormente, necesitamos dar condiciones para el punto de salida  $t_0$  que garantice la convergencia de dichos procesos. A la vista del algoritmo que define los procesos iterativos dados en (5.11), es claro que el signo de

los polinomios  $H_q(t)$  va a jugar un papel determinante en la convergencia de la sucesión  $\{t_k\}$ , así como en la monotonía de ésta. Previo al estudio de la convergencia, vamos a estudiar algunas propiedades de los polinomios  $H_q(t)$  que permitan asegurar la convergencia. A continuación, damos un resultado sobre el signo de los polinomios  $H_q(t)$ .

**Lema 5.2.2** *Sea  $H_q(t)$  el polinomio dado en (5.11). Entonces,  $H_q(t)$  es creciente y  $H_q(t) > 0$ , para todo  $t \in [-1/2, +\infty)$  y  $q \in \mathbb{N}$ ,  $q \geq 3$ .*

*Demostración.* Observemos que el caso  $q = 3$  es trivial. Consideramos el caso  $q = 2p + 2$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , para probar que  $H'_q(t) \geq 0$  para  $t \in [-1/2, +\infty)$  y  $q \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} H'_{2p+2}(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{j=2}^{2p} \frac{j}{2^j(j+1)} \binom{2j}{j} t^{j-1} \\ &= \left(\frac{1}{2} + t\right) + t^2 \left(\frac{15}{8} + \frac{7}{2}t\right) + \cdots + \frac{t^{2p-2}(4p-2)!}{2^{2p-1}((2p-1)!)^2} \left(\frac{2p-1}{2p} + \frac{4p-1}{2p+1}t\right). \end{aligned}$$

Ahora bien, si tomamos cada paréntesis, para  $t \geq -1/2$ , se observa fácilmente que  $H'_{2p+2}(t) \geq 0$ , para  $t \in [-1/2, +\infty)$ .

El caso  $q = 2p + 3$  es análogo, salvo que en  $H'_{2p+1}(t)$  tenemos un sumando más que es siempre positivo.

A continuación, probamos que  $H_q(-1/2) > 0$ , para  $q \in \mathbb{N}$ . Consecuentemente, el resultado queda demostrado teniendo en cuenta que  $H_q(t)$  es creciente en  $t \in [-1/2, +\infty)$  y  $q \in \mathbb{N}$ . Consideramos primero el caso  $q = 2p + 3$

$$\begin{aligned} H_{2p+3}\left(\frac{-1}{2}\right) &= \sum_{j=0}^{2p+1} \frac{1}{2^j(j+1)} \binom{2j}{j} \left(\frac{-1}{2}\right)^j \\ &= \frac{3}{4} + \frac{3}{2^6} + \cdots + \frac{3(4p)!}{2^{4p+2}((2p)!)^2(2p+1)(p+1)}. \end{aligned}$$

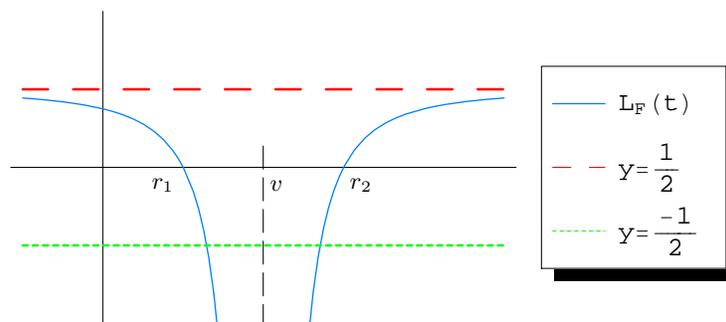
Luego  $H_{2p+3}(-1/2) > 0$ .

El caso  $q = 2p + 2$  es análogo, sin más que tener en cuenta que la expresión correspondiente a  $H_{2p+3}(-1/2)$  tiene un sumando más, el último, que siempre es positivo. ■

En vista de las propiedades de los polinomios  $H_q(t)$ , a continuación nos ocupamos de la convergencia de los procesos iterativos dados por (5.11), que hemos construido en el apartado anterior.

Como veremos, el carácter de la sucesión  $\{t_k\}$  viene determinado por la elección del punto de salida  $t_0$ . Teniendo en cuenta que estas ecuaciones cuadráticas tienen un punto característico que es el vértice de la parábola, cuya abscisa viene dada por el valor  $v = -\alpha_1/2\alpha_2$ , va a ser éste el punto de referencia respecto del cual vamos a tomar el punto de salida  $t_0$ .

Según la ubicación del punto de salida  $t_0$  obtendremos diferentes tipos de convergencia como veremos en el siguiente resultado de convergencia semilocal. Observemos que el punto de salida  $t_0$  puede situarse en los cuatro intervalos siguientes:  $(-\infty, r_1)$ ,  $(r_1, v)$ ,  $(v, r_2)$  y  $(r_2, +\infty)$ . En este caso, tal y como se muestra en la figura 5.1, la función  $L_F(t)$  tiene una variación simétrica respecto del eje determinado por la abscisa que pasa por el vértice. Teniendo en cuenta esta variación, es simple probar el siguiente teorema. En primer lugar, vamos a considerar el caso  $\alpha_2 > 0$ .



**Figura 5.1.** Grado de convexidad logarítmico para la  $F$  dada en (5.3)

**Teorema 5.2.3** Sea  $\{t_k\}$  la sucesión definida en (5.11). Entonces,

- (i) Si  $t_0 > v$  y  $F(t_0) > 0$ , la sucesión  $\{t_k\}$  es decreciente y converge a  $r_2$ .
- (ii) Si  $t_0 > v$ ,  $F(t_0) < 0$  y  $L_F(t_0) \geq \frac{-1}{2}$ :
  - Para  $q$  impar, la sucesión  $\{t_k\}$  es creciente y converge a  $r_2$ .
  - Para  $q$  par,  $t_1 > r_2$ , la sucesión  $\{t_k\}$  es decreciente para  $k > 1$  y converge a  $r_2$ .
- (iii) Si  $t_0 < v$  y  $F(t_0) > 0$ , la sucesión  $\{t_k\}$  es creciente y converge a  $r_1$ .
- (iv) Si  $t_0 < v$ ,  $F(t_0) < 0$  y  $L_F(t_0) \geq \frac{-1}{2}$ :
  - Para  $q$  impar, la sucesión  $\{t_k\}$  es decreciente y converge a  $r_1$ .
  - Para  $q$  par,  $t_1 < r_1$ , la sucesión  $\{t_k\}$  es creciente para  $k > 1$  y converge a  $r_1$ .

En todos los casos, la sucesión  $\{t_k\}$  converge a la solución con orden de convergencia  $q$ ,  $q \geq 4$ .

*Demostración.* En la situación (i), como  $F(t_0) > 0$ ,  $F''(t_0) > 0$  y  $F'(t_0) > 0$ , se tiene que  $L_F(t_0) > 0$  y  $H_q(L_F(t_0)) > 0$ . Por lo tanto, se sigue que  $t_1 < t_0$

$$t_1 - t_0 = -H_q(L_F(t_0)) \frac{F(t_0)}{F'(t_0)}. \quad (5.12)$$

Además, para  $G(t)$  dada en (5.4), es inmediato que

$$r_2 - t_1 = G(r_2) - G(t_0) = G'(\theta_0)(r_2 - t_0), \quad (5.13)$$

es menor que cero, puesto que  $\theta_0 \in (r_2, t_0)$  y

$$G'(\theta_0) = (2q - 3)A_{q-2}L_F(\theta_0)^{q-1} > 0. \quad (5.14)$$

Suponiendo, por un razonamiento análogo, que  $r_2 \leq t_{k-1} \leq t_{k-2}$ , se sigue mediante un proceso inductivo que  $t_k \leq t_{k-1}$

$$t_k - t_{k-1} = -H_q(L_F(t_{k-1})) \frac{F(t_{k-1})}{F'(t_{k-1})} \leq 0. \quad (5.15)$$

Además,

$$r_2 - t_k = G(r_2) - G(t_{k-1}) = G'(\theta_{k-1})(r_2 - t_{k-1}) \quad (5.16)$$

es menor o igual que cero, sin más que considerar (5.14), para  $\theta_{k-1} \in (r_2, t_{k-1})$ , y tener en cuenta que  $r_2 \leq t_{k-1}$ .

Como consecuencia de lo anterior,  $\{t_k\}$  es una sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente por  $r_2$ . Entonces, existe  $l = \lim_{k \rightarrow +\infty} t_k$ , con  $l \geq r_2$  y, pasando al límite en (5.11), obtenemos

$$l = l - H_q(L_F(l)) \frac{F(l)}{F'(l)}. \quad (5.17)$$

Teniendo en cuenta que  $L_F(l) \geq 0$  por el lemma 5.2.2, se sigue que  $H_q(L_F(l)) > 0$  y  $F(l) = 0$ . Por lo tanto,  $l = r_2$ .

Para probar (ii): Si  $t_0 > 0$ ,  $F(t_0) < 0$  y  $L_F(t_0) \geq -1/2$ , se pueden distinguir los casos  $q$  impar y  $q$  par.

Cuando  $q$  es impar, como  $F(t_0) < 0$ ,  $F'(t_0) > 0$  y  $H_q(L_F(t_0)) > 0$  por el lema 5.2.2, teniendo en cuenta (5.12) se sigue que  $t_1 > t_0$ .

Por otra parte, para  $G$  dada en (5.11), por (5.13) se sigue que  $t_1 < r_2$ , ya que  $\theta_0 \in (t_0, r_2)$ . Suponiendo, mediante un razonamiento análogo que  $t_{k-2} \leq t_{k-1} \leq r_2$ , puesto que

$$\frac{d(L_F(t))}{dt} = \frac{2\alpha_2(\alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2)}{F'(t)^3} > 0,$$

obtenemos que la función  $L_F(t)$  es creciente en  $(v, r_2)$ . Por lo tanto,  $-1/2 \leq L_F(t_0) \leq L_F(t_{k-1})$ . Ahora bien, como  $H_q(t)$  es creciente en  $[-1/2, \infty)$ , entonces  $H_q(L_F(t_{k-1})) > 0$  y, teniendo en cuenta (5.15), obtenemos que  $t_{k-1} \leq t_k$ .

Además, (5.16) es mayor o igual que cero, ya que  $t_{k-1} \leq r_2$  y  $\theta_{k-1} \in (t_{k-1}, r_2)$ . Como consecuencia,  $\{t_k\}$  es monótona creciente y acotada superiormente por  $r_2$ . Entonces, existe  $l = \lim_{k \rightarrow +\infty} t_k$ , y pasando al límite en (5.11), obtenemos, igual que en los casos anteriores, (5.17). Ahora bien, teniendo en cuenta que  $l \leq r_2$ , se sigue fácilmente que  $F(l) = 0$ , y por tanto  $l = r_2$ .

Cuando  $q$  es par, de la misma manera que en el caso impar,  $t_1 > t_0$ , puesto que  $H_q(L_F(t_0)) > 0$ , por el lema 5.2.2. Por otra parte, (5.13) es menor que cero, ya que  $\theta_0 \in (t_0, r_2)$ . Por lo tanto,  $L_F(\theta_0) < 0$  y  $r_2 < t_1$ . Ahora, estamos en la situación (i), luego  $\{t_k\}$  es monótona decreciente para  $k > 1$  y converge a  $r_2$ .

La demostración de (iii) y (iv) es similar a la de los casos anteriores.

Además, acorde con la sección anterior, la familia de procesos iterativos dada en (5.11) tiene orden de convergencia  $q$ , con  $q \geq 4$ . ■

El estudio en el caso cóncavo,  $\alpha_2 < 0$ , es análogo al convexo  $\alpha_2 > 0$ , como queda reflejado en el siguiente resultado.

**Teorema 5.2.4** *Sea  $\{t_k\}$  la sucesión definida en (5.11). Entonces,*

(i) *Si  $t_0 > v$  y  $F(t_0) < 0$ , la sucesión  $\{t_k\}$  es decreciente y converge a  $r_2$ .*

(ii) *Si  $t_0 > v$ ,  $F(t_0) > 0$  y  $L_F(t_0) \geq \frac{-1}{2}$ :*

*-Para  $q$  impar, la sucesión  $\{t_k\}$  es creciente y converge a  $r_2$ .*

*-Para  $q$  par,  $t_1 > r_2$ , la sucesión  $\{t_k\}$  es decreciente para  $k > 1$  y converge a  $r_2$ .*

(iii) *Si  $t_0 < v$  y  $F(t_0) < 0$ , la sucesión  $\{t_n\}$  es creciente y converge a  $r_1$ .*

(iv) *Si  $t_0 < v$ ,  $F(t_0) > 0$  y  $L_F(t_0) \geq \frac{-1}{2}$ :*

*-Para  $q$  impar, la sucesión  $\{t_k\}$  es decreciente y converge a  $r_1$ .*

*-Para  $q$  par,  $t_1 < r_1$ , la sucesión  $\{t_k\}$  es creciente para  $k > 1$  y converge a  $r_1$ .*

*En todos los casos, la sucesión  $\{t_k\}$  converge a la solución con orden de convergencia  $q$ ,  $q \geq 4$ .*

*Nota 5.1.* A partir de los resultados de convergencia semilocal, queda perfectamente limitado el dominio de valores para el punto de salida  $t_0$ .

Por otra parte, teniendo en cuenta la simetría de la función cuadrática,  $F(v+t) = F(v-t)$  y  $F'(v+t)^2 = F'(v-t)^2$ , se sigue fácilmente la simetría de  $L_F(v+t) = L_F(v-t)$ , donde  $v$  es la abscisa del vértice. Además, se tiene que la función grado de convexidad logarítmico  $L_F(t)$  tiene una asíntota vertical  $t = v$  y las mismas raíces que  $F$ , con lo que resulta evidente, como se muestra en la figura 5.1, que existe un intervalo  $[v - \delta, v + \delta]$  con  $\delta > 0$ , en el cual  $L_F(t) < -1/2$ . En este intervalo, no podemos garantizar la convergencia de la sucesión  $\{t_k\}$ , puesto que solamente se ha probado que los polinomios  $H_q(t)$  son positivos para  $t \geq -1/2$ . Este hecho hace que no podamos asegurar la convergencia global de la familia de procesos iterativos (5.11). Este tipo de convergencia, sólo podremos asegurarla en el caso en que  $q$  sea un número par, como veremos en la siguiente sección.

### 5.2.3. Aplicaciones

A continuación, mostramos el comportamiento de algunos procesos iterativos de la familia (5.11), tomando diferentes órdenes de convergencia. Así,

en las siguientes tablas, tabla 5.1–tabla 5.4, aproximamos las dos raíces de la ecuación cuadrática  $F(t) = t^2 - 4t + 3 = 0$ , con una tolerancia del orden de  $10^{-6}$  y, mostramos todas las posibles elecciones del punto de salida que aparecen en el teorema 5.2.3, a partir de los cuales se puede asegurar convergencia semilocal.

$t_i$	orden 4	orden 5	orden 12	orden 27
$t_0$	500	500	500	500
$t_1$	157.627	138.174	29.9340	56.8436
$t_2$	50.6394	39.2431	6.76425	8.09128
$t_3$	17.2191	12.2130	3.16323	3.09412
$t_4$	6.81748	4.89921	3	3
$t_5$	3.69729	3.14861		
$t_6$	3.02328	3.00003		
$t_7$	3	3		

**Tabla 5.1.** Convergencia con  $t_0 = 500 > v$ ,  $F(t_0) > 0$

En la primera tabla, tabla 5.1, tomamos como punto de salida un punto  $t_0$  mayor que el vértice de tal manera que  $F(t_0)$  es positivo. Observamos que tanto para órdenes pares como impares la sucesión de aproximaciones a la solución es decreciente y converge a la mayor de las raíces.

$t_i$	orden 4	orden 5	orden 12	orden 27
$t_0$	-50	-50	-50	-50
$t_1$	-14.2680	-12.2398	-6.78134	-3.78101
$t_2$	-3.14131	-1.97031	0.316851	0.922037
$t_3$	0.213275	0.647405	0.999849	1
$t_4$	0.968300	0.998913	1	
$t_5$	0.999999	1		
$t_6$	1			

**Tabla 5.2.** Convergencia con  $t_0 = -50 < v$ ,  $F(t_0) > 0$

Como vemos en la segunda tabla, tabla 5.2, los procesos iterativos considerados convergen de manera creciente a la raíz más pequeña, tal y como se enuncia en el teorema 5.2.3 para el caso en que el punto de salida está a la izquierda del vértice  $v$  y  $F$  en ese punto de salida es positivo.

Las dos siguientes tablas describen las situaciones (ii) y (iv) del teorema 5.2.3, en las que exigimos la condición sobre el punto de salida  $L_F(t_0) \geq -1/2$ . Cuando aplicamos un proceso iterativo de la familia (5.11) con el objetivo de

aproximar una solución de la ecuación cuadrática  $F(t) = t^2 - 4t + 3 = 0$ , resulta que el intervalo de puntos de salida  $t_0$ , donde no tenemos garantizada la convergencia semilocal, es  $I = [1.29289, 2.70711]$ . Los puntos de salida  $t_0 \in I$  cumplen que  $L_F(t_0) < \frac{-1}{2}$ .

$t_i$	orden 4	orden 5	orden 12	orden 27
$t_0$	2.71	2.71	2.71	2.71
$t_1$	3.01558	2.98961	3.00219	2.99952
$t_2$	3	3	3	3

**Tabla 5.3.** Convergencia con  $t_0 = 2.71 > v$ ,  $F(t_0) < 0$ ,  $L_F(t_0) > \frac{-1}{2}$

Obsérvese que en la situación descrita en el punto (ii) del teorema 5.2.3, tabla 5.3, la sucesión es decreciente a partir de la segunda iteración cuando el orden de convergencia es par y es creciente cuando el orden de convergencia es impar. Además, en ambas casos converge a la raíz mayor.

$t_i$	orden 4	orden 5	orden 12	orden 27
$t_0$	1.29	1.29	1.29	1.29
$t_1$	0.984416	1.01039	0.997810	1.00048
$t_2$	1	1	1	1

**Tabla 5.4.** Convergencia con  $t_0 = 1.29 < v$ ,  $F(t_0) < 0$ ,  $L_F(t_0) > \frac{-1}{2}$

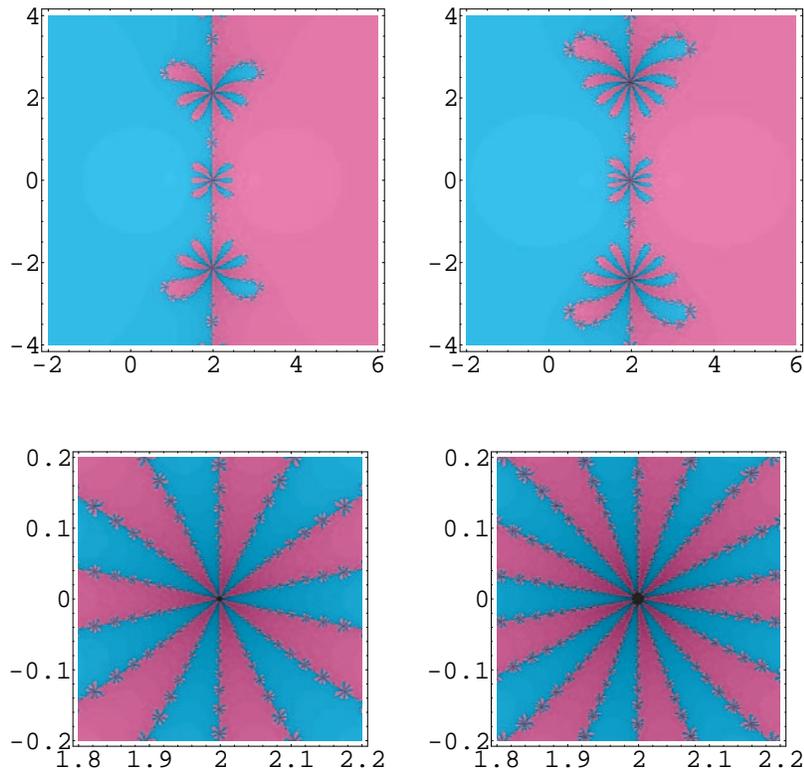
El último caso que se describe, punto (iv) del teorema 5.2.3, es análogo por simetría respecto del vértice, al expuesto en la tabla 5.3. Los procesos iterativos generan una sucesión de aproximaciones convergente a la raíz menor. Esta sucesión es creciente a partir de la segunda iteración, cuando el orden de convergencia es par, y es decreciente cuando el orden de convergencia es impar.

A continuación, hemos representado las cuencas de atracción de las dos raíces de la ecuación cuadrática  $F(t) = t^2 - 4t + 3 = 0$ . Estos dibujos, también conocidos como fractales, los hemos generado con el programa Mathematica. Actualmente, hay mucha bibliografía respecto al estudio de fractales. Pueden encontrarse libros muy técnicos, que realizan análisis en profundidad, e incluso libros que muestran multitud de dibujos y de algoritmos de cómo generar los fractales. Así, por ejemplo, citamos los trabajos de Beardon ([27]), Devaney ([42]) y Peitgen ([119]). Nuestras representaciones se basan en los algoritmos implementados con Mathematica que propone Varona en [143].

Se entiende por cuenca de atracción de una raíz  $\xi$  el conjunto de todos los puntos de salida  $t_0 \in \mathbb{C}$  de tal manera que un método iterativo converge a  $\xi$ .

Para representar estas regiones, tomamos un rectángulo en el plano complejo  $D \subset \mathbb{C}$  y asignamos un color, para cada  $t_0 \in D$ , acorde a la raíz a la cual el método iterativo elegido en (5.11) converge.

En la figura 5.2, mostramos las cuencas de atracción asociadas a las dos raíces  $t = 1$  y  $t = 3$  de la ecuación cuadrática  $F(t) = t^2 - 4t + 3 = 0$ , cuando aplicamos los procesos iterativos de la familia (5.11) con órdenes de convergencia  $q = 5$  y  $q = 6$  para aproximarlas. Para representarlas hemos tomado dos regiones distintas, el rectángulo  $[-2, 6] \times [-4, 4]$  y un rectángulo más pequeño,  $[1.8, 2.2] \times [-0.2, 0.2]$ , que muestra con más detalle lo que ocurre en un entorno de la abscisa que pasa por el vértice.



**Figura 5.2.** Cuencas de atracción para los métodos de la familia (5.11) con  $q = 5$  y  $q = 6$  aplicados a la ecuación  $F(t) = t^2 - 4t + 3 = 0$

Asignamos el color magenta para la cuenca de atracción asociada a la raíz  $t = 3$  y cyan para la cuenca de atracción asociada a la otra raíz  $t = 1$ . La intensidad del color en las cuencas de atracción representadas depende del número de iteraciones necesarias para alcanzar una raíz con una cierta

precisión que fijamos. Además, representamos con color negro los puntos de salida  $t_0$  a partir de los cuales el correspondiente proceso iterativo empleado no alcanza ninguna de las dos raíces con un máximo de 30 iteraciones y con una tolerancia del orden de  $10^{-4}$ .

Tal y como muestra la figura 5.2, es claro que a partir de cualquier punto de salida  $t_0$  de la recta real, los métodos iterativos que hemos elegido convergen a una de las dos raíces con ese máximo de iteraciones y esa precisión que hemos fijado, excepto para aquellos puntos localizados en un intervalo simétrico con respecto del vértice para los cuales se tiene que  $L_F(t_0) < -1/2$ . El hecho de elegir un método iterativo con orden de convergencia par asegura la convergencia global para el método, como veremos en la sección 5.2.4. Por lo tanto, para estos puntos  $t_0$ , el método iterativo con orden 6 que hemos elegido requiere un número de iteraciones mayor para converger a una de las dos raíces.

En los casos en los que el proceso iterativo empleado tiene un orden de convergencia impar también aparecen intervalos de puntos de salida  $t_0$  a partir de los cuales no podemos garantizar la convergencia del proceso, aunque parece que hay convergencia en casi todo punto, como se muestra en la figura 5.2 al tomar el proceso iterativo de orden 5.

### Un caso particular: Aproximación de la raíz cuadrada de un número real positivo

En el estudio que hemos realizado para la aproximación de las soluciones de una ecuación cuadrática hemos construido y analizado el tipo de convergencia de la familia de procesos iterativos (5.11) con orden de convergencia prefijado  $q$ . Todo este estudio es aplicable al caso particular de la aproximación de la raíz cuadrada de un número real positivo  $R$ , problema que ya ha sido estudiado por diversos autores ([43], [75], [97]).

Para resolver el problema de la aproximación de la raíz cuadrada de un número real positivo  $R$  se recurría a algoritmos como el dado por la famosa fórmula de Heron (75 a.C aproximadamente):

$$\begin{cases} t_0 \text{ dado} \\ t_{k+1} = \frac{1}{2} \left( t_k + \frac{R}{t_k} \right), \quad k \geq 0. \end{cases}$$

De acuerdo con algunos autores ([103]), este algoritmo era ya conocido casi dos mil años antes de Cristo por las civilizaciones mesopotámicas. Hoy en día, este algoritmo es considerado como un caso especial del método de Newton, cuyo orden de convergencia es dos, al menos para puntos  $t_0$  suficientemente cercanos a la solución  $\alpha = \sqrt{R}$ .

Por otra parte, hay numerosos estudios para acelerar la convergencia del método de Newton ([20], [44], [66], [74]). Así por ejemplo, Dubeau en [44] aplica el método de Newton a funciones de la forma  $F(t) = t^{\beta-2}f(t)$ , con

$\beta \in \mathbb{R}$  e intenta estimar el valor de  $\beta$  para obtener orden de convergencia tres. De hecho, obtiene como valor apropiado  $\beta = 3/2$ . La extensión natural de esta idea es modificar la función  $f(t)$  por otra función  $F(t) = g(t)f(t)$ , y determinar  $g(t)$  de tal manera que el orden de convergencia del método de Newton aplicado a  $F(t)$  se incremente. Con esta técnica, Gerlach ([66]) obtiene que para  $g(t) = C/\sqrt{f'(t)}$ ,  $C \in \mathbb{R}$ , el método de Newton tiene convergencia cúbica, considerando  $f$  como una función real. Obsérvese que, para  $C = 1$ , se obtiene el método de orden tres conocido como método de Halley o método de las hipérbolas tangentes ([19], [63]).

En nuestro estudio, en vez de modificar la función  $f$ , modificamos el algoritmo que define el método de Newton, siguiendo la idea usada por Gander ([63]). A partir de esa modificación del método de Newton

$$t_{k+1} = t_k - H(t_k) \frac{f(t_k)}{f'(t_k)},$$

se determinaba la función  $H$  dada en (5.11), que define la familia de procesos iterativos (5.11) con orden de convergencia prefijado  $q$ ,  $q \geq 4$ .

Antes de pasar al estudio de la convergencia global de la familia de procesos iterativos construida (5.11), comparamos numéricamente dicha familia con otros métodos iterativos de alto orden de convergencia, ambos métodos con orden de convergencia  $q$ . Hacemos un estudio comparativo con la familia dada por Dubeau en [43] para el cálculo de la raíz cuadrada de un número real.

Consideramos la aplicación del algoritmo (5.11) a la función  $F(t) = t^2 - R$ . En este caso, es interesante notar que, a partir de

$$L_F(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{R}{t^2}\right) \quad \text{y} \quad \frac{F(t)}{F'(t)} = \frac{t}{2} \left(1 - \frac{R}{t^2}\right),$$

podemos escribir el algoritmo dado en (5.11) de la siguiente manera, más sencilla:

$$t_{k+1} = t_k \sum_{j=0}^{q-1} \binom{1/2}{j} (-1)^j \left(1 - \frac{R}{t_k^2}\right)^j, \quad k \geq 0. \quad (5.18)$$

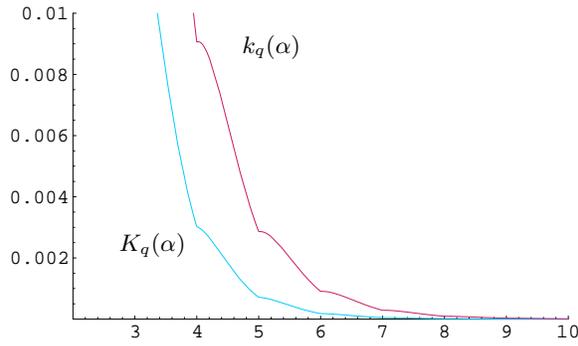
La mejora conseguida con respecto del método de Dubeau ([43]):

$$t_{k+1} = t_k - \frac{F(t_k) \left(1 + \sum_{j=2}^{q-1} \frac{B_j}{B_1} F^{(j-1)}(t_k)\right)}{F'(t_k) \left(1 + \sum_{j=2}^{q-1} j \frac{B_j}{B_1} F^{(j-1)}(t_k)\right)}, \quad B_j = \frac{1}{R^j} \binom{1/2}{j} \quad (5.19)$$

se muestra en la tabla 5.5, donde aparecen estimados los errores cometidos  $|t_k - \sqrt{35}|$  en el cálculo de  $\sqrt{35}$  tomando como punto de salida  $t_0 = 6$ , siendo el error inicial cometido  $|t_0 - \sqrt{35}| = 0.839 \dots 10^{-1}$

$n$	método (5.19) orden 3	método (5.18) orden 3	método (5.19) orden 4	método (5.18) orden 4
1	$0.169 \times 10^{-4}$	$0.817 \times 10^{-5}$	$0.454 \times 10^{-6}$	$0.142 \times 10^{-6}$
2	$0.140 \times 10^{-15}$	$0.781 \times 10^{-17}$	$0.385 \times 10^{-27}$	$0.123 \times 10^{-29}$
3	$0.782 \times 10^{-49}$	$0.682 \times 10^{-53}$	$0.199 \times 10^{-111}$	$0.709 \times 10^{-122}$
4	$0.137 \times 10^{-148}$	$0.454 \times 10^{-161}$	$0.144 \times 10^{-448}$	$0.763 \times 10^{-491}$
5	$0.732 \times 10^{-448}$	$0.134 \times 10^{-485}$	$0.397 \times 10^{-1797}$	$0.102 \times 10^{-1966}$

**Tabla 5.5.** Estimaciones de los errores  $|t_k - \sqrt{35}|$  en el cálculo de  $\sqrt{35}$



**Figura 5.3.** Constantes de error asintótico en el cálculo de  $\sqrt{35}$

Por otra parte, como se muestra en la figura 5.3, la constante de error asintótico para la familia de procesos iterativos (5.18)

$$K_q(\alpha) = \frac{(2q - 3)}{q} A_{q-2} \alpha^{-(q-1)}$$

es menor que la obtenida en la familia dada por Dubeau

$$k_q(\alpha) = -(q - 1)2^q \binom{1/2}{q} \alpha^{-(q-1)},$$

donde hemos denotado por  $\alpha = \sqrt{35}$  y  $q$  se mueve en el eje horizontal.

Además, si comparamos las dos constantes de error asintótico, observamos que

$$|K_q(\alpha)| < |k_q(\alpha)| \iff \frac{1}{q-1} < 1 \iff q > 2.$$

Por lo tanto, a partir del método de Chebyshev, es decir  $q = 3$ , la familia construida (5.11) es más rápida, en cuanto a su velocidad de convergencia, que la dada por Dubeau en [43].

### 5.2.4. Convergencia global

Una característica muy interesante de algunos procesos iterativos es su convergencia global, es decir, que el proceso iterativo considerado sea convergente independientemente del punto de salida elegido. En la sección anterior hemos estudiado condiciones sobre el punto de salida bajo las cuales los procesos iterativos dados en (5.11) son convergentes. Estas condiciones dependen fundamentalmente de las características de los polinomios  $H_q(t)$ . Las propiedades que hemos sido capaces de probar para estos polinomios en el lema 5.2.2 no ponen de manifiesto las buenas cualidades que tienen, principalmente en el caso en el que  $q$  sea un número par. En este caso, como se muestra en la figura 5.4, estos polinomios tienen la característica fundamental de ser siempre positivos.

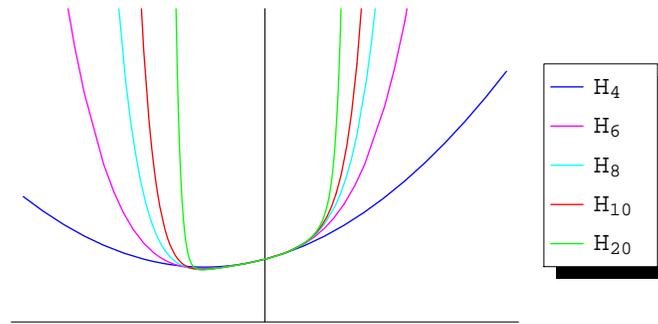


Figura 5.4. Polinomios  $H_q(t)$ ,  $q$  par

Notemos que esta propiedad es de gran importancia en el estudio de la convergencia de los procesos iterativos dados en (5.11), puesto que hace que se pueda eliminar la condición para el punto de salida  $t_0$ ,  $L_F(t_0) \geq \frac{-1}{2}$ , dada en el teorema 5.2.3 de convergencia semilocal, y así poder obtener un resultado de convergencia global.

**Lema 5.2.5** Sea  $H_q(t)$  el polinomio dado en (5.11). Entonces,  $H_{2q}(t) > 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  y  $q \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.* Teniendo en cuenta la expresión de los polinomios  $H_q(t)$  dada en (5.11), se sigue que

$$H_{2q+2}(t) = 1 + \frac{1}{2}t + \sum_{j=2}^{2q} \frac{1}{2^j(j+1)} \binom{2j}{j} t^j.$$

Ahora bien,  $H_{2q+2}$  podemos escribirlo de la siguiente forma  $H_{2q+2}(t) = H_{2q}(t) + g_{2q}(t)$ , donde

$$g_{2q}(t) = \frac{(4q-2)!}{2^{2q-1}((2q-1)!)^2} t^{2q-1} \left( \frac{1}{2q} + \frac{4q-1}{2q(2q+1)} t \right).$$

Además,

$$g'_{2q}(t) = \frac{(4q-2)!}{2^{2q-1}((2q-1)!)^2} t^{2q-2} \left( \frac{2q-1}{2q} + \frac{4q-1}{(2q+1)} t \right).$$

Es fácil ver que el mínimo de  $g_{2q}(t)$  es  $t = -\frac{(2q-1)(2q+1)}{2q(4q-1)}$ . Por lo tanto,

$$g_{2q}(t) \geq g\left(-\frac{(2q-1)(2q+1)}{2q(4q-1)}\right) = -\frac{(4q^2-1)^{2q-1}(4q)!}{(4q-1)^{2q}((2q)!)^2(4q)^{2q}}.$$

Por otra parte, la sucesión  $\left\{ \frac{(4q)!}{((2q)!)^2 2^{4q}} \right\}_{q \geq 2}$  es decreciente y

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \frac{(4q)!}{((2q)!)^2 2^{4q}} = 0.$$

Entonces,  $g_{2q}(t) \geq -\frac{e^{\frac{1}{2}}}{4q^2-1}$ .

Teniendo en cuenta que  $H_4(t) \geq \frac{7}{8}$ , se tiene que

$$H_{2q}(t) \geq \frac{7}{8} - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{2}}}{4j^2-1} \geq \frac{7}{8} - \frac{e^{\frac{1}{2}}}{6} > 0.$$

Obsérvese que para el caso  $q = 0$  tenemos  $H_2(t) = 1$ , por lo que la demostración es trivial y el resultado queda demostrado. ■

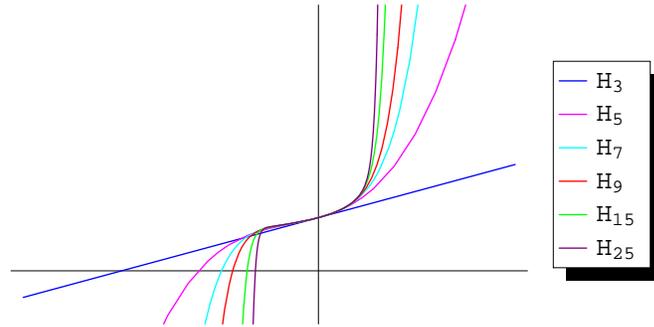
Denotando por  $v$  la abscisa del vértice de la parábola (5.3), notemos que la condición impuesta sobre el punto de salida  $t_0$ ,  $L_F(t) \geq \frac{-1}{2}$ , que aparece en el teorema 5.2.3, puede eliminarse, y por lo tanto desaparece la existencia del intervalo  $[v - \delta, v + \delta]$  en el que no podía garantizarse la convergencia de los procesos iterativos dados en (5.11). En este caso, obtenemos el siguiente resultado de convergencia global.

**Teorema 5.2.6** *Los procesos iterativos dados en (5.11) para  $q$  par son convergentes para cualquier punto  $t_0 \neq v$ .*

*Demostración.* La demostración es trivial teniendo en cuenta el resultado obtenido en el lema 5.2.5 y siguiendo la demostración dada en el teorema 5.2.3. ■

Obsérvese que  $F'(v) = 0$ , de ahí que consideremos el punto de salida del proceso iterativo distinto del vértice  $v$ .

Como se muestra en la figura 5.5, cuando  $q$  es impar los polinomios  $H_q(t)$  tienen una raíz  $u_q$ . Como consecuencia, no hemos podido obtener un resultado de convergencia global, pero podemos limitar el intervalo donde no se puede garantizar la convergencia semilocal. Por ejemplo, en el estudio llevado a cabo en la sección anterior para la función  $F(t) = t^2 - 4t + 3$ , hemos visto que el intervalo de puntos de salida para los cuales no se puede garantizar la convergencia de los procesos iterativos de la familia (5.11) es  $I = [1.29289, 2.70711]$ . En el caso en que el orden de convergencia fijado es impar, conocida la raíz  $u_q$  del polinomio  $H_q(t)$ , se puede obtener el intervalo de puntos de salida  $t_0$ , a partir de los cuales en principio no es posible garantizar la convergencia del proceso iterativo.



**Figura 5.5.** Polinomios  $H_q(t)$ ,  $q$  impar

En la tabla 5.6 mostramos alguno de estos intervalos. Obsérvese la mejora conseguida, en cuanto a la reducción de la amplitud del intervalo, con respecto al intervalo  $I = [1.29289, 2.70711]$ .

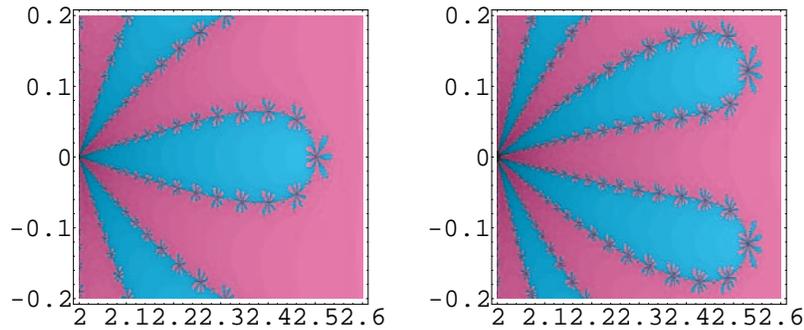
En tabla 5.7, mostramos el comportamiento caótico cuando tomamos un punto de salida  $t_0 = 2.5$  de tal manera que  $L_F(t_0) < \frac{-1}{2}$ . Este comportamiento caótico lo hemos mostrado ya en las cuencas de atracción asociadas a las raíces de  $F(t) = 0$ , figura 5.2, y con más detalle en figura 5.6 al considerar los procesos iterativos dados en (5.11) con  $q = 5$  y  $q = 6$ .

$q$	$u_q$	$[v - \delta, v + \delta]$
3	-2	[1.55279, 2.44721]
5	-1.21966	[1.46078, 2.53922]
7	-0.985483	[1.41984, 2.58016]
9	-0.871369	[1.39618, 2.60382]
15	-0.724733	[1.36105, 2.63895]
25	-0.640658	[1.33792, 2.66208]
55	-0.570416	[1.31655, 2.68345]
105	-0.54037	[1.30675, 2.69325]
149	-0.529889	[1.30323, 2.69677]

**Tabla 5.6.** Raíces de  $H_q(t)$ ,  $q$  impar

$t_i$	orden 2	orden 3	orden 4	orden 5	orden 6	orden 7
$t_0$	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5
$t_1$	3.25	2.6875	3.53125	1.94922	5.27148	-2.20361
$t_2$	3.025	2.96405	3.01115	$4.4214 \times 10^7$	3.15905	0.744253
$t_3$	3.0003	2.99997	3	$1.20898 \times 10^7$	3.00001	0.999975
$t_4$	3	3		$3.3058 \times 10^6$	3	1
$t_5$				903930		
$\vdots$				$\vdots$		
$t_{17}$				3		

**Tabla 5.7.** Convergencia con  $t_0 = 2.5 > v$ ,  $F(t_0) < 0$ ,  $L_F(t_0) < \frac{-1}{2}$



**Figura 5.6.** Detalle de las cuencas de atracción para los métodos de la familia (5.11) con  $q = 5$  y  $q = 6$  aplicados a la ecuación  $F(t) = t^2 - 4t + 3 = 0$

### 5.3. Ecuaciones cuadráticas en espacios de Banach

El objetivo en esta sección es generalizar a espacios de Banach los resultados obtenidos en la sección anterior 5.2 y obtener un  $R$ -orden de convergencia prefijado cuando se resuelve una ecuación cuadrática en un espacio de Banach. Notemos que para extender estos resultados es necesario la extensión del grado de convexidad logarítmico a operadores definidos en espacios de Banach  $X$  e  $Y$ , véase la sección 1.2 del capítulo 1.

Consideramos  $F$  un operador cuadrático  $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$  dos veces diferenciable Fréchet con  $\Omega$  un subconjunto de  $X$  abierto convexo y no vacío.

Planteamos resolver el problema de aproximar una solución  $x^*$  de (5.1) mediante la familia multiparamétrica de procesos iterativos

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - H(L_F(x_n))\Gamma_n F(x_n), \\ H(L_F(x_n)) = \sum_{k=0}^{q-2} A_k L_F(x_n)^k, \quad A_0 = 1, \quad A_1 = A_2 = \frac{1}{2}, \quad \{A_k\}_{k \geq 2} \subset \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (5.20)$$

donde  $q \geq 4$ . Denotamos por  $I = L_F(x)^0$  y  $L_F(x_n)^k$  la composición  $k$  veces del operador  $L_F(x)$ , es decir,

$$L_F(x)^k = \overbrace{L_F(x) \circ \cdots \circ L_F(x)}^k$$

que es un operador lineal en  $\Omega$ .

A continuación, presentamos un resultado de convergencia semilocal para el algoritmo (5.20), donde se exigen ciertas condiciones para el operador  $F$  y para la aproximación inicial  $x_0$ . Este resultado generaliza en espacios de Banach los resultados vistos en  $\mathbb{R}$ , consiguiendo procesos iterativos de alto  $R$ -orden para los que garantizamos convergencia semilocal.

Dado que estamos considerando  $F$  un operador cuadrático, se sigue que  $\|F''(x)\| = M$ ,  $\forall x \in \Omega$  y un cierto  $M \in \mathbb{R}$ . Suponemos que existe  $\Gamma_0 = [F'(x_0)]^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$  para algún  $x_0 \in \Omega$  y, además:

$$(C1) \quad \|\Gamma_0\| \leq \beta,$$

$$(C2) \quad \|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \eta.$$

Teniendo en cuenta las condiciones anteriores, definimos el parámetro  $a_0 = M\beta\eta$ , a partir del cual construimos la siguiente sucesión real

$$a_{n+1} = a_n f(a_n)^2 g(a_n), \quad (5.21)$$

donde

$$\begin{aligned} h(t) &= \sum_{k=0}^{q-2} A_k t^k, \quad A_0 = 1, \quad A_1 = \frac{1}{2}, & f(t) &= \frac{1}{1 - th(t)}, \\ g(t) &= \frac{t^3}{2} \left( \sum_{k=0}^{q-5} \left( 2A_{k+3} + \sum_{j=0}^{k+2} A_j A_{k+2-j} \right) t^k + \sum_{k=0}^{q-2} \left( \sum_{j=k}^{q-2} A_j A_{k+q-2-j} \right) t^{k+q-4} \right). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Por lo tanto, se sigue que  $\|L_F(x_0)\| \leq a_0$ ,  $\|H(L_F(x_0))\| \leq h(a_0)$  y

$$\|x_1 - x_0\| \leq h(a_0)\|L_F(x_0)\| \leq h(a_0)\eta,$$

para algún  $x_0 \in \Omega$ .

### 5.3.1. Convergencia semilocal

Para establecer la convergencia semilocal de la familia de procesos iterativos (5.20) vamos a construir un sistema de relaciones de recurrencia. Previamente, introducimos algunos lemas técnicos que proporcionan propiedades de las funciones reales (5.22), así como de la sucesión auxiliar  $\{a_n\}$  descrita en (5.21) a partir de las cuales, las relaciones de recurrencia que construimos son ciertas.

**Lema 5.3.1** Sean  $h$ ,  $f$  y  $g$  las funciones reales dadas en (5.22). Entonces,  
 (i)  $g(t)$  es una función creciente para  $t \in (0, a_0)$ . Además, si  $h(a_0)a_0 < 1$ ,  $f(t)$  es creciente y  $f(t) > 1$  para  $t \in (0, a_0)$ .  
 (ii)  $\forall t > 0$  y  $\gamma \in (0, 1)$  se tiene que  $f(\gamma t) < f(t)$ ,  $g(\gamma t) < \gamma^3 g(t)$ .

*Demostración.* La prueba es inmediata por las definiciones de las funciones. ■

**Lema 5.3.2** Si  $\gamma = \frac{a_1}{a_0} < 1$  y  $h(a_0)a_0 < 1$ , entonces

(i) la sucesión  $\{a_n\}$ , dada en (5.21), es decreciente.  
 (ii)  $a_{n+1} < \gamma^{4^n} a_n < \gamma^{\frac{4^{n+1}-1}{3}} a_0$ ,  $\forall n \geq 0$ .

*Demostración.* Obsérvese que, como consecuencia de que  $f(a_0)^2 g(a_0) < 1$ , se sigue a partir del lema 5.3.1 que la sucesión  $\{a_n\}$  es decreciente.

Para probar (ii) usamos inducción. Si  $n = 0$ ,  $a_1 = \gamma a_0$ . Ahora bien, por el lema 5.3.1, se sigue:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n f(a_n)^2 g(a_n) < \gamma^{4^{n-1}} a_{n-1} f(\gamma^{4^{n-1}} a_{n-1})^2 g(\gamma^{4^{n-1}} a_{n-1}) \\ &< \gamma^{4^{n-1}} (\gamma^{4^{n-1}})^3 a_{n-1} f(a_{n-1})^2 g(a_{n-1}) = \gamma^{4^n} a_n, \end{aligned}$$

y

$$a_{n+1} < \gamma^{4^n} a_n < \gamma^{4^n} \gamma^{4^{n-1}} a_{n-1} < \dots < \gamma^{\frac{4^{n+1}-1}{3}} a_0. \quad \blacksquare$$

Por otra parte, teniendo en cuenta las aproximaciones  $x_{n+1}$ , dadas en (5.20), introducimos en el siguiente lema una aproximación para el operador  $F$ , obtenida a partir de la fórmula de Taylor.

**Lema 5.3.3** Sea  $F$  un operador cuadrático  $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$  dos veces diferenciable Fréchet con  $\Omega$  un subconjunto de  $X$  abierto convexo y no vacío. Entonces, para todo  $n \geq 0$  se tiene

$$\begin{aligned}
F(x_{n+1}) &= - \sum_{k=2}^{q-3} 2A_{k+1}B_n \left( \Gamma_n F(x_n), L_F(x_n)^k \Gamma_n F(x_n) \right) \\
&+ \sum_{k=2}^{q-3} \sum_{j=0}^k A_j A_{k-j} B_n \left( L_F(x_n)^j \Gamma_n F(x_n), L_F(x_n)^{k-j} \Gamma_n F(x_n) \right) \\
&+ \sum_{k=0}^{q-2} \sum_{j=k}^{q-2} A_j A_{k+q-2-j} B_n \left( L_F(x_n)^j \Gamma_n F(x_n), L_F(x_n)^{k+q-2-j} \Gamma_n F(x_n) \right).
\end{aligned} \tag{5.23}$$

donde  $B_n = \frac{1}{2}F''(x_n)$  y  $\Gamma_n = F'(x_n)^{-1}$ .

*Demostración.* A partir de (5.20) y teniendo en cuenta la fórmula de Taylor, obtenemos:

$$F(x_{n+1}) = F(x_n) + F'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + B_n(x_{n+1} - x_n)^2.$$

Además,

$$F(x_n) + F'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -B_n \Gamma_n F(x_n) \left( \sum_{k=0}^{q-3} 2A_{k+1} L_F(x_n)^k \right) \Gamma_n F(x_n).$$

Como  $B_n$  es un operador bilinear, podemos escribir

$$\begin{aligned}
&-B_n \Gamma_n F(x_n) \left( \sum_{k=0}^{q-3} 2A_{k+1} L_F(x_n)^k \right) \Gamma_n F(x_n) \\
&= -B_n(\Gamma_n F(x_n), \Gamma_n F(x_n)) - \sum_{k=1}^{q-3} 2A_{k+1} B_n(\Gamma_n F(x_n), L_F(x_n)^k \Gamma_n F(x_n)).
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
B_n(x_{n+1} - x_n)^2 &= B_n(\Gamma_n F(x_n), \Gamma_n F(x_n)) \\
&+ \sum_{k=1}^{q-2} 2A_k B_n(\Gamma_n F(x_n), L_F(x_n)^k \Gamma_n F(x_n)) \\
&+ \sum_{k=1}^{q-2} \sum_{j=1}^{q-2} A_k A_j B_n(L_F(x_n)^k \Gamma_n F(x_n), L_F(x_n)^j \Gamma_n F(x_n)).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 F(x_{n+1}) = & - \sum_{k=1}^{q-3} 2A_{k+1}B_n \left( \Gamma_n F(x_n), L_F(x_n)^k \Gamma_n F(x_n) \right) \\
 & + \sum_{k=1}^{q-2} 2A_k B_n (\Gamma_n F(x_n), L_F(x_n)^k \Gamma_n F(x_n)) \\
 & + \sum_{k=1}^{q-2} \sum_{j=1}^{q-2} A_k A_j B_n (L_F(x_n)^k \Gamma_n F(x_n), L_F(x_n)^j \Gamma_n F(x_n)).
 \end{aligned}$$

Agrupando ahora los coeficientes de las potencias de  $L_F(x_n)$  convenientemente, obtenemos (5.23) y se sigue el resultado. ■

Damos ahora relaciones de recurrencia que probaremos por inducción para cualquier punto del proceso iterativo. Como veremos, estas relaciones permiten obtener un resultado de convergencia semilocal para la familia de procesos iterativos dada en (5.20).

**Lema 5.3.4** *Suponemos que  $x_0, x_n \in \Omega$ , para  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $a_0 h(a_0) < 1$  y  $f(a_0)^2 g(a_0) < 1$ , entonces las siguientes relaciones de recurrencia son ciertas para todo  $n \geq 1$ :*

$$[I_n] \quad \text{Existe } \Gamma_n = [F'(x_n)]^{-1} \text{ y } \|\Gamma_n\| \leq f(a_{n-1}) \|\Gamma_{n-1}\|,$$

$$[II_n] \quad \|\Gamma_n F(x_n)\| \leq f(a_{n-1}) g(a_{n-1}) \|\Gamma_{n-1} F(x_{n-1})\|,$$

$$[III_n] \quad \|L_F(x_n)\| \leq a_n,$$

$$[IV_n] \quad \|H(L_F(x_n))\| \leq h(a_n),$$

$$[V_n] \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leq h(a_n) \|\Gamma_n F(x_n)\|,$$

$$[VI_n] \quad \|x_{n+1} - x_0\| \leq h(a_0) \frac{1 - (f(a_0)g(a_0))^{n+1}}{1 - f(a_0)g(a_0)} \|\Gamma_0 F(x_0)\|.$$

*Demostración.* Probamos que [I<sub>n</sub>]-[VI<sub>n</sub>] son ciertas para  $n = 1$ . Comenzamos viendo que existe el inverso del operador  $F'(x_1)$  y es acotado. Notemos que

$$F'(x_1) - F'(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} F''(x) dx = \int_0^1 F''(x_0 + t(x_1 - x_0))(x_1 - x_0) dt.$$

Tomando normas, se sigue que  $\|F'(x_1) - F'(x_0)\| \leq M \|x_1 - x_0\|$ , y por lo tanto

$$\|I - \Gamma_0 F'(x_1)\| \leq \|\Gamma_0\| \|F'(x_1) - F'(x_0)\| \leq \|\Gamma_0\| M \|x_1 - x_0\| \leq a_0 h(a_0).$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que  $a_0 h(a_0) < 1$ , y por el lema de Banach ([101]) existe  $\Gamma_1$  y

$$\begin{aligned}\|T_1\| &= \|T_1 F'(x_0) T_0\| \leq \left\| (\Gamma_0 F'(x_1))^{-1} \right\| \|T_0\| \leq \frac{\|T_0\|}{1 - \|I - \Gamma_0 F'(x_1)\|} \\ &\leq \frac{\|T_0\|}{1 - a_0 h(a_0)} = f(a_0) \|T_0\|.\end{aligned}$$

Para probar [II<sub>1</sub>] usamos la aproximación (5.23) obtenida a partir de la fórmula de Taylor para el operador  $F$ . Tomando normas para  $n = 0$ , obtenemos

$$\begin{aligned}\|F(x_1)\| &\leq \sum_{k=2}^{q-3} \left( 2A_{k+1} + \sum_{j=0}^k A_j A_{k-j} \right) \frac{M\eta a_0^k}{2} \|T_0 F(x_0)\| \\ &\quad + \sum_{k=0}^{q-2} \sum_{j=k}^{q-2} A_j A_{k+q-2-j} \frac{M\eta a_0^{k+q-2}}{2} \|T_0 F(x_0)\|, \\ \|F(x_1)\| &\leq \frac{a_0^2}{2} M\eta \left[ \sum_{k=0}^{q-5} \left( 2A_{k+3} + \sum_{j=0}^{k+2} A_j A_{k+2-j} \right) a_0^k \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{q-2} \sum_{j=k}^{q-2} A_j A_{k+q-2-j} a_0^{k+q-4} \right] \|T_0 F(x_0)\|.\end{aligned}$$

y se sigue [II<sub>1</sub>]:

$$\begin{aligned}\|T_1 F(x_1)\| &\leq f(a_0) \frac{a_0^3}{2} \left[ \sum_{k=0}^{q-5} \left( 2A_{k+3} + \sum_{j=0}^{k+2} A_j A_{k+2-j} \right) a_0^k \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{q-2} \sum_{j=k}^{q-2} A_j A_{k+q-2-j} a_0^{k+q-4} \right] \|T_0 F(x_0)\| = f(a_0) g(a_0) \|T_0 F(x_0)\|.\end{aligned}$$

Como consecuencia, se obtiene [III<sub>1</sub>]:

$$\|L_F(x_1)\| \leq \|T_1\| \|F''(x_1)\| \|T_1 F(x_1)\| \leq a_0 f(a_0)^2 g(a_0) = a_1.$$

Además,

$$\|H(L_F(x_1))\| = \left\| \sum_{k=0}^{q-2} A_k L_F(x_1)^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{q-2} A_k a_1^k = h(a_1),$$

y [IV<sub>1</sub>] se sigue.

Ahora, de forma inmediata obtenemos:

$$[V_1] \quad \|x_2 - x_1\| \leq \|H(L_F(x_1))\| \|T_1 F(x_1)\| \leq h(a_1) \|T_1 F(x_1)\|,$$

$$[VI_1] \quad \|x_2 - x_0\| \leq h(a_1) \|T_1 F(x_1)\| + h(a_0) \|T_0 F(x_0)\|.$$

Por otra parte, puesto que la función  $h$  es creciente y la sucesión  $\{a_n\}$  es decreciente, se tiene que

$$\|x_2 - x_0\| \leq h(a_0) \left[ 1 + f(a_0)g(a_0) \right] \|G_0 F(x_0)\|.$$

Reemplazando  $x_1$  por  $x_2$ , en general  $x_{n-1}$  por  $x_n$  podemos, aplicando inducción, garantizar la existencia de  $\Gamma_n$  y la veracidad de las relaciones de recurrencia [II<sub>n</sub>]-[VI<sub>n</sub>]. Con lo que quedará demostrado el lema. ■

Teniendo en cuenta los lemas técnicos 5.3.1 y 5.3.2 y las relaciones de recurrencia dadas en el lema 5.3.4, obtenemos que la familia de procesos iterativos (5.20) satisface el siguiente resultado de convergencia semilocal.

**Teorema 5.3.5** *Sea  $F$  un operador cuadrático dos veces diferenciable Fréchet satisfaciendo las condiciones (C1) y (C2). Suponemos que  $a_0 < r$ ,  $a_0 h(a_0) < 1$  y  $\gamma = f(a_0)^2 g(a_0) < 1$ . Si  $B(x_0, R) \subset \Omega$ , donde  $R = \frac{h(a_0)\eta}{1 - f(a_0)g(a_0)}$ , entonces la familia de procesos iterativos dada en (5.20) comenzando en  $x_0$ , converge a la solución  $x^*$  de la ecuación  $F(x) = 0$  con  $R$ -orden de convergencia al menos cuatro. En este caso, la solución  $x^*$  y las iteraciones  $x_n$  pertenecen a  $\overline{B(x_0, R)}$  y  $x^*$  es la única solución de  $F(x) = 0$  en  $B(x_0, \frac{2}{M\beta} - R) \cap \Omega$ . Además, se obtienen las siguientes estimaciones a priori del error:*

$$\|x^* - x_n\| < h \left( \gamma^{\frac{4^n - 1}{3}} a_0 \right) \frac{\gamma^{\frac{4^n - 1}{3}} \Delta^n}{1 - \gamma^{4^n} \Delta} \eta, \quad n \geq 0,$$

donde  $\Delta = \frac{1}{f(a_0)}$ .

*Demostración.* Por hipótesis tenemos que  $x_0 \in \Omega$  y, teniendo en cuenta las condiciones iniciales exigidas al operador  $F$ , se sigue que  $x_1 \in B(x_0, R)$ . Entonces, las relaciones de recurrencia [I<sub>n</sub>]-[VI<sub>n</sub>] dadas en lema 5.3.4 son ciertas para  $n = 1$ . Ahora, sin más que aplicar un proceso inductivo, es fácil probar, teniendo en cuenta el lema 5.3.4, que  $x_n \in \Omega$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Para establecer la convergencia de la sucesión  $\{x_n\}$  dada por la familia de procesos iterativos (5.20), solamente tenemos que probar que es una sucesión de Cauchy. Teniendo en cuenta que

$$\prod_{j=0}^{k-1} f(a_j)g(a_j) \leq \prod_{j=0}^{k-1} \gamma^{4^j} \Delta = \gamma^{\frac{4^k - 1}{3}} \Delta^k,$$

obtenemos a partir de las relaciones de recurrencia que

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq h(a_k) \|G_k F(x_k)\| < h \left( \gamma^{\frac{4^k - 1}{3}} a_0 \right) \eta \gamma^{\frac{4^k - 1}{3}} \Delta^k.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - x_n\| &\leq \sum_{k=n}^{n+m-1} \|x_{k+1} - x_k\| < \sum_{k=n}^{n+m-1} h\left(\gamma^{\frac{4^k-1}{3}} a_0\right) \eta \gamma^{\frac{4^k-1}{3}} \Delta^k \\ &< h\left(\gamma^{\frac{4^n-1}{3}} a_0\right) \eta \gamma^{\frac{4^n-1}{3}} \Delta^n \left(\sum_{k=0}^{m-1} \gamma^{\frac{4^n(4^k-1)}{3}} \Delta^k\right) \end{aligned}$$

con  $n, m \in \mathbb{N}$ .

Ahora bien, puesto que  $\gamma^{\frac{4^k+3 \cdot 4^n}{3}} \geq \gamma^{\frac{4^{k+1}}{3}}$  para  $k = n, n+1, \dots, n+m-1$ , se sigue

$$\|x_{n+m} - x_n\| < h\left(\gamma^{\frac{4^n-1}{3}} a_0\right) \eta \gamma^{\frac{4^n-1}{3}} \Delta^n \frac{1 - \gamma^{\frac{4^n}{3}(4^{m-1}+2)} \Delta^m}{1 - \gamma^{4^n} \Delta}. \quad (5.24)$$

Además, puesto que  $\gamma < 1$  y  $\Delta < 1$ , la sucesión  $\{x_n\}$  es de Cauchy y, por lo tanto, converge a  $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Notemos que si  $n = 0$  en (5.24), obtenemos

$$\|x_m - x_0\| < h(a_0) \eta \frac{1 - \gamma^{\frac{4^m-1+2}{3}} \Delta^m}{1 - \gamma \Delta} < R, \quad m \geq 1,$$

y  $x_m \in B(x_0, R)$ , para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Además, como  $\Delta < 1$ , si  $m \rightarrow \infty$ , se sigue

$$\|x^* - x_0\| \leq h(a_0) \eta \frac{1}{1 - \gamma \Delta} = R.$$

Por tanto,  $x^* \in \overline{B(x_0, R)}$ .

Por otra parte,  $x^*$  es una solución de  $F(x) = 0$ , ya que  $\|\Gamma_n F(x_n)\|$  tiende a cero cuando  $n$  tiende a infinito y la sucesión  $\{\|F'(x_n)\|\}$  es acotada:

$$\|F'(x_n)\| \leq M \|x_n - x_0\| + \|F'(x_0)\|.$$

Entonces, como

$$\|F(x_n)\| \leq \|F'(x_n)\| \|x_n - x_0\|,$$

se sigue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|F(x_n)\| = 0$ . Ahora bien, por la continuidad del operador  $F$ , tenemos que  $F(x^*) = 0$ . Por tanto,  $x^*$  es una solución de  $F(x) = 0$ .

Además, tomando  $m \rightarrow \infty$  en (5.24), obtenemos

$$\|x^* - x_n\| < h\left(\gamma^{\frac{4^n-1}{3}} a_0\right) \frac{\gamma^{\frac{4^n-1}{3}} \Delta^n}{1 - \gamma^{4^n} \Delta} \eta < \left(\gamma^{\frac{1}{3}}\right)^{4^n} \frac{R}{\gamma^{\frac{1}{3}}}.$$

Por lo tanto, queda probado que la familia de procesos iterativos tiene  $R$ -orden de convergencia al menos cuatro, puesto que

$$\|x^* - x_n\| < B \delta^{4^n},$$

donde  $B = \frac{R}{\gamma^{\frac{1}{3}}}$  y  $\delta = \gamma^{\frac{1}{3}} < 1$ .

A continuación, probamos la unicidad de la solución. Consideramos  $y^*$  de tal manera que  $F(y^*) = 0$  e  $y^* \in B(x_0, \frac{2}{M\beta} - R) \cap \Omega$ . Suponemos que  $y^*$  es una solución diferente de  $x^*$ . Entonces,

$$0 = \Gamma_0 F(y^*) - \Gamma_0 F(x^*) = \int_0^1 \Gamma_0 F'(x^* + t(y^* - x^*)) dt (y^* - x^*).$$

Si existe el operador  $A^{-1}$ , donde el operador  $A$  viene dado por

$$A = \int_0^1 \Gamma_0 F'(x^* + t(y^* - x^*)) dt,$$

se tiene que  $y^* - x^* = 0$  y, por lo tanto la unicidad de solución en  $B(x_0, \frac{2}{M\beta} - R) \cap \Omega$ . En efecto, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} F'(x^* + t(y^* - x^*)) - F'(x_0) &= \int_{x_0}^{x^* + t(y^* - x^*)} F''(x) dx \\ &= \int_0^1 F''(x_0 + \tau(x^* + t(y^* - x^*) - x_0)) [(x^* - x_0)(1 - t) + t(y^* - x_0)] d\tau, \end{aligned}$$

y tomando normas obtenemos

$$\|F'(x^* + t(y^* - x^*)) - F'(x_0)\| \leq M[\|x^* - x_0\|(1 - t) + t\|y^* - x_0\|].$$

Además,  $y^* \in B(x_0, \frac{2}{M\beta} - R) \cap \Omega$  y  $x^* \in \overline{B(x_0, R)} \cap \Omega$ , luego se tiene que  $\|y^* - x_0\| < \frac{2}{M\beta} - R$  y  $\|x^* - x_0\| \leq R$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|I - A\| &\leq \|\Gamma_0\| \int_0^1 \|F'(x^* + t(y^* - x^*)) - F'(x_0)\| dt \\ &\leq \|\Gamma_0\| M \int_0^1 [\|x^* - x_0\|(1 - t) + t\|y^* - x_0\|] dt < \frac{M\beta}{2} \left( R + \frac{2}{M\beta} - R \right) = 1 \end{aligned}$$

y, por el lema de Banach, existe  $A^{-1}$  y como consecuencia obtenemos la unicidad de solución  $y^* = x^*$ . ■

*Nota 5.2.* Como hemos visto en la sección 5.2, podemos obtener en el caso real procesos iterativos con un orden de convergencia prefijado  $q$ , con  $q \geq 4$ , sin más que establecer los coeficientes que definen el algoritmo del proceso iterativo. Esta situación puede generalizarse a espacios de Banach. El problema de considerar en espacios de Banach  $R$ -órdenes de convergencia altos es fundamentalmente el coste operacional que conlleva la utilización del operador derivada segunda. En el caso de ecuaciones cuadráticas este problema es menor, puesto que el operador bilineal  $F''$  es constante.

En espacios de Banach para establecer un  $R$ -orden de convergencia  $q$ ,  $q \geq 5$ , para un proceso iterativo de la familia (5.20), tenemos que imponer una condición de conmutatividad. Esta condición hace que la expresión que toma la aproximación de  $F$  en el lema 5.3.3 se simplifique, como mostramos en el siguiente resultado.

**Lema 5.3.6** Sea  $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$  un operador cuadrático dos veces diferenciable Fréchet en un subconjunto  $\Omega$  de  $X$  abierto, convexo y no vacío, de manera que

$$F''(x)(\hat{x}, L_F(x)(\bar{x})) = F''(x)(L_F(x)(\hat{x}), \bar{x}), \quad x, \hat{x}, \bar{x} \in \Omega. \quad (5.25)$$

Entonces, para todo  $n \geq 0$  se tiene

$$\begin{aligned} & F(x_{n+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{q-2} \sum_{j=k}^{q-2} A_j A_{k+q-2-j} B_n \left( L_F(x_n)^j \Gamma_n F(x_n), L_F(x_n)^{k+q-2-j} \Gamma_n F(x_n) \right). \end{aligned} \quad (5.26)$$

donde  $B_n = \frac{1}{2} F''(x_n)$ ,  $A_k = \frac{C_k}{2^k}$  y  $C_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, q-2$ .

*Demostración.* A partir de la condición (5.25), se ve que se cumple, para cada  $x_n$  de la familia (5.20),

$$B_n(L_F(x_n)^j \Gamma_n F(x_n), L_F(x_n)^{k-j} \Gamma_n F(x_n)) = B_n(\Gamma_n F(x_n), L_F(x_n)^k \Gamma_n F(x_n)), \quad (5.27)$$

para  $k = 2, \dots, q-3$  y  $j = 0, 1, \dots, k$ .

Ahora bien, teniendo en cuenta la descomposición del operador  $F$  obtenida en (5.23), aplicando lo anterior se sigue:

$$\begin{aligned} F(x_{n+1}) &= \sum_{k=2}^{q-3} \left( -2A_{k+1} + \sum_{j=0}^k A_j A_{k-j} \right) B_n \left( \Gamma_n F(x_n), L_F(x_n)^k \Gamma_n F(x_n) \right) \\ &+ \sum_{k=0}^{q-2} \sum_{j=k}^{q-2} A_j A_{k+q-2-j} B_n \left( L_F(x_n)^j \Gamma_n F(x_n), L_F(x_n)^{k+q-2-j} \Gamma_n F(x_n) \right). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Entonces, sin más que tener en cuenta que los números de Catalán,  $C_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ , satisfacen la igualdad

$$C_{k+1} = \sum_{j=0}^k C_j C_{k-j}, \quad (5.29)$$

es obvio que

$$-2A_{k+1} + \sum_{j=0}^k A_j A_{k-j} = 0, \quad \text{para } k = 2, \dots, q-3.$$

Ahora bien, si los coeficientes  $A_k$  se toman de la forma

$$A_k = \frac{C_k}{2^k} = \frac{1}{2^k(k+1)} \binom{2k}{k},$$

para todo  $k = 2, \dots, q-3$ , obtenemos (5.26). ■

*Nota 5.3.* A partir de las propiedades que cumplen los números de Catalan, hemos obtenido una nueva aproximación para  $F$  dada en (5.26). Ahora bien, teniendo en cuenta (5.26), se sigue que la funciones auxiliares reales que permiten establecer el  $R$ -orden de convergencia al menos  $q$ , con  $q \geq 5$ , son:

$$g(t) = \frac{t^{q-1}}{2} \sum_{k=0}^{q-2} \left( \sum_{j=k}^{q-2} A_j A_{k+q-2-j} \right) t^k, \tag{5.30}$$

y  $h(t)$  y  $f(t)$  las dadas en (5.22). Además, en este caso

$$g(\gamma t) < \gamma^{q-1} g(t) \quad \text{para } t > 0 \text{ y } \gamma \in (0, 1).$$

Además, para todo  $n \geq 1$ , se tiene

$$a_{n+1} < \gamma^{q^n} a_n < \gamma^{\frac{q^{n+1}-1}{q-1}} a_0.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n f(a_n)^2 g(a_n) < \gamma^{q^{n-1}} a_{n-1} f(\gamma^{q^{n-1}} a_{n-1})^2 g(\gamma^{q^{n-1}} a_{n-1}) \\ &< \gamma^{q^n} a_n < \gamma^{q^n} \gamma^{q^{n-1}} a_{n-1} < \dots < \gamma^{\frac{q^{n+1}-1}{q-1}} a_0. \end{aligned}$$

Como consecuencia, el lema 5.3.4 se satisface con la nueva función  $g$ , definida en (5.30), y podemos dar el siguiente resultado de convergencia semilocal que garantiza que el proceso iterativo (5.20) converge a una solución de la ecuación  $F(x) = 0$  con  $R$ -orden de convergencia al menos  $q$ , con  $q \geq 5$  y establece estimaciones a priori del error.

**Teorema 5.3.7** *En las condiciones del teorema 5.3.5, si se cumple la condición (5.25) entonces el proceso iterativo (5.20), con coeficientes  $A_k = \frac{C_k}{2^k}$  y  $C_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$ ,  $k \geq 3$ , comenzando en  $x_0$ , converge a una solución  $x^*$  de la ecuación  $F(x) = 0$  con  $R$ -orden de convergencia al menos  $q$ , con  $q \geq 5$ . En este caso, la solución  $x^*$  y las iteraciones  $x_n$  pertenecen a  $\overline{B}(x_0, R)$ , con  $R = \frac{h(a_0)\eta}{1-f(a_0)g(a_0)}$ , y  $x^*$  es la única solución de  $F(x) = 0$  en  $B(x_0, \frac{2}{M\beta} - R) \cap \Omega$ . Además, se obtienen las siguientes estimaciones a priori del error:*

$$\|x^* - x_n\| < h(\gamma^{\frac{q^n-1}{q-1}} a_0) \frac{\gamma^{\frac{q^n-1}{q-1}} \Delta^n}{1 - \gamma^{q^n} \Delta} \eta$$

donde  $\gamma = f(a_0)^2 g(a_0) < 1$  y  $\Delta = \frac{1}{f(a_0)}$ .

*Demostración.* Teniendo en cuenta la nota 5.3 y siguiendo la demostración del teorema 5.3.5 obtenemos el resultado. ■

*Nota 5.4.* Notemos que la condición (5.25) que imponemos en teorema 5.3.7 para poder obtener  $R$ -órdenes de convergencia altos es muy restrictiva. Obsérvese también que este resultado es teórico y realmente, una vez prefijado el  $R$ -orden de convergencia  $q$ , es suficiente verificar las siguientes condiciones: Para obtener  $R$ -orden de convergencia al menos cinco:

$$\begin{aligned} & F''(x_n)(\Gamma_n F(x_n), L_F(x_n)^2 \Gamma_n F(x_n)) \\ &= F''(x_n)(L_F(x_n) \Gamma_n F(x_n), L_F(x_n) \Gamma_n F(x_n)), \end{aligned} \quad (5.31)$$

Para obtener  $R$ -orden de convergencia al menos seis:

$$\begin{aligned} & F''(x_n)(\Gamma_n F(x_n), L_F(x_n)^3 \Gamma_n F(x_n)) \\ &= F''(x_n)(L_F(x_n) \Gamma_n F(x_n), L_F(x_n)^2 \Gamma_n F(x_n)), \end{aligned} \quad (5.32)$$

además de la condición (5.31).

Para obtener  $R$ -orden de convergencia al menos siete, además de las condiciones (5.31) y (5.32), deben satisfacerse estas otras dos:

$$\begin{aligned} & F''(x_n)(\Gamma_n F(x_n), L_F(x_n)^4 \Gamma_n F(x_n)) \\ &= \begin{cases} F''(x_n)(L_F(x_n) \Gamma_n F(x_n), L_F(x_n)^3 \Gamma_n F(x_n)) \\ F''(x_n)(L_F(x_n)^2 \Gamma_n F(x_n), L_F(x_n)^2 \Gamma_n F(x_n)). \end{cases} \end{aligned} \quad (5.33)$$

En general, para obtener  $R$ -orden de convergencia al menos  $q$ , deben satisfacerse las condiciones (5.27) para  $k = 2, 3, \dots, q - 3$  y  $j = 1, 2, \dots, [k/2]$ , denotando por  $[k/2]$  la parte entera de  $k/2$ .

*Nota 5.5.* En la práctica, notemos que una vez fijado el  $R$ -orden de convergencia  $q$  con el que aproximaremos una solución de  $F(x) = 0$ , chequearemos las condiciones (5.27), para  $k = 2, 3, \dots, q - 3$  y  $j = 1, 2, \dots, [k/2]$ , en vez de verificar la condición (5.25). De esta manera, podemos decir que las iteraciones obtenidas son aproximaciones, con un  $R$ -orden establecido  $q$ , a la solución.

*Nota 5.6.* Obsérvese que todo el estudio de convergencia semilocal realizado en  $\mathbb{R}$  y en espacios de Banach, cuando aplicamos la familia de procesos iterativos (5.20) a ecuaciones cuadráticas, puede generalizarse, en el sentido de que se puede considerar el operador  $H(x)$ ,  $x \in X$ , con un desarrollo infinito

$$H(x) = I + \frac{1}{2}x + \sum_{k \geq 2} A_k x^k, \quad \{A_k\}_{k \geq 2} \subset \mathbb{R}^+,$$

siempre que tenga sentido hablar de esta serie. Al igual que en el capítulo 3, a partir del teorema 1.3.1,  $H$  está bien definida si, para algún  $x_0 \in \Omega$ , se cumple que  $\|L_F(x_0)\| < r$ . Que se cumpla esta condición es equivalente a ver

que  $a_0 < r$ , siendo  $r$  el radio de convergencia de la serie  $\sum_{k \geq 0} A_k t^k$ , con  $A_0 = 1$ ,

$A_1 = 1/2$ .

### 5.3.2. Una ecuación en derivadas parciales

Para ilustrar una aplicación de la familia de métodos iterativos (5.20) a las ecuaciones en derivadas parciales no lineales, vamos a considerar la ecuación de interacción molecular ([77]) dada por

$$\Delta u = u^2, \quad \left( \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (5.34)$$

con las condiciones en la frontera dadas por  $b(x, y)$

$$u(x, y) = b(x, y), \quad (x, y) \in \partial G,$$

donde  $\partial G$  es la frontera de una región suficientemente regular  $G \subseteq \mathbb{R}^2$ . Esta ecuación aparece en la teoría de la dinámica de gases ([77]).

Resolver (5.34) es equivalente a encontrar una solución de la ecuación  $F(u) = 0$  con

$$F : C^{(2)}(G) \rightarrow C(G), \quad F(u) = \Delta u - u^2. \quad (5.35)$$

En este caso, tenemos:

$$F'(u) = \Delta - 2uI, \quad F''(u) = -2I_2$$

donde  $I$  es la identidad en  $C^{(2)}(G)$  e  $I_2$  es el operador bilineal definido por

$$I_2 vw(x, y) = v(x, y)w(x, y), \quad v, w \in C^{(2)}(G).$$

Nuestro objetivo es aproximar numéricamente los valores de  $u(x, y)$  en el interior de una región  $G$ . Para ello, consideramos el siguiente estudio numérico de la ecuación de interacción molecular  $\Delta u = u^2$ , dado por Rall ([128]) y que aparece en la teoría de dinámica de gases. Este estudio lo consideraremos en una región  $G$ , siendo  $G$  el cuadrado unitario  $[0, 1] \times [0, 1]$  en las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{cases} u(x, 0) = 2x^2 - x + 1 ; & 0 \leq x \leq 1 \\ u(1, y) = 2 & ; 0 \leq y \leq 1 \\ u(x, 1) = 2 & ; 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, y) = 2y^2 - y + 1 ; & 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Para discretizar el problema definimos una malla uniforme con nodos

$$P_{i,j} = (ih, jh), \quad h = \frac{1}{n+1}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n+1.$$

Aproximamos las derivadas segundas del operador  $u$  en los nodos  $P_{i,j}$  mediante las siguientes fórmulas de derivación numérica:

$$u_{xx}(P_{i,j}) = \frac{u(P_{i+1,j}) - 2u(P_{i,j}) + u(P_{i-1,j}))}{h^2}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

$$u_{yy}(P_{i,j}) = \frac{u(P_{i,j+1}) - 2u(P_{i,j}) + u(P_{i,j-1}))}{h^2}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Denotando por  $x_{i,j} = u(P_{i,j})$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, n+1$ , obtenemos el sistema

$$-x_{i+1,j} - x_{i-1,j} - x_{i,j+1} - x_{i,j-1} + 4x_{i,j} = -h^2 x_{i,j}^2, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (5.36)$$

Los valores  $x_{0,j}$ ,  $x_{n+1,j}$ ,  $x_{i,0}$  y  $x_{i,n+1}$  son obtenidos a partir de las condiciones de frontera.

Ordenando las incógnitas  $x_{i,j}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) de la siguiente forma

$$x_1 = x_{1,1}, \dots, x_n = x_{n,1}, x_{n+1} = x_{1,2}, \dots, x_m = x_{n,n},$$

el sistema (5.36) puede escribirse como

$$A\bar{x} + \Phi(\bar{x}) = \bar{b},$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} B & -I & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -I & B & -I & \ddots & & \vdots \\ 0 & -I & B & -I & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -I \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -I & B \end{pmatrix} \in M(m \times m),$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & 4 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \in M(n \times n),$$

$I$  es la matriz identidad en  $\mathbb{R}^n$ ,  $\bar{x} = (x_1 \dots, x_m)^t$ ,  $\Phi(\bar{x}) = h^2(x_1^2 \dots, x_m^2)^t$  y  $\bar{b}$  es un vector cuyas componentes vienen dadas por las condiciones iniciales. Los sistemas de esta forma se conocen como sistemas casi lineales. Puesto que la derivada segunda del operador es constante, en este caso, el uso de este tipo de sistemas puede tenerse en cuenta, aunque en general, el uso de procesos iterativos que conlleven el cálculo de derivadas segundas no es aconsejable, principalmente en dimensiones grandes.

Así, consideramos por ejemplo el caso  $n = 3$  y, por lo tanto,  $m = 9$ . Se puede comprobar que el vector  $\bar{b}$  viene dado por

$$\bar{b} = (7/4, 1, 27/8, 1, 0, 2, 27/8, 2, 4)^t.$$

Si denotamos por

$$F(\bar{x}) = A\bar{x} + \Phi(\bar{x}) - \bar{b}$$

el operador que define el sistema (5.36), se tiene que  $F'(\bar{x})$  es un operador lineal que viene dado por la matriz

$$A + \frac{1}{8} \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x_9 \end{pmatrix}$$

y  $F''(\bar{x})$  es un operador bilineal constante definido por

$$F''(\bar{x})\bar{u} \bar{v} = \frac{1}{8}\bar{u} \bar{v}, \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^9.$$

En muchos casos, los procesos iterativos punto a punto con  $R$ -orden de convergencia al menos tres no son tenidos en cuenta debido principalmente al coste operacional que conlleva la utilización del operador derivada segunda. Este no es el caso, puesto que si  $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^m$  son conocidos,  $F''(\bar{x})\bar{y}$  es una aplicación lineal que tiene asociada una matriz diagonal, de manera que si  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)$  y  $\bar{y} = (y_1, \dots, y_m)$ , la matriz asociada a  $F''(\bar{x})\bar{y}$  es

$$2h^2 \text{diag}\{y_1, \dots, y_m\}.$$

El hecho de tomar métodos iterativos de  $R$ -orden de convergencia al menos cuatro cuando se aplica a ecuaciones cuadráticas hace que alcancemos la solución en la mitad de iteraciones que cuando se considera por ejemplo el método de Newton.

Si elegimos  $x_i^{(0)} = 1$ , para  $i = 1, 2, \dots, 9$ , y consideramos la norma del máximo en  $\mathbb{R}^m$ , entonces dada una matriz  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$  tomamos como norma de  $A$ :

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^m \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} \left( \sum_{j=1}^m |a_{ij}| \right).$$

Usando seis cifras significativas, obtenemos

$$\|G_0\| = \|F(\bar{x}_0)^{-1}\| = \left\| \left( A + \frac{1}{8}I_9 \right)^{-1} \right\| \leq 1.00877 = \beta,$$

$$\|G_0 F(\bar{x}_0)\| = \left\| \left( A + \frac{1}{8}I_9 \right)^{-1} \left( A\bar{x}_0 + \frac{1}{16}\bar{x}_0^2 - \bar{b} \right) \right\| \leq 0.780592 = \eta,$$

y  $\|F''(\bar{x})\| = 1/8 = M$ , luego  $a_0 = M\beta\eta = 0.0984297$ . Entonces, tomando los métodos de la familia (5.20) con  $A_k = 0, \forall k \geq 3$ :

$$x_{n+1} = x_n - \left( I + \frac{1}{2}L_F(x_n) + \frac{1}{2}L_F(x_n)^2 \right) G_n F(x_n) \quad (5.37)$$

y,

$$x_{n+1} = x_n - \left( I + \frac{1}{2}L_F(x_n) + \frac{1}{2}L_F(x_n)^2 + \frac{5}{8}L_F(x_n)^3 \right) \Gamma_n F(x_n), \quad (5.38)$$

donde  $A_3 = 5/8$  y  $A_k = 0$ ,  $\forall k \geq 4$ , las hipótesis de convergencia dadas en el teorema 5.3.5 se cumplen y obtenemos como dominios de existencia para estos dos métodos  $B(\bar{x}_0, 0.82336)$  y  $B(\bar{x}_0, 0.824431)$  respectivamente y los dominios de unicidad  $B(\bar{x}_0, 15.0375) \cap \Omega$  y  $B(\bar{x}_0, 15.0365) \cap \Omega$  respectivamente.

Como hemos observado antes, el resultado de convergencia semilocal dado en el teorema 5.3.5 puede ser extendido al caso particular de desarrollos infinitos. Por ejemplo, en el caso del método de Super-Halley:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - H(L_F(x_n))\Gamma_n F(x_n), & n \geq 0 \\ H(L_F(x_n)) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2} L_F(x_n)^k \end{cases}$$

obtenemos un resultado análogo al teorema 5.3.5. Notemos que éste es un proceso iterativo clásico y tiene  $R$ -orden de convergencia al menos cuatro cuando es aplicado a ecuaciones cuadráticas. En este caso, las funciones auxiliares reales son:

$$h(t) = 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2} t^k = \frac{2-t}{2(1-t)}, \quad f(t) = \frac{1}{1-th(t)} = \frac{2-2t}{2-4t+t^2},$$

$$g(t) = h(t) \left( 1 + \frac{t}{2} h(t) \right) - 1 = \frac{t(8-8t+t^2)}{8(-1+t)^2},$$

y obtenemos como dominio de existencia  $B(\bar{x}_0, 0.937573)$  y como dominio de unicidad  $B(\bar{x}_0, 14.9233) \cap \Omega$ , que son peores que los obtenidos en los dos casos anteriores para el proceso iterativo (5.37) y para el proceso iterativo (5.38).

A modo comparativo, recogemos en la tabla 5.8 las estimaciones del error

$$\|x^* - x_n\| < h \left( \gamma^{\frac{4^n-1}{3}} a_0 \right) \frac{\gamma^{\frac{4^n-1}{3}} \Delta^n}{1 - \gamma^{4^n} \Delta} \eta, \quad n \geq 0,$$

dadas en teorema 5.3.5, para los procesos iterativos de la familia considerados y para el método de Super-Halley.

Nótese que, tal y como muestra la tabla 5.8, las estimaciones del error para los dos procesos iterativos de la familia mejoran las obtenidas para el método de Super-Halley, siendo todos métodos con  $R$ -orden de convergencia al menos cuatro, cuando se aplican a operadores cuadráticos.

Por otra parte, cuando aplicamos el proceso iterativo (5.37) los pasos para obtener una nueva aproximación  $\bar{x}_{k+1}$ , conocido  $\bar{x}_k \in \mathbb{R}^m$ , son:

1. Resolver el sistema  $F'(\bar{x}_k)\bar{c}_k = -F(\bar{x}_k)$ ,
2. Resolver el sistema  $F'(\bar{x}_k)\bar{l}_k = -F''(\bar{x}_k)\bar{c}_k$ ,

$n$	método (5.37)	método (5.38)	método de Super-Halley
1	0.000540568	0.00111368	0.0958965
2	$1.72658 \cdot 10^{-16}$	$6.40829 \cdot 10^{-15}$	0.0000292917
3	$2.49639 \cdot 10^{-66}$	$9.76335 \cdot 10^{-60}$	$3.64408 \cdot 10^{-19}$
4	$1.51541 \cdot 10^{-265}$	$7.30842 \cdot 10^{-239}$	$1.21269 \cdot 10^{-74}$

**Tabla 5.8.** Estimaciones del error para (5.36) con  $x_i^{(0)} = 1, i = 1, 2, \dots, 9$

3. Resolver el sistema

$$(F'(\bar{x}_k) + F''(\bar{x}_k)\bar{c}_k)\bar{d}_k = -F(\bar{x}_k) + \frac{1}{2}F''(\bar{x}_k)\bar{c}_k^2 + \frac{1}{2}F''(\bar{x}_k)\bar{c}_k\bar{l}_k^2\bar{c}_k,$$

4. Definir el siguiente punto como  $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + \bar{d}_k$ .

Denotamos la  $n$ -ésima iteración por  $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_9^{(n)})^t$ . Usando 16 cifras significativas, consideramos como solución numérica exacta de (5.36) la obtenida en tres iteraciones por el proceso iterativo (5.37). Véase la tabla 5.9.

$x_1^{(3)}$	$x_2^{(3)}$	$x_3^{(3)}$
1.0259117116900391	1.2097138871357902	1.5167030309592349
$x_4^{(3)}$	$x_5^{(3)}$	$x_6^{(3)}$
1.2097138871357902	1.387703786439461	1.6258724919587073
$x_7^{(3)}$	$x_8^{(3)}$	$x_9^{(3)}$
1.5167030309592349	1.6258724919587073	1.7642994854428844

**Tabla 5.9.** Aproximación numérica de la solución de (5.36)

### 5.3.3. La ecuación integral de Chandrasekhar

A continuación, mostramos un caso práctico donde aplicamos el teorema 5.3.5, con el propósito de obtener dominios de existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones integrales cuadráticas de la forma

$$x(s) = f(s) + \lambda x(s) \int_0^1 \kappa(s, t)x(t) dt. \tag{5.39}$$

Para ello, consideramos el espacio de Banach  $X = C([0, 1])$  de todas las funciones continuas definidas en el intervalo real  $[0, 1]$  con la norma del máximo

$$\|x\|_\infty := \max_{s \in [0,1]} |x(s)|.$$

Consideramos el núcleo  $\kappa(s, t)$  como una función continua en dos variables  $s, t \in [0, 1]$  y satisfaciendo las condiciones  $0 < \kappa(s, t) < 1$  y  $\kappa(s, t) + \kappa(t, s) = 1$ . Además, suponemos que  $\lambda$  es una constante real y  $f(s) \in C([0, 1])$  es una función conocida. Las ecuaciones de la forma (5.39) aparecen en el trabajo de Chandrasekhar ([39]) y surgen del estudio de la teoría de la transferencia radiactiva, el transporte de neutrones y la teoría cinética de los gases. Este tipo de ecuaciones integrales cuadráticas son estudiadas en [10] y en [11] bajo ciertas condiciones para el núcleo. (Véase también [50]).

A continuación, a partir del teorema 5.3.5, proporcionamos dominios de existencia y unicidad de solución para un caso particular de (5.39). Además, mostramos la mejora conseguida al comparar la familia de procesos iterativos (5.20) con estudios realizados por otros autores ([48]), donde se considera un proceso iterativo particular de la familia (5.20).

Resolver (5.39) es equivalente a resolver la ecuación  $F(x) = 0$ , con  $F : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$  el operador dado por la ecuación integral:

$$F(x)(s) = -f(s) + x(s) - \lambda x(s) \int_0^1 \kappa(s, t)x(t) dt, \quad x \in C([0, 1]), \quad s \in [0, 1].$$

Sin pérdida de generalidad, consideramos  $f(s) = 1$ , para todo  $s \in [0, 1]$ ,  $\lambda = \frac{1}{4}$  y el núcleo  $\kappa(s, t) = \frac{s}{s+t}$ ,  $s, t \in [0, 1]$ ; es decir, tomamos  $F$  como sigue

$$F(x)(s) = -1 + x(s) - \frac{x(s)}{4} \int_0^1 \frac{s}{s+t} x(t) dt, \quad x \in C([0, 1]), \quad s \in [0, 1]. \quad (5.40)$$

Calculamos la primera y segunda derivadas Fréchet del operador  $F$  con el objetivo de poder hallar así las constantes  $M$ ,  $\beta$ , y  $\eta$ , obteniendo

$$[F'(x)y](s) = y(s) - \frac{y(s)}{4} \int_0^1 \frac{s}{s+t} x(t) dt - \frac{x(s)}{4} \int_0^1 \frac{s}{s+t} y(t) dt, \quad s \in [0, 1],$$

y

$$[F''(x)(y, z)](s) = -\frac{y(s)}{4} \int_0^1 \frac{s}{s+t} z(t) dt - \frac{z(s)}{4} \int_0^1 \frac{s}{s+t} y(t) dt, \quad s \in [0, 1],$$

donde  $x, y, z \in C([0, 1])$ .

Observando que  $\max_{s \in [0,1]} \left| \int_0^1 \frac{s}{s+t} dt \right| = \max_{s \in [0,1]} \left( s \ln \frac{s+1}{s} \right) = \ln 2$  y tomando como aproximación inicial  $x_0(s) = 1$ , obtenemos

$$\|F(x_0)\| \leq \frac{1}{4} \ln 2.$$

Por otra parte,

$$\|I - F'(x_0)\| \leq \frac{1}{2} \ln 2 < 1,$$

por tanto, se sigue que

$$\|I_0\| \leq \frac{1}{1 - \|I - F'(x_0)\|} \leq \frac{2}{2 - \ln 2} = \beta,$$

y

$$\|I_0 F(x_0)\| \leq \frac{\ln 2}{4 - 2 \ln 2} = \eta.$$

Además,

$$\|F''(x)\| \leq \frac{1}{2} \ln 2 = M.$$

Trabajando con ocho cifras significativas, obtenemos las siguientes constantes  $\beta = 1.5303942$ ,  $\eta = 0.26519711$  y  $M = 0.34657359$ . Luego,  $a_0 = M\beta\eta = 0.14065901$ . Tomando, por ejemplo, el método de la familia (5.20) donde  $A_k = 0$ ,  $k \geq 3$ , se sigue que  $a_0 h(a_0) = 0.15194296 < 1$  y  $f(a_0)^2 g(a_0) = 0.002564064 < 1$ , donde las funciones reales auxiliares son

$$h(t) = \frac{1}{2}(2 + t + t^2), \quad f(t) = \frac{2}{2 - t(2 + t + t^2)} \quad \text{y} \quad g(t) = \frac{t^3(5 + 2t + t^2)}{8}.$$

Por tanto, a partir del teorema 5.3.5, obtenemos para el operador integral (5.40) un dominio de existencia de solución, dado por la bola  $\overline{B}(x_0, 0.28709603)$ , y un dominio de unicidad de solución dado por  $B(x_0, 3.4836841) \cap \Omega$ .

Pasamos a realizar un estudio comparativo entre la familia de procesos iterativos dada por el algoritmo (5.20) y la familia de métodos iterativos considerada en [48], también conocidos como C-métodos ([4]):

$$x_{n+1} = x_n - \left( I + \frac{1}{2} L_F(x_n) + C L_F(x_n)^2 \right) \Gamma_n F(x_n), \quad C \in \mathbb{R}. \quad (5.41)$$

Obsérvese que, en el caso en que  $C = 0$ , se está considerando el método de Chebyshev. Es claro que, tanto si  $C = 0$  como si  $C = \frac{1}{2}$ , ambos métodos están considerados en la familia (5.20).

En la tabla 5.10, se muestran algunas estimaciones del error  $\|x^* - x_n\|$  obtenidas al utilizar estos procesos iterativos para aproximar una solución de la ecuación integral (5.40). Notemos la mejora conseguida, en términos de estimación del error, al considerar el método de Chebyshev o el C-método con  $C = 1/2$  y el mismo proceso iterativo en la familia (5.20) con  $A_k = 0$ ,  $\forall k \geq 3$ .

### 5.3.4. Una ecuación integral cuadrática

A continuación, presentamos un caso práctico donde aplicamos el teorema 5.3.7, obteniendo de esta forma  $R$ -órdenes de convergencia altos para distintos

$n$	método (5.20)	método (5.41)	método (5.41)
	con $A_k = 0, \forall k \geq 3$	con $C = 0$	con $C = 1/2$
	$\ x^* - x_n\ $	$\ x^* - x_n\ $	$\ x^* - x_n\ $
0	0.28709603	0.28704249	0.28704249
1	0.0005767678	0.0035775864	0.00073599201
2	$2.11380 \cdot 10^{-14}$	$8.92413 \cdot 10^{-9}$	$4.48122 \cdot 10^{-14}$
3	$6.2568 \cdot 10^{-56}$	$1.38979 \cdot 10^{-25}$	$6.16436 \cdot 10^{-55}$

**Tabla 5.10.** Estimaciones del error para el operador integral (5.40)

procesos iterativos de la familia (5.20) cuando los aplicamos a la ecuación integral cuadrática de tipo Fredholm y de segunda clase ([40]):

$$x(s) = f(s) + \lambda \int_0^1 e^{t+s} x(t)^2 dt. \quad (5.42)$$

Realizamos este estudio, considerando el espacio de Banach  $X = C([0, 1])$  de todas las funciones continuas definidas en el intervalo real  $[0, 1]$  con la norma del máximo. Por otra parte, suponemos que  $\lambda$  es una constante real y  $f(s) \in C([0, 1])$  una función conocida. Notemos que el núcleo que tomamos  $\kappa(s, t) = e^{t+s}$ ,  $s, t \in [0, 1]$ , es continuo y degenerado, entendiendo por degenerado que las variables son separadas.

Para obtener aproximaciones de una solución de (5.42), utilizaremos distintos procesos iterativos de la familia (5.20). El problema de encontrar una solución de (5.42),  $x^*(s) \in C([0, 1])$ , es equivalente al de encontrar una solución de la ecuación  $F(x) = 0$ , donde  $F : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$  está definido de la siguiente manera:

$$[F(x)](s) = x(s) - f(s) - \lambda \int_0^1 e^{t+s} x(t)^2 dt, \quad s \in [0, 1].$$

Notemos que el hecho de considerar el punto de salida  $u_0(s) = f(s)$  hace que la condición (5.25):

$$F''(x)(\hat{x}, L_F(x)(\bar{x})) = F''(x)(L_F(x)(\hat{x}), \bar{x}), \quad x, \hat{x}, \bar{x} \in \Omega.$$

se cumpla si  $x = u_0(s) = f(s)$ , por lo que se podrá fijar el  $R$ -orden de convergencia deseado para obtener una primera aproximación, lo suficientemente buena, para una solución de (5.43). Elegimos  $u_0(s) = f(s) = 1$  y  $\lambda = -1$ . En este caso, se tiene que una solución de la ecuación integral

$$[F(x)](s) = x(s) - 1 - \lambda \int_0^1 e^{t+s} x(t)^2 dt = 0, \quad s \in [0, 1]. \quad (5.43)$$

es

$$x(s) = 1 + e^s \frac{-3e^2 + \sqrt{3(-4 + 4e + 4e^3 - e^4)}}{2(-1 + e^3)}. \quad (5.44)$$

Consideramos los procesos iterativos de la familia (5.20) con  $q = 4, 5, 6, 8$ , que aplicamos a la ecuación integral (5.43), y calculamos para estos procesos las primeras tres iteraciones.

Observamos que las condiciones de convergencia del teorema 5.3.7, para  $q = 4, 5$ , se cumplen a partir de la segunda iteración  $u_2$  que tomaremos como  $x_0$ . En efecto, por una parte tenemos que  $\|F''(x)\| = 9.34155 = M$ . Ahora, para  $q = 4$ , obtenemos los siguientes valores de los parámetros  $\beta$  y  $\eta$  que definen  $a_0$ :

$$\|\Gamma_0\| \leq 2.13927 = \beta, \quad \|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq 0.0000229949 = \eta,$$

de donde se sigue que

$$a_0 = 0.000459533, \quad a_0 h(a_0) = 0.000459638 < 1, \quad \gamma = 6.07306 \cdot 10^{-11} < 1.$$

Para  $q = 5$ , obtenemos

$$\|\Gamma_0\| \leq 2.13926 = \beta, \quad \|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq 2.581 \cdot 10^{-7} = \eta,$$

y por tanto,

$$a_0 = 5.15787 \cdot 10^{-6}, \quad a_0 h(a_0) = 5.15789 \cdot 10^{-6} < 1, \quad \gamma = 6.19295 \cdot 10^{-22} < 1.$$

Entonces, podemos asegurar la convergencia a la solución de (5.43) con al menos  $R$ -órdenes cuatro y cinco, tomando  $x_0$  para el teorema 5.3.7 como la segunda iteración,  $u_2$ , obtenida a partir de los procesos iterativos de la familia con  $q = 4$  y  $q = 5$ , respectivamente.

Para los métodos de la familia con  $q = 6$  y  $q = 8$ , las condiciones de convergencia de teorema 5.3.7 se satisfacen a partir de la primera iteración  $u_1$  que tomaremos como  $x_0$ . En efecto, para  $q = 6$ , obtenemos

$$\|\Gamma_0\| \leq 2.14706 = \beta, \quad \|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq 0.0247705 = \eta,$$

$$a_0 = 0.124204, \quad a_0 h(a_0) = 0.13305 < 1, \quad \gamma = 0.0000599727 < 1.$$

Para  $q = 8$ ,

$$\|\Gamma_0\| \leq 2.14282 = \beta, \quad \|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq 0.0112001 = \eta,$$

$$a_0 = 0.224196, \quad a_0 h(a_0) = 0.257263 < 1, \quad \gamma = 0.00024204 < 1.$$

Entonces, tomando  $x_0$  en el teorema 5.3.7 como la primera iteración,  $u_1$ , obtenida a partir de los métodos de la familia con  $q = 6$  y  $q = 8$ , la convergencia a la solución de (5.43) con al menos  $R$ -órdenes seis y ocho respectivamente queda garantizada por el teorema 5.3.7.

Recordemos que, como observamos en la nota 5.4, al fijar el  $R$ -orden de convergencia  $q$ , con el que aproximamos la solución del problema la condición (5.25) que imponemos en el teorema 5.3.7 es demasiado restrictiva y es suficiente con chequear las condiciones:

$$B_n(L_F(x_n)^j \Gamma_n F(x_n), L_F(x_n)^{k-j} \Gamma_n F(x_n)) = B_n(\Gamma_n F(x_n), L_F(x_n)^k \Gamma_n F(x_n)),$$

donde  $B_n = \frac{1}{2} F''(x_n)$  para  $k = 2, \dots, q - 3$  y  $j = 0, 1, \dots, k$ . De esta manera podemos decir que las iteraciones obtenidas son aproximaciones a la solución con un  $R$ -orden establecido  $q$ .

Así, las condiciones que chequeamos son (5.31) para obtener  $R$ -orden de convergencia al menos cinco en cada iteración, (5.31) y (5.32) para obtener  $R$ -orden de convergencia al menos seis en cada iteración. Para obtener  $R$ -orden de convergencia al menos ocho en cada iteración, deben cumplirse las condiciones:

$$\begin{aligned} & F''(x_n) (\Gamma_n F(x_n), L_F(x_n)^4 \Gamma_n F(x_n)) \\ &= \begin{cases} F''(x_n) (L_F(x_n) \Gamma_n F(x_n), L_F(x_n)^3 \Gamma_n F(x_n)) \\ F''(x_n) (L_F(x_n)^2 \Gamma_n F(x_n), L_F(x_n)^2 \Gamma_n F(x_n)), \end{cases} \\ & F''(x_n) (\Gamma_n F(x_n), L_F(x_n)^5 \Gamma_n F(x_n)) \\ &= \begin{cases} F''(x_n) (L_F(x_n) \Gamma_n F(x_n), L_F(x_n)^4 \Gamma_n F(x_n)) \\ F''(x_n) (L_F(x_n)^2 \Gamma_n F(x_n), L_F(x_n)^3 \Gamma_n F(x_n)), \end{cases} \end{aligned}$$

además de las condiciones (5.31) y (5.32).

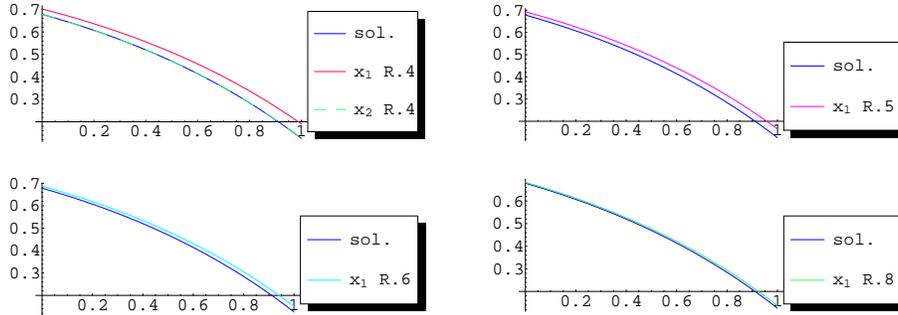
Mostramos a continuación las estimaciones de los errores cometidos al utilizar estos procesos iterativos de la familia (5.20) para aproximar la solución (5.44) y que están recogidas en la tabla 5.11.

$n$	$q = 4$	$q = 5$	$q = 6$	$q = 8$
1	0.0647937	0.0394267	0.0252058	0.0112892
2	1.0000229953	$2.581 \cdot 10^{-7}$	$1.54882 \cdot 10^{-9}$	$8.71526 \cdot 10^{-15}$
3	$3.33067 \cdot 10^{-16}$	$4.06977 \cdot 10^{-33}$	$1.04446 \cdot 10^{-52}$	$1.47422 \cdot 10^{-111}$

**Tabla 5.11.** Estimaciones del error  $\|x^* - x_n\|$  para la ecuación integral (5.43)

Observando la tabla 5.11, es claro que si fijamos una tolerancia en el error de  $\|x^* - x_n\| < C \cdot 10^{-15}$ , con  $C$  una constante real positiva, necesitamos realizar dos iteraciones considerando  $q = 8$  o tres iteraciones considerando  $q = 4$ . Mientras que si tomamos el  $R$ -orden  $q = 120$ , esta tolerancia se consigue con una sola iteración.

Finalmente mostramos gráficamente las aproximaciones a la solución (5.44) de la ecuación integral (5.43) obtenidas para los procesos iterativos con  $R$ -órdenes  $q = 4, 5, 6, 8$ , que hemos considerado en este estudio.



**Figura 5.7.** Aproximaciones a la solución (5.44) de la ecuación integral (5.43) con  $R$ -órdenes  $q = 4, 5, 6, 8$

### 5.4. Ecuaciones cuadráticas complejas y conjuntos universales de Julia

En esta sección nos planteamos el estudio de la convergencia global desde un punto de vista numérico y dinámico de la familia de procesos iterativos

$$\begin{cases} z_{n+1} = G_F(z_n) = z_n - H(L_F(z_n)) \frac{F(z_n)}{F'(z_n)}, \\ H(w) = \sum_{k=0}^{q-2} A_k w^k, \quad A_k = \frac{1}{2^k} C_k, \quad q \geq 4, \end{cases} \quad (5.45)$$

siendo  $C_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , los conocidos números de Catalan (5.2), cuya definición recordamos ([45], [149]):

$$C_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}.$$

Realizamos este estudio en el caso en que estos métodos iterativos son aplicados a polinomios cuadráticos en  $\mathbb{C}$ , siguiendo la teoría ya existente sobre funciones iterativas racionales de variable compleja ([27]).

En lo que sigue suponemos que  $F : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es un polinomio de grado dos con dos raíces simples. Denotaremos por  $\mathbb{C}_\infty$  el plano complejo extendido, conocido también como esfera de Riemann con su métrica habitual.

Notemos que como consecuencia del estudio anterior se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 5.4.1** *La familia de procesos iterativos (5.45) tiene orden de convergencia  $q$ , con  $q \geq 4$ .*

Para estudiar la convergencia de un método iterativo hacemos uso del concepto de convergencia general introducido por Smale en [138] y que más tarde fue generalizado por McMullen ([105]). La convergencia general de un método iterativo significa que para casi todo punto inicial, esto es excepto para un conjunto de medida nula, y para casi todo polinomio de grado conocido, el método iterativo converge a una raíz del polinomio. Una herramienta que usaremos para analizar la convergencia de los métodos iterativos (5.45) aplicados a polinomios cuadráticos es el conjunto universal de Julia, que posteriormente definiremos.

A continuación, introducimos algunos conceptos y resultados generales que podemos encontrar en [27] y que usaremos a lo largo de esta sección.

Sea  $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  una aplicación racional no constante en la esfera de Riemann, donde  $P(z)$  y  $Q(z)$  son polinomios complejos con factores no comunes. Se dice que  $\zeta$  es un *punto fijo* de  $R(z)$  si  $R(\zeta) = \zeta$ .

Sea  $z \in \mathbb{C}_\infty$ . Se define la *órbita* de  $z$  como el conjunto

$$Orb(z) = \{z, R(z), R^2(z), \dots, R^k(z), \dots\}$$

donde  $R^k(z)$  es la  $k$ -ésima composición de  $R$ . Se dice que  $\zeta$  es un *punto periódico* de periodo  $n$  si  $R^n(\zeta) = \zeta$  y  $R^j(\zeta) \neq \zeta$ , para  $0 < j < n$ .

Notemos que, si  $\zeta \in \mathbb{C}_\infty$  es un punto periódico de periodo  $n \geq 1$ , entonces  $\zeta$  es un punto fijo de  $R^n$ .

Sea  $\zeta$  un punto fijo de  $R$ . Entonces, se dice que  $\zeta$  es

- (1) superatractor si  $R'(\zeta) = 0$ ,
- (2) atractor si  $|R'(\zeta)| < 1$ ,
- (3) repulsor si  $|R'(\zeta)| > 1$ ,
- (4) indiferente si  $|R'(\zeta)| = 1$ .

Además, un punto periódico de periodo  $n$  es superatractor, atractor, repulsor o indiferente si lo es como punto fijo de  $R^n$ .

Por otra parte, dada una aplicación racional  $R(z)$ ,  $\mathbb{C}_\infty$  se divide en dos subconjuntos, conocidos como *conjunto de Fatou* y *conjunto de Julia*, y cuyos elementos dependen directamente de las propiedades dinámicas de la aplicación racional y de sus iteradas sobre los elementos de dichos subconjuntos. En un sentido poco riguroso, estos dos subconjuntos incluyen todos los puntos cuyo comportamiento dinámico es predecible después de muchas iteraciones de la aplicación racional  $R$  y, por otra parte, aquellos puntos cuyo comportamiento dinámico es complicado de establecer independientemente del número de iteraciones realizado.

Sea  $R$  una aplicación racional no constante. Se denomina *conjunto de Fatou* asociado a  $R$  al subconjunto abierto maximal  $\mathcal{F}(R) \subseteq \mathbb{C}_\infty$  en el cual la familia  $\{R, R^2, \dots, R^k, \dots\}$  es *equicontinua* con respecto a una de las métricas equivalentes en  $\mathbb{C}_\infty$ . Recordemos que una familia  $\mathcal{F}$  de aplicaciones  $f : (\mathbb{C}_\infty, d) \rightarrow (\mathbb{C}_\infty, d)$  se dice equicontinua en un subconjunto  $\Omega \subseteq \mathbb{C}_\infty$

si, para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  de tal forma que, para todo  $w, z \in \Omega$  y para toda  $f \in \mathcal{F}$ , se tiene que  $d(f(w), f(z)) < \epsilon$  siempre que  $d(w, z) < \delta$ .

El complementario del conjunto de Fatou,  $\mathcal{J}(R) = \mathbb{C}_\infty - \mathcal{F}(R)$ , se denomina *conjunto de Julia* asociado a  $R$ .

Sea  $\zeta$  un punto fijo atractor de una aplicación racional  $R$ . Se define la cuenca de atracción de  $\zeta$  como el conjunto

$$C(\zeta) = \{z \in \mathbb{C}_\infty \mid R^n(z) \rightarrow \zeta \text{ cuando } n \rightarrow \infty\}.$$

Además, si  $\zeta$  es un punto atractor periódico de periodo  $n$  de  $R(z)$ , la cuenca de atracción de la órbita  $Orb(\zeta)$  es el conjunto

$$C(Orb(\zeta)) = \bigcup_{j=0}^{n-1} R^j(C(\zeta)),$$

donde  $C(\zeta)$  es la cuenca de atracción de  $\zeta$  como punto fijo de  $R^n$ .

Así, el conjunto de Julia de una aplicación racional  $R(z)$ , denotado por  $\mathcal{J}(R)$ , es la clausura del conjunto de puntos periódicos repulsores y su complemento es el conjunto de Fatou  $\mathcal{F}(R)$ , es decir,  $\mathcal{F}(R) = \mathbb{C}_\infty - \mathcal{J}(R)$ . Una de las propiedades más conocidas de estos conjuntos, que de hecho usaremos, es que tanto el conjunto de Julia como el de Fatou son completamente invariantes por  $R$ . Esto es,  $R^{-1}(\mathcal{F}(R)) = R(\mathcal{F}(R)) = \mathcal{F}(R)$  y  $R^{-1}(\mathcal{J}(R)) = R(\mathcal{J}(R)) = \mathcal{J}(R)$ . Además, si  $R(z)$  tiene un punto fijo atractor  $\zeta$ , entonces, la cuenca de atracción asociada a  $\zeta$ ,  $C(\zeta)$ , está contenida en el conjunto de Fatou y el conjunto de Julia coincide con la frontera de  $C(\zeta)$ , es decir,  $\mathcal{J}(R) = \partial C(\zeta)$ . Por lo tanto, la dinámica caótica de la aplicación racional  $R(z)$  está contenida en su conjunto de Julia.

Otro concepto fundamental para la comprensión del comportamiento de las aplicaciones racionales desde el punto de vista dinámico es la conjugación. Para introducir este concepto hacemos uso de las aplicaciones de Möbius, que son aplicaciones racionales de grado uno de la forma

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Estas aplicaciones constituyen el grupo de homeomorfismos analíticos de  $\mathbb{C}_\infty$  en sí mismos. Se dice que dos aplicaciones racionales  $R$  y  $S$  son conjugadas si y solo si existe alguna aplicación de Möbius  $M$  de tal manera que

$$S = MRM^{-1}.$$

Es claro que la conjugación es una relación de equivalencia, y las clases de equivalencia se denominan clases de conjugación de las aplicaciones racionales ([27]). La importancia de la conjugación en la comprensión del comportamiento de las aplicaciones racionales es debido a las buenas propiedades que tiene. Así, por ejemplo, si  $R$  es una aplicación racional no constante y  $M$  una aplicación de Möbius de tal manera que define una nueva aplicación racional  $S = MRM^{-1}$ , entonces  $\mathcal{F}(S) = M(\mathcal{F}(R))$  y  $\mathcal{J}(S) = M(\mathcal{J}(R))$ , ([102]).

Por lo tanto, supongamos que uno desea describir el comportamiento tanto cuantitativo como cualitativo de una aplicación racional  $R(z)$ , entonces es posible simplificar este problema transfiriéndolo a otro más sencillo en términos de su conjugado  $S(z)$ , puesto que la conjugación preserva puntos fijos, puntos periódicos y el tipo, así como las cuencas de atracción, y es en esos puntos donde se encuentra la información del comportamiento dinámico para una función  $F$  analítica arbitraria.

Sea  $G_F$  un proceso iterativo. Se dice que tiene asociado un conjunto universal de Julia si existe una aplicación racional  $R$  tal que para cada polinomio  $F$  de grado  $d$ ,  $\mathcal{J}(G_F)$  es conjugado por una aplicación de Möbius a  $\mathcal{J}(R)$ .

A continuación, establecemos cuales son los conjuntos universales de Julia asociados a los procesos iterativos  $G_F$  de la familia (5.45) cuando son aplicados a polinomios cuadráticos.

Notemos que cada proceso iterativo  $G_F$  de la familia (5.45) aplicado a un polinomio cuadrático  $F(z) = (z - a)(z - b)$ ,  $a \neq b$ , tiene asociado una aplicación racional  $R_q(z)$  dada por

$$R_q(z) = z - H(L_F(z)) \frac{F(z)}{F'(z)}, \quad q \geq 4, \quad (5.46)$$

siendo la función  $H$  de la forma:

$$H(w) = \sum_{k=0}^{q-2} \frac{1}{2^k} C_k w^k, \quad q \geq 4, \quad (5.47)$$

y  $C_k$  los números de Catalan (5.2).

**Teorema 5.4.2** *Sea la aplicación racional  $R_q(z)$ , con  $q \geq 4$ . Entonces, la aplicación racional conjugada  $S_q(z) = MR_qM^{-1}(z)$ , vía una aplicación de Möbius,  $M(z) = \frac{z-a}{z-b}$ , viene dada por*

$$S_q(z) = z^q \frac{a_0 z^{q-2} + a_1 z^{q-3} + a_2 z^{q-4} + \cdots + a_{q-3} z + a_{q-2}}{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{q-3} z^{q-3} + a_{q-2} z^{q-2}},$$

donde

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 = 2q - 4, \\ a_j = \binom{2(q-2)}{j} - \binom{2(q-2)}{j-2}, \quad j = 2, \dots, q-2. \end{cases}$$

*Demostración.* A partir de la aplicación de Möbius,  $M(z) = \frac{z-a}{z-b}$ , se sigue que  $M^{-1}(z) = \frac{bz-a}{z-1}$ . Denotando por  $\omega = M^{-1}(z)$  obtenemos:

$$F(\omega) = \frac{z(b-a)^2}{(z-1)^2}, \quad F'(\omega) = \frac{(z+1)(b-a)}{(z-1)}.$$

Por lo tanto,

$$L_F(\omega) = \frac{F(\omega)F''(\omega)}{F'(\omega)^2} = \frac{2z}{(z+1)^2}.$$

Teniendo en cuenta la expresión de la función racional  $R_q$  (5.46) se sigue que

$$S_q(z) = MR_qM^{-1}(z) = MR_q(\omega) = \frac{\omega - a - H(L_F(\omega)) \frac{F(\omega)}{F'(\omega)}}{\omega - b - H(L_F(\omega)) \frac{F(\omega)}{F'(\omega)}},$$

y puesto que  $\omega - a = \frac{z(b-a)}{z-1}$ ,  $\omega - b = \frac{b-a}{z-1}$ , obtenemos:

$$S_q(z) = \frac{z(z+1) - zH\left(\frac{2z}{(z+1)^2}\right)}{z+1 - zH\left(\frac{2z}{(z+1)^2}\right)}.$$

Ahora teniendo en cuenta (5.47), sin más que operar, se sigue que

$$\begin{aligned} S_q(z) &= \frac{z \left( z - \sum_{k=1}^{q-2} C_k \frac{z^k}{(z+1)^{2k}} \right)}{1 - z \sum_{k=1}^{q-2} C_k \frac{z^k}{(z+1)^{2k}}} \\ &= \frac{z^2 \left( (z+1)^{2(q-2)} - \sum_{k=1}^{q-2} C_k z^{k-1} (z+1)^{2(q-2-k)} \right)}{(z+1)^{2(q-2)} - z \sum_{k=1}^{q-2} C_k z^k (z+1)^{2(q-2-k)}}. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} (z+1)^{2(q-2)} &= \sum_{j=0}^{2(q-2)} \binom{2(q-2)}{j} z^j, \\ z^{k-1}(z+1)^{2(q-2-k)} &= \sum_{j=0}^{2(q-2-k)} \binom{2(q-2-k)}{j} z^{j+k-1} \\ &= \sum_{j=k-1}^{2q-k-5} \binom{2(q-2-k)}{j+1-k} z^j, \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned}
& (z+1)^{2(q-2)} - \sum_{k=1}^{q-2} C_k z^{k-1} (z+1)^{2(q-2-k)} \\
&= \sum_{j=0}^{2(q-2)} \binom{2(q-2)}{j} z^j - \sum_{k=1}^{q-2} C_k \sum_{j=k-1}^{2q-k-5} \binom{2(q-2-k)}{j+1-k} z^j \\
&= \sum_{j=0}^{q-3} \left( \binom{2(q-2)}{j} - \sum_{k=1}^{j+1} C_k \binom{2(q-2-k)}{j+1-k} \right) z^j \\
&\quad + \sum_{j=q-2}^{2(q-3)} \left( \binom{2(q-2)}{j} - \sum_{k=1}^{2q-j-5} C_k \binom{2(q-2-k)}{j+1-k} \right) z^j \\
&\quad + \binom{2(q-2)}{2q-5} z^{2q-5} + \binom{2(q-2)}{2q-4} z^{2q-4}.
\end{aligned}$$

Ahora, aplicando la fórmula de Jonah para los números de Catalan ([94]):

$$\binom{n}{j-1} = \sum_{i=1}^j C_i \binom{n-2i}{j-i}, \quad n \geq 0, \quad j \geq 1, \quad (5.48)$$

es fácil ver que

$$\binom{2(q-2)}{j} - \sum_{k=1}^{j+1} C_k \binom{2(q-2-k)}{j+1-k} = 0.$$

Además,

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=q-2}^{2(q-3)} \left( \binom{2(q-2)}{j} - \sum_{k=1}^{2q-j-5} C_k \binom{2(q-2-k)}{j+1-k} \right) z^j \\
&= z^{q-2} \sum_{j=0}^{q-4} \left( \binom{2(q-2)}{j+q-2} - \sum_{k=1}^{q-j-3} C_k \binom{2(q-2-k)}{j+q-1-k} \right) z^j,
\end{aligned}$$

y aplicando la fórmula (5.48), obtenemos

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=q-2}^{2(q-3)} \left( \binom{2(q-2)}{j} - \sum_{k=1}^{2q-j-5} C_k \binom{2(q-2-k)}{j+1-k} \right) z^j \\
&= z^{q-2} \sum_{j=0}^{q-4} \left( \binom{2(q-2)}{j+q-2} - \binom{2(q-2)}{q-j-4} \right) z^j.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, sustituyendo en el numerador de  $S_q(z)$ , se sigue

$$\begin{aligned}
 & z^2 \left( (z+1)^{2(q-2)} - \sum_{k=1}^{q-2} C_k z^{k-1} (z+1)^{2(q-2-k)} \right) \\
 &= z^q \left( \sum_{j=0}^{q-4} \left( \binom{2(q-2)}{j+q-2} - \binom{2(q-2)}{q-j-4} \right) z^j + 2(q-2)z^{q-3} + z^{q-2} \right).
 \end{aligned}$$

Procedemos análogamente con el denominador de  $S_q(z)$ . Por un lado, tenemos

$$\begin{aligned}
 & z \sum_{k=1}^{q-2} C_k z^k (z+1)^{2(q-2-k)} = \sum_{k=1}^{q-2} C_k \sum_{j=k+1}^{2q-k-3} \binom{2(q-2-k)}{j-1-k} z^j \\
 &= \sum_{j=2}^{q-2} \sum_{k=1}^{j-1} C_k \binom{2(q-2-k)}{j-1-k} z^j + \sum_{j=q-1}^{2(q-2)} \sum_{k=1}^{2q-j-3} C_k \binom{2(q-2-k)}{j-1-k} z^j
 \end{aligned}$$

y

$$\sum_{j=q-1}^{2(q-2)} \sum_{k=1}^{2q-j-3} C_k \binom{2(q-2-k)}{j-1-k} z^j = z^{q-1} \sum_{j=0}^{q-3} \sum_{k=1}^{q-j-2} C_k \binom{2(q-2-k)}{j+q-2-k} z^j,$$

y, aplicando (5.48), obtenemos:

$$z \sum_{k=1}^{q-2} C_k z^k (z+1)^{2(q-2-k)} = \sum_{j=2}^{q-2} \binom{2(q-2)}{j-2} z^j + z^{q-1} \sum_{j=0}^{q-3} \binom{2(q-2)}{q-j-3} z^j.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 & (z+1)^{2(q-2)} - z \sum_{k=1}^{q-2} C_k z^k (z+1)^{2(q-2-k)} \\
 &= \sum_{j=0}^{q-2} \binom{2(q-2)}{j} z^j - \sum_{j=2}^{q-2} \binom{2(q-2)}{j-2} z^j \\
 & \quad + z^{q-1} \left( \sum_{j=0}^{q-3} \left( \binom{2(q-2)}{j+q-1} - \binom{2(q-2)}{q-j-3} \right) z^j \right) \\
 &= 1 + 2(q-2)z + \sum_{j=2}^{q-2} \left( \binom{2(q-2)}{j} - \binom{2(q-2)}{j-2} \right) z^j,
 \end{aligned}$$

y se obtiene el resultado. ■

Obsérvese que, dada la aplicación racional  $S_q = z^q \frac{P_q(z)}{\hat{P}_q(z)}$ , con

$$P_q(z) = \sum_{j=0}^{q-2} a_j z^{q-2-j}, \quad \hat{P}_q(z) = \sum_{j=0}^{q-2} a_j z^j \quad (5.49)$$

donde

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 = 2q - 4, \\ a_j = \binom{2(q-2)}{j} - \binom{2(q-2)}{j-2}, \quad j = 2, \dots, q-2, \end{cases}$$

obtenemos que

$$S'_2(z) = 2z = \frac{2C_1(1+z)^{4-4}z^{2-1}}{\hat{P}_2(z)^2}, \quad \text{siendo } \hat{P}_2(z) = 1,$$

$$S'_3(z) = \frac{6(1+z)^2z^2}{(1+2z)^2} = \frac{3C_2(1+z)^{6-4}z^{3-1}}{\hat{P}_3(z)^2}$$

y  $\hat{P}_3(z) = 1 + 2z$ ,

$$S'_4(z) = \frac{20z^3(1+z)^4}{(1+4z+5z^2)^2} = \frac{4C_3(1+z)^{8-4}z^{4-1}}{\hat{P}_4(z)^2}$$

con  $\hat{P}_4(z) = 1 + 4z + 5z^2$ ,

$$S'_5(z) = \frac{70z^4(1+z)^6}{(1+6z+14z^2+14z^3)^2} = \frac{5C_4(1+z)^{10-4}z^{5-1}}{\hat{P}_5(z)^2}$$

donde  $\hat{P}_5(z) = 1+6z+14z^2+14z^3$ . A la vista de las expresiones de  $S'_q$  obtenidas para  $q = 2$ ,  $q = 3$ ,  $q = 4$  y  $q = 5$ , conjeturamos el siguiente resultado:

$$S'_q(z) = \frac{qC_{q-1}(1+z)^{2q-4}z^{q-1}}{\hat{P}_q(z)^2}.$$

Ahora, teniendo en cuenta esta conjetura podemos caracterizar las componentes de Fatou asociadas a las aplicaciones racionales  $S_q$ , con  $q \geq 2$ .

La aplicación racional

$$S_q(z) = z^q \frac{P_q(z)}{\hat{P}_q(z)},$$

con  $P_q(z)$  y  $\hat{P}_q(z)$  los polinomios dados en (5.49), tiene dos componentes de Fatou invariantes por  $S_q$ , una componente superatractora, donde las iteraciones convergen al infinito, y otra componente superatractora, donde las iteraciones convergen a cero. Además,  $S^1(z) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  es invariante por  $S_q(z)$  y  $S^1(z) \subseteq \mathcal{J}(S_q)$ .

Notemos que si

$$S'_q(z) = \frac{qC_{q-1}(1+z)^{2q-4}z^{q-1}}{\hat{P}_q(z)^2},$$

entonces se tiene que los únicos puntos críticos de  $S_q$  son  $z = 0$ ,  $z = \infty$  y  $z = -1$ . Es claro que  $z = 0$  y  $z = \infty$  son dos puntos fijos superatractores de la aplicación racional  $S_q(z)$ , por lo tanto cada uno de ellos da lugar a una componente de Fatou.

Por otra parte,  $S_q(-1) = 1$  y  $z = 1$  es un punto fijo de  $S_q(z)$ . Además, se tiene que

$$S'_q(1) = \frac{qC_{q-1}(2)^{2q-4}}{\hat{P}_q(1)^2} > 0,$$

por lo tanto,  $z = 1$  es un punto fijo repulsor de  $S_q(z)$ , y consecuentemente  $z = 1 \in \mathcal{J}(S_q)$ . Luego,  $S_q$  tiene precisamente dos componentes de Fatou invariantes.

Por otra parte, para ver que  $S_q$  aplica la circunferencia unidad  $S^1$  en si misma, basta ver que  $|P_q(z)| = |\hat{P}_q(z)|$ , con  $z \in S^1$ . En efecto, notemos que  $S_q$  es el producto de  $z^q$  por el cociente de polinomios  $P_q(z)/\hat{P}_q(z)$ . Además, el polinomio  $P_q(z)$  satisface la siguiente igualdad  $P_q(z) = z^{q-2}\hat{P}_q(1/z)$ . Ahora bien, dado un  $z = e^{i\theta} \in S^1$ , se tiene que  $1/z = e^{-i\theta} = \bar{z}$  y  $\hat{P}_q(1/z) = \hat{P}_q(\bar{z})$ . Por lo tanto, es equivalente ver que  $S_q$  aplica la circunferencia unidad  $S^1$  en si misma a ver que  $|\hat{P}_q(z)| = |\hat{P}_q(\bar{z})|$ . Como  $a_j \in \mathbb{R}$ , se tiene

$$\hat{P}_q(\bar{z}) = \hat{P}_q(e^{-i\theta}) = \sum_{j=0}^{q-2} a_j e^{-i\theta j} = \sum_{j=0}^{q-2} a_j (\cos(\theta j) - i \operatorname{sen}(\theta j)) = \overline{\hat{P}_q(z)}.$$

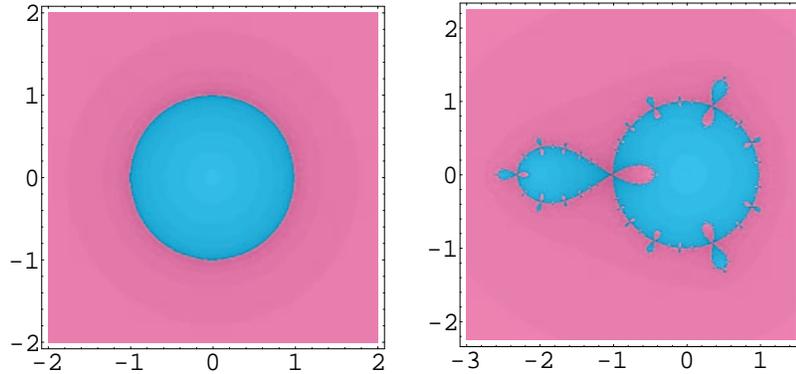
En consecuencia,  $|\hat{P}_q(z)| = |\hat{P}_q(\bar{z})|$ . Entonces, ningún punto de  $S^1$  puede estar en una componente de Fatou, por lo que  $S^1 \subseteq \mathcal{J}(S_q)$ .

*Nota 5.7.* Notemos que los casos  $q = 2$  y  $q = 3$  se corresponden con

$$S_2(z) = z^2, \quad S_3(z) = z^3 \frac{z+2}{1+2z},$$

siendo  $S_2$  y  $S_3$  las aplicaciones racionales conjugadas mediante una aplicación de Möbius  $M(z) = (z-a)/(z-b)$  de los procesos iterativos de Newton y Chebyshev aplicados a polinomios cuadráticos.

También es conocido que el conjunto de Julia asociado a la aplicación racional  $S_2$  coincide con la circunferencia unidad, es decir,  $\mathcal{J}(S_2) = S^1(z)$ , como se ve en la figura 5.8, donde mostramos las cuencas de atracción para  $S_2$  y  $S_3$ . Estas cuencas de atracción clarifican la estructura de los conjuntos universales de Julia asociados a los procesos iterativos de Newton y de Chebyshev aplicados a un polinomio cuadrático.



**Figura 5.8.** Cuencas de atracción para  $S_2$  y  $S_3$  aplicadas a un polinomio cuadrático  $(z - a)(z - b)$

Los puntos situados en el área pintada con cyan convergen al origen y los puntos situados en el área pintada con magenta convergen al infinito. La intensidad del color representa a su vez la rapidez con la que el proceso iterativo converge a una de las raíces.

Como observamos en la figura 5.8, en ambos casos las aplicaciones racionales  $S_2$  y  $S_3$  tienen dos componentes de Fatou superatractoras, una donde las iteraciones convergen al cero y otra donde convergen al infinito. Pero, así como el conjunto de Julia asociado al proceso de Newton es la circunferencia unidad, el conjunto de Julia asociado al proceso de Chebyshev es algo más complejo. En este caso, es claro que los únicos puntos críticos de  $S_3$  son  $z = -1$ ,  $z = 0$  y  $z = \infty$ , siendo  $0$  e  $\infty$  puntos fijos superatractores, y por lo tanto, dando lugar cada uno de ellos a una componente de Fatou. Por otra parte, el otro punto crítico  $z = -1$  satisface que  $S_3(-1) = 1$ , es decir,  $z = -1$  es llevado por la aplicación racional  $S_3$  a un punto fijo. Además, puesto que  $S_3'(1) = 8/3 > 1$ , se sigue que  $z = 1$  es un punto fijo repulsor. Luego,  $z = -1 \in \mathcal{J}(S_3)$  y  $S_3$  tiene exactamente dos componentes de Fatou.

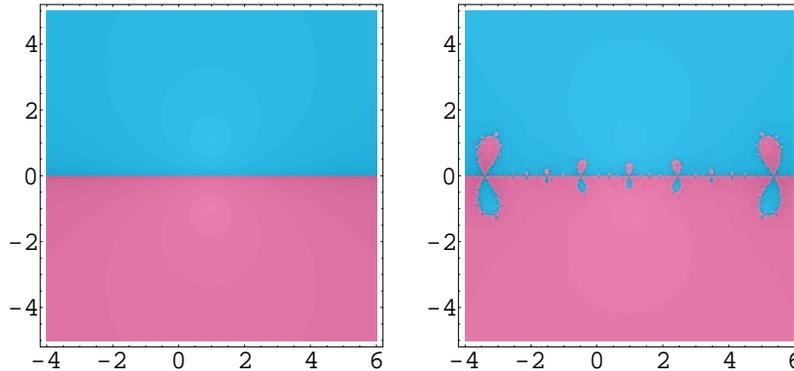
Además, observemos que  $S_3(z)$  es el producto de  $z^3$  y la aplicación de Möbius  $M(z) = \frac{z+2}{1+2z}$ , la cual preserva la circunferencia unidad  $S^1(z)$ . Por lo tanto, se sigue que la circunferencia unidad es invariante por  $S_3(z)$ , y como consecuencia,  $S^1(z) \subseteq \mathcal{J}(S_3)$ . Puesto que la circunferencia unidad es la imagen bajo  $M(z) = (z - a)/(z - b)$  del lugar de puntos equidistantes de las raíces  $a$  y  $b$ , se sigue que el lugar de puntos equidistantes de las raíces está contenido en  $\mathcal{J}(S_3)$ .

Por otra parte, el conjunto de Julia asociado al proceso iterativo de Newton, aplicado a un polinomio cuadrático, es una línea recta cuando se visualiza

en el plano complejo y representa el lugar de puntos equidistantes de las raíces. En el caso de tomar el método de Chebyshev ocurre que el lugar de puntos equidistantes de las raíces está contenido estrictamente en  $\mathcal{J}(S_3)$ , puesto que se pueden encontrar puntos que no equidistan de las raíces y, sin embargo su imagen por  $S_3$  está en el conjunto de Julia. Veamos esto en el siguiente ejemplo. Sea  $F(z) = z^2 - 2z + 2$ . En este caso, el método de Chebyshev viene dado por la aplicación racional:

$$R(z) = \frac{-12 + 24z - 12z^2 - 4z^3 + 3z^4}{8(-1 + z)^3}.$$

Observemos que el lugar de puntos que equidista de las raíces es el eje real  $\{z \mid \mathcal{I}(z) = 0\} \subset \mathbb{C}$ . Sea  $z_0 = 1 + i\sqrt{\frac{-3+2\sqrt{3}}{3}} \in \mathcal{I} - \{0\}$  un punto que no pertenece al lugar de puntos que equidista de las raíces de  $F$ ; sin embargo,  $S_3(z_0) = 1$  y  $1 \in \mathcal{J}(S_3)$ . Entonces, por la invarianza del conjunto de Julia se tiene que  $z_0$  también está en  $\mathcal{J}(S_3)$ . A continuación, en la figura 5.9 mostramos en el plano complejo las cuencas de atracción para los métodos de Newton y de Chebyshev aplicados a la ecuación cuadrática  $F(z) = z^2 - 2z + 2$ . Observemos



**Figura 5.9.** Cuencas de atracción para los métodos de Newton y de Chebyshev aplicados a  $F(z) = z^2 - 2z + 2$

en la figura 5.8 que la circunferencia unidad que aparece en las cuencas de atracción de  $S_2$  y  $S_3$  se corresponde con el eje real cuando estas cuencas se representan en el plano complejo, como vemos en la figura 5.9.

A continuación, mostramos las cuencas de atracción para los casos  $q = 4$ ,  $q = 5$ ,  $q = 10$  y para el caso especial en el que  $q$  tiende a  $\infty$ , situación que se corresponde al considerar el método de Euler:

$$\begin{cases} z_{n+1} = z_n - H(L_F(z_n)) \frac{F'(z_n)}{F''(z_n)}, & n \geq 0, \\ H(w) = \frac{1 - \sqrt{1 - 2w}}{w}. \end{cases}$$

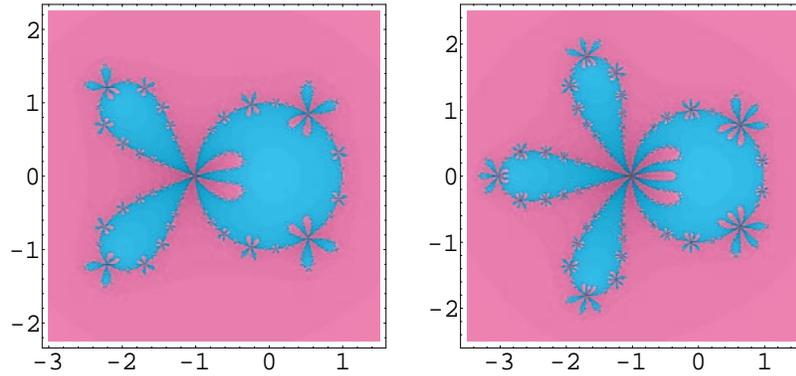
Este proceso iterativo, como veremos en el capítulo 6, tiene “velocidad de convergencia infinita” cuando se le aplica a una ecuación cuadrática, en el sentido de que para cualquier punto de salida que se tome se obtiene en una sólo iteración una solución de la ecuación.

Notemos que en realidad la expresión que toma este proceso iterativo no es racional. Entonces, con abuso de notación, representamos la estructura del conjunto universal de Julia asociado al método de Euler cuando lo aplicamos a una ecuación cuadrática.

Para los casos  $q = 4$  y  $q = 5$  se tienen las siguientes aplicaciones racionales asociadas:

$$S_4(z) = \frac{z^4(5 + 4z + z^2)}{1 + 4z + 5z^2} \quad \text{y} \quad S_5(z) = \frac{z^5(14 + 14z + 6z^2 + z^3)}{1 + 6z + 14z^2 + 14z^3},$$

cuando se aplican a una ecuación cuadrática de la forma  $(z - a)(z - b) = 0$ .



**Figura 5.10.** Cuencas de atracción para  $S_4$  y  $S_5$  aplicadas a un polinomio cuadrático  $(z - a)(z - b)$

Para  $q = 10$  la aplicación racional asociada viene dada por

$$S_{10}(z) = \frac{z^{10}P_{10}(z)}{\hat{P}_{10}(z)},$$

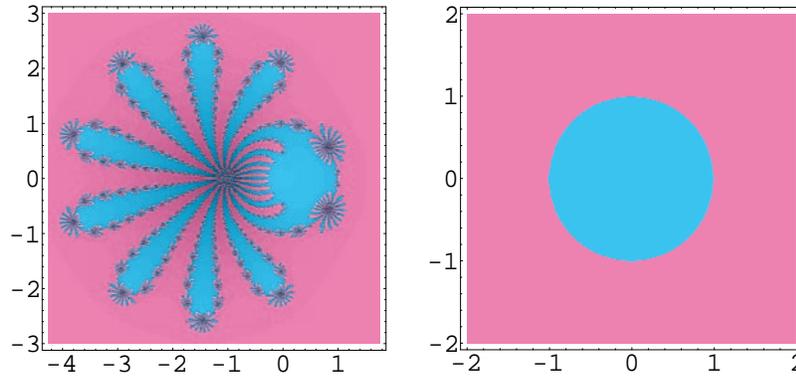
donde  $P_{10}$  y  $\hat{P}_{10}$  son los correspondientes polinomios dados en (5.49):

$$\begin{aligned} P_{10}(z) &= 4862 + 7072z + 6188z^2 + 3808z^3 + 1700z^4 \\ &\quad + 544z^5 + 119z^6 + 16z^7 + z^8, \\ \hat{P}_{10}(z) &= 1 + 16z + 119z^2 + 544z^3 + 1700z^4 \\ &\quad + 3808z^5 + 6188z^6 + 7072z^7 + 4862z^8. \end{aligned} \tag{5.50}$$

La conjugada por una aplicación de Möbius  $M(z) = \frac{z-a}{z-b}$ , asociada al método de Euler y denotada por  $S_\infty$ , viene dada por:

$$S_\infty(z) = \begin{cases} 0, & |z| < 1 \\ \infty, & |z| > 1. \end{cases}$$

Esta aplicación sólo tiene dos puntos fijos  $z = 0$  y  $z = \infty$ , y ambos son superatractores. Además, para los puntos  $z = e^{i\theta} \in S^1$ , tenemos que  $S_\infty(z) = \infty$ , si  $\theta \in [0, \pi)$ , y  $S_\infty(z) = 0$ , si  $\theta \in (-\pi, 0)$ .



**Figura 5.11.** Cuencas de atracción para  $S_{10}$  y  $S_\infty$  aplicadas a un polinomio cuadrático  $(z - a)(z - b)$

Notemos que en los casos  $q = 4$ ,  $q = 5$ ,  $q = 10$  y  $q \rightarrow \infty$ , como puede verse en las figuras 5.10 y 5.11, hay exactamente dos componentes de Fatou

superatractoras, una, donde las iteraciones convergen al cero, representada con color cyan, y otra, donde las iteraciones convergen al infinito, que la representamos con color magenta.

Por otra parte, se tiene que

$$S'_4(z) = \frac{20z^3(1+z)^4}{(1+4z+5z^2)^2}, \quad S'_5(z) = \frac{70z^4(1+z)^6}{(1+6z+14z^2+14z^3)^2}$$

y

$$S'_{10}(z) = \frac{10C_9z^9(1+z)^{16}}{\hat{P}_{10}(z)^2},$$

donde  $\hat{P}_{10}$  es el polinomio dado en (5.50).

Es claro que, al igual que ocurre para  $S_3$ , los únicos puntos críticos de  $S_q$ , con  $q = 4$ ,  $q = 5$  y  $q = 10$ , son  $z = -1$ ,  $z = 0$  y  $z = \infty$ , siendo  $z = 0$  y  $z = \infty$  los puntos fijos superatractores que generan una componente de Fatou. Por otra parte, el punto crítico  $z = -1$  satisface que  $S_q(-1) = 1$ , siendo  $z = 1$  un punto fijo repulsor, puesto que en los tres casos que estamos analizando se cumple que  $S'_q(1) > 1$ :

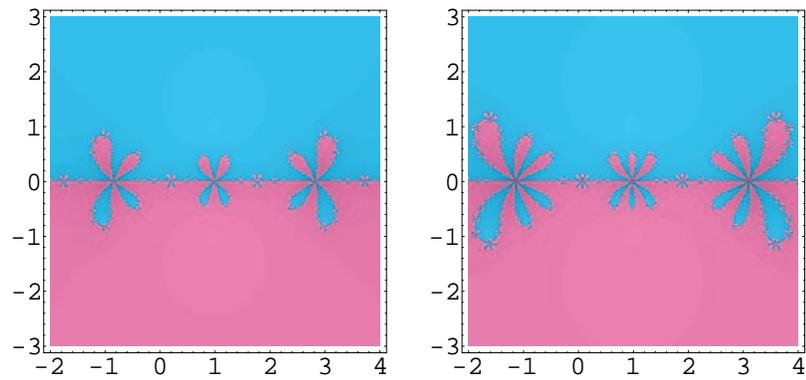
$$S'_4(1) = \frac{16}{5}, \quad S'_5(1) = \frac{128}{35}, \quad S'_{10}(1) = \frac{65536}{12155}.$$

Por tanto,  $z = -1 \in \mathcal{J}(S_q)$  y  $S_q$  tiene exactamente dos componentes de Fatou. Además, se tiene que la circunferencia unidad es invariante por estas aplicaciones racionales  $S_q(z)$  y  $S^1(z) \subseteq \mathcal{J}(S_q)$ , para  $q = 4$ ,  $q = 5$  y  $q = 10$ .

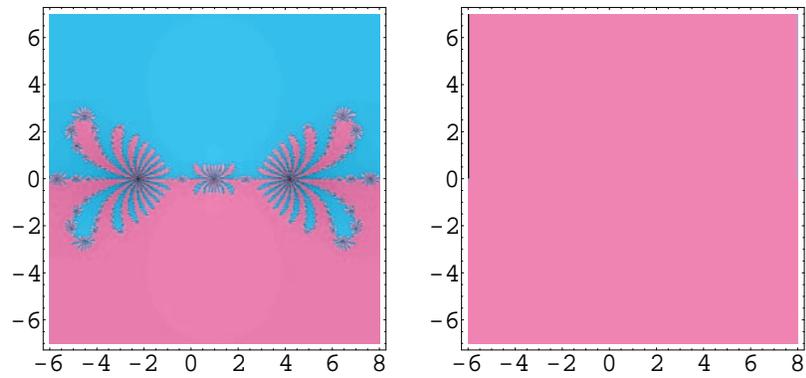
Al igual que en el caso  $S_3$ , se tiene que el lugar de puntos equidistantes de las raíces está contenido estrictamente en  $\mathcal{J}(S_q)$ . Usamos para mostrar este hecho la función cuadrática  $F(z) = z^2 - 2z + 2$ .

Si aplicamos a la ecuación cuadrática  $F(z) = 0$  el proceso iterativo de la familia (5.45) con orden  $q = 4$ ,  $q = 5$  o  $q = 10$ , el lugar de puntos equidistantes de las raíces está contenido estrictamente en el conjunto de Julia  $\mathcal{J}(S_q)$ , tal y como se muestra en las cuencas de atracción representadas en el plano complejo de la figuras 5.12 y 5.13.

Para un estudio más detallado sobre la teoría de aplicaciones racionales iterativas pueden consultarse, entre otros, los trabajos de Beardon ([27]), Blanchard ([28]), Milnor ([106]) o Morosawa, Nishimura, Taniguchi y Ueda ([110]).



**Figura 5.12.** Cuencas de atracción para los métodos de la familia (5.45), con  $q = 4$  y  $q = 5$ , aplicados a  $F(z) = z^2 - 2z + 2$



**Figura 5.13.** Cuencas de atracción para el método de la familia (5.45), con  $q = 10$ , y para el método de Euler, cuando se aplican a  $F(z) = z^2 - 2z + 2$



---

## Aplicación a las ecuaciones escalares no lineales

### 6.1. Introducción

En este capítulo analizamos la velocidad de convergencia de diferentes procesos iterativos, los cuales son aplicados para la aproximación de soluciones de una ecuación escalar no lineal

$$f(t) = 0. \quad (6.1)$$

Veremos que el concepto de velocidad de convergencia está estrechamente ligado con su construcción geométrica, ([4]).

#### 6.1.1. Construcción geométrica y “velocidad de convergencia infinita” del método de Newton

El método iterativo más conocido para resolver ecuaciones no lineales es el método de Newton, cuya construcción geométrica se basa en una aproximación lineal de la función  $f(t)$  en un punto arbitrario  $t_0$ , que es lo mismo que decir que aproximamos  $f(t)$  por el polinomio de Taylor de primer orden en un punto arbitrario  $t_0$ :

$$f(t) \approx f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0).$$

Teniendo en cuenta esta construcción se sigue de manera sencilla que una primera aproximación  $t$  de la solución de (6.1) es

$$t = t_0 - \frac{f(t_0)}{f'(t_0)},$$

que resulta ser la raíz de la recta tangente a la curva  $f(t)$  en el punto  $(t_0, f(t_0))$ . Si reiteramos este proceso, llegamos a la expresión del método de Newton, que en el caso escalar viene dado por:

$$t_{k+1} = t_k - \frac{f(t_k)}{f'(t_k)}, \quad k \geq 0.$$

Parece lógico pensar que si se aplica el método de Newton a la resolución de la ecuación lineal  $f(t) = at + b$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ , se obtenga la solución de la ecuación  $s = -b/a$  a partir de cualquier punto de salida  $t_0$  que se considere. En efecto, si consideramos como punto de salida un punto arbitrario  $t_0$ , obtenemos:

$$t = t_0 - \frac{at_0 + b}{a} = \frac{-b}{a}.$$

Por lo tanto, en el caso de resolución de ecuaciones lineales se sigue por un lado que el método de Newton tiene la propiedad de que alcanzamos la solución en la primera iteración, y por otro lado, se puede hablar de convergencia global, puesto que no imponemos restricción alguna sobre el punto de salida  $t_0$ .

Cuando un proceso iterativo alcanza una solución en la primera iteración diremos que tiene “velocidad de convergencia infinita”. Notemos que esta definición se adapta al concepto que ya conocemos de orden de convergencia. Así, por ejemplo, en el caso del método de Newton  $G(t) = -b/a$ , por la caracterización de Schröder, tenemos que  $G(s) = s$  y  $G^{(n)}(s) = 0$ , para todo  $n \geq 1$ . Entonces, este proceso iterativo tiene orden de convergencia infinito cuando es aplicado a ecuaciones lineales, lo que caracteriza el concepto que acabamos de definir.

A continuación, vemos que las propiedades de “velocidad de convergencia infinita” y convergencia global no son exclusivas del método de Newton.

### 6.1.2. Convergencia global y “velocidad de convergencia infinita” de otros métodos iterativos

#### Construcción geométrica del método de Euler

Si en lugar de considerar el polinomio de Taylor de primer orden para aproximar la función  $f(t)$  se considera el de segundo orden en un punto arbitrario  $t_0$ :

$$f(t) \approx f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2,$$

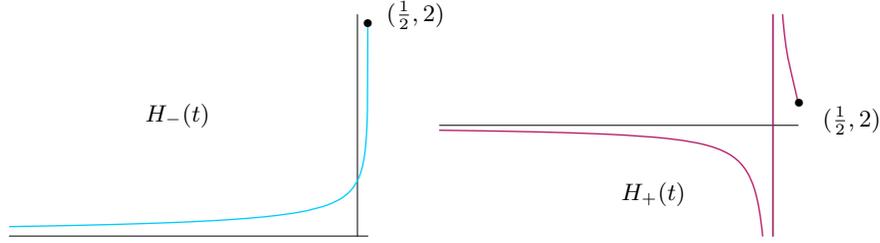
resolviendo la ecuación cuadrática que resulta de esta aproximación, obtenemos:

$$t = t_0 - \frac{1 \mp \sqrt{1 - 2L_f(t_0)}}{L_f(t_0)} \frac{f(t_0)}{f'(t_0)}, \quad (6.2)$$

una primera aproximación  $t$  de la solución para la ecuación (6.1), donde  $L_f(t_0)$  es el grado de convexidad logarítmico de  $f$  en  $t_0$ :

$$L_f(t_0) = \frac{f(t_0)f''(t_0)}{f'(t_0)^2}.$$

Denotamos  $H_+(t) = \frac{1 + \sqrt{1 - 2t}}{t}$  y  $H_-(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 2t}}{t}$ . Si se toma en (6.2) la expresión con signo negativo, esto es  $H_-(L_f(t_0))$ , evitando así la



**Figura 6.1.** Funciones  $H_-(t)$  y  $H_+(t)$

asíntota que se presenta en  $L_f(t_0) = 0$ , (véase la figura 6.1), reiterando el proceso obtenemos el método de Euler ([63], [104], [140]):

$$\begin{cases} t_{k+1} = t_k - H(L_f(t_k)) \frac{f(t_k)}{f'(t_k)}, & k \geq 0, \\ H(L_f(t_k)) = \frac{1 - \sqrt{1 - 2L_f(t_k)}}{L_f(t_k)}. \end{cases} \quad (6.3)$$

Notemos que el operador  $H(L_f(t_k))$  puede expresarse en serie de potencias del grado de convexidad logarítmico  $L_f(t_k)$  de la siguiente manera:

$$H(L_f(t_k)) = 1 + \frac{1}{2}L_f(t_k) + \sum_{j \geq 2} (-1)^j 2^{j+1} \binom{1/2}{j+1} L_f(t_k)^j.$$

En este caso, la sucesión de coeficientes de este desarrollo en serie, que denotamos por  $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  con  $A_j = (-1)^j 2^{j+1} \binom{1/2}{j+1}$ , es una sucesión creciente y además estos coeficientes coinciden salvo un factor  $2^j$  con los números de Catalán ([82]), que denotamos por  $C_j$  y, que están definidos de la siguiente forma

$$C_j = \frac{1}{j+1} \binom{2j}{j}, \quad j \geq 0.$$

Ahora, es fácil ver que  $A_j = \frac{C_j}{2^j}$ ,  $j \geq 0$ .

Al igual que ocurre con el método de Newton, si aplicamos el método de Euler a una ecuación cuadrática de la forma  $f(t) = at^2 + bt + c$ , con  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , se cumple que, a partir de cualquier punto de salida  $t_0$  que consideremos, se obtiene una solución

$$t = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

de la ecuación cuadrática  $f(t) = at^2 + bt + c = 0$ . Por lo tanto, el método de Euler aplicado en la resolución de ecuaciones cuadráticas tiene convergencia

global y “velocidad de convergencia infinita”. En efecto, a partir de la expresión de  $f(t)$  es fácil ver que el grado de convexidad logarítmico viene dado por:

$$L_f(t) = \frac{2a(at_0^2 + bt_0 + c)}{(2at_0 + b)^2}.$$

Entonces, si consideramos como punto de salida  $t_0$  un punto de tal manera que  $f'(t_0) > 0$ , aplicando el método de Euler a la ecuación cuadrática, obtenemos, sin más que simplificar, una solución de la ecuación cuadrática:

$$\begin{aligned} t &= t_0 - \frac{1 - \sqrt{1 - 4a \frac{(at_0^2 + bt_0 + c)}{(2at_0 + b)^2}}}{\frac{2a(at_0^2 + bt_0 + c)}{(2at_0 + b)^2}} \frac{at_0^2 + bt_0 + c}{2at_0 + b} \\ &= t_0 - \frac{2at_0 + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

Notemos que si tomamos como punto de salida  $t_0$  un punto de forma que  $f'(t_0) < 0$ , obtenemos la otra solución de la ecuación cuadrática.

### Construcción geométrica del método de Chebyshev

El método de Chebyshev ([4]) se basa en la aproximación de la función  $f(t)$  por una hipérbola de expresión  $ay^2 + y + bt + c = 0$  con  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , exigiendo ciertas condiciones de tangencia. Entonces, considerando esta aproximación

$$f(t) \approx a(y - f(t_0))^2 + y - f(t_0) + b(t - t_0).$$

en un punto arbitrario  $t_0$  e imponiéndole las condiciones de tangencia en  $t_0$

$$y(t_0) = f(t_0) \quad y'(t_0) = f'(t_0) \quad \text{y} \quad y''(t_0) = f''(t_0), \quad (6.4)$$

obtenemos que  $b = -f'(t_0)$  y  $a = \frac{-f''(t_0)}{2f'(t_0)^2}$ . Ahora, sin más que igualar a cero esta aproximación, llegamos a la expresión del método de Chebyshev

$$\begin{cases} t_{k+1} = t_k - H(L_f(t_k)) \frac{f(t_k)}{f'(t_k)}, & k \geq 0, \\ H(L_f(t_k)) = 1 + \frac{L_f(t_k)}{2}. \end{cases}$$

Es fácil ver que si lo aplicamos a funciones irracionales de la forma

$$f(t) = \alpha(t + \beta)^{\frac{1}{2}} + \gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},$$

este método iterativo converge a la raíz  $\frac{\gamma^2}{\alpha^2} - \beta$  con “velocidad de convergencia infinita” en el sentido de que una única iteración es necesaria para alcanzar la solución y, por lo tanto, también tiene convergencia global.

### Construcción geométrica del método de Halley

A su vez el método de Halley ([104], [134]), se basa en la aproximación de la función  $f(t)$  por una hipérbola de expresión  $ayt + y + bt + c = 0$  con  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , exigiendo las condiciones de tangencia (6.4). Entonces, considerando esta aproximación

$$f(t) \approx a(y - f(t_0))(t - t_0) + (y - f(t_0)) + b(t - t_0).$$

en un punto arbitrario  $t_0$  e imponiendo las condiciones de tangencia (6.4) sobre  $t_0$ , obtenemos que  $b = -f'(t_0)$  y  $a = \frac{-f''(t_0)}{2f'(t_0)}$ . El correspondiente proceso iterativo que se obtiene igualando a cero esta aproximación es

$$\begin{cases} t_{k+1} = t_k - H(L_f(t_k)) \frac{f(t_k)}{f'(t_k)}, & k \geq 0, \\ H(L_f(t_k)) = \frac{2}{2 - L_f(t_k)}, \end{cases}$$

cuyo algoritmo se conoce como método de Halley.

De igual manera que en los métodos iterativos anteriores, el método de Halley converge globalmente y lo hace con “velocidad de convergencia infinita” a la raíz de funciones racionales de la forma

$$f(t) = \alpha(t + \beta)^{-1} + \gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Hasta ahora hemos visto que la construcción geométrica de métodos iterativos como el de Euler, Chebyshev o Halley se basan en aproximaciones de la función  $f(t)$  por cónicas. En el caso del método de Euler la parábola  $at^2 + bt + c = 0$ , en el caso del método de Chebyshev la hipérbola  $ay^2 + y + bt + c = 0$ , y en el de Halley la hipérbola  $ayt + y + bt + c = 0$ . Existen otros procesos iterativos como los métodos exponencial y logarítmico ([3]) que surgen a partir de otro tipo de funciones interpoladoras. A continuación, analizamos la convergencia de estos métodos a partir de su construcción geométrica.

### Construcción geométrica del método exponencial

En el caso del método iterativo exponencial ([3]) se toma como función interpoladora de  $f(t)$  la función exponencial  $y = a + ke^{bt}$  con  $a, b, k \in \mathbb{R}$ . Entonces, sin más que exigir las condiciones de tangencia (6.4) sobre un punto arbitrario  $t_0$ , obtenemos  $b = \frac{f''(t_0)}{f'(t_0)}$  y  $a = f(t_0) - \frac{-f'(t_0)^2}{f''(t_0)}$ . Ahora, sin más que buscar el cero de la función interpoladora considerada, es sencillo ver que el proceso iterativo que se genera es el método exponencial, que en el caso escalar viene dada por el siguiente algoritmo:

$$\begin{cases} t_{k+1} = t_k - H(L_f(t_k)) \frac{f(t_k)}{f'(t_k)}, & k \geq 0, \\ H(L_f(t_k)) = \frac{-\log(1 - L_f(t_k))}{L_f(t_k)} = \sum_{j \geq 0} \frac{1}{j+1} L_f(t_k)^j. \end{cases} \quad (6.5)$$

Cuando el método exponencial es aplicado en la resolución de funciones exponenciales lineales  $f(t) = a + ke^{bt}$ , resulta que tiene “velocidad de convergencia infinita”, y además converge globalmente. En efecto, nos planteamos el problema de resolver la ecuación (6.1), siendo  $f(t) = a + ke^{bt}$  con  $a, b, k \in \mathbb{R}$ , mediante el método exponencial. Notemos que en este caso el grado de convexidad logarítmico viene dado por  $L_f(t) = 1 + \frac{a}{ke^{bt}}$ . Entonces, aplicando el método exponencial, la primera iteración que obtenemos es:

$$t = t_0 - \frac{-\log\left(-\frac{a}{ke^{bt_0}}\right)}{1 + \frac{a}{ke^{bt_0}}} \frac{a + ke^{bt_0}}{kbe^{bt_0}} = \frac{1}{b} \log\left(-\frac{a}{k}\right),$$

que es la solución de la ecuación  $f(t) = a + ke^{bt} = 0$ .

### Construcción geométrica del método logarítmico

Parece lógico pensar que el método logarítmico ([3]) surja de exigir condiciones de tangencia (6.4) en un punto arbitrario  $t_0$  sobre una función interpoladora logarítmica de la forma  $y = a + k \log(t+b)$  con  $a, b, k \in \mathbb{R}$ . Al igual que sucede con los otros métodos iterativos analizados anteriormente, el método logarítmico, cuya expresión en el caso escalar recordamos a continuación:

$$\begin{cases} t_{k+1} = t_k - H(L_f(t_k)) \frac{f(t_k)}{f'(t_k)}, & k \geq 0, \\ H(L_f(t_k)) = \frac{e^{L_f(t_k)} - 1}{L_f(t_k)} = \sum_{j \geq 0} \frac{1}{(j+1)!} L_f(t_k)^j, \end{cases} \quad (6.6)$$

satisface la propiedad de “velocidad de convergencia infinita” y tiene convergencia global cuando es aplicado en la resolución de funciones logarítmicas lineales de la forma  $f(t) = a + k \log(t+b)$ . En efecto, en este caso el grado de convexidad logarítmico viene dado por  $L_f(t) = -\frac{a}{k} - \log(t+b)$ , y por lo tanto, aplicando el método, cualquiera que sea el punto de salida  $t_0$  elegido, obtenemos

$$t = t_0 - \left( \frac{e^{-\frac{a}{k} - \log(t_0+b)} - 1}{-\frac{a}{k} - \log(t_0+b)} \right) \frac{(t_0+b)(a + k \log(t_0+b))}{k} = e^{-\frac{a}{k}} - b,$$

que es la solución de la ecuación logarítmica  $f(t) = a + k \log(t+b) = 0$ .

## 6.2. Construcción de procesos iterativos con orden de convergencia prefijado

Hemos visto que los métodos iterativos de Newton, Euler, Chebyshev, Halley, exponencial y logarítmico tienen “velocidad de convergencia infinita” y convergencia global cuando se aplican a ciertas ecuaciones no lineales. En estos casos, observamos que el grado de convexidad logarítmico de la función derivada es constante, esto es  $L_{f'}(t) = M$ ,  $M \in \mathbb{R}$ . En efecto, por ejemplo para ecuaciones lineales y ecuaciones cuadráticas se tiene que  $L_{f'}(t) = 0$ , y en ambos casos si aplicamos el método de Newton o el método de Euler respectivamente, obtenemos “velocidad de convergencia infinita” y convergencia global. Estas propiedades se mantienen en los otros casos. Las construcciones geométricas de los métodos de Chebyshev y Halley, surgen de las funciones de la forma  $f(t) = \alpha(t + \beta)^{\frac{1}{2}} + \gamma$  y  $f(t) = \alpha(t + \beta)^{-1} + \gamma$  con  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , que cumplen la condición  $L_{f'}(t) = M$ ,  $M \in \mathbb{R}$ , puesto que el grado de convexidad logarítmico asociado a la función derivada es  $L_{f'}(t) = 3$  y  $L_{f'}(t) = 3/2$  respectivamente.

En la resolución de ecuaciones exponenciales o logarítmicas lineales, aplicando los métodos exponencial o logarítmico respectivamente, obtenemos “velocidad de convergencia infinita” y convergencia global en ambos casos. Notemos que para estas funciones también se cumple que  $L_{f'}(t)$  es constante, ya que  $L_{f'}(t) = 1$  y  $L_{f'}(t) = 2$  respectivamente.

En esta sección tratamos de generalizar esta situación, considerando la familia de procesos iterativos de tipo Newton:

$$t_{k+1} = G(t_k) = t_k - H(t_k) \frac{f(t_k)}{f'(t_k)}, \quad k \geq 0, \quad (6.7)$$

en la resolución de la ecuación  $f(t) = 0$ , siendo  $H$  una función real. Con el fin de obtener más información sobre la función  $H$ , exigimos en el siguiente estudio que la familia de procesos iterativos (6.7) tenga “velocidad de convergencia infinita” y que  $L_{f'}(t) = M$ ,  $M \in \mathbb{R}$ .

A partir de la familia de procesos iterativos (6.7) vamos a construir una función  $H(t)$  de manera que podamos obtener un esquema iterativo que converja a una raíz de (6.1) con “velocidad de convergencia infinita”. Entonces, considerando la situación en la que  $G(t) = \alpha$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , siendo  $\alpha$  una solución de (6.1), obtenemos una familia de procesos iterativos con “velocidad de convergencia infinita”. En efecto, teniendo en cuenta (6.7), podemos escribir

$$f'(t)(t - \alpha) = H(t)f(t). \quad (6.8)$$

Ahora, por el desarrollo de Taylor, se sigue

$$0 = f(\alpha) = f(t) + f'(t)(\alpha - t) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(t)(\alpha - t)^k, \quad (6.9)$$

y, como  $L_{f'}(t) = M$ , se ve que

$$f^{(j)}(t) = \prod_{i=0}^{j-2} (Mi - (i-1)) \frac{f''(t)^{j-1}}{f'(t)^{j-2}}.$$

Además, teniendo en cuenta (6.8), tenemos

$$(\alpha - t)^j = \left( -H(t) \frac{f(t)}{f'(t)} \right)^j = (-1)^j H(t)^j \frac{f(t)^j}{f'(t)^j},$$

entonces, sustituyendo en (6.9), se tiene que

$$0 = 1 - H(t) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left( \prod_{j=0}^{k-2} Mj - (j-1) \right) H(t)^k L_f(t)^{k-1}. \quad (6.10)$$

Por lo tanto, si  $M \neq 1$  y  $M \neq 2$ , obtenemos que

$$H(t) = \frac{-1 \pm (1 + (M-2)L_f(t))^{\frac{M-1}{M-2}}}{(M-1)L_f(t)}. \quad (6.11)$$

Denotamos por  $H(t) = H(L_f(t))$ . Notemos que esta función  $H(L_f(t))$  engloba todos los casos particulares analizados anteriormente. Para  $M = 1$  y  $M = 2$ , obtenemos a partir de (6.10) las funciones

$$H(L_f(t)) = \frac{-\log(1 - L_f(t))}{L_f(t)} \quad \text{y} \quad H(L_f(t)) = \frac{e^{L_f(t)} - 1}{L_f(t)},$$

de los métodos exponencial y logarítmico. Para  $M = 0$  obtenemos las correspondientes funciones

$$H(L_f(t)) = \frac{1 \mp (1 - 2L_f(t))^{\frac{1}{2}}}{L_f(t)},$$

que resultaban de aproximar una solución de la ecuación  $f(t) = 0$  por una parábola  $f(t) = at^2 + bt + c$ , a partir de las cuales tenemos el método de Euler. Para  $M = 3$ , tenemos la función  $H$  del método de Chebyshev

$$H(L_f(t)) = 1 + \frac{L_f(t)}{2},$$

y para  $M = \frac{3}{2}$ , la del método de Halley

$$H(L_f(t)) = \frac{2}{2 - L_f(t)}.$$

A continuación, vamos a caracterizar aquellas funciones que cumplen la propiedad  $L_{f'}(t) = M$ ,  $M \in \mathbb{R}$ , para las cuales encontramos un esquema iterativo en el que obtenemos “velocidad de convergencia infinita” y convergencia global.

A partir de

$$L_{f'}(t) = \frac{d}{dt} \left( t - \frac{f'(t)}{f''(t)} \right) = M,$$

e integrando esta ecuación, se sigue que existe  $A \in \mathbb{R}$  tal que

$$t - \frac{f'(t)}{f''(t)} = Mt + A. \quad (6.12)$$

Entonces, si  $M = 1$ , de nuevo integrando, obtenemos que estas funciones son de la forma

$$f(t) = ke^{bt} + a, \quad k, a, b \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado, si  $M \neq 1$ , reordenando la ecuación (6.12), podemos escribir la siguiente igualdad

$$\frac{f''(t)}{f'(t)} = \frac{1}{(1-M)t - A}$$

Por tanto, integrando la última igualdad, obtenemos que existe  $C \in \mathbb{R}$  tal que

$$\log |f'(t)| = \frac{1}{1-M} \log |C((1-M)t - A)|,$$

luego podemos escribir:

$$f'(t) = \overline{B}((1-M)t - \overline{A})^{\frac{1}{1-M}} \quad (6.13)$$

con  $\overline{B} = \varepsilon |C|^{\frac{1}{1-M}} \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon = \pm 1$  y  $\overline{A} = \frac{A}{C}$ . Ahora bien, si  $M = 2$ , se sigue que estas funciones son de la forma

$$f(t) = a + k \log(t + b), \quad k, a, b \in \mathbb{R}.$$

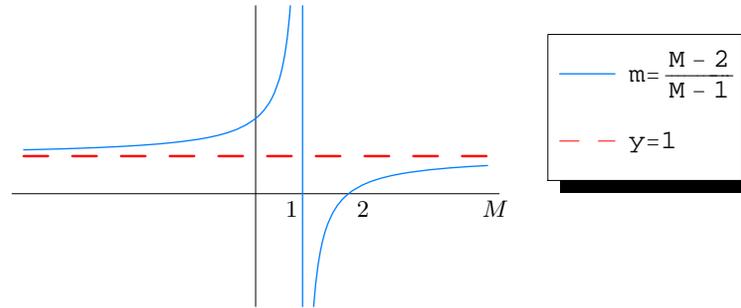
Si  $M \neq 2$ , volviendo a integrar en (6.13), obtenemos que existe  $D \in \mathbb{R}$  tal que:

$$f(t) = \overline{B} \frac{((1-M)t - \overline{A})^{\frac{1}{1-M} + 1}}{\frac{1}{1-M} + 1} + D = B((1-M)t - \overline{A})^{\frac{M-2}{M-1}} + D,$$

donde  $B = \overline{B}^{\frac{M-1}{M-2}} \in \mathbb{R}$ . Así, podemos caracterizar las funciones de grado  $m = \frac{M-2}{M-1}$ , que cumplen la propiedad  $L_{f'}(t) = M$ , de la forma:

$$f(t) = k(t + b)^m + a, \quad (6.14)$$

con  $a, b, k \in \mathbb{R}$ .



**Figura 6.2.** Rango de  $m = \frac{M-2}{M-1}$  para  $f(t) = k(t + b)^m + a$

Como se puede observar en la figura 6.2, donde representamos el rango de  $m$ , se sigue que para valores de  $M$  que están por encima de dos,  $m$  queda limitado entre cero y uno. Para  $M \in (1, 2)$ ,  $m < 0$  y, para aquellos valores de  $M$  que están por debajo de uno, se tiene que  $m > 1$ .

Como consecuencia, hemos visto que para aquellas funciones  $f$ , tales que el grado de convexidad logarítmico de  $f'$  sea constante, tenemos asociados unos métodos iterativos para los cuales la convergencia es global y la velocidad de convergencia es “infinita”.

Por otra parte, queda abierto el problema de construir un proceso iterativo, dada una ecuación no lineal (6.1) cualquiera, que nos permita aproximar una solución con “velocidad de convergencia infinita” o bien prefijada.

El hecho de encontrar métodos iterativos con “velocidad de convergencia infinita” es más teórico que práctico, puesto que en general, dada una ecuación no lineal (6.1), se trata de aproximar una solución mediante un proceso iterativo con una cierta precisión, o lo que es lo mismo, con un cierto orden de convergencia. Esto lleva a plantearnos el estudio de esquemas iterativos de la forma

$$t_{k+1} = G(t_k) = t_k - H_q(L_f(t_k)) \frac{f(t_k)}{f'(t_k)}, \quad k \geq 0, \tag{6.15}$$

donde

$$H_q(t) = 1 + \frac{1}{2}t + \sum_{j=2}^{q-2} A_j t^j, \quad A_j = \frac{\prod_{i=2}^j (2i - 1) - (i - 1)M}{(j + 1)!}, \tag{6.16}$$

con  $q \geq 4$ . Notemos que los polinomios  $H_q(t)$  provienen de truncar el desarrollo en serie de la función  $H(t)$  dada en (6.11). En todo el capítulo denotaremos por  $H_2(t) = 1$  y  $H_3(t) = 1 + t/2$ . Notemos que, para estos polinomios obtenemos

a partir de (6.15), los algoritmos de los métodos de Newton y Chebyshev respectivamente.

Establecer el tipo de convergencia para esta familia de procesos iterativos y su orden de convergencia es el objetivo de nuestro siguiente estudio.

En cuanto al orden de convergencia, es fácil ver por la caracterización de Schröder ([136]) que la familia de procesos iterativos (6.15) tiene orden  $q$ ,  $q \geq 4$ . En efecto, si denotamos por  $\alpha$  una raíz de la ecuación (6.1), se tiene que  $G(\alpha) = \alpha$ . Veamos ahora que  $G^{(k)}(\alpha) = 0$ , para  $k = 1, 2, \dots, q - 1$ , y  $G^{(q)}(\alpha) \neq 0$ .

A partir de (6.15) y teniendo en cuenta

$$L_{f'}(t) = M, \quad \frac{d}{dt}(L_f(t)) \frac{f(t)}{f'(t)} = L_f(t)(1 + L_f(t)L_{f'}(t) - 2L_f(t)),$$

es sencillo ver que

$$G'(t) = qA_{q-1}L_f(t)^{q-1}. \tag{6.17}$$

Para las funciones exponencial  $f(t) = a + ke^{bt}$ ,  $M = 1$ , y logarítmica  $f(t) = a + k \log(t + b)$ ,  $M = 2$ , se llega a la misma expresión de  $G'(t)$  que la dada en (6.17). Ahora bien, podemos considerar  $L_f(t) = (t - \alpha)h(t)$ , donde  $h(t) \neq 0$  para  $t = \alpha$ , siendo  $\alpha$  una raíz simple de (6.1). Entonces, aplicando la fórmula de Leibnitz para la derivada del producto a la expresión (6.17), obtenemos

$$\begin{aligned} G^{(j+1)}(t) &= qA_{q-1} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} ((t - \alpha)^{q-1})^{(i)} (h(t)^{q-1})^{(j-i)} \\ &= qA_{q-1} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (q-1)(q-2) \cdots (q-i) ((t - \alpha)^{q-1-i}) (h(t)^{q-1})^{(j-i)}. \end{aligned}$$

Entonces,  $G'(\alpha) = \cdots = G^{(q-1)}(\alpha) = 0$ , puesto que  $L_f(\alpha) = 0$ , y  $G^{(q)}(\alpha) = q!A_{q-1}h(\alpha)^{q-1} \neq 0$ . Como consecuencia, el algoritmo (6.15) tiene orden de convergencia  $q$ ,  $q \geq 4$ . Por lo tanto, hemos construido una familia de procesos iterativos convergentes, con orden de convergencia prefijado  $q$ ,  $q \geq 4$ , a una solución de la ecuación  $f(t) = 0$  y, para una función cualquiera  $f(t) = k(t + b)^m + a$ , con  $a, b, k \in \mathbb{R}$ , de forma que  $L_{f'}(t)$  es constante. Notemos que se obtiene el método de Newton para  $q = 2$  y el método de Chebyshev para  $q = 3$ .

*Nota 6.1.* Obsérvese que si se quiere aumentar el orden de convergencia en una unidad, solamente necesitamos añadir al sumatorio el término,  $A_{q-1}L_f(t_k)^{q-1}$ . Además, la potencia  $L_f(t_k)^{q-2}$  ya ha sido evaluada y el coeficiente  $A_{q-1}$  se calcula fácilmente a partir del coeficiente anterior de la siguiente manera:

$$A_{q-1} = A_{q-2} \frac{(2q-3) - (q-2)M}{q}.$$

Por lo tanto, el procedimiento es eficiente, en cuanto a la relación entre el coste operacional y el orden de convergencia.

### 6.2.1. Convergencia semilocal y convergencia global

Una vez visto el orden de convergencia de los procesos iterativos de la familia (6.15) cuando son aplicados a ecuaciones de manera que  $L_{f'}(t) = M \in \mathbb{R}$ , estudiamos a continuación el tipo de convergencia que se obtiene en función del valor que tome la constante  $M$ . Así, comenzamos analizando para el caso  $M \leq 2$  el tipo de convergencia que tienen los procesos iterativos de la familia (6.15) al aproximar una solución de la ecuación no lineal (6.1), para las funciones  $f(t)$  descritas en (6.14). Notemos que si  $M \leq 2$ , tal y como se mostraba en la figura 6.2, el rango de  $m$  queda perfectamente establecido. Si  $M \in (1, 2)$ , entonces  $m < 0$ , y si  $M < 1$ , entonces  $m > 1$ . Además, para los casos particulares  $M = 1$  y  $M = 2$  obtenemos respectivamente los procesos iterativos exponencial y logarítmico.

#### Convergencia semilocal

En esta sección estudiamos la convergencia semilocal de los procesos iterativos (6.15), que como ya se vió tienen orden de convergencia  $q$ ,  $q \geq 4$  al aproximar una solución de la ecuación (6.1) con  $L_{f'}(t)$  constante. Para ello, necesitamos dar condiciones para el punto de salida  $t_0$  que permita garantizar la convergencia. Los polinomios  $H_q(t)$ , dados en (6.16), juegan un papel fundamental cuando hablamos de convergencia semilocal. Por este motivo damos, en primer lugar, un resultado que proporciona ciertas propiedades de los polinomios  $H_q(t)$ .

**Lema 6.2.1** Sean los polinomios  $H_q(t)$  dados en (6.16). Entonces,  $H_q(t)$  es una función creciente y  $H_q(t) > 0$ , para todo  $t \in [\frac{3}{2(M-3)}, +\infty)$ ,  $M \leq 2$  y  $q \in \mathbb{N}$ ,  $q \geq 4$ .

*Demostración.* Probamos que  $H'_q(t) \geq 0$ , para  $t \in [\frac{3}{2(M-3)}, +\infty)$  y  $q \in \mathbb{N}$ ,  $q \geq 4$ . Consideramos en primer lugar el caso par  $q = 2p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 2$ .

$$\begin{aligned} H'_{2p}(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{j=2}^{2p-2} \frac{\prod_{i=2}^j (2i-1) - (i-1)M}{(j+1)!} j t^{j-1} \\ &= \left( \frac{1}{2} + \frac{3-M}{3!} 2t \right) + t^2 \frac{(3-M)(5-2M)}{4!} \left( 3 + \frac{7-3M}{5} 4t \right) + \dots + \\ &+ t^{2p-4} \frac{\prod_{i=2}^{2p-3} (2i-1) - (i-1)M}{(2p-2)!} \left( 2p-3 + \frac{(4p-5) - (2p-3)M}{(2p-1)} (2p-2)t \right). \end{aligned}$$

Ahora bien, si analizamos cada paréntesis para  $t \geq \frac{3}{2(M-3)}$ , es fácil ver que

$$\frac{1}{2} + \frac{3-M}{3!} 2t \geq 0,$$

y, para  $p > 2$ ,

$$2p - 3 + \frac{(4p - 5) - (2p - 3)M}{(2p - 1)}(2p - 2)t \geq 0.$$

Por lo tanto,  $H'_{2p}(t) \geq 0$ , para  $t \in [\frac{3}{2(M-3)}, +\infty)$ .

El caso en que  $q$  sea impar,  $q = 2p + 1$ , es similar, puesto que sólo se añade un sumando más en  $H'_{2p+1}(t)$ , que es siempre positivo.

A continuación, probamos que  $H_q(\frac{3}{2(M-3)}) > 0$ , para  $q \in \mathbb{N}$ . En primer lugar, consideramos el caso  $q = 2p + 1$ . Por un lado, se tiene que para  $M \leq 2$ ,

$$(2i - 1) - (i - 1)M > 2 - M, \quad \forall i \geq 3,$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} H_{2p+1}\left(\frac{3}{2(M-3)}\right) &= 1 + \sum_{j=1}^{2p-1} \frac{\prod_{i=1}^j (2i - 1) - (i - 1)M}{(j + 1)!} \left(\frac{3}{2(M-3)}\right)^j \\ &> 1 + \frac{3 - M}{(2 - M)^2} \sum_{j=1}^{2p-1} \frac{1}{(j + 1)!} \left(\frac{3(2 - M)}{2(M - 3)}\right)^j. \end{aligned}$$

Ahora, como  $\frac{3(2 - M)}{2(M - 3)} > 1$ , para  $M \leq 2$ , se sigue que  $H_{2p+1} > 0$ .

El caso par,  $q = 2p$ , es análogo al analizado,  $q = 2p + 1$ , ya que en este último caso se tiene un sumando más que es siempre positivo. Por lo tanto, queda demostrado este resultado puesto que  $H_q(t)$  es creciente para  $t \in [\frac{3}{2(M-3)}, +\infty)$  y  $q \in \mathbb{N}$ . ■

*Nota 6.2.* Notemos que en el caso  $q = 2$  el polinomio  $H_2(t) = 1$  es constante y positivo para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Por otra parte, el polinomio  $H_3(t) = 1 + t/2$  es creciente y positivo para todo  $t \in [-2, +\infty)$  y, en particular, para todo  $t \in [\frac{3}{2(M-3)}, +\infty)$  con  $M \leq 2$ .

A partir de las propiedades que satisfacen los polinomios  $H_q(t)$ , enunciadas en el lema 6.2.1, la variación de la función grado de convexidad logarítmico  $L_f(t)$  es muy importante a la hora de analizar la convergencia de los procesos iterativos de la familia (6.15). Esta variación de la función grado de convexidad logarítmico es analizada en función de la convergencia en el siguiente resultado.

*Nota 6.3.* Teniendo en cuenta que las funciones (6.14) satisfacen las condiciones de Fourier ( $f(a)f(b) < 0$ ,  $f'(x) \neq 0$  y  $f''$  con signo constante en un cierto intervalo  $[a, b]$ ), podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $f$  es una función convexa y estrictamente creciente. En otro caso basta cambiar  $f(t)$  por  $f(-t)$ ,  $-f(t)$  o  $-f(-t)$ .

**Teorema 6.2.2** *Sea la sucesión  $\{t_k\}$  definida en (6.15), con  $f$  una función convexa y estrictamente creciente y  $f(\alpha) = 0$ . Entonces,*

(i) *Si  $t_0 > 0$  y  $f(t_0) > 0$ , la sucesión  $\{t_k\}$  es decreciente y converge a  $\alpha$ .*

(ii) *Si  $t_0 > 0$ ,  $f(t_0) < 0$  y  $L_f(t_0) \geq \frac{3}{2(M-3)}$ :*

-*Para  $q$  impar, la sucesión  $\{t_k\}$  es creciente y converge a  $\alpha$ .*

-*Para  $q$  par,  $t_1 > \alpha$ , la sucesión  $\{t_k\}$  es decreciente para  $k > 1$  y converge a  $\alpha$ .*

*En todos los casos, la sucesión  $\{t_k\}$  converge a la solución con orden de convergencia  $q$ ,  $q \geq 4$ .*

*Demostración.* Analizamos en primer lugar el caso (i). En esta situación, tenemos que  $f(t_0) > 0$ ,  $f''(t_0) > 0$  y  $f'(t_0) > 0$ . Entonces,  $L_f(t_0) > 0$  y  $H_q(L_f(t_0)) > 0$ . Ahora, se sigue que  $t_1 < t_0$ , puesto que

$$t_1 - t_0 = -H_q(L_f(t_0)) \frac{f(t_0)}{f'(t_0)}. \quad (6.18)$$

Denotamos  $h(q, M) = \frac{\prod_{i=2}^{q-1} (2i-1) - (i-1)M}{(q-1)!}$ . Obsérvese que para  $M \leq 2$ ,  $h(q, M) > 0$ .

Por otra parte, teniendo en cuenta la expresión de  $G'(t)$  dada en (6.17) se tiene que

$$G'(t) = h(q, M)L_f(t)^{q-1}. \quad (6.19)$$

Por lo tanto,

$$\alpha - t_1 = G(\alpha) - G(t_0) = G'(\theta_0)(\alpha - t_0) < 0,$$

ya que  $G'(\theta_0) > 0$  para  $\theta_0 \in (\alpha, t_0)$ . Entonces  $\alpha < t_1$ . Teniendo en cuenta que  $L_f(t) > 0$  para  $t \in (\alpha, t_0)$ , (i) es inmediato por inducción. En efecto, supongamos mediante un razonamiento análogo que  $\alpha < t_{k-1} < t_{k-2}$ . A partir de aquí, es fácil ver que  $t_k < t_{k-1}$ . En efecto, como

$$t_k - t_{k-1} = -H_q(L_f(t_{k-1})) \frac{f(t_{k-1})}{f'(t_{k-1})} \quad (6.20)$$

tenemos  $t_k - t_{k-1} < 0$ . Además, considerando (6.19) con  $t = \theta_{k-1} \in (\alpha, t_{k-1})$  y teniendo en cuenta que

$$\alpha - t_k = G(\alpha) - G(t_{k-1}) = G'(\theta_{k-1})(\alpha - t_{k-1}), \quad (6.21)$$

obtenemos  $\alpha \leq t_k$ .

Como consecuencia la sucesión  $\{t_k\}$  es una sucesión monótona decreciente y está acotada inferiormente por la raíz  $\alpha$ . Entonces, existe  $l = \lim_{k \rightarrow +\infty} t_k$ , con  $l \geq \alpha$ , y tomando  $k \rightarrow +\infty$  en (6.15), se obtiene:

$$l = l - H_q(L_f(l)) \frac{f(l)}{f'(l)}.$$

Ahora bien, por el lema 6.2.1, se sigue que  $L_f(l) \geq 0$  y, por lo tanto,  $H_q(L_f(l)) > 0$ . Luego,  $f(l) = 0$  y  $l = \alpha$ .

Ahora, por las hipótesis dadas en (ii) y el lema 6.2.1, se sigue que  $H_q(L_f(t_0)) > 0$ . Además, teniendo en cuenta (6.18), obtenemos que  $t_1 > t_0$ . Dependiendo de que  $q$  sea par o impar, obtenemos a a partir de (6.19) que  $G'(\theta_0)$  es negativo o positivo respectivamente, para  $\theta_0 \in (t_0, \alpha)$ . Entonces, para  $q$  par  $t_1 > \alpha$ , de manera que ahora estamos en la situación (i) y, por lo tanto, la sucesión  $\{t_k\}$  es decreciente para  $k > 1$  y converge a la raíz  $\alpha$ .

Obsérvese que por hipótesis se sigue que la función  $L_f(t)$  es creciente y negativa en  $(t_0, \alpha)$ . En efecto, puesto que

$$\frac{dL_f(t)}{dt} = \frac{f'(t)^2 f''(t) + f(t)(f'(t)f'''(t) - 2f''(t)^2)}{f'(t)^3} \quad (6.22)$$

y  $\frac{dL_f(t)}{dt} \geq 0$  si y sólo si  $f'(t)f'''(t) - 2f''(t)^2 \leq 0$ , o lo que es lo mismo si  $M = L_{f'}(t) \leq 2$ .

Para el caso  $q$  impar, se tiene  $t_1 < \alpha$ , y la demostración es inmediata por inducción. En efecto, suponemos por un razonamiento análogo que  $t_{k-2} < t_{k-1} < \alpha$ . Ahora, como

$$\frac{3}{2(M-3)} \leq L_f(t_0) < L_f(t_{k-1})$$

y  $H_q(t)$  es creciente en  $[\frac{3}{2(M-3)}, +\infty)$ , obtenemos que  $H_q(L_f(t_{k-1})) > 0$ . Teniendo en cuenta (6.20), se tiene  $t_{k-1} < t_k$ .

Por otra parte, a partir de (6.21) obtenemos  $\alpha \geq t_k$ , puesto que  $t_{k-1} < \alpha$  y  $\theta_{k-1} \in (t_{k-1}, \alpha)$ . Como consecuencia de lo anterior, la sucesión  $\{t_k\}$  es creciente y acotada superiormente por la raíz  $\alpha$ . Entonces, existe  $l = \lim_{k \rightarrow +\infty} t_k$  y tomando  $k \rightarrow +\infty$  en (6.15), obtenemos

$$l = l - H_q(L_f(l)) \frac{f(l)}{f'(l)}.$$

Como  $l \leq \alpha$ , se tiene que  $f(l) = 0$  y  $l = \alpha$ .

Además, tal y como hemos demostrado en la sección anterior los procesos iterativos (6.15) tienen orden de convergencia  $q$ . ■

### Convergencia global

Una característica muy interesante de algunos procesos iterativos es su convergencia global, es decir que el proceso iterativo considerado sea convergente independientemente del punto de salida elegido. El hecho de que los

procesos iterativos sean globalmente convergentes depende fundamentalmente de las características de los polinomios  $H_q(t)$  dados en (6.16).

A continuación, pasamos a estudiar la convergencia global para los procesos iterativos (6.15). Para esta familia de métodos hemos visto que se puede garantizar su convergencia semilocal, imponiendo la condición  $L_f(t_0) \geq \frac{3}{2(M-3)}$  para el punto de salida  $t_0$ . Este hecho hace que no podamos asegurar la convergencia global de la familia de procesos iterativos. Este tipo de convergencia, sólo podremos garantizarla en el caso en que  $q$  sea un número par.

En el caso en el que  $q$  es un número par, los polinomios  $H_q(t)$ , dados en (6.16), que definen la familia de procesos iterativos, tienen la característica fundamental de ser siempre positivos. Notemos que esta propiedad es de gran importancia en el estudio de la convergencia de los procesos iterativos (6.15), puesto que hace que se pueda eliminar la condición  $L_f(t_0) \geq \frac{3}{2(M-3)}$ , que se ha exigido en los teoremas de convergencia semilocal para el punto de salida  $t_0$ , y así, poder obtener un resultado de convergencia global.

**Lema 6.2.3** *Sea  $H_q(t)$  el polinomio dado en (6.16), con  $M < 2$ . Entonces,  $H_{2q}(t) > 0$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$  y  $q \in \mathbb{N}$ .*

*Demostración.* Teniendo en cuenta que el polinomio  $H_{2q+2}(t)$  viene dado por la siguiente expresión:

$$H_{2q+2}(t) = 1 + \frac{1}{2}t + \sum_{j=2}^{2q} \frac{\prod_{i=2}^j (2i-1) - (i-1)M}{(j+1)!} t^j,$$

podemos escribirlo de la siguiente forma  $H_{2q+2}(t) = H_{2q}(t) + g_{2q}(t)$ , donde

$$g_{2q}(t) = \frac{t^{2q-1}}{(2q)!} \left( \prod_{i=2}^{2q-1} (2i-1) - (i-1)M \right) \left( 1 + \frac{(4q-1) - (2q-1)M}{(2q+1)} t \right).$$

Además,

$$\begin{aligned} & g'_{2q}(t) \\ &= \frac{t^{2q-2}}{(2q)!} \left( \prod_{i=2}^{2q-1} (2i-1) - (i-1)M \right) \left( 2q-1 + \frac{2q((4q-1) - (2q-1)M)}{(2q+1)} t \right). \end{aligned}$$

Ahora, es fácil ver que el mínimo de  $g_{2q}(t)$  es

$$t = -\frac{(2q-1)(2q+1)}{2q((4q-1) - (2q-1)M)}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} g_{2q}(t) &\geq g\left(-\frac{(2q-1)(2q+1)}{2q((4q-1) - (2q-1)M)}\right) \\ &= -\frac{\prod_{i=2}^{2q-1} (2i-1) - (i-1)M}{(2q)!} \frac{(4q^2-1)^{2q-1}}{((4q-1) - (2q-1)M)^{2q} (2q)^{2q}}. \end{aligned}$$

Por otra parte, es sencillo ver que

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \left( \frac{2(4q^2 - 1)}{(2 - M)((4q^2 - q) - (2q^2 - q)M)} \right)^{2q} = e^{\frac{1-M}{2-M}}. \quad (6.23)$$

Además, si  $1 \leq M < 2$ , entonces la sucesión

$$\left\{ \frac{\prod_{i=2}^{2q} (2i - 1) - (i - 1)M}{(2 - M)^{2q} (2q)!} \right\}_{q \geq 1} \quad (6.24)$$

es creciente y

$$\frac{\prod_{i=2}^{2q} (2i - 1) - (i - 1)M}{(2 - M)^{2q} (2q)!} \geq 1.$$

Teniendo en cuenta que (6.23) es menor o igual que uno, para  $1 \leq M < 2$ , entonces

$$g_{2q}(t) \geq -\frac{1}{4q^2 - 1}.$$

Además, como

$$H_4(t) \geq \frac{8M - 21}{8M - 24},$$

se tiene que

$$H_{2q+2}(t) \geq \frac{8M - 21}{8M - 24} - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{4j^2 - 1} \geq \frac{8M - 21}{8M - 24} - \frac{1}{6} > \frac{11}{24}.$$

Por otra parte, si  $M < 1$ , la sucesión (6.24) es decreciente y menor que  $\frac{3-M}{2(2-M)^2}$ . Además, (6.23) es mayor o igual que uno, entonces

$$g_{2q}(t) \geq -\frac{3 - M}{2(2 - M)^2} \frac{1}{4q^2 - 1}.$$

Por lo tanto, si  $M < 1$ , se sigue que

$$H_{2q+2}(t) \geq \frac{8M - 21}{8M - 24} - \frac{3 - M}{2(2 - M)^2} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{4j^2 - 1} \geq \frac{8M - 21}{8M - 24} - \frac{3 - M}{12(2 - M)^2} > \frac{31}{48}.$$

Obsérvese que el caso  $q = 1$ , es decir  $H_2 = 1$ , es trivial y el resultado queda demostrado. ■

Notemos por tanto que en el caso  $q$  par la condición impuesta sobre el punto de salida  $t_0$ ,  $L_f(t_0) \geq \frac{3}{2(M-3)}$ , puede eliminarse y, por lo tanto, la existencia de intervalos donde no se puede garantizar la convergencia de los procesos iterativos (6.15) desaparece. En este caso, obtenemos el siguiente resultado de convergencia global.

**Teorema 6.2.4** *Sea  $f$  una función convexa y estrictamente creciente y  $f(\alpha) = 0$ . Los procesos iterativos dados en (6.15) para  $M < 2$  y  $q$  par son convergentes para cualquier punto  $t_0 \neq 0$ .*

*Demostración.* La demostración es trivial teniendo en cuenta el lema 6.2.3 y siguiendo la demostración dada en el teorema 6.2.2. ■

### 6.2.2. Aproximación de la raíz $n$ -ésima de un número real

El estudio que a continuación exponemos está desarrollado para aproximar la raíz  $n$ -ésima de un número real  $R$  mediante métodos iterativos con órdenes de convergencia altos, problema equivalente al de resolver la ecuación  $f(t) = 0$ , con  $f(t) = t^n - R$  y estudiado por diversos autores (véanse [43], [44], [75], [113]). En el caso particular de la aproximación de la raíz cuadrada de un número real positivo  $R$  se tiene la famosa fórmula de Heron, conocida por las civilizaciones mesopotámicas hace casi dos mil años antes de Cristo ([103]):

$$\begin{cases} t_0 \text{ dado} \\ t_{k+1} = \frac{1}{2} \left( t_k + \frac{R}{t_k} \right), \quad k \geq 0. \end{cases}$$

Este algoritmo es considerado como un caso especial del método de Newton, cuyo orden de convergencia es dos, al menos para puntos  $t_0$  suficientemente cercanos a la solución  $\alpha = \sqrt{R}$ . En otros estudios más recientes se consigue acelerar la convergencia del método de Newton ([44], [66], [74]), modificando la función  $f$  por otra función  $F(t) = g(t)f(t)$ . Así, por ejemplo, Dubeau en [44] obtiene orden de convergencia cúbico al aplicar el método de Newton a funciones  $F(t) = t^{\beta-n}(t^n - R)$ , con  $\beta = (n+1)/2$ . Otro estudio más general es el realizado por Gerlach en [66], donde se considera el problema de aproximar una solución de la ecuación  $f(t) = 0$ , con  $f$  no necesariamente en la forma  $f(t) = t^n - R$ , obteniendo convergencia cúbica para el método de Newton cuando  $g(t) = C/\sqrt{f'(t)}$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

En este estudio, a partir de la familia de procesos iterativos (6.7), vamos a construir una función  $H(t)$  de tal manera que podamos obtener un esquema iterativo que converja a la raíz  $n$ -ésima de un número real  $R$  con “velocidad de convergencia infinita”, usando la misma idea que en la sección 6.2, para la función  $f(t) = t^n - R$ . Notemos que si  $n$  par, tomaremos  $R > 0$ .

Para estas funciones  $f$  se tiene que  $L_{f'}(t)$  es constante:

$$L_{f'}(t) = \frac{n-2}{n-1},$$

y por lo tanto, estamos en un caso particular del estudio anterior. Entonces, a partir de (6.11), obtenemos que las funciones  $H(t)$  que definen la familia de procesos iterativos (6.7) vienen dadas por

$$H_-(t) = \frac{1 - \left(1 - \frac{n}{n-1}L_f(t)\right)^{1/n}}{\frac{1}{n-1}L_f(t)},$$

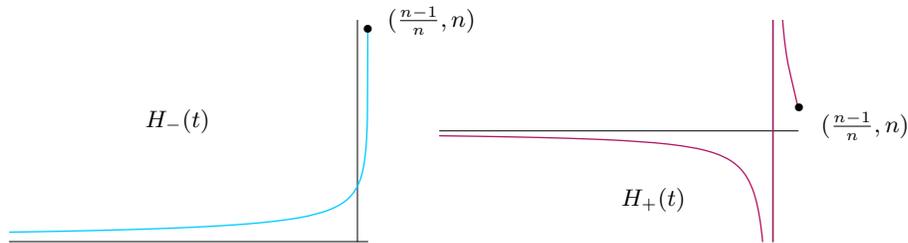
y

$$H_+(t) = \frac{1 + \left(1 - \frac{n}{n-1}L_f(t)\right)^{1/n}}{\frac{1}{n-1}L_f(t)},$$

donde el grado de convexidad logarítmico es

$$L_f(t) = \frac{f(t)f''(t)}{f'(t)^2} = \frac{n-1}{n} \frac{f(t)}{t^n} = \frac{n-1}{t} \frac{f(t)}{f'(t)}.$$

Obsérvese que las funciones  $H_-$  y  $H_+$  están siempre definidas cuando  $n$  es impar. En el caso  $n$  par, se tiene que  $L_f(t) \leq \frac{n-1}{n}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .



**Figura 6.3.** Funciones  $H_-(t)$  y  $H_+(t)$  para  $f(t) = t^n - R$  y  $n$  par

Como se puede observar en la figura 6.3, la función  $H_+(t)$  tiene una singularidad en  $\sqrt[n]{R} = \alpha$ , puesto que  $L_f(\alpha) = 0$ , como consecuencia no se puede aplicar el algoritmo (6.7) para aproximar  $\alpha$ , con  $H(t) = H_+(t)$ . Por lo tanto, consideramos  $H(t) = H_-(t)$  para definir el algoritmo (6.7) obteniendo de manera sencilla la siguiente expresión

$$H(t) = H_-(t) = \sum_{j \geq 0} \binom{1/n}{j+1} (-1)^j \frac{n^{j+1}}{(n-1)^j} L_f(t)^j.$$

En estas condiciones podemos definir el algoritmo (6.7) de la siguiente manera:

$$t_{k+1} = t_k - \left( \sum_{j \geq 0} \binom{1/n}{j+1} (-1)^j \frac{n^{j+1}}{(n-1)^j} L_f(t_k)^j \right) \frac{f(t_k)}{f'(t_k)}, \quad k \geq 0. \quad (6.25)$$

Observemos que si truncamos la serie que define el algoritmo (6.25) en una potencia arbitraria  $q - 2$ , con  $q \geq 2$ , es decir, si consideramos el algoritmo

$$\begin{cases} t_{k+1} = G(t_k) = t_k - H_q(L_f(t_k)) \frac{f(t_k)}{f'(t_k)}, & k \geq 0, \\ H_q(t) = \sum_{j=0}^{q-2} A_j t^j, & A_j = \binom{1/n}{j+1} (-1)^j \frac{n^{j+1}}{(n-1)^j}, & j \geq 0, \end{cases} \quad (6.26)$$

obtenemos un proceso iterativo con orden de convergencia  $q$ , es decir, con un orden de convergencia prefijado. En efecto, si denotamos por  $\alpha$  una raíz de la ecuación (6.1), se tiene que  $G(\alpha) = \alpha$  y  $G^{(k)}(\alpha) = 0$ , para  $k = 1, 2, \dots, q - 1$ , y  $G^{(q)}(\alpha) \neq 0$ . Teniendo en cuenta en (6.25) que

$$L_{f'}(t) = \frac{n-2}{n-1} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt}(L_f(t)) \frac{f(t)}{f'(t)} = L_f(t) (1 + L_f(t)L_{f'}(t) - 2L_f(t)),$$

es sencillo ver que

$$G'(t) = qA_{q-1}L_f(t)^{q-1}.$$

Por lo tanto, como  $L_f(\alpha) = 0$ , obtenemos  $G'(\alpha) = \dots = G^{(q-1)}(\alpha) = 0$  y  $G^{(q)}(\alpha) = (q-1)!(n(q-1)-1)(n-1)^{q-2}\alpha^{1-q}A_{q-2} \neq 0$ . Como consecuencia, hemos construido un algoritmo (6.26) con un orden de convergencia prefijado  $q$ ,  $q \geq 2$ , para aproximar  $\alpha$ , la raíz  $n$ -ésima de un número real  $R$ .

*Nota 6.4.* Notemos que es suficiente con añadir en el sumatorio el término  $A_{q-1}L_f(t_k)^{q-1}$  para aumentar el orden de convergencia en una unidad, es decir, orden de convergencia  $q + 1$ . Además, la potencia  $L_f(t_k)^{q-2}$  ya ha sido evaluada y el coeficiente  $A_{q-1}$  viene dado en función de  $A_{q-2}$ , esto es,

$$A_{q-1} = A_{q-2} \frac{n(q-1) - 1}{(n-1)(j+2)},$$

por lo tanto, el procedimiento es eficiente en cuanto a la relación entre el coste operacional y el orden de convergencia.

A continuación, obtenemos resultados de convergencia semilocal y global para los procesos iterativos (6.26), que aplicamos para aproximar la raíz  $n$ -ésima de un número  $R \in \mathbb{R}$ , donde  $R$  es positivo en el caso  $n$  par.

### Convergencia semilocal

El problema de aproximar la raíz  $n$ -ésima de un número real  $R$  mediante la familia de métodos iterativos (6.26) es un caso particular del estudio realizado en la sección 6.2.1, donde ahora  $L_{f'}(t) = M = \frac{n-2}{n-1}$ . Al igual que en la sección 6.2.1, obtenemos un resultado de convergencia semilocal en el que damos condiciones sobre el punto de salida  $t_0$  que permiten garantizar

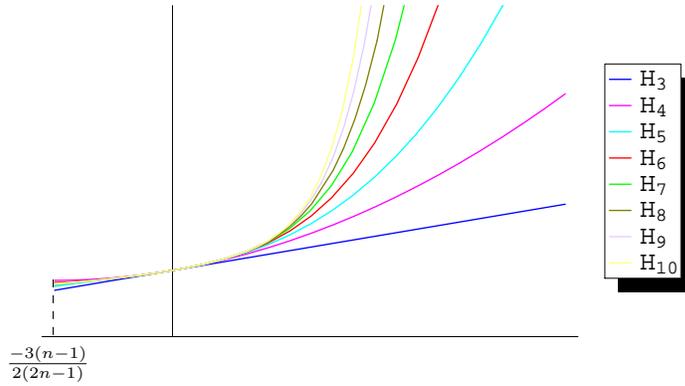


Figura 6.4. Polinomios  $H_q(t)$  con  $n = 3$

la convergencia semilocal de la familia (6.26). Notemos que los polinomios  $H_q(t)$ , (6.26), juegan un papel fundamental cuando hablamos de convergencia semilocal. Véase la figura 6.4.

A continuación, enunciamos un resultado que es consecuencia del lema 6.2.1 y, que muestra ciertas propiedades de los polinomios  $H_q(t)$ , dados en (6.26).

**Lema 6.2.5** Sean los polinomios  $H_q(t)$  dados en (6.26). Entonces,  $H_q(t)$  es una función creciente y  $H_q(t) > 0$ , para todo  $t \in [\frac{-3(n-1)}{2(2n-1)}, +\infty)$  y  $q \in \mathbb{N}$ .

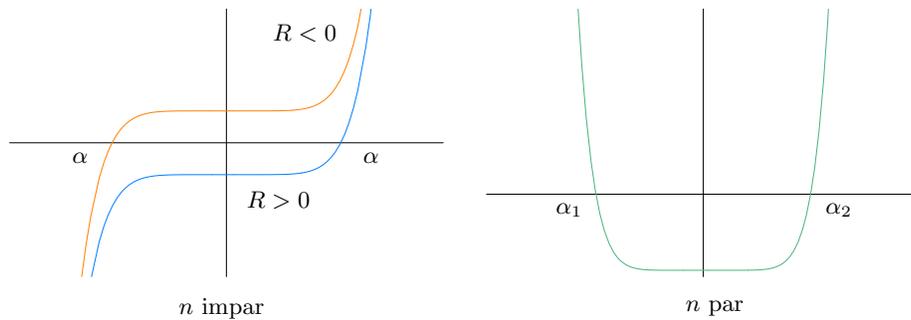


Figura 6.5.  $f(t) = t^n - R$  con  $n$  impar y  $n$  par respectivamente

Tal y como muestra la figura 6.5, observamos que en el caso  $n$  par, el punto inicial  $t_0$  puede tomarse en cualquiera de estas regiones  $(-\infty, \alpha_1)$ ,  $(\alpha_1, 0)$ ,  $(0, \alpha_2)$  y  $(\alpha_2, +\infty)$ , siendo  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  las raíces reales de la función  $f(t)$  donde se ha considerado  $\alpha_1 < \alpha_2$ ; mientras que para  $n$  impar, el punto inicial  $t_0$  puede tomarse en  $(-\infty, \alpha)$  y  $(\alpha, +\infty)$ , siendo  $\alpha$  la raíz real de  $f(t)$ .

En primer lugar, hacemos el estudio para el caso  $n$  impar en las dos situaciones posibles  $R > 0$  y  $R < 0$ . Comenzamos suponiendo que  $R > 0$ .

Ya vimos en el lema 6.2.5 que la variación de la función grado de convexidad logarítmico  $L_f(t)$  influye de manera directa a la hora de analizar la convergencia semilocal de la familia de procesos iterativos (6.26). Considerando el signo de la función grado de convexidad logarítmico  $L_f(t)$ , representada en la figura 6.6, por el teorema del valor medio es sencillo probar el siguiente resultado de convergencia semilocal, tal como se ha hecho para el teorema 6.2.2.

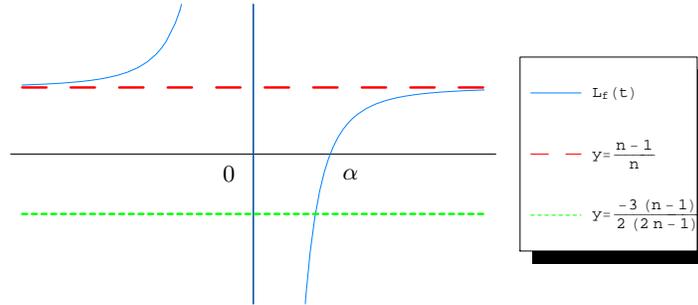


Figura 6.6. Gráfico de  $L_f(t)$  para  $f(t) = t^n - R$ ,  $n$  impar y  $R > 0$

**Teorema 6.2.6** Sea la sucesión  $\{t_k\}$ , definida en (6.26), y  $\alpha$  la raíz real de  $f(t) = t^n - R$ , para  $n$  impar y  $R > 0$ . Entonces,

(i) Si  $t_0 > 0$  y  $f(t_0) > 0$ , la sucesión  $\{t_k\}$  es decreciente y converge a  $\alpha$ .

(ii) Si  $t_0 > 0$ ,  $f(t_0) < 0$  y  $L_f(t_0) \geq \frac{-3(n-1)}{2(2n-1)}$ :

-Para  $q$  impar, la sucesión  $\{t_k\}$  es creciente y converge a  $\alpha$ .

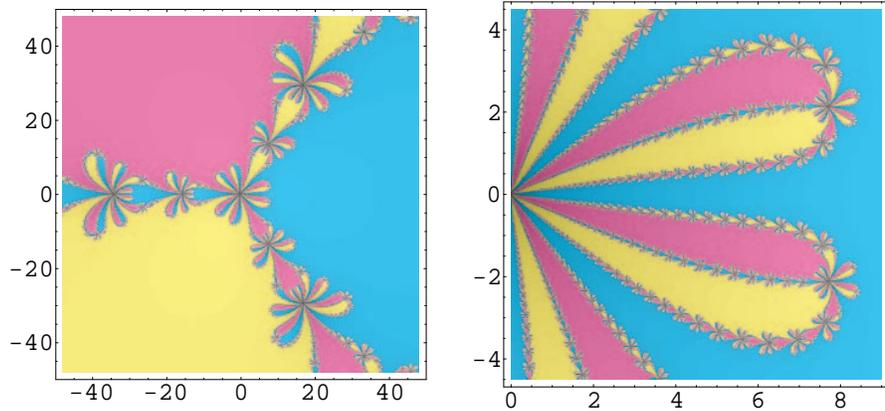
-Para  $q$  par,  $t_1 > \alpha$ , la sucesión  $\{t_k\}$  es decreciente para  $k > 1$  y converge a  $\alpha$ .

En todos los casos, la sucesión  $\{t_k\}$  converge a  $\alpha$  con orden de convergencia  $q$ ,  $q \geq 4$ .

Notemos que la situación  $t_0 < 0$  no está contemplada en el resultado anterior. En este caso, es fácil ver que existe un punto  $t_j$  de manera que  $t_0 < t_1 < \dots < t_{j-1} < 0 < t_j$ , y dependiendo de si  $L_f(t_j) \geq \frac{-3(n-1)}{2(2n-1)}$

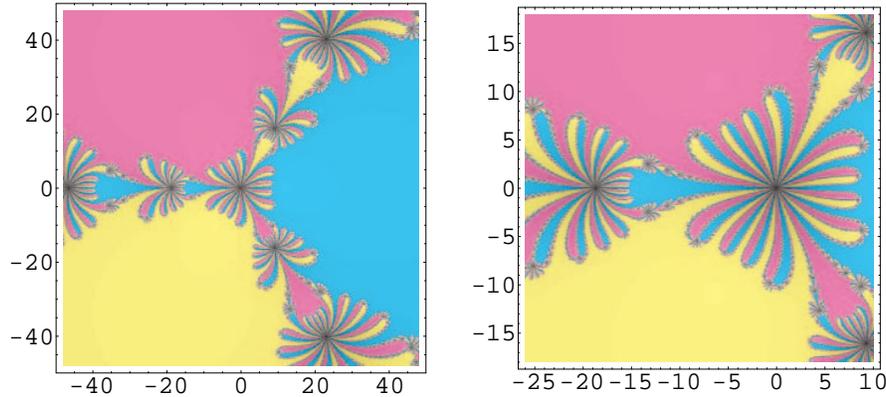
o  $L_f(t_j) < \frac{-3(n-1)}{2(2n-1)}$ , la convergencia de la sucesión  $\{t_k\}$  podrá garantizarse o no respectivamente. Entonces, a priori, no podemos garantizar el tipo de convergencia que tiene la sucesión  $\{t_k\}$  en el intervalo  $(-\infty, 0]$ .

Este hecho, queda reflejado cuando estudiamos las cuencas de atracción (véase sección 5.2.3) de las raíces de una ecuación cúbica por ejemplo. En las figuras 6.7 y 6.8 mostramos las cuencas de atracción de las raíces de la ecuación  $f(t) = t^3 - 1974 = 0$ , de tal manera que hemos elegido los procesos iterativos de la familia (6.26) que convergen con órdenes de convergencia pares  $q = 4$  y  $q = 6$ . Hemos establecido 80 iteraciones como límite y una tolerancia del orden de  $10^{-4}$ . Recordemos que la cuenca de atracción de una raíz es el conjunto de todos los puntos de salida  $t_0 \in \mathbb{C}$ , de tal modo que un método iterativo converge a dicha raíz ([143]). Para representar las cuencas de atracción del proceso iterativo de la familia (6.26) con orden de convergencia 4 tomamos dos regiones distintas, el rectángulo  $[-48, 48] \times [-48, 48]$  y otro más pequeño,  $[0, 9] \times [-4.5, 4.5]$ , que muestra con más detalle lo que ocurre en el eje real. Para el proceso iterativo con orden de convergencia 6 tomamos el rectángulo  $[-48, 48] \times [-48, 48]$  y  $[-26, 10] \times [-18, 18]$ .



**Figura 6.7.** Cuencas de atracción para el proceso iterativo de la familia (6.26) con orden de convergencia 4, aplicado a la ecuación  $f(t) = t^3 - 1974 = 0$

Asignamos un color para cada  $t_0$ , de acuerdo con la raíz a la que el método iterativo (6.26) converge. Además, asignamos la intensidad del color teniendo en cuenta el número de iteraciones empleado por el método iterativo para alcanzar la raíz, cuando se considera como punto de salida  $t_0$ . Usamos los colores cyan, magenta y amarillo para identificar respectivamente las cuencas de atracción de las tres raíces  $1974^{\frac{1}{3}}$ ,  $1974^{\frac{1}{3}}e^{\frac{2\pi i}{3}}$  y  $1974^{\frac{1}{3}}e^{-\frac{2\pi i}{3}}$ , y el color negro para identificar los puntos de salida  $t_0$  a partir de los cuales el proceso iterativo



**Figura 6.8.** Cuencas de atracción para el proceso iterativo de la familia (6.26) con orden de convergencia 6, aplicado a la ecuación  $f(t) = t^3 - 1974 = 0$

no alcanza ninguna de las raíces con un máximo de 50 iteraciones y con una tolerancia del orden de  $10^{-4}$ . A partir de las figuras 6.7 y 6.8 es claro que, para cualquier punto de salida  $t_0 \in \mathbb{R}^+$ , el proceso iterativo elegido converge a la raíz positiva, excepto para puntos cercanos al origen para los que es posible que  $L_f(t_0) < \frac{-3(n-1)}{2(2n-1)}$ , de tal manera que a partir de estos puntos el método (6.26) puede ser convergente, pero necesita más iteraciones para converger.

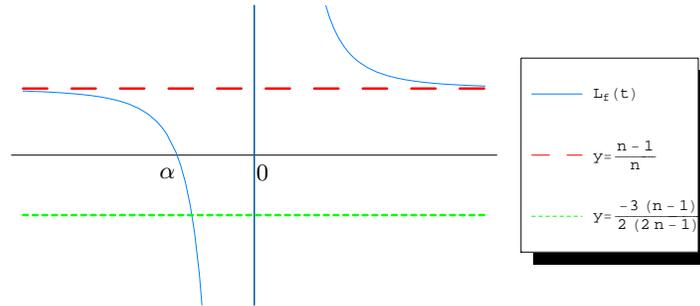
En realidad existen intervalos de puntos  $t_0 \in \mathbb{R}^-$ , además de los puntos próximos al origen, en los que el método (6.26) no es convergente con el número de iteraciones que hemos impuesto como límite. Sin embargo, el hecho de elegir un método iterativo de la familia (6.26) con orden de convergencia par asegura la convergencia global de la sucesión  $\{t_k\}$ , como veremos posteriormente cuando analizamos la convergencia global de la familia (6.26).

En el caso en que  $n$  es impar y  $R < 0$ , la variación de la función  $L_f(t)$  tiene algunas variantes con respecto al caso anterior, como se puede observar en la figura 6.9.

Entonces, procediendo como en el teorema 6.2.2, se prueba el siguiente resultado.

**Teorema 6.2.7** *Sea la sucesión  $\{t_k\}$ , definida en (6.26), y  $\alpha$  la raíz real de  $f(t) = t^n - R$ , para  $n$  impar y  $R < 0$ . Entonces,*

- (i) *Si  $t_0 < 0$  y  $f(t_0) < 0$ , la sucesión  $\{t_k\}$  es creciente y converge a  $\alpha$ .*
- (ii) *Si  $t_0 < 0$ ,  $f(t_0) > 0$  y  $L_f(t_0) \geq \frac{-3(n-1)}{2(2n-1)}$ :*
  - Para  $q$  impar, la sucesión  $\{t_k\}$  es decreciente y converge a  $\alpha$ .*
  - Para  $q$  par,  $t_1 < \alpha$ , la sucesión  $\{t_k\}$  es creciente para  $k > 1$  y converge a  $\alpha$ .*



**Figura 6.9.** Gráfico de  $L_f(t)$  para  $f(t) = t^n - R$ ,  $n$  impar y  $R < 0$

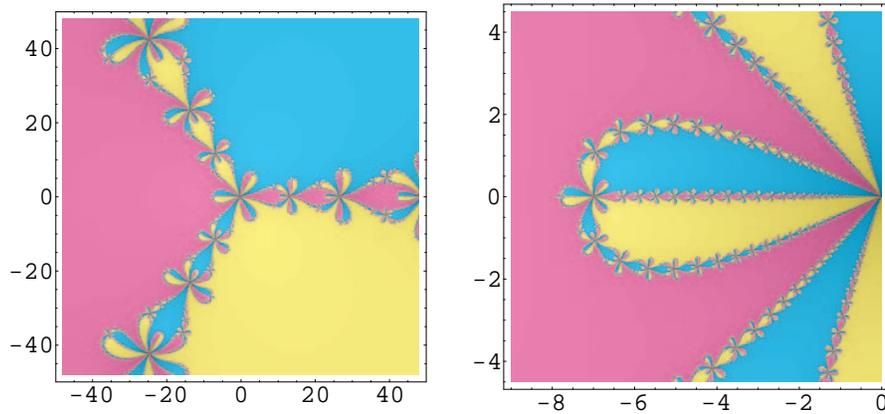
En todos los casos, la sucesión  $\{t_k\}$  converge a  $\alpha$  con  $R$ -orden de convergencia  $q$ ,  $q \geq 4$ .

Notemos que lo mismo que ocurría cuando  $R > 0$ , en este caso, si  $t_0 > 0$  existe un punto  $t_j$ , con  $t_0 > t_1 > \dots > t_{j-1} > 0 > t_j$ , y dependiendo de si  $L_f(t_j) \geq \frac{-3(n-1)}{2(2n-1)}$  o  $L_f(t_j) < \frac{-3(n-1)}{2(2n-1)}$ , podremos garantizar la convergencia de la sucesión  $\{t_k\}$ . Entonces, a priori, no sabemos establecer el tipo de convergencia que tiene la sucesión  $\{t_k\}$  en el intervalo  $[0, +\infty)$ .

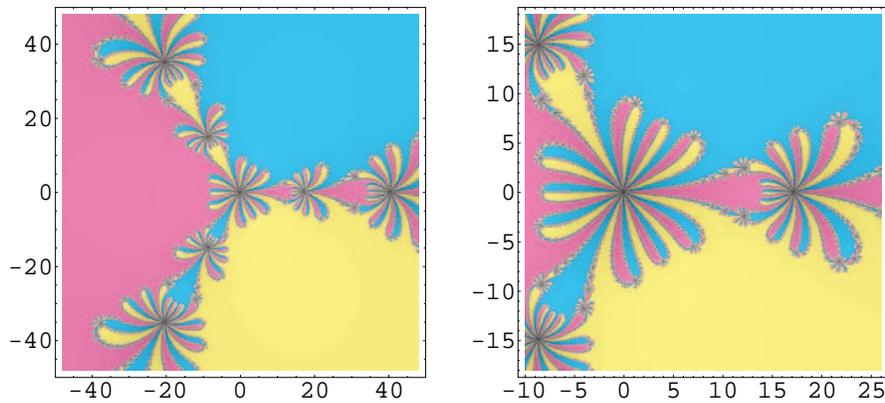
Este problema queda reflejado en las figuras 6.10 y 6.11, en las que mostramos respectivamente las cuencas de atracción de las tres raíces  $1974^{\frac{1}{3}}e^{\frac{\pi i}{3}}$ ,  $-1974^{\frac{1}{3}}$  y  $1974^{\frac{1}{3}}e^{-\frac{\pi i}{3}}$  de la ecuación  $f(t) = t^3 + 1974 = 0$ , de tal manera que el método iterativo (6.26) converge con órdenes de convergencia impares  $q = 3$  y  $q = 5$  en el plano complejo, con la misma tolerancia y el mismo número de iteraciones que en los casos anteriores, mostrados en las figuras 6.7 y 6.8. Para representar las cuencas de atracción del proceso iterativo de la familia (6.26) con orden de convergencia 3 tomamos dos regiones distintas, el rectángulo  $[-48, 48] \times [-48, 48]$  y un rectángulo más pequeño,  $[-9, 0] \times [-4.5, 4.5]$ , que muestra con más detalle lo que ocurre en el semieje real positivo. Para el proceso iterativo con orden de convergencia 5 tomamos el rectángulo  $[-48, 48] \times [-48, 48]$  y  $[-10, 26] \times [-18, 18]$ .

Como se puede observar en las figuras 6.10 y 6.11, al elegir procesos iterativos con órdenes de convergencia impar aparecen puntos de salida  $t_0$  a partir de los cuales no podemos garantizar la convergencia de la sucesión  $\{t_k\}$ . Sin embargo, estos procesos iterativos son convergentes en casi todo punto, o lo que es lo mismo, tienen convergencia general. Véase sección 5.4 del capítulo 5.

Para concluir este estudio de la convergencia semilocal de la familia de procesos iterativos (6.26), consideramos el caso en el que  $n$  es un número par y  $R$  positivo, de manera que existe solución de la ecuación (6.1). En este caso, existen dos soluciones  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  de forma que  $\alpha_1 < \alpha_2$ . Como ya se

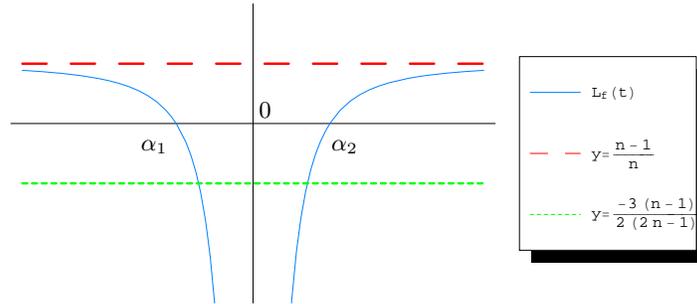


**Figura 6.10.** Cuencas de atracción para el proceso iterativo de la familia (6.26) con orden de convergencia 3, aplicado a la ecuación  $f(t) = t^3 + 1974 = 0$



**Figura 6.11.** Cuencas de atracción para el proceso iterativo de la familia (6.26) con orden de convergencia 5, aplicado a la ecuación  $f(t) = t^3 + 1974 = 0$

indicó anteriormente, se pueden considerar cuatro situaciones para el punto de salida  $t_0$ , ver figura la 6.5. Además, en este caso, la sucesión  $\{t_k\}$  puede ser convergente a la solución  $\alpha_1$  o a  $\alpha_2$ . Por otra parte, la función  $L_f(t)$  tiene una variación simétrica con respecto al eje de ordenadas, como se muestra en la figura 6.12. Teniendo en cuenta esta variación, es fácil probar el siguiente resultado, a partir de la demostración del teorema 6.2.2 con  $M = \frac{n-2}{n-1}$ .



**Figura 6.12.** Gráfico de  $L_f(t)$  para  $f(t) = t^n - R$  y  $n$  par

**Teorema 6.2.8** Sea la sucesión  $\{t_k\}$ , definida en (6.26),  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  las raíces reales de  $f(t) = t^n - R$ , para  $n$  par. Entonces,

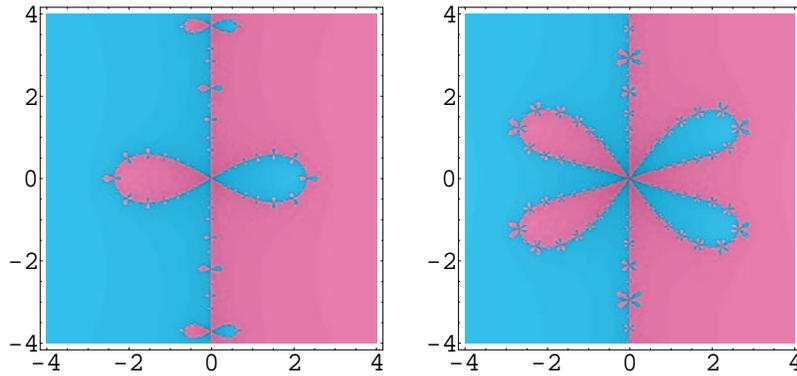
- (i) Si  $t_0 > 0$  y  $f(t_0) > 0$ , la sucesión  $\{t_k\}$  es decreciente y converge a la raíz positiva  $\alpha_2$ .
- (ii) Si  $t_0 > 0$ ,  $f(t_0) < 0$  y  $L_f(t_0) \geq \frac{-3(n-1)}{2(2n-1)}$ :
  - Para  $q$  impar, la sucesión  $\{t_k\}$  es creciente y converge a la raíz positiva  $\alpha_2$ .
  - Para  $q$  par,  $t_1 > \alpha_2$ , la sucesión  $\{t_k\}$  es decreciente para  $k > 1$  y converge a  $\alpha_2$ .
- (iii) Si  $t_0 < 0$  y  $f(t_0) > 0$ , la sucesión  $\{t_k\}$  es creciente y converge a la raíz negativa  $\alpha_1$ .
- (iv) Si  $t_0 < 0$ ,  $f(t_0) < 0$  y  $L_f(t_0) \geq \frac{-3(n-1)}{2(2n-1)}$ :
  - Para  $q$  impar, la sucesión  $\{t_k\}$  es decreciente y converge a la raíz negativa  $\alpha_1$ .
  - Para  $q$  par,  $t_1 < \alpha_1$ , la sucesión  $\{t_k\}$  es creciente para  $k > 1$  y converge a  $\alpha_1$ .

En todos los casos, la sucesión  $\{t_k\}$  converge a una solución con orden de convergencia  $q$ ,  $q \geq 4$ .

Como consecuencia de este resultado el dominio de los puntos de salida  $t_0$  queda perfectamente delimitado. Teniendo en cuenta la simetría de una función cuadrática cualquiera, respecto de su vértice  $v$ ,  $f(v + t) = f(v - t)$  y  $f'(v + t)^2 = f'(v - t)^2$ , es fácil ver que la función  $L_f$  es simétrica respecto del eje  $t = v$ ,  $L_f(v + t) = L_f(v - t)$ . Como se muestra en la figura 6.12, la función  $L_f(t)$  tiene una asíntota en la abscisa cero y las mismas raíces que  $f$ , luego existe un intervalo  $[-\delta, \delta]$ , con  $\delta > 0$ , en el cual  $L_f(t) < \frac{-3(n-1)}{2(2n-1)}$ . Por lo tanto, no se puede garantizar la convergencia de la sucesión  $\{t_k\}$ , para puntos de salida tomados en dicho intervalo  $[-\delta, \delta]$ .

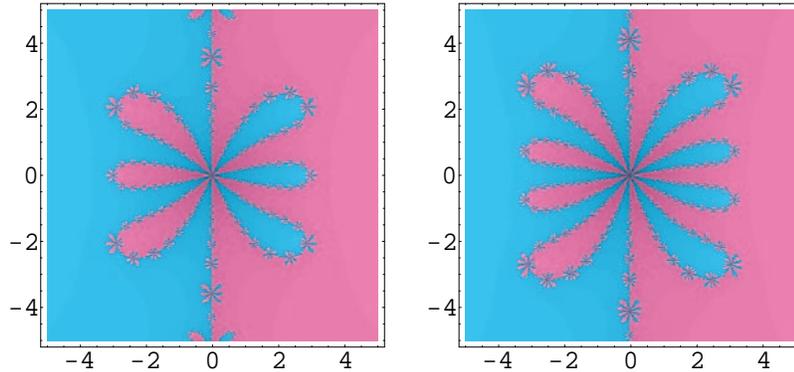
A continuación, en las figuras 6.13, 6.14 y 6.15 mostramos las cuencas de atracción de las dos raíces de la ecuación cuadrática  $f(t) = t^2 - 35 = 0$ , cuando aplicamos los procesos iterativos de la familia (6.26) con distintos órdenes de convergencia  $q = 3$ ,  $q = 4$ ,  $q = 5$  y  $q = 6$  para aproximarlas. Hemos asignado el color magenta para la cuenca de atracción asociada a la raíz  $t = +\sqrt{35}$  y cyan para la cuenca de atracción asociada a la otra raíz  $t = -\sqrt{35}$ . La intensidad del color en las cuencas de atracción representadas, depende del número de iteraciones necesarias para alcanzar una raíz con una cierta precisión fijada. Además, representamos con color negro los puntos de salida  $t_0$  a partir de los cuales el correspondiente proceso iterativo empleado no alcanza ninguna de las dos raíces con un máximo de 40 iteraciones y con una tolerancia del orden de  $10^{-4}$ .

Representamos en el rectángulo  $[-4, 4] \times [-4, 4]$  las cuencas de atracción para los métodos de la familia (6.26) con órdenes de convergencia  $q = 3$ , que es precisamente el método de Chebyshev, y  $q = 4$ .

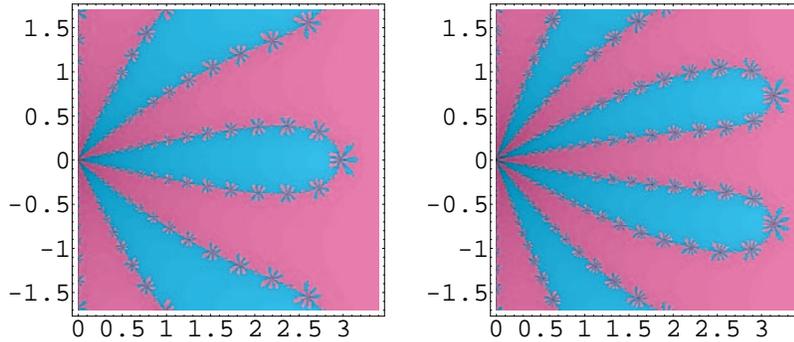


**Figura 6.13.** Cuencas de atracción para el método de Chebyshev y para el método iterativo (6.26) con orden de convergencia  $q = 4$ , aplicados a  $f(t) = t^2 - 35$

Para representar las cuencas de atracción de los procesos iterativos de la familia (6.26) con órdenes de convergencia  $q = 5$  y  $q = 6$  tomamos el rectángulo  $[-5, 5] \times [-5, 5]$  y un rectángulo más pequeño,  $[0, 3.4] \times [-1.7, 1.7]$ , que muestra con más detalle lo que ocurre en el eje real. Véanse figuras 6.14 y 6.15.



**Figura 6.14.** Cuencas de atracción para los procesos iterativos de la familia (6.26) con órdenes de convergencia  $q = 5$  y  $q = 6$ , aplicados a  $f(t) = t^2 - 35$



**Figura 6.15.** Detalle de las cuencas de atracción para los métodos (6.26) con  $q = 5$  y  $q = 6$ , aplicados a  $f(t) = t^2 - 35$

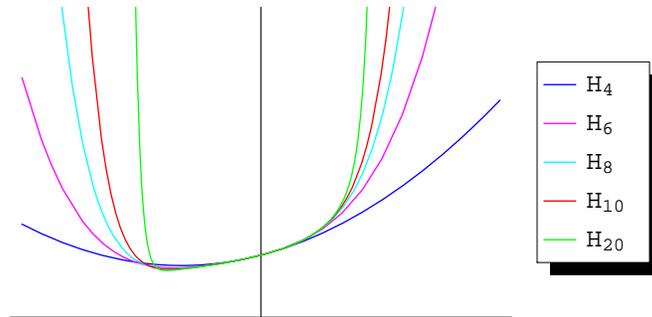
Como muestran las figuras 6.13, 6.14 y 6.15, los procesos iterativos con órdenes de convergencia par que hemos elegido convergen a partir de cualquier punto de salida  $t_0$  de la recta real a una de las dos raíces con ese máximo de iteraciones y esa precisión que hemos fijado. Como veremos en el siguiente estudio de convergencia, el hecho de elegir un método iterativo de la familia (6.26) con orden de convergencia par asegura la convergencia global de la sucesión  $\{t_k\}$ . Sin embargo, si el proceso iterativo (6.26) tiene un orden de convergencia impar aparecen puntos de salida  $t_0$  para los que no podemos garantizar la convergencia de la sucesión  $\{t_k\}$ . Por lo tanto, para estos procesos

tenemos convergencia en casi todo punto o convergencia general. Véase sección 5.4 del capítulo 5.

### Convergencia global

Al igual que en la sección 6.2.1, obtenemos un resultado de convergencia global para la familia de procesos iterativos (6.26) cuando aproximamos la raíz  $n$ -ésima de un número real  $R$ . Notemos que en este caso  $L_{f'}(t) = M = \frac{n-2}{n-1}$ . Hemos visto que se puede garantizar la convergencia semilocal para la familia (6.26), imponiendo la condición  $L_f(t_0) \geq \frac{-3(n-1)}{2(2n-1)}$  sobre el punto de salida  $t_0$ .

Por otra parte, en el caso de que  $q$  sea un número par, los polinomios  $H_q(t)$ , dados en (6.26), que definen la familia de procesos iterativos, tienen la característica fundamental de ser siempre positivos, como se puede observar en la figura 6.16. Este hecho hace que podamos asegurar la convergencia global de la familia de procesos iterativos construida para órdenes de convergencia pares.



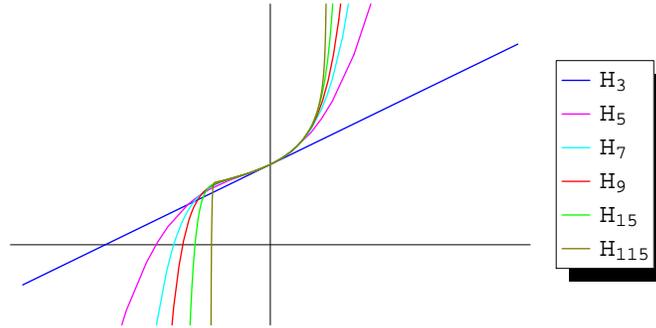
**Figura 6.16.** Polinomios  $H_q(t)$ ,  $q$  par

**Lema 6.2.9** Sea  $H_q(t)$  el polinomio dado en (6.26). Entonces,  $H_q(t) > 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  y  $q \in \mathbb{N}$  par.

*Demostración.* La demostración es inmediata por el lema 6.2.3, teniendo en cuenta que  $M = \frac{n-2}{n-1}$ . ■

Al igual que en el caso general, a partir de esta propiedad que satisfacen los polinomios  $H_q(t)$ , se puede establecer la convergencia global de los procesos iterativos (6.26), puesto que la condición para el punto de salida  $t_0$ ,  $L_f(t_0) \geq \frac{-3(n-1)}{2(2n-1)}$ , dada en los teoremas de convergencia semilocal, puede eliminarse. El siguiente resultado de convergencia global es consecuencia del teorema 6.2.4.

**Teorema 6.2.10** *Los procesos iterativos (6.26), para  $q$  par, son convergentes para cualquier punto  $t_0 \neq 0$ .*



**Figura 6.17.** Polinomios  $H_q(t)$ ,  $q$  impar,  $n = 3$

Como se muestra en la figura 6.17, cuando  $q$  es impar los polinomios  $H_q(t)$  tienen una raíz  $u_q$ . Como consecuencia, no podemos obtener un resultado de convergencia global puesto que debemos imponer la condición para el punto de salida  $t_0$ ,  $L_f(t_0) \geq \frac{-3(n-1)}{2(2n-1)}$ , aunque podemos limitar el intervalo donde no se puede garantizar la convergencia semilocal.

Así, por ejemplo, en el estudio realizado en la sección de convergencia semilocal para la función  $f(t) = t^3 + 1974$ , el intervalo de puntos de salida a partir de los cuales no se puede afirmar la convergencia de los procesos iterativos de la familia (6.26) es  $I = [-10.1282, 0)$ . En el caso en que el orden fijado es impar, conocidas las raíces  $u_q$  de los polinomios  $H_q(t)$ , se puede obtener el intervalo de puntos de salida  $t_0$ , para los cuales, en principio, no es posible garantizar la convergencia del proceso iterativo. En la tabla 6.1 se muestra alguno de estos intervalos. Obsérvese para estos casos, la mejora con respecto al intervalo  $I$ , en cuanto a la amplitud del intervalo.

### Ensayos numéricos

Cuando queremos aplicar el algoritmo de orden de convergencia prefijado  $q$ , dado en (6.26), es interesante notar que,

$$L_f(t) = \frac{n-1}{n} \left(1 - \frac{R}{t^n}\right), \quad \frac{f(t)}{f'(t)} = \frac{t}{n} \left(1 - \frac{R}{t^n}\right).$$

$q$	$u_q$	$L_f(t) < u_q$
3	-2	$[-7.90246, 0)$
5	-1.38488	$[-8.62432, 0)$
7	-1.17137	$[-8.9461, 0)$
9	-1.06111	$[-9.1325, 0)$
15	-0.912544	$[-9.41034, 0)$
115	-0.709418	$[-9.85228, 0)$

**Tabla 6.1.** Raíces de  $H_q(t)$ ,  $q$  impar

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos reescribir el algoritmo (6.26) de una manera más sencilla:

$$t_{k+1} = t_k \sum_{j=0}^{q-1} \binom{1/n}{j} (-1)^j \left(1 - \frac{R}{t_k^n}\right)^j, \quad k \geq 0, \quad (6.27)$$

con  $q \geq 2$ . A continuación, consideramos la aplicación de esta familia de procesos iterativos dada por el algoritmo (6.27) a las siguientes funciones  $f(t) = t^5 - 35$  y  $f(t) = t^{10} - 35$ , y hacemos un estudio comparativo de dicha familia, con la siguiente familia de métodos iterativos dada por Dubeau en [44]:

$$t_{k+1} = t_k - \frac{f(t_k) \left(1 + \sum_{j=2}^{q-1} \frac{B_j}{B_1} f^{(j-1)}(t_k)\right)}{f'(t_k) \left(1 + \sum_{j=2}^{q-1} j \frac{B_j}{B_1} f^{(j-1)}(t_k)\right)}, \quad B_j = \frac{1}{R^j} \binom{1/n}{j}, \quad (6.28)$$

con  $j \in \mathbb{N}$ , que a su vez tiene orden de convergencia  $q$ . La mejora conseguida con respecto del método de Dubeau (6.28) se muestra en las tablas 6.2 y 6.3, donde aparecen estimados los errores cometidos en el cálculo de la raíz quinta y décima de un número real  $R$  positivo, considerando métodos de distintos ordenes de convergencia en ambas familias.

Así, en la tabla 6.2, se muestran las estimaciones de los errores cometidos  $|t_k - 35^{1/5}|$  cuando se toma como punto de salida  $t_0 = 2.25$ , siendo el error inicial  $|t_0 - 35^{1/5}| = 0.213 \dots 10^{-1}$ .

En la tabla 6.3 también se puede observar la mejora conseguida con respecto a la familia dada por Dubeau, en la que mostramos las estimaciones de los errores cometidos  $|t_k - 35^{1/10}|$ , siendo el error inicial  $|t_0 - 35^{1/10}| = 0.730 \dots 10^{-1}$ , y tomando como punto de salida  $t_0 = 1.5$ . En este caso, se han considerado métodos de ordenes tres y cuatro, en ambas familias.

Por otra parte, si comparamos las constantes del error asintótico asociadas a estas familias, resulta que la obtenida para (6.15),

$k$	método (6.28) orden 4	método (6.27) orden 4	método (6.28) orden 5	método (6.27) orden 5
1	$0.239 \dots 10^{-1}$	$0.259 \dots 10^{-2}$	$0.202 \dots 10^{-1}$	$0.791 \dots 10^{-3}$
2	$0.261 \dots 10^{-5}$	$0.111 \dots 10^{-9}$	$0.590 \dots 10^{-7}$	$0.143 \dots 10^{-14}$
3	$0.348 \dots 10^{-21}$	$0.390 \dots 10^{-39}$	$0.133 \dots 10^{-34}$	$0.285 \dots 10^{-73}$
4	$0.110 \dots 10^{-84}$	$0.578 \dots 10^{-157}$	$0.774 \dots 10^{-173}$	$0.883 \dots 10^{-367}$
5	$0.110 \dots 10^{-338}$	$0.279 \dots 10^{-628}$	$0.518 \dots 10^{-864}$	$0.250 \dots 10^{-1834}$

**Tabla 6.2.** Estimaciones de los errores  $|t_k - 35^{1/5}|$

$k$	método (6.28) orden 3	método (6.27) orden 3	método (6.28) orden 4	método (6.27) orden 4
1	$0.270 \dots 10^{-1}$	$0.367 \dots 10^{-2}$	$0.101 \dots 10^{-1}$	$0.107 \dots 10^{-2}$
2	$0.478 \dots 10^{-3}$	$0.678 \dots 10^{-6}$	$0.246 \dots 10^{-5}$	$0.943 \dots 10^{-10}$
3	$0.307 \dots 10^{-8}$	$0.436 \dots 10^{-17}$	$0.784 \dots 10^{-20}$	$0.563 \dots 10^{-38}$
4	$0.812 \dots 10^{-24}$	$0.116 \dots 10^{-50}$	$0.808 \dots 10^{-78}$	$0.716 \dots 10^{-151}$
5	$0.150 \dots 10^{-70}$	$0.222 \dots 10^{-151}$	$0.911 \dots 10^{-310}$	$0.187 \dots 10^{-602}$

**Tabla 6.3.** Estimaciones de los errores  $|t_k - 35^{1/10}|$

$$K_q(R^{1/n}) = (n(q-1) - 1)(n-1)^{q-2} \frac{A_{q-2}}{q} R^{(1-q)/n},$$

es menor que la constante del error asintótico obtenida para (6.28),

$$k_q(R^{1/n}) = -(q-1)n^q \binom{1/n}{q} R^{(1-q)/n}.$$

En efecto, observar que

$$K_q(R^{1/n}) = \frac{(n-1) \cdot (2n-1) \cdots (n(q-1) - 1)}{q!} R^{(1-q)/n},$$

$$k_q(R^{1/n}) = (-1)^q (q-1) \frac{(n-1) \cdot (2n-1) \cdots (n(q-1) - 1)}{q!} R^{(1-q)/n}.$$

y

$$|K_q(R^{1/n})| < |k_q(R^{1/n})| \iff \frac{1}{q-1} < 1 \iff q > 2.$$

Por lo tanto, a partir de (6.27) con  $q = 3$ , que es el método de Chebyshev, la familia de procesos iterativos (6.27) es más rápida, en cuanto a la velocidad de convergencia, que la dada por Dubeau en (6.28).



---

## Cuestiones abiertas y conclusiones

La principal aportación de esta memoria es la generalización a espacios de Banach del resultado que Gander ([63]) obtuvo para procesos iterativos reales. Así, por ejemplo, para establecer una familia de procesos iterativos en  $\mathbb{R}$  con al menos convergencia cúbica, hemos visto que es suficiente usar la caracterización de orden de convergencia dada por Schröder (5). Por otra parte, la tarea de establecer en espacios de Banach procesos iterativos con  $R$ -orden de convergencia al menos tres resulta ser algo más tediosa. Con este fin, antes de poder acotar el  $R$ -orden de convergencia, es necesario probar la convergencia semilocal de la familia de procesos iterativos (1), como se ha mostrado a lo largo de esta memoria.

El hecho de poder usar una técnica más manejable que las sucesiones mayorizantes, que está basada en la construcción de determinadas relaciones de recurrencia, ha permitido realizar un estudio relativamente simplificado de la familia de procesos iterativos en situaciones de convergencia suaves para el operador implicado, y por tanto, obtener así resultados de convergencia que era prácticamente imposible pensar en su obtención mediante la utilización de sucesiones mayorizantes. Este hecho, a su vez, hace que queden abiertos nuevos caminos en lo relativo al análisis de la convergencia de la familia de procesos iterativos (1).

En primer lugar, y siguiendo en la línea desarrollada en los capítulos 3 y 4, queda abierta una nueva vía de investigación en el estudio de la convergencia de la familia en condiciones suaves para el operador  $F$ . Como hemos mostrado, hay situaciones diversas en las que las modificaciones de Kantorovich no siempre funcionan, de ahí la necesidad de suavizar las condiciones de convergencia y a su vez la necesidad de emplear las distintas técnicas para demostrar la convergencia. Así, queda pendiente la construcción adaptada de funciones mayorizantes a problemas concretos y, en este caso, la obtención de resultados de convergencia semilocal y estimaciones a priori del error que dependerán más estrechamente de la función mayorizante. Por ejemplo, estamos interesados en establecer una función mayorizante cuando  $\|F'''(x)\| \leq \omega(\|x\|)$ , de manera que la función mayorizante ya no sea un polinomio.

Queda también por analizar, mediante la técnica de relaciones de recurrencia, condiciones de convergencia para el operador  $F$  todavía más suaves que las exigidas en el estudio realizado en los capítulos 2 y 3, donde exigíamos condiciones de tipo Kantorovich para el operador derivada segunda. Éstas, pueden suavizarse imponiendo condiciones centradas para este operador  $F''$ ,  $\|F''(x) - F''(x_0)\| \leq \omega(\|x - x_0\|)$  (véanse [12], [70]), o bien, este otro tipo de condiciones  $\|F''(x)\| \leq \omega(\|x\|)$ , ya estudiadas para el método de Newton ([55], [61]). En este caso, trataremos de establecer la convergencia semilocal y el  $R$ -orden de convergencia para la familia de procesos iterativos (1). Por supuesto, en algunas situaciones de suavización es extremadamente difícil acotar el  $R$ -orden de convergencia como consecuencia de las sucesiones auxiliares reales obtenidas al verificar las relaciones de recurrencia en cada paso. Esta situación aparece en una de las suavizaciones analizadas en el capítulo 4, cuando el operador  $F''$  no está acotado y satisface una condición  $\omega$ -condicionada. Trataremos de buscar nuevos caminos para la construcción de las sucesiones auxiliares reales, con el fin de poder así acotar el  $R$ -orden de convergencia para la familia.

Otra cuestión que queda abierta es estudiar la convergencia semilocal de la familia de procesos iterativos imponiendo condiciones sobre el radio de convergencia asociado a la sucesión de aproximaciones generada por un proceso iterativo de la familia (1). Esta es una técnica “más suave” que las analizadas aquí, pero a su vez los resultados de convergencia que se obtienen son también más restrictivos en cuanto a que aparecen condiciones sobre el dominio de existencia, a partir de cierta ecuación que debe satisfacer el radio de convergencia. Véase [58].

Por otra parte, han surgido temas relacionados como es la aplicación de la familia (1) cuando el operador  $H$  no representa un operador analítico conocido. En este caso, se optaba por truncar el desarrollo en serie que tiene el operador  $H$  y estudiar fundamentalmente la relación existente con el  $R$ -orden de convergencia para la nueva familia de procesos iterativos así obtenida. Un estudio parcial de esta situación para ecuaciones cuadráticas lo presentamos en el capítulo 5, donde hemos establecido convergencia global para los procesos iterativos de la familia con orden de convergencia par y *convergencia general* para los que tienen orden de convergencia impar, cuando estos procesos iterativos son aplicados a polinomios cuadráticos.

Motivados por los resultados obtenidos allí, nos planteamos el problema de extender el tipo de funciones a las que se puedan aplicar los resultados de convergencia comentados. Así, por ejemplo, queda pendiente el análisis de la convergencia de familias de procesos iterativos cuando éstos se aplican a polinomios de grado mayor o igual que tres, e incluso a otro tipo de funciones más generales. En el capítulo 6 se ha tratado de caracterizar las ecuaciones escalares donde se pueden aplicar los resultados de convergencia conseguidos para las ecuaciones cuadráticas, viéndose que esto es posible si  $L_{f'}$  es constante. Con el objetivo de generalizar este estudio, queda también abierto el análisis,

en otro tipo de condiciones sobre  $L_f$  o sobre  $L_{f'}$ , y su posible extensión a espacios de Banach.

Otra nueva vía de investigación es la modificación de procesos iterativos de alto orden en espacios de Banach rebajando el coste operacional, sin pérdida de velocidad de convergencia. Es conocido que, para aproximar las soluciones de determinadas ecuaciones, es interesante aplicar procesos iterativos que tengan alto orden de convergencia. Ahora bien, ya hemos visto que los procesos iterativos punto a punto tienen el inconveniente de que para obtener orden de convergencia al menos tres es necesario el cálculo del operador derivada de orden dos, que a su vez aparece en la expresión del operador grado de convexidad logarítmico. Es por ello que el coste operacional del proceso iterativo es alto y, en general, su utilización es limitada. Sin embargo, utilizando el desarrollo de Taylor del operador  $F$ , es posible obtener una aproximación del operador grado de convexidad logarítmico  $L_F$ , mediante la utilización de derivadas de primer orden, consiguiendo así procesos iterativos que sean aplicables a situaciones en las que el operador  $F$  no admita derivadas de orden dos, en este sentido se han obtenido resultados interesantes que pueden verse en [47], [57] y [91].

Otra modificación que se puede desarrollar es la aproximación de las derivadas de primer y segundo orden mediante diferencias divididas, obteniendo de esta manera procesos iterativos libres de derivadas. Así, por ejemplo, en [7] y [5] se desarrollan en espacios de Banach nuevas variantes de los métodos iterativos clásicos de Chebyshev, Halley y Super-Halley, aproximando los operadores  $F'$  y  $F''$  por diferencias divididas de primer y segundo orden respectivamente. Teniendo en cuenta los procesos iterativos multipunto, se han modificado, mediante diferentes tipos de aproximaciones, determinados procesos iterativos punto a punto de tercer orden (el método de Chebyshev, el método de Halley y el método de Super-Halley) para conseguir procesos iterativos multipunto que mantengan la velocidad de convergencia de éstos, pero que reduzcan considerablemente el coste operacional en su aplicación.

Otra posible forma de reducir el coste operacional que tienen los procesos iterativos de la familia, sin perder velocidad de convergencia, consiste en aproximar el operador inverso  $\Gamma_n = F'(x_n)^{-1}$  sin necesidad de tener que calcularlo, de manera que los nuevos procesos iterativos sean libres de inversos. A partir de esta simple idea, Moser modificó en [111] el método de Newton al introducir una aproximación del inverso de la derivada primera en cada paso de iteración, y presentó así una nueva iteración de tipo Newton que no necesita del cálculo de operadores inversos y que utiliza la misma cantidad de información por paso que el método de Newton. El método de Moser fue desarrollado como una herramienta técnica para estudiar la estabilidad de problemas de  $N$ -cuerpos en mecánica celeste, donde se consideran problemas en los que aparecen divisores pequeños y la aplicación del método de Newton es dudosa como consecuencia de la necesidad de tener que invertir la derivada primera en cada paso de iteración. Este método fue mejorado primero por Ulm ([141]) y redescubierto más tarde por Hald ([79]). Pretendemos genera-

lizar la idea de Moser para la familia de métodos iterativos tipo Newton (1) manteniendo la misma velocidad de convergencia que los procesos iterativos originales y sin la necesidad de resolver ecuaciones no lineales en cada paso de iteración.

Con el análisis que hemos realizado en esta memoria se ha pretendido dar, para la familia (1), una visión general de los aspectos más interesantes de los procesos iterativos que actualmente son estudiados, así como análisis de la convergencia, de la velocidad de convergencia y del error, bajo el manejo de las técnicas de sucesiones mayorizantes y relaciones de recurrencia. También es interesante destacar que se han manejado otras técnicas, como la dada por Ostrowski ([117]) para dar cotas a posteriori del error. Existen en la literatura otras técnicas que no hemos aplicado, como la inducción no discreta (véanse [13], [14], [122]) o la  $\alpha$ -teoría ([137]). Sin embargo, otro aspecto, en el estudio de procesos iterativos, en el que estamos interesados es en el análisis de las condiciones iniciales. Por ejemplo, se puede tratar de modificar las condiciones iniciales habitualmente exigidas viendo su influencia en la convergencia, e incluso determinar condiciones iniciales que garanticen que un algoritmo numérico sea convergente a una solución de una ecuación. El problema de modificar las condiciones iniciales no es sencillo, ni tampoco lo es el de encontrar unas aproximaciones iniciales satisfactorias. El enfoque tradicional de este problema se basa en imponer hipótesis de diferenciabilidad del operador implicado y de condiciones de tipo Lipschitz (o modificaciones de éstas), como se ha visto en los capítulos 3 y 4. Siguiendo en esta línea de determinación de las condiciones iniciales, cabe destacar la teoría de la estimación puntual o  $\alpha$ -teoría, introducida por Smale (1980), técnica que trata de precisar las condiciones y dominios de convergencia para resolver una ecuación usando únicamente información sobre el punto inicial  $x_0$ . Los primeros resultados con esta técnica sobre el análisis de la convergencia de métodos iterativos para resolver ecuaciones no lineales están asociados al método de Newton ([137]) y sus variantes. Los principales resultados de la  $\alpha$ -teoría consisten en encontrar una constante universal  $a_0$  que garantice la convergencia del método iterativo. El trabajo de Smale es de gran importancia teórica sobre todo cuando se trabaja con sistemas polinómicos ([151], [152], [153]). En este sentido, nosotros hemos comenzado este estudio analizando métodos tipo Newton, donde ya hemos obtenido algunos resultados interesantes ([76]). Además, esta teoría ha servido de base e inspiración en los trabajos de otros muchos autores (véanse [72], [139], [145], [146], [150]).

---

## Índice de figuras

2.1. Regiones de decrecimiento cúbico para el método de Chebyshev bajo condiciones de Lipschitz para $F''$ .....	63
2.2. Regiones de decrecimiento cúbico para los métodos de Super-Halley y Halley respectivamente, bajo condiciones de Lipschitz para $F''$ .....	64
2.3. Regiones de decrecimiento cúbico de los procesos iterativos más conocidos con $R$ -orden de convergencia al menos tres .....	66
2.4. Región de decrecimiento cúbico asociada a los procesos iterativos de la familia (1.3) obtenida mediante la técnica de sucesiones mayorizantes .....	74
3.1. Regiones de accesibilidad asociadas respectivamente a los métodos de Chebyshev y Super-Halley en condiciones Hölder con $p = 1/3$ .....	102
3.2. Prelocalización de una solución $x^*$ de (3.25) .....	122
3.3. Aproximación y región de existencia de soluciones de (3.29) .....	127
4.1. Aproximaciones a una solución de (4.16) mediante el método de Super-Halley .....	160
5.1. Grado de convexidad logarítmico para la $F$ dada en (5.3) .....	167
5.2. Cuencas de atracción para los métodos de la familia (5.11) con $q = 5$ y $q = 6$ aplicados a la ecuación $F(t) = t^2 - 4t + 3 = 0$ ...	172
5.3. Constantes de error asintótico en el cálculo de $\sqrt{35}$ .....	175
5.4. Polinomios $H_q(t)$ , $q$ par .....	176
5.5. Polinomios $H_q(t)$ , $q$ impar .....	178
5.6. Detalle de las cuencas de atracción para los métodos de la familia (5.11) con $q = 5$ y $q = 6$ aplicados a la ecuación $F(t) = t^2 - 4t + 3 = 0$ .....	179
5.7. Aproximaciones a la solución (5.44) de la ecuación integral (5.43) con $R$ -órdenes $q = 4, 5, 6, 8$ .....	201

5.8. Cuencas de atracción para $S_2$ y $S_3$ aplicadas a un polinomio cuadrático $(z - a)(z - b)$ .....	210
5.9. Cuencas de atracción para los métodos de Newton y de Chebyshev aplicados a $F(z) = z^2 - 2z + 2$ .....	211
5.10. Cuencas de atracción para $S_4$ y $S_5$ aplicadas a un polinomio cuadrático $(z - a)(z - b)$ .....	212
5.11. Cuencas de atracción para $S_{10}$ y $S_\infty$ aplicadas a un polinomio cuadrático $(z - a)(z - b)$ .....	213
5.12. Cuencas de atracción para los métodos de la familia (5.45), con $q = 4$ y $q = 5$ , aplicados a $F(z) = z^2 - 2z + 2$ .....	215
5.13. Cuencas de atracción para el método de la familia (5.45), con $q = 10$ , y para el método de Euler, cuando se aplican a $F(z) = z^2 - 2z + 2$ .....	215
6.1. Funciones $H_-(t)$ y $H_+(t)$ .....	219
6.2. Rango de $m = \frac{M-2}{M-1}$ para $f(t) = k(t + b)^m + a$ .....	226
6.3. Funciones $H_-(t)$ y $H_+(t)$ para $f(t) = t^n - R$ y $n$ par .....	235
6.4. Polinomios $H_q(t)$ con $n = 3$ .....	237
6.5. $f(t) = t^n - R$ con $n$ impar y $n$ par respectivamente .....	237
6.6. Gráfico de $L_f(t)$ para $f(t) = t^n - R$ , $n$ impar y $R > 0$ .....	238
6.7. Cuencas de atracción para el proceso iterativo de la familia (6.26) con orden de convergencia 4, aplicado a la ecuación $f(t) = t^3 - 1974 = 0$ .....	239
6.8. Cuencas de atracción para el proceso iterativo de la familia (6.26) con orden de convergencia 6, aplicado a la ecuación $f(t) = t^3 - 1974 = 0$ .....	240
6.9. Gráfico de $L_f(t)$ para $f(t) = t^n - R$ , $n$ impar y $R < 0$ .....	241
6.10. Cuencas de atracción para el proceso iterativo de la familia (6.26) con orden de convergencia 3, aplicado a la ecuación $f(t) = t^3 + 1974 = 0$ .....	242
6.11. Cuencas de atracción para el proceso iterativo de la familia (6.26) con orden de convergencia 5, aplicado a la ecuación $f(t) = t^3 + 1974 = 0$ .....	242
6.12. Gráfico de $L_f(t)$ para $f(t) = t^n - R$ y $n$ par .....	243
6.13. Cuencas de atracción para el método de Chebyshev y para el método iterativo (6.26) con orden de convergencia $q = 4$ , aplicados a $f(t) = t^2 - 35$ .....	244
6.14. Cuencas de atracción para los procesos iterativos de la familia (6.26) con órdenes de convergencia $q = 5$ y $q = 6$ , aplicados a $f(t) = t^2 - 35$ .....	245
6.15. Detalle de las cuencas de atracción para los métodos (6.26) con $q = 5$ y $q = 6$ , aplicados a $f(t) = t^2 - 35$ .....	245
6.16. Polinomios $H_q(t)$ , $q$ par .....	246
6.17. Polinomios $H_q(t)$ , $q$ impar, $n = 3$ .....	247

---

## Índice de tablas

2.1. Estimaciones del error $\ x^* - x_n\ $ para los procesos iterativos más conocidos de la familia (1.3) . . . . .	73
2.2. Radios de existencia y unicidad de solución para el problema de valor inicial (2.45) . . . . .	79
3.1. Pesos y nodos para la fórmula de cuadratura de Gauss-Legendre (3.31) . . . . .	125
3.2. Aproximación numérica de una solución de (3.29) . . . . .	127
4.1. Estimaciones a priori del error $\ x^* - x_n\  \leq s - t_n$ , $n \geq 0$ . . . . .	154
4.2. Estimaciones a posteriori del error (4.15) . . . . .	155
4.3. Dominios de existencia y unicidad de solución obtenidos mediante la técnica de las relaciones de recurrencia . . . . .	155
4.4. Dominios de existencia y unicidad de soluciones para (4.16) . . . . .	159
4.5. Solución numérica de (4.16) obtenida aplicando el método de Super-Halley . . . . .	159
5.1. Convergencia con $t_0 = 500 > v$ , $F(t_0) > 0$ . . . . .	170
5.2. Convergencia con $t_0 = -50 < v$ , $F(t_0) > 0$ . . . . .	170
5.3. Convergencia con $t_0 = 2.71 > v$ , $F(t_0) < 0$ , $L_F(t_0) > \frac{-1}{2}$ . . . . .	171
5.4. Convergencia con $t_0 = 1.29 < v$ , $F(t_0) < 0$ , $L_F(t_0) > \frac{-1}{2}$ . . . . .	171
5.5. Estimaciones de los errores $ t_k - \sqrt{35} $ en el cálculo de $\sqrt{35}$ . . . . .	175
5.6. Raíces de $H_q(t)$ , $q$ impar . . . . .	179
5.7. Convergencia con $t_0 = 2.5 > v$ , $F(t_0) < 0$ , $L_F(t_0) < \frac{-1}{2}$ . . . . .	179
5.8. Estimaciones del error para (5.36) con $x_i^{(0)} = 1$ , $i = 1, 2, \dots, 9$ . . . . .	195
5.9. Aproximación numérica de la solución de (5.36) . . . . .	195
5.10. Estimaciones del error para el operador integral (5.40) . . . . .	198
5.11. Estimaciones del error $\ x^* - x_n\ $ para la ecuación integral (5.43) . . . . .	200
6.1. Raíces de $H_q(t)$ , $q$ impar . . . . .	248
6.2. Estimaciones de los errores $ t_k - 35^{1/5} $ . . . . .	249

258 Índice de tablas

6.3. Estimaciones de los errores  $|t_k - 35^{1/10}| \dots\dots\dots 249$

---

## Bibliografía

1. Alefeld, G. and Herzberger, J., Introduction to Interval Computations, Academic Press, 1983.
2. Altman, M., Concerning the method of tangent hyperbolas for operator equations. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., **9**:633–637, 1961.
3. Amat, S. and Busquier, S., Geometry and convergence of some third-order methods. Southwest J. Pure Appl. Math., **2**:61–72, 2001.
4. Amat, S., Busquier, S. and Gutiérrez, J. M., Geometric constructions of iterative functions to solve nonlinear equations, J. Comput. Appl. Math., **157**(1):197–205, 2003.
5. Amat, S., Busquier, S. and Candela, V., Third-order iterative methods without using any Fréchet derivative, J. Comput. Appl. Math. **158**(1):11–18, 2003.
6. Amat, S., Busquier, S., El kebir, D. and Molina, J., A fast Chebyshev's method for quadratic equations, Appl. Math. Comput., **148**(2):461–474, 2004.
7. Amat, S., Busquier, S. and Candela, V., Third order iterative methods without using second Fréchet derivative, J. Comput. Math., **22**(3):341–346, 2004.
8. Amat, S., Busquier, S. and Plaza, S., Review of some iterative root-finding methods from a dynamical point of view, Scientia, **10**:3–35, 2004.
9. Amat, S., Busquier, S. and Plaza, S., A Construction of Attracting Periodic Orbits of some Classical Third Order Iterative Methods, J. Comput. App. Math., **189**(3):22–33, 2006.
10. Argyros, I. K., Quadratic Equations and Applications to Chandrasekhar's and Related Equations, Bull. Austral. Math. Soc., **32**(2):275–292, 1985.
11. Argyros, I. K., On a Class of Nonlinear Integral Equations Arising in Neutron Transport, Aequationes Mathematicae, **35**:99–111, 1988.
12. Argyros, I. K., Newton-Like Methods under Mild Differentiability Conditions with Error Analysis, Bull. Austral. Math. Soc., **37**(1):131–147, 1988.
13. Argyros, I. K., On Newton's Method and Nondiscrete Mathematical Induction, Bull. Austral. Math. Soc., **38**:131–140, 1988.
14. Argyros, I. K., Newton-Like Methods and Nondiscrete Mathematical Induction, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, **28**:417–426, 1993.
15. Argyros, I. K. and Szidarovszky, F., The Theory and Applications of Iteration Methods, CRC Press, Inc. Boca Raton, Florida, U.S.A., 1993.
16. Argyros, I. K. and Chen, D., Results on the Chebyshev Method in Banach Spaces, Proyecciones, **12**, **2**(2):119–128, 1993.

17. Argyros, I. K. and Chen D., A note on the Halley method in Banach spaces, *Appl. Math. and Comp.*, **58**:215–224, 1993.
18. Argyros, I. K., Chen D. and Qian Q. S., A local convergence theorem for the Super-Halley method in a Banach space, *Appl. Math. Lett.*, **7**(5):49–52, 1994.
19. Argyros, I. K., On the method of tangent hyperbolas, *J. Approx. Theory Appl. (N. S.)*, **12**:78–95, 1996.
20. Argyros, I. K., On a new Newton-Mysovskii-type theorem with applications to inexact Newton-like methods and their discretizations, *IMA J. Num. Anal., Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications*, **18**:37–56, 1997.
21. Argyros, I. K., Improving the order and rates of convergence for the Super-Halley method in Banach spaces, *Korean J. Comp. Appl. Math.*, **5**(2):465–474, 1998.
22. Argyros, I. K., The Chebyshev method in Banach spaces and the Ptak error estimates. *Adv. Nonlinear Var. Inequal.*, **3**(2): 15–25, 2000.
23. Argyros, I. K., Error bounds for the Halley method in Banach spaces, *Advances in Nonlinear Variational Inequalities*, **3**(2):1–13, 2000.
24. Argyros, I. K., A Newton-Kantorovich theorem for equations involving  $m$ -Fréchet differentiable operators and applications in radiative transfer, *J. Comput. Appl. Math.*, **131**(1-2):149–159, 2001.
25. Argyros, I. K., On the convergence of a certain class of iterative methods and applications in neutron transport, *Math. Sci. Res. Hot-Line*, **5**(5):1–13, 2001.
26. Bićanić, N. and Johnson, K. H., Who was Raphson?, *Internat. J. Numer. Methods Eng.* **14**:148–152, 1979.
27. Beardon, A. F., *Iteration of rational functions. Complex analytic dynamical systems.* Springer-Verlag, New York, 1991.
28. Blanchard, P., Complex analytic dynamics on the Riemann sphere, *Bull. Amer. Math. Soc. (New Series)*, **11**(1):85–141, 1984.
29. Borweim, J. M. and Noll, D., Second Order Differentiability of Convex Functions in Banach Spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **342**:43–80, 1994.
30. Busquier, S., Métodos numéricos de alto orden para la resolución de ecuaciones escalares no lineales. Aplicación a la modelización numérica, Tesina de licenciatura, Universidad de Valencia, GrAN Report, 2000.
31. Butnariu, D. and Iusem A. N., *Totally Convex Functions for Fixed Points Computation and Infinite Dimensional Optimization*, Kluwer Academic Publishers, 2000.
32. Campbell, R., *Les intégrales eulériennes et leurs applications. Stude approfondie de la fonction gamma*, Dunod, 1966.
33. Candela, V. and Marquina, A., Recurrence Relations for Rational Cubic Methods I: The Halley Method, *Computing*, **44**:169–184, 1990.
34. Candela, V. and Marquina, A., Recurrence Relations for Rational Cubic Methods II: The Chebyshev Method, *Computing*, **45**:355–367, 1990.
35. Cauchy, A. L., Sur la détermination approximative des racines d’une équation algébrique ou transcendante, in: *Leçons sur le Calcul Différentiel*, Buré frères, Paris, 573–609, 1829.
36. Ciesielski, Z., Some Properties of Convex Functions of Higher Orders, *Annales Polonici Mathematici*, **7**:1–7, 1959.
37. Conway, J. B., *A Course in Functional Analysis.* Springer-Verlag. Second Edition, 1990.
38. Conway, J. H. and Guy, R. K. *The Book of Numbers.* New York: Springer-Verlag, 1996.

39. Chandrasekhar, D., Radiative transfer, Dover, New York, 1960.
40. Davis H. T., Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations, Dover, 1962.
41. Dennis J. E. Jr., On the convergence of Newton-like methods. In: Numerical methods for nonlinear algebraic equations(Proc. Conf., Univ. Essex, Colchester, 1969), 163–181. Gordon and Breach, London, 1970.
42. Devaney, R. L., Chaos, fractals, and dynamics, Addison-Wesley, New York, 1990.
43. Dubeau, F., Algorithms for  $n$ -th root approximation, Computing, **57**:365–369, 1996.
44. Dubeau, F.,  $n$ -th Root Extraction: Double Iteration Process and Newton's Method, J. Comput. Appl. Math., **91**:191–198, 1998.
45. Dickau, R. M. Catalan Numbers. <http://mathforum.org/advanced/robertd/catalan.html>.
46. Ezquerro, J. A., Gutiérrez, J. M. and Hernández, M. A., A construction procedure of iterative methods with cubical convergence. Appl. Math. Comput., **85**(2-3):181–199, 1997.
47. Ezquerro, J. A. and Hernández, M. A., Avoiding the computation of the second Fréchet-derivative in the Convex Acceleration of Newton's method, J. Comput. Appl. Math., **96**:1–12, 1998.
48. Ezquerro, J. A., Gutiérrez, J. M., Hernández, M. A. and Salanova, M. A., Chebyshev-like Methods and Quadratic equations, Revue d'analyse numérique et de Théorie de l'approximation, **28**(1):23–35, 1999.
49. Ezquerro, J. A., Gutiérrez, J. M., Hernández, M. A. and Salanova, M. A., Resolución de ecuaciones de Riccati algebraicas mediante procesos iterativos de tercer orden, Actas XVI CEDYA-VI CMA, **2**:1069–1076, 1999.
50. Ezquerro, J. A., Gutiérrez, J. M., Hernández, M. A. and Salanova, M. A., Solving nonlinear integral equations arising in radiative transfer, Numer. Funct. Anal. and Optimiz., **20**(7-8):661–673, 1999.
51. Ezquerro, J. A. and Hernández, M. A., A modification of the Super-Halley method under mild differentiability conditions. J. Comput. Appl. Math., **114**(2): 405–409, 2000.
52. Ezquerro, J. A. and Hernández, M. A., A special type of Hammerstein integral equations. Int. Math. J., **1** (6): 557-566, 2002.
53. Ezquerro, J. A., Hernández, M. A. and Salanova, M. A., A Newton-like method for solving some boundary value problems. Numer. Funct. Anal. Optim., **23**(7-8):791–805, 2002.
54. Ezquerro, J. A., Hernández, M. A. and Salanova, M. A., Solving a boundary value problem by a Newton-like method. Int. J. Comput. Math., **79**(10):1113–1120, 2002.
55. Ezquerro, J. A. and Hernández, M. A., On an application of Newton's method to nonlinear operators with  $w$ -conditioned second derivative, BIT, **42**(3):519–530, 2002.
56. Ezquerro, J. A. and Hernández, M. A., A New Class of Third-Order Methods in Banach Spaces, Bull. Inst. Math. Acad. Sin., **31**:33–58, 2003.
57. Ezquerro, J. A. and Hernández, A uniparametric Halley-type iteration with free second derivative, Int. J. Pure Appl. Math., **6**:103–114, 2003.
58. Ezquerro, J. A. and Hernández, A modification of the convergence conditions for Picard's iteration, Comput. Appl. Math., **23**(1):55–65, 2004.
59. Ezquerro, J. A. and Hernández, M. A., New Kantorovich-type conditions for Halley's method, Appl. Num. Anal. Comp. Math., **2**(1):70–77, 2005.

60. Ezquerro, J. A. and Hernández, M. A., On the  $R$ -order of the Halley method, *J. Math. Anal. Appl.*, **303**(2):591–601, 2005.
61. Ezquerro, J. A. and Hernández, M. A., On the  $R$ -order of convergence of Newton's method under mild differentiability conditions, *J. Comput. Appl. Math.*, (aceptado).
62. J. B. J., Fourier, Question d'analyse algébrique, in: *Oeuvres Complètes (II)*, Gauthier-Villars, Paris, 243–253, 1890.
63. Gander, W., On Halley's Iteration Method, *Amer. Math. Monthly*, **92**:131–134, 1985.
64. Garay, J. y Valdizan, J. R., Localización de neuronas mediante la transformada de Hilbert, *Actas XXII Congreso de Neurofisiología*, Barcelona, 1984.
65. Garay, J. and Hernández, M. A., Degree of Logarithmic Convexity, *Publicaciones del Sem. Mat. García Galdeano, Serie II*, **26**, Zaragoza, 1988.
66. Gerlach, J., Accelerated Convergence in Newton's Method, *SIAM Rev.*, **36**:272–276, 1994.
67. Giles, J. R., *Convex Analysis with Application in Differentiation of Convex Functions*, Pitman, 1982.
68. Gutiérrez, J. M., *El método de Newton en espacios de Banach*, Tesis Doctoral, Universidad de La Rioja, 1995.
69. Gutiérrez, J. M., Hernández, M. A. and Salanova, M. A., Accesibility of Solutions by Newton's Method, *Inter. J. Computer Math.*, **57**: 239–247, 1995.
70. Gutiérrez, J. M., A new semilocal convergence theorem for Newton's method, *J. Comput. Appl. Math.*, **79**:131–135, 1997.
71. Gutiérrez, J. M. and Hernández, M. A., A family of Chebyshev-Halley Type Methods in Banach Spaces, *Bull. Austr. Math. Soc.*, **55**(1):113–130, 1997.
72. Gutiérrez, J. M. and Hernández, M. A., New Recurrence Relations for Chebyshev Method, *Appl. Math. Lett.*, **10**(2):63–65, 1997.
73. Gutiérrez, J. M. and Hernández, M. A., Recurrence Relations for the Super-Halley Method, *Computers Math. Appl.*, **36**(7):1–8, 1998.
74. Gutiérrez, J. M. and Hernández, M. A., An acceleration of Newton's method: Super-Halley method. *Appl. Math. Comput.*, **117**(2-3):223–239, 2001.
75. Gutiérrez, J. M., Hernández, M. A. and Salanova, M. A., Calculus of  $n$ -th roots and third order Iterative Methods, *Nonlinear Analysis*, **47**:2875–2880, 2001.
76. Gutiérrez, J. M., Hernández, M. A. and Romero, N., A note on a modification of Ulm's method, *Journées LNF: Liens Calcul Numérique - Calcul Formel*, Toulouse, Francia, 2004.
77. Greenspan, D., *Introductory Numerical Analysis of Elliptic Boundary Value Problems*, Harper and Row, New York, 1965.
78. Hairer, E. and Wanner, G., *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Springer-Verlag, 1991.
79. Hald, O. H., On a Newton-Moser type method, *Numer. Math.*, **23**:411–425, 1975.
80. Henrici, P., *Elements of Numerical Analysis*. Wiley. New York, 1982.
81. Henrici, P., *Applied and Computational Complex Analysis*. Wiley. New York, 1986.
82. Henrici, P., *Essentials of Numerical Analysis with Pocket Calculator Demonstrations*, Jhon Wiley & Sons. New York, 1982.
83. Hernández, M. A., An acceleration procedure of the Whittaker method by means of convexity, *Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat.*, **20**(1):27–38, 1990.

84. Hernández, M. A. y Salanova, M. A., Grados de convexidad y concavidad de una curva. Su aplicación al estudio de procesos iterativos para la resolución de ecuaciones. Publicaciones del Sem. Mat. García Galdeano, Serie II, **4**, Zaragoza, 1991.
85. Hernández, M. A., A note on Halley's method, Numer. Math. **59**(3):273–279, 1991.
86. Hernández, M. A., Newton-Raphson's method and convexity, Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat., **22**(1):159–166, 1992.
87. Hernández, M. A. y Salanova, M. A., La convexidad y concavidad de procesos iterativos para la resolución de ecuaciones. Publicaciones del Sem. Mat. García Galdeano, Serie II, **5**, Zaragoza, 1993.
88. Hernández, M. A. y Salanova, M. A., La convexidad en la resolución de ecuaciones escalares no lineales. Universidad de La Rioja. Servicio de publicaciones, 1996.
89. Hernández, M. A. and Salanova, M. A. An acceleration procedure of regula falsi method. Tamkang J. Math. **28**(1):67–77, 1997.
90. Hernández, M. A. and Salanova, M. A., Index of convexity and concavity. Application to Halley method, Appl. Math. Comput., **103**: 27–49, 1999.
91. Hernández, M. A., Second-derivative-free variant of the Chebyshev method for nonlinear equations. J. Optim. Theory Appl., **104**(3): 501–515, 2000.
92. Hernández, M. A., Chebyshev's approximation algorithms and applications. Comput. Math. Appl., **41**(3-4):433–445, 2001.
93. Hernández, M. A. and Salanova, M. A., A Newton-like iterative process for the numerical solution of Fredholm nonlinear integral equations. J. Integral Equations Appl., **17**(1):1–17, 2005.
94. Hilton, P. and Pederson, J., Catalan Numbers, Their Generalization, and Their Uses, Math. Intel., **13**:64–75, 1991.
95. Hiriart-Urruty, J. B. and Lemariéchal C., Fundamentals of Convex Analysis", Grundlehren, Text Editions, Springer, 2001.
96. Hörmander, L., "Notions of Convexity", Birkhäuser, 1994.
97. Kalantari, B. and Kalantari, I., High Order Iterative Methods for Approximating Square Roots, BIT, **36**:395–399, 1996.
98. Kalantari, B., Kalantari, I. and Zaare-Nahandi, A basic family of iteration functions for polynomial root finding and its characterizations, J. Comput. Appl. Math., **80**:209–226, 1997.
99. Kantorovich, L. V., On Newton's Method for Functional Equations, Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R., **59**:1237–1240, 1948.
100. Kantorovich, L. V., On Newton's Method, Trudy Mat. Inst. Steklov, **28**:104–144, 1949.
101. Kantorovich, L. V. and Akilov, G. P., "Functional Analysis", Pergamon Press, 1982.
102. Kneisl, K., Julia sets for the super-Newton method, Cauchy's method, and Halley's method. Chaos **11**(2): 359–370, 2001.
103. Knill, R. J., A Modified Babylonian Algorithm, Amer. Math. Monthly, **99**:734–737, 1992.
104. Melman, A., Geometry and convergence of Euler's and Halley's methods, SIAM Rev., **39**:728–735, 1997.
105. McMullen, C., Families of rational maps and iterative root-finding algorithms, Ann. Math. **125**:467–493, 1987.

106. Milnor, J., Dynamics in One Complex Variable: Introductory Lectures, Vieweg, 1999.
107. Moore, R. E., "Methods and Applications of Interval Analysis", SIAM Studies in Applied Mathematics, 1979.
108. Moret, I., A Note on Newton Type Iterative Methods, Computing, **33**:65–73, 1984.
109. Moret, I., On a general iterative scheme for Newton-type methods, Numerical Functional Analysis and Optimization, **9**:1115–1137, 1987.
110. Morosawa, S., Nishimura, Y., Taniguchi, M. and Ueda, T., Holomorphic Dynamics, Cambridge University Press, 1999.
111. Moser, J., Stable and random motions in dynamical systems with special emphasis on celestial mechanics, Herman Weil Lectures, Annals of Mathematics Studies **77**, (Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1973).
112. Nashed, M. Z and Chen, X., Convergence Newton-like methods for singular operator equations using outer inverses. Numer. Math. **66** (2):235-257, 1993.
113. Neta, B., Several new methods for solving equations, Internat. J. Comput. Math., **23**:265–282, 1988.
114. Neuberger, J. W., Continuous Newton's method for polynomials, The Mathematical Intelligencer, **21**(3):18–23, 1999.
115. Ortega, J. M. and Rheinboldt W. C., Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, Academic Press, Inc., 281–298, 1970.
116. Ortega, J. M. and Rockoff, M., Nonlinear difference equations and Gauss-Seidel type iterative methods, *SIAM J. Numer. Anal.*, **3**:497–513, 1966.
117. Ostrowski, A. M., "Solution of Equations in Euclidean and Banach Spaces", Academic Press, New York, 1943.
118. Ostrowski, A. M., "Solution of Equations and Systems of Equations", Academic Press, New York, 1960; second edition, 1966.
119. Peitgen, H. O. and Richter, P. H., The beauty of fractals, Springer-Verlag, New York, 1986.
120. Phelps, R. R., "Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability", Springer-Verlag, 1993.
121. Porter, D. and Stirling, D. S. G., Integral Equation. A Practical Treatment, from Spectral Theory to Applications. Cambridge, 1990.
122. Potra, F. A. and Ptak, V., Nondiscrete induction and iterative processes, Pitman Advanced Publishing Program, 1984.
123. Potra, F. A. and Ptak, V., Sharp Error Bounds for Newton Process, Numer. Math. **34**:63–72, 1980.
124. Potra, F. A. and Ptak, V., Sharp error bounds for a class of Newton-like Methods, Libertas Mathematica **5**:71–84, 1985.
125. Potra, F. A., The Kantorovich Theorem and interior point methods, Math. Program., **102**(1): 47–70, 2005.
126. Pták, V., Concerning the Rate of Convergence of Newton's Process, Comm. Math. Univ. Carolinae **16**:699–705, 1975.
127. Pták, V., The Rate of Convergence of Newton's Process, Numer. Math. **25**:279–285, 1976.
128. Rall, L. B., Computational Solution of Nonlinear Operator Equations, Wiley. New York, 1969.
129. Rheinboldt, W. C., A Unified Convergence Theory for a Class of Iterative Processes, *SIAM J. Numer. Anal.*, **5**:42–63, 1968.

130. Roberts, A. W. and Varberg, D. E., "Convex Functions", Academic Press, 1973.
131. Shafiev, R. A., On a modification of Chebyshev's method, *Zh. Vych. Mat.*, **3**(5):950–953, 1963.
132. Shafiev, R. A., On some iterative processes, *Ž. Vyčisl. Mat. Fiz.*, **4**:139–143, 1964. (Translated into English by L. B. Rall as MRC Technical Summary Report, No. 649, Univ. Wisconsin-Madison, 1966).
133. Shafiev, R. A., An approximation analogue of the improved Newton-Kantorovich method. (Russian) *Bul. Akad. Štiințe RSS Moldoven*, no. **92**(3):16–23, 1975.
134. Scavo, T. R. and Thoo J. B., On the geometry of Halley's method, *Amer. Math. Monthly*, **102**(5):417–426, 1995.
135. Schmidt, J., Eine Übertragung der Regula Falsi auf Gleichungen im Banachraum I, II, *Z. Angrew. Math. Mech.* **43**:1–8, 97–110, 1963.
136. Schröder, E., Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen, *Math. Ann.*, **2**:317–365, 1870.
137. Smale, S., The fundamental theorem of algebra and complexity theory, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **4**:1–35, 1981.
138. Smale, S., On the efficiency of algorithms of analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **13**:87–105, 1985.
139. Shub, M. and Smale, S., Complexity of Bézout theorem I: Geometric aspects, *J. Amer. Math. Soc.*, **6**:459–501, 1993.
140. Traub, J. F., "Iterative Methods for the Solution of Equations", Prentice Hall, Englewood Clifss, New Jersey, 1964.
141. Ulm, S., On iterative methods with successive approximation of the inverse operator (in Russian), *Izv. Akad. Nauk Est. SSR*, **16**:403–411, 1967.
142. Varga, R., "Matrix Iterative Analysis", Prentice Hall, Englewood Clifss, New Jersey, 1962.
143. Varona, J. L., Graphic and numerical comparison between iterative methods. *Math. Intelligencer*, **24** (1):37–46, 2002.
144. Wall, D., The order of an iteration formula, *Math. Comp.*, **10**:167–168, 1956.
145. Wang, X., Some results relevant to Smale's reports, *Proceedings of the Smalefest* (M.V. Hirsch, J.E. Marsden y M. Shub editors), Springer-Verlag., 456–465, 1993.
146. Wang, D. and Zhao, F., The theory of Smales's point estimation and its applications, *J. Comput. Appl. Math.*, **60**:253–269, 1995.
147. Wang, X., Li, C. and Lai, M. J., A unified convergence theory for Newton-type methods for zeros of nonlinear operators in Banach spaces. *BIT*, **42**(1):206–213, 2002.
148. Wang, X. and Li, C., On the United Theory of the Family of Euler-Halley Type Methods with Cubical Convergence in Banach Spaces, *J. Comput. Math.*, **21** (2):195–200, 2003.
149. Weisstein E. W. et al. "Catalan Number". From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/CatalanNumber.html>
150. Yakoubsohn, J. C., Finding zeros of Analytic functions:  $\alpha$ -theory for secant type method, *J. Complexity*, **15**:239–281, 1999.
151. Yakoubsohn, J. C., Finding a cluster of zeros of univariate polynomials, *J. Complexity*, **16**(3):603–638, 2000.

152. Yakoubsohn, J. C., Simultaneous computation of all the zero-clusters of a univariate polynomial, in: F. Cucker, M. Rojas (Eds.), *Foundations of Computational Mathematics, Proceedings of the Smalefest 2000*, World Scientific, Singapore, 433–457, 2002.
153. Yakoubsohn, J. C., Numerical analysis of a bisection-exclusion method to find zeros of univariate analytic functions, *J. Complexity*, **21**(5):652–690, 2005.
154. Yamamoto, T., On the method of tangent hyperbolas in Banach spaces, *J. Appl. Math.*, **21**:75–86, 1988.
155. Yamamoto, T., Historical developments in convergence analysis for Newton's and Newton-like methods. *J. Comput. Appl. Math.*, **124**(1-2):1-23, 2000. *Numerical analysis 2000, Vol. IV, Optimization and nonlinear equations.*
156. Zabrejko, P. P. and Nguen, D. F., The Majorant Method in the Theory of Newton-Kantorovich Approximations and the Pták Error Estimates, *Numer. Funct. Anal. and Optimiz.*, **9**(5 & 6): 671–684, 1987.