



# UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

## TESIS DOCTORAL

Título
<b>El método de Chebyshev para el cálculo de las raíces de ecuaciones no lineales</b>
Autor/es
<b>Martín García Olivo</b>
Director/es
José Manuel Gutiérrez Jiménez
Facultad
Titulación
Departamento
Matemáticas y Computación
Curso Académico
2012-2013



**El método de Chebyshev para el cálculo de las raíces de ecuaciones no lineales,**  
tesis doctoral

de Martín García Olivo, dirigida por José Manuel Gutiérrez Jiménez (publicada por la  
Universidad de La Rioja), se difunde bajo una Licencia  
Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 3.0 Unported.  
Permisos que vayan más allá de lo cubierto por esta licencia pueden solicitarse a los  
titulares del copyright.

- © El autor
- © Universidad de La Rioja, Servicio de Publicaciones, 2013  
publicaciones.unirioja.es  
E-mail: publicaciones@unirioja.es



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

FACULTAD DE CIENCIAS, ESTUDIOS AGROALIMENTARIOS  
E INFORMÁTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

TESIS DOCTORAL

**El método de Chebyshev  
para el cálculo de las raíces de ecuaciones no lineales**

**Memoria presenta por**

Martín García Olivo  
para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas  
por la Universidad de La Rioja

**Dirigida por el Doctor**  
José Manuel Gutiérrez Jiménez

Logroño 2013





UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

**Programa de Doctorado**

Ingeniería Eléctrica, Matemáticas y Computación

**Tesis Doctoral**

El método de Chebyshev  
para el cálculo de las raíces de ecuaciones no lineales

**Dirigida por el Doctor**

José Manuel Gutiérrez Jiménez

**Presentada por**

Martín García Olivo

24 de mayo de 2013



## Dedicatoria

Dedico este trabajo a todos aquellos que ven cada día una nueva oportunidad para aportar al desarrollo de la ciencia y a los estudiantes de todo el mundo que, pese a carecer de los recursos económicos, se permiten soñar con metas de largo alcance. A los becarios de países en vía de desarrollo, en especial a los que aceptan la preparación como vía de ascenso gradual en la escala social.

Finalmente, he querido dedicar esta Tesis Doctoral a todos aquellos que estén dispuestos a asumir el compromiso propio del ejercicio de la investigación

en

el

que

se

dividen

los distintos campos de estudios y saltar airoso los obstáculos propios de dicho esfuerzo.

La Rioja, Comunidad Cultural del Vino



## Agradecimientos

La realización de esta memoria ha sido posible gracias a la magistral dirección y disponibilidad del Doctor *José Manuel Gutiérrez Jiménez*, a quien agradezco su apoyo, motivación y entrega, además del hecho de trazar las pautas en mi iniciación en este campo de la investigación de las matemáticas aplicadas.

Mi agradecimiento eterno al Dr. M. A. Hernández (siempre atento a las posibilidades que pudiéramos tener de presentar nuestros resultados en las distintas Jornadas de trabajos y en los congresos, tanto nacionales (de España), como internacionales), coordinador del Grupo de investigación de Procesos Iterativos y Ecuaciones No Lineales (PRIENOL) y todos sus integrantes: José Antonio Ezquerro Fernández, José Manuel Gutiérrez Jiménez (mi tutor en los cursos de doctorado y director de Tesis Doctoral), María Jesús Rubio Crespo, Natalia Romero Álvarez y Ángel Alberto Magreñán Ruiz (mi compañero y apoyo en todo este importante tramo final de la investigación, asumiendo juntos los desafíos que esto conlleva, eres mi hermano Magre).

Agradezco también tanto al personal administrativo, Esther Santolaya, Mónica Fernández y Elena Roig, como a los docentes del Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de la Rioja, por estar siempre dispuestos a colaborar en momentos en que los necesité, disminuyendo con su accionar el efecto que causa estar lejos de mi familia, y algunos que dedicaron parte de su valioso tiempo para irradiar claridad sobre temas específicos. Óscar Ciaurri Ramírez con el programa Mathematica y algunos matices sobre LaTeX, José Antonio Martínez Muñoz (Toño) por sus oportunas ayudas con el ordenador, y Juan Luis Varona Malumbres por las horas que compartimos entre tipografía y LaTeX.

España, te hiciste eterna en mis recuerdos gracias a la acogida que he recibido de las doctoras y los doctores Clara Jiménez, Eloy Javier Mata Sotés, Francisco Javier Pérez Lázaro, Jesús Laliena, Jesús Murillo, José Ignacio Extremiana, José Luis Ansorena (actual Director del Departamento), José María Pérez Izquierdo (Chema), Judit Mínguez, Julio Rubio, Luis Javier Hernández Paricio (con quien trabajamos algunos temas), Luz Roncal, Manuel Bello, María Ángeles, María Teresa Rivas, Luis Español, Pilar Benito y Víctor Lanchares.

También quiero agradecer de forma muy especial la colaboración de A. P. Pozhidaov de la Universidad Novosibirsk y de Iván Shestakov de la Universidad de São Paulo, por facilitarnos una copia del trabajo original de Chebyshev en ruso, publicado en el Tomo V de las obras completas de Chebyshev. Muestro especial agradecimiento a la rusa Svetlana Voznesenskaya Abonosimova (Ana) y al Dr. Mario Pérez Riera, por su desinteresada colaboración en la traducción del artículo original de Chebyshev «Cálculo de las raíces de ecuaciones»<sup>1</sup> y al filólogo ruso

---

<sup>1</sup>El trabajo estudiantil de P. L. Chebyshev, presentado por primera vez en 1838.

## IV

Aliaksandr Yurevich, quien nos hiciera una revisión desinteresada de dicha traducción.

Siento gratitud por el «Ministerio de Educación Superior, Ciencia y Tecnología (MESCyT)», en la persona de Doña Ligia Amada Melo de Cardona, por otorgarme la beca de estudios, con la cual realizara, en su momento, los cursos de doctorado y también por el apoyo económico y logístico para la estancia y defensa de esta Tesis Doctoral en este tramo final. Sin obviar el agradecimiento a mis compañeros de trabajo del «Centro Politécnico Militar San Miguel Arcángel», especialmente agradezco a Erenia Guevara, quien me informara sobre la existencia y disponibilidad de dicha beca y a mis compañeros de labor del Dirección de Auditoría y Control de Procesos Educativos del Ministerio de Educación de la República Dominicana (MINERD).

Mi agradecimiento al Departamento de Cooperación Universitaria y Científica de la Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo (AECID) y al Ministerio de Asuntos Exteriores y de Cooperación (MAEC), por el apoyo económico y logístico recibido en la etapa intermedia de esta investigación, ya que sin su colaboración este proyecto no hubiese tenido un final feliz.

Cómo no estar eternamente agradecido del compañerismo que disfruté, las jornadas espontáneas de intercambio cultural y las andanzas dominicales acompañado de Daniel González Zánchez (Español), Ángel Alberto Magreñán Ruiz (Español), Claudia Vela Urrego (Colombiana) y Luzia Mara Mataveli (Brasileña).

Es honor y dicha a la vez, tener la oportunidad de agradecer en vida a mis padres Don Arturo García Sierra y Doña Anathalia Olivo De la Cruz, por el amor, apoyo, tolerancia y ejemplo de entrega que siempre me han mostrado. A mis hermanos: Eddy, Onne Arturo, Cariny Altagracia, Yoel y Horquidea, por soportarme sin reproches los largos ratos de ausencia familiar, sin dejar de citar los sabios consejos y el apoyo de mi abuela Ramona Olivo, a toda mi familia y amigos en general, muchas gracias.

La Rioja, España, 24 de mayo de 2013

## Prólogo

En una ocasión dije para mis adentros: «Si fuese capaz de escribir algo, convencido de que es definitivo, que no admita la dinámica cotidiana de la ciencia», ya estaría disminuyendo la razón de mi propia existencia. Así que, la redacción de esta memoria está pensada para que aún con el pasar del tiempo, pueda seguir cuestionándome respecto a los temas incluidos y los que por razones de espacio o incluso de tiempo, quedaron fuera a pesar de haber dedicado muchas horas de estudios en ellos.

Asumo esta memoria como una insinuación de lo que vendrá, como un peldaño en la escalera de mi vida investigadora, como un suspiro en el trayecto de mi formación o como un motivo a explorar y profundizar en temas de interés.

El contenido de esta Tesis Doctoral se enmarca en el área de las matemáticas aplicadas conocida como métodos numéricos, específicamente, se estudia el método de Chebyshev y en cuatro capítulos abarca desde una base de contenido histórico, pasando por la recta real y la dinámica compleja, para finalizar con el método de Chebyshev en los espacios de Banach. El estudio que presentamos en todo el texto, se presenta de manera gradual, es decir que al llegar al último capítulo, se requiere de conocimientos matemáticos más sólidos.

Desde tiempos muy remotos el ser humano se ha visto en la necesidad de modelar matemáticamente, situaciones que conlleven a la solución de un problema de la vida cotidiana, y estos modelos, no siempre se presentan por medio de ecuaciones sencillas. En la mayoría de los casos, ni siquiera es posible contar con soluciones exactas de dichas ecuaciones, de ahí que la aproximación numérica ha sido de gran ayuda desde épocas muy antiguas. Se puede citar como ejemplo los polinomios de Taylor que aproximan a una función, o los polinomios interpoladores obtenidos por Newton y Lagrange para ajustar una función polinómica a una tabla de  $n$  valores, o el método de Newton para hallar una solución aproximada de una ecuación, o el método de Euler para el cálculo de una solución aproximada de una ecuación diferencial y por último, el eje central de esta tesis, el método de Chebyshev para el cálculo de las raíces de ecuaciones no lineales.

Este trabajo trata sobre el conocido método de Chebyshev para resolver una ecuación no lineal. Así, dada una ecuación

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

donde  $f$  es una función real de variable real (podríamos suponer también que se trata de una función compleja), el método de Chebyshev consiste en generar una sucesión de la forma

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2}L_f(x_n)\right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad \text{donde} \quad L_f(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}, \quad (2)$$

## VI

a partir de un determinado punto de partida  $x_0$ . En condiciones adecuadas, el proceso iterativo anterior converge a un límite  $x^*$  que es una solución de la ecuación (1).

Desde una perspectiva histórica, el método de Chebyshev (1.1) aparece dentro de una familia de procesos iterativos de la forma  $x_{n+1} = E_m(x_n)$ , donde

$$E_m(x) = x + \sum_{\nu=1}^{m-1} (-1)^\nu \frac{f(x)^\nu}{\nu!} (f^{-1})^{(\nu)}(f(x)), \quad (3)$$

y  $f^{-1}$  es la inversa de  $f$ .

Nos gustaría recalcar que no hay un consenso en llamar *método de Chebyshev* al proceso definido en (1.1). De hecho, podemos encontrar en la literatura matemática diversas formas de denominar el método definido por (1.1). De manera que más adelante presentamos una lista con una muestra de algunas denominaciones, junto con los autores y trabajos correspondientes.

Como conclusión final de este trabajo, creemos que lo más correcto es referirse al método definido en (1.1) como método de Chebyshev y reservar los nombres de Euler y de Schröder para referirse a la familia de procesos iterativos (3).

El primer capítulo de esta tesis está dedicado a honrar la memoria de P. L. Chebyshev, así que, pudiera decirse que es un capítulo de carácter histórico. En la primera sección, presentamos un compendio de la vida y obra científica de Chebyshev, haciendo énfasis especial al legado de Chebyshev que trascendió los linderos de su generación y sigue teniendo vigencia en muchos de los campos de la ciencia, la ingeniería y la técnica, en los que se ocupó durante su etapa productiva.

Según el propio Chebyshev, *«la unión de la teoría y la práctica proporciona los resultados más provechosos. Con ello, no sólo gana la práctica, sino que también salen beneficiadas las ciencias. La práctica descubre a la teoría nuevos objetivos de investigación o nuevas facetas en los objetos ya conocidos»*. Esta frase es compartida por Euler y muchos otros hombres de ciencia, que si bien no lo expresaron textualmente, al menos puede deducirse del legado de sus obras, y es compartida también por nosotros.

En la segunda sección presentamos la traducción del ruso al español del artículo original de Chebyshev «Cálculo de las raíces de ecuaciones». Artículo que Chebyshev presentó en un concurso para jóvenes investigadores, organizado por el Departamento de Matemáticas y Físicas de la Universidad de Moscú durante el año lectivo 1840–1841. Dicho artículo había sido escrito por Chebyshev entre los años 1837 y 1838, siendo apenas un joven de 16 años de edad. Por dicho artículo, recibió la medalla de plata, aunque muchos piensan que merecía la medalla de oro, entre los que me incluyo.

El artículo «Cálculo de las raíces de ecuaciones» según el propio J. F. Traub, no era de fácil acceso, y ahora lo entiendo, porque a pesar de que se contaba

con una compilación de las obras de Chebyshev, y que gran parte de las obras se había traducido al francés, dicho artículo se encontraba en el tomo *V* de sus obras completas, en una sección denominada «otros trabajos» y permanecía en ruso. Como resultado de la investigación de la parte histórica, hemos publicado el libro titulado «La obra *El cálculo de las raíces de una ecuación*» véase [57]. Además, tenemos publicado el artículo [55] y otro aceptado para su publicación en el número 57 de *Miscelanea Matemática* 2013, véase [58].

Este capítulo incluye, en la Sección 3 las aportaciones que hicieron otros autores al método de Chebyshev y otros autores que pudieron ser influenciados por él. Finalmente, presentamos en la Sección 4, distintas formas en las que puede deducirse el método de Chebyshev, como son la interpolación cuadrática, o por medio de parábolas osculadoras o la interpolación exponencial o incluso siguiendo los métodos de Obreshkov.

El Capítulo 2 presenta la dinámica real del método de Chebyshev. El estudio se divide en tres partes bien diferenciadas, en la primera sección presentamos algunas propiedades del método de Chebyshev, enfatizando en sus características dinámicas y de convergencia en diferentes contextos, como por ejemplo, cómo se comporta el método de Chebyshev frente a raíces simples o dobles y la existencia de puntos fijos extraños (puntos que no son solución de (1)).

La segunda sección y sus subsecciones están dedicadas a estudiar el comportamiento dinámico del método de Chebyshev en la recta real, considerando los distintos casos de polinomios cuadráticos. Identificamos las regiones de accesibilidad a la raíces, caracterizamos los puntos fijos y puntos fijos extraños. Además, comprobamos la existencia de un conjunto no numerable de tipo Cantor de puntos de no convergencia a las raíces. Dicho conjunto forma parte del conjunto de Julia asociado a la función racional. Además, en el conjunto de Julia de dicha función están también los 2-ciclos repulsores y el resto de  $n$ -ciclos repulsores, así como las preimágenes del polo  $x = 0$ .

Dedicamos la Sección 3 al estudio de los distintos casos de polinomios cúbicos, haciendo uso de transformaciones afín de la forma  $\tau(x) = \alpha x + \beta$ , de esta manera, el polinomio  $f(x)$  se reduce a uno de los tipos de polinomios simples siguientes:  $f_{\bullet}(x) = x^3$ ,  $f_{+}(x) = x^3 + x$ ,  $f_{-}(x) = x^3 - x$  o a un miembro de la familia uniparamétrica de polinomios cúbicos dada por  $f_{\gamma}(x) = x^3 + \gamma x + 1$ . Como puede observarse, a su vez, de esta familia surgen cinco casos distintos que están relacionados con el valor del parámetro  $\gamma$ . Así, dedicamos un apartado a cada caso, considerando los aspectos dinámicos sobre la recta real y con un esquema parecido al seguido en la sección anterior.

Al final del capítulo, como ya habíamos caracterizado puntos fijos y una vez ubicadas las regiones de acceso a soluciones, quisimos terminar con los diagramas de bifurcación, que muestran los puntos a los que converge la órbita de un punto

## VIII

inicial  $x_0$ , para diferentes valores del parámetro  $\gamma$ .

Para continuar avanzando en el estudio, reservamos el Capítulo 3 a la dinámica compleja del método de Chebyshev. En la primera sección, más que una introducción, entendimos necesario incluir como preliminares, algunas definiciones y resultados que más adelante serán de gran utilidad, de esta forma, hacemos también un capítulo autocontenido.

Los primeros resultados que obtuvimos mientras realizábamos el proceso de investigación, posterior a los cursos de doctorado, estuvieron enmarcados dentro de este tema, así, presentamos dos comunicaciones a distintos congresos, véase [54] y [56], en el que dimos una caracterización para una familia de polinomios (polinomios malos), para los cuales el método de Chebyshev tiene el cero como punto fijo superatractor.

La Sección 2 aborda el clásico problema de Cayley y la dinámica del método de Chebyshev en el plano complejo, usando los polinomios de segundo grado. La temática seguida en todo el capítulo consiste en ir comparando las propiedades dinámicas del método de Chebyshev con los bien conocidos métodos de Halley y Newton.

Como motivación para esta parte de la investigación o seducción por parte del método de Chebyshev, citamos el hecho de que ya para polinomios cuadráticos el método de Chebyshev presentaba un comportamiento diferente a los métodos de Halley y Newton, en lo referente al conjunto de Julia asociado a su cuenca de atracción. Con este buen argumento en manos, decidimos estudiar el caso cúbico.

Para entender la dinámica de las funciones de iteración resultantes, estudiamos las órbitas de sus puntos críticos. La clave que emplearemos la presentamos en un resultado sobre el conjunto de Fatou asociado a la función de iteración.

En las subsecciones 3.3.1, 3.3.2 y 3.3.3, la estrategia empleada consistió, al igual que en el caso cuadrático, en lugar de estudiar la función racional  $C_p(z)$ , resulta más conveniente estudiar las funciones racionales obtenidas mediante conjugación topológica, para esta ocasión seleccionamos las transformaciones de tipo Möbius  $\mathbb{M}_1$  y  $\mathbb{M}_2$  definidas en (3.7) y (3.8), respectivamente.

En 3.3.1 presentamos el caso del método de Chebyshev, aplicado a polinomios cúbicos con una raíz triple, donde la convergencia del método de Chebyshev es lineal en todo caso, pero se hace más lenta según aumenta  $n$ , siendo  $n$  el número de iteraciones.

Para el apartado 3.3.2 dejamos el estudio de los polinomios cúbicos con una raíz doble, donde el método de Chebyshev tiene convergencia lineal.

Finalmente, en el caso de los polinomios cúbicos (caso general) ya McMullen, véase [92], probó que ninguno de los tres métodos considerados tiene convergencia general para polinomios cúbicos, es decir, que este estudio representó un reto personal. Así, analizamos las órbitas de los puntos críticos libres, tomando en cuenta

el conocido teorema de Fatou y Julia, véase [20], el cual asegura que cada ciclo atractor debe atraer al menos a un punto crítico.

Resultaba casi de cumplida obligación el terminar esta memoria con unas pinceladas sobre el estudio de la convergencia del método de Chebyshev en espacios de Banach, no en vano éste es el tema de investigación principal del grupo de investigación que me acogió en la Universidad de La Rioja. Además, esto nos permite tener una visión lo más amplia posible del estudio del método de Chebyshev, generalizando su estudio a espacios diferentes de los números reales o complejos, ya tratados en los capítulos anteriores. En consecuencia, este estudio abre la puerta a la aplicación del método de Chebyshev para resolver una gran variedad de problemas, tales como sistemas de ecuaciones no lineales, ecuaciones integrales, ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales, problemas variacionales, etc. Somos conscientes de que lo tratado en este capítulo es solo una primera aproximación y que un estudio mucho más profundo y sistemático podría hacerse en este campo. Sin embargo, se ha pretendido hacer un recorrido por lo que, a nuestro juicio, son las principales técnicas empleadas en el estudio de la convergencia de un proceso iterativo en espacios de Banach. Hemos intentado basar nuestro estudio en resultados ya existentes para el método de Chebyshev o para otros métodos familiares, como los de Newton o Halley, apoyándonos en las referencias oportunas que se citan en el Capítulo 4. No obstante, estamos seguros que otras técnicas más novedosas se han quedado fuera de esta primera aproximación.

Comenzamos el Capítulo 4 con unos resultados elementales sobre la convergencia local del método de Chebyshev para funciones de variable real para pasar a caracterizar después su convergencia global. En la Sección 4.2 es donde abordamos por primera vez el estudio en espacios de Banach. Se han considerado dos técnicas clásicas para el análisis de la convergencia local, es decir, con condiciones que asumen la existencia de solución para la ecuación que se pretende resolver,  $F(x) = 0$ . Así, en líneas resumidas, en la teoría local de Kantorovich se exige que la derivada del operador  $F$  satisfaga una condición de Lipschitz en un entorno de la solución buscada. Por contra, en la teoría local de Smale, conocida como  $\gamma$ -teoría se cambia la condición sobre la primera derivada por un conjunto de condiciones sobre las derivadas sucesivas de  $F$ . Como contrapartida, en lugar de exigir que las condiciones se cumplan en un cierto entorno, solo se exigen condiciones de forma puntual, sobre la propia raíz a localizar.

Algo parecido se realiza en la Sección 4.3, donde la convergencia semilocal es analizada. Se estudian las condiciones semilocales de Kantorovich y Smale ( $\alpha$ -teoría en este caso), que básicamente consisten en cambiar los papeles de la solución en la teoría local por el del punto inicial. Nótese que, en la teoría semilocal no se exige a priori la existencia de una solución, por lo que los resultados obtenidos pueden verse como unos resultados de existencia y unicidad de solución para resolver ecuaciones

no lineales. Esta sección se complementa con una tercera técnica, la de relaciones de recurrencia, que permite en muchos casos flexibilizar las condiciones y el estudio de procesos iterativos en espacios de Banach. Sin duda esta última técnica es la que abre mayores posibilidades de generalización para estudios futuros.

Por último, terminamos este capítulo con una pequeña muestra de ejemplos donde, más que comparar e ilustrar las técnicas consideradas en las secciones anteriores, se ha pretendido mostrar de forma testimonial la aplicación del método de Chebyshev en diferentes contextos: una ecuación real, un sistema de ecuaciones y una ecuación integral.

# Índice general

<b>1. Cálculo de las raíces de ecuaciones</b>	<b>1</b>
1.1. Notas biográficas de Chebyshev . . . . .	6
1.1.1. Un grande de la ciencia ¿nace o se hace? . . . . .	6
1.1.2. Obra científica de Chebyshev . . . . .	9
1.1.3. Méritos alcanzados por Chebyshev . . . . .	11
1.1.4. Notas curiosas sobre la vida de Chebyshev . . . . .	13
1.1.5. Cronología de la vida de Chebyshev . . . . .	15
1.2. Traducción del artículo original . . . . .	16
1.3. Aportaciones de otros autores . . . . .	48
1.3.1. Leonhard Euler . . . . .	49
1.3.2. Joseph Louis Lagrange . . . . .	53
1.3.3. Jean Baptiste Joseph Fourier . . . . .	57
1.3.4. Jacques Charles Francois Sturm . . . . .	58
1.3.5. Friedrich Wilhelm Karl Ernst Schröder . . . . .	60
1.4. Construcciones del método de Chebyshev . . . . .	64
1.4.1. Interpolación cuadrática inversa . . . . .	65
1.4.2. Método de las parábolas tangentes . . . . .	66
1.4.3. Interpolación exponencial . . . . .	68
1.4.4. Siguiendo los métodos de Obreshkov . . . . .	69
<b>2. Dinámica real del método de Chebyshev</b>	<b>73</b>
2.1. Propiedades del método de Chebyshev . . . . .	74
2.2. Polinomios cuadráticos . . . . .	77
2.2.1. Caso $f_1(x) = x^2$ . . . . .	79
2.2.2. Caso $f_2(x) = x^2 - 1$ . . . . .	79
2.2.3. Caso $f_3(x) = x^2 + 1$ . . . . .	81
2.3. Polinomios cúbicos . . . . .	82
2.3.1. Caso $f_{\bullet}(x) = x^3$ . . . . .	82
2.3.2. Caso $f_+(x) = x^3 + x$ . . . . .	85
2.3.3. Caso $f_-(x) = x^3 - x$ . . . . .	86
2.3.4. Caso $f_{\gamma}(x) = x^3 + \gamma x + 1$ con $\gamma > 0$ . . . . .	88

2.3.5.	Caso $f_\gamma(x) = x^3 + \gamma x + 1$ con $\gamma = 0$ . . . . .	92
2.3.6.	Caso $f_\gamma(x) = x^3 + \gamma x + 1$ con $\gamma \in (\gamma^*, 0)$ . . . . .	95
2.3.7.	Caso $f_\gamma(x) = x^3 + \gamma x + 1$ con $\gamma = \gamma^*$ . . . . .	96
2.3.8.	Caso $f_\gamma(x) = x^3 + \gamma x + 1$ con $\gamma < \gamma^*$ . . . . .	98
2.3.9.	Diagramas de bifurcación . . . . .	101
<b>3.</b>	<b>Dinámica compleja</b> . . . . .	<b>103</b>
3.1.	Preliminares de dinámica compleja . . . . .	104
3.2.	El problema de Cayley . . . . .	110
3.3.	El método de Chebyshev para polinomios cúbicos . . . . .	120
3.3.1.	Polinomios cúbicos con una raíz triple . . . . .	120
3.3.2.	Polinomios cúbicos con una raíz doble . . . . .	121
3.3.3.	El método de Chebyshev para polinomios cúbicos (caso general) . . . . .	127
<b>4.</b>	<b>Convergencia del método de Chebyshev</b> . . . . .	<b>135</b>
4.1.	El método de Chebyshev en la recta real . . . . .	136
4.1.1.	Convergencia local del método de Chebyshev . . . . .	136
4.1.2.	Convergencia global del método de Chebyshev . . . . .	141
4.2.	Chebyshev local en espacios de Banach . . . . .	145
4.2.1.	Teoría de Kantorovich local para el método de Chebyshev . . . . .	146
4.2.2.	$\gamma$ -teoría de Smale para el método de Chebyshev . . . . .	149
4.3.	Convergencia semilocal del método de Chebyshev . . . . .	153
4.3.1.	Teoría de Kantorovich semilocal . . . . .	153
4.3.2.	Relaciones de recurrencia para el método de Chebyshev . . . . .	163
4.3.3.	$\alpha$ -teoría de Smale para el método de Chebyshev . . . . .	167
4.4.	Aplicaciones . . . . .	174
	<b>Bibliografía</b> . . . . .	<b>181</b>

# Índice de figuras

1.1. Pafnuty Lvóvich Chebyshev (1821–1894). . . . .	2
1.2. Retrato de Chebyshev, por Nikolayev Yaroslav Sergeyevich (1899–1978), Rusia, 1954. Se encuentra en el Museo de Artillería, Central del Estado San Petersburgo, es un óleo sobre lienzo y pertenece a la colección de arte soviético. . . . .	4
1.3. Chebyshev en uno de sus viajes a París. . . . .	5
1.4. A la izquierda, mecanismo que convierte el movimiento circular en rectilíneo y a la derecha un aritmómetro o calculadora mecánica, construidos por Chebyshev. . . . .	7
1.5. Sello de distinción a la memoria de Chebyshev. . . . .	12
1.6. Busto en memoria de Chebyshev. Está ubicado en la entrada del Alma Máter de la Universidad Estatal de Moscú. . . . .	15
1.7. Primera página del artículo original de Chebyshev. . . . .	18
1.8. Retrato de Leonhard Euler (1707–1783), pintado por Johann Georg Brucker. . . . .	50
1.9. Joseph Louis Lagrange (1736–1813). Fue matemático, físico y astrónomo italiano. Demostró el teorema del valor medio, desarrolló la mecánica Lagrangiana y tuvo una importante contribución en astronomía. . . . .	54
1.10. Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830). . . . .	56
1.11. Jacques Charles Francois Sturm (1803–1855). . . . .	58
1.12. Friedrich Wilhelm Karl Ernst Schröder (1841–1902). . . . .	61
1.13. Interpretación geométrica del método de Chebyshev. . . . .	66
2.1. Galería I. En a), c) y e), se muestran las gráficas de los polinomios cuadráticos estudiados y en b), d) y f), las gráficas de sus respectivas funciones racionales. . . . .	78
2.2. Galería II. Las imágenes a), c) y e) muestran las gráficas de tres polinomios cúbicos estudiados, mientras que en b), d) y f) mostramos las gráficas de sus respectivas funciones racionales. . . . .	84

- 2.3. Representación del polinomio  $f_\gamma(x)$  para los casos  $\gamma > \gamma^*$ ,  $\gamma = \gamma^*$  y  $\gamma < \gamma^*$ , respectivamente. Notemos que  $\gamma^*$  está definida como en (2.5). 85
- 2.4. Subintervalos en los que queda dividido el segmento de la recta real  $(0, \infty)$  para el estudio de  $C_{f_-}(x)$ . . . . . 88
- 2.5. Galería III. Las imágenes a), c) y e) muestran las gráficas de  $f_\gamma(x)$  para tres valores concretos de  $\gamma$ , tomando en cuenta  $\gamma > 0$ ,  $\gamma = 0$  y  $\gamma \in (\gamma^*, 0)$ , respectivamente. También, en las imágenes b), d) y f), acompaña a cada polinomio su función racional correspondiente para el mismo valor de  $\gamma$ . . . . . 89
- 2.6. Galería IV. Las imágenes a) y c) muestran las gráficas de  $f_\gamma(x)$  para valores concretos de  $\gamma$ , tomando en cuenta  $\gamma = \gamma^*$  y  $\gamma < \gamma^*$ , respectivamente. En las imágenes b) y d), acompaña a cada polinomio su función racional correspondiente para el mismo valor de  $\gamma$ . Además, en la figura e) se muestra la aparición de 2-ciclos y en la imagen f) mostramos los 3-ciclos, ambos para  $C_{f_\gamma}(x)$ , con  $\gamma = 0$ . 90
- 2.7. A la izquierda gráfica de la curva implícita  $\nu_\gamma(x) = 0$  definida en (2.8) para  $x \in (-0.8, 0.2)$ , y  $\gamma \in (0, 0.66)$ . A la derecha porción de dicha curva donde se encuentran los puntos fijos atractores: son puntos de la curva amarilla, comprendidos entre los puntos  $(-0.224, 0.606)$  y  $(-0.181, 0.595)$  del plano  $(x, \gamma)$ . . . . . 93
- 2.8. Galería V. En la imagen a) podemos observar las dos soluciones reales de la curva (2.8) para  $\gamma \in (\gamma^*, 3/(\sqrt[3]{121}) \approx (-1.88, 0.66)$ . La imagen b) muestra la aparición de una curva parabólica que aporta dos nuevas soluciones a la función (2.8). En la imagen c) mostramos el *Amor materno* en las matemáticas, si observamos un poco, esta curva asemeja una madre que despidе o recibe su hijo con un beso en la frente, a la vez que representa las tres soluciones de (2.8). Finalmente, en la imagen d) se muestra la región donde aparecen los puntos fijos extraños. . . . . 99
- 2.9. Galería VI. En la imagen a) puede apreciarse el diagrama de Feigenbaum donde aparecen los  $n$ -ciclos del método de Chebyshev aplicado al polinomio  $f_\gamma(x) = x^3 + \gamma x + 1$ . En la imagen b) mostramos una ampliación de la primera cascada de bifurcación de la imagen a). La imagen c) es la ampliación que abarca los 6-ciclos que aparecen en la imagen b). Finalmente en d) hacemos una ampliación de la secuencia de cascadas superpuestas que casi no pueden apreciarse a la izquierda de la imagen a). . . . . 102
- 3.1. Diagrama resultante de una conjugación topológica. . . . . 109

3.2. En 1879, Cayley publica en el American Journal of Mathematics, un artículo de una sola página titulado The Newton-Fourier imaginary problem [31]. . . . . 111

3.3. Cuencas de atracción a las raíces del polinomio  $f(z) = z^2 - 1$  aplicando las funciones de iteración de Newton, Halley y Chebyshev, respectivamente. . . . . 116

3.4. Cuencas de atracción para la función de iteración  $S_2(z)$  asociada al método de Chebyshev aplicado al polinomio  $p(z) = (z - a)(z - b)$ . Las áreas en color cian convergen al origen (asociado con la raíz  $a$ ) y las áreas en magenta convergen al punto del infinito (asociado con la raíz  $b$ ). La frontera de ambas zonas muestra la estructura del conjunto de Julia universal de  $S_2(z)$ . . . . . 119

3.5. Galería VII. Cuencas de atracción para las funciones racionales asociadas a los métodos de Newton, Halley y Chebyshev aplicados al polinomio  $p(z) = (z - a)^2(z - b)$ . En la columna de la izquierda hemos aplicado la técnica de escalado ( $\mathbb{M}_1$ ) y en la derecha el compactificado ( $\mathbb{M}_2$ ). Las áreas en amarillo se corresponden con la cuenca de atracción de la raíz múltiple. La frontera de ambas zonas muestra la estructura del conjunto de Julia. . . . . 125

3.6. Aparición de los «agujeros negros» para los métodos de *Newton*, *Halley* y *Chebyshev* aplicados a polinomios cúbicos. . . . . 127

3.7. Galería VIII. Espacio de parámetros correspondiente al punto crítico libre  $c_1$  de la función de iteración  $C'_\lambda(z)$ , relacionada con la familia  $p_\lambda(z)$ . . . . . 132

3.8. Galería IX. Espacio de parámetros correspondiente al punto crítico libre  $c_2$  de la función de iteración  $C'_\lambda(z)$ , relacionada con la familia  $p_\lambda(z)$ . . . . . 133

4.1. Gráfica de la función  $\phi(t) = \beta - t + \frac{\gamma t^2}{1 - \gamma t}$  definida en (4.30). . . . . 168

4.2. Gráficas de  $\sqrt{M}\Theta_0$  y  $\sqrt{L}\Theta_0$  correspondientes a  $M$  y  $L$ , respectivamente, definidos en el Teorema 4.19. . . . . 173



# Índice de cuadros

2.1.	Preimágenes $P_n = C_{f_3}^{-n}(0)$ del polo $x = 0$ . . . . .	83
2.2.	Listado de las preimágenes $q_n$ del 0. . . . .	86
2.3.	Límite de las órbitas de $C_{f_-}(x)$ para diferentes puntos de partida $x_0 \in (a_2, q_0)$ . . . . .	91
3.1.	Esquema de la ubicación de los puntos fijos de la función de iteración $C_p(z)$ definida en (3.6). $p_1$ y $p_2$ son los puntos fijos extraños. . . . .	113
3.2.	Caracterización de los puntos fijos de la función de iteración $C_p(z)$ definida en (3.6). . . . .	113
3.3.	Esquema de la ubicación de los puntos fijos de la función de iteración $S_1(z)$ definida en (3.9). En rojo, los puntos fijos extraños. . . . .	114
3.4.	Caracterización de los puntos fijos de la función de iteración $S_1(z)$ definida en (3.9). . . . .	115
3.5.	Diagrama del comportamiento de la función de iteración $S_2(z)$ definida en (3.10). . . . .	117
3.6.	Esquema de la ubicación de los puntos fijos de la función de iteración $S_2(z)$ definida en (3.10). . . . .	118
3.7.	Caracterización de los puntos fijos de la función de iteración $S_2(z)$ definida en (3.10). . . . .	118
3.8.	Esquema de la ubicación de los puntos fijos de la función de iteración $C_p(z)$ definida en (3.12). En rojo, los puntos fijos extraños. . . . .	122
3.9.	Caracterización de los puntos fijos de la función de iteración $C_p(z)$ definida en (3.12). . . . .	122
3.10.	Esquema de la ubicación de los puntos fijos de la función de iteración $S_3(z)$ definida en (3.13). En rojo, los puntos fijos extraños. . . . .	123
3.11.	Caracterización de los puntos fijos de la función de iteración $S_3(z)$ definida en (3.13). . . . .	124
3.12.	Diagrama del comportamiento de la función de iteración $S_4(z)$ definida en (3.14). . . . .	124
3.13.	Esquema de la ubicación de los puntos fijos de la función de iteración $S_4(z)$ definida en (3.14). . . . .	126

3.14. Caracterización de los puntos fijos de la función de iteración $S_4(z)$ definida en (3.14). . . . .	126
4.1. Comparación de la velocidad de convergencia entre el método de Chebyshev y el método de Newton aplicados a una función con raíz múltiple, $f(x) = e^x - x - 1$ . . . . .	142
4.2. Comparación de la velocidad de convergencia entre el método de Chebyshev y el método de Newton aplicados a una función con raíces simples, $f(x) = e^x - x - 2$ . . . . .	142
4.3. Comparación de la velocidad de convergencia entre los métodos de Chebyshev, Halley y la aceleración convexa del método de Newton. . . . .	177
4.4. Regiones de accesibilidad a las raíces del método de Chebyshev. . . . .	179

# Capítulo 1

## El «Cálculo de las raíces de ecuaciones» de P. L. Chebyshev

Uno de los problemas más estudiados en matemáticas, consiste en encontrar la solución de una ecuación no lineal  $f(x) = 0$ . Hay una enorme variedad de situaciones en diferentes disciplinas científicas que conducen a este problema. Aunque, en ocasiones es relativamente fácil resolver ciertas ecuaciones, es también conocido que para muchos casos particulares de la función  $f(x)$  es muy difícil y hasta imposible obtener una solución exacta. Así que, durante varios siglos, han sido desarrolladas diferentes técnicas iterativas con el objetivo de aproximar una solución de la ecuación  $f(x) = 0$ . Sin duda alguna, el método de Newton es el método de aproximación de raíces más estudiado y usado para resolver ecuaciones. Para una función de valor real  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y partiendo de un valor inicial  $x_0$ , el método de Newton se define como

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Bajo condiciones apropiadas de la función  $f(x)$  y del valor inicial  $x_0$ , el método de Newton genera una secuencia  $\{x_n\}$  de valores que converge a una solución  $x^*$  de la ecuación  $f(x) = 0$ . Una de las características más interesantes del método de Newton es su equilibrio entre el coste operacional y la velocidad de convergencia.

Hay muchos otros métodos para aproximar la solución de ecuaciones no lineales. Algunos de ellos son variantes del método de Newton, que buscan reducir el coste computacional o aumentar la velocidad de convergencia. En este segundo grupo, el método de Chebyshev juega un rol importante. Para valores reales de la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y a partir de un valor inicial  $x_0$  es definido como

$$x_{x+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2}L_f(x_n)\right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0, \quad (1.1)$$



Figura 1.1: Pafnuty Lvóvich Chebyshev (1821–1894).

donde

$$L_f(x_n) = \frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2}.$$

En varias referencias bibliográficas la expresión (1.1) es atribuida a distintos autores, como puede verse en el listado siguiente. Sin embargo, en este trabajo nos referimos como método de Chebyshev.

- Método de Euler: [23], [82], [124].
- Método de Euler-Chebyshev: [82], [124].
- Método de Newton-Chebyshev: [77].
- Método Súper-Newton: [84].
- Método de Schröder: [60], [127].

- Método de Householder: [77].
- Método de las Parábolas Tangentes: [14], [91].
- Método de la Interpolación Cuadrática Inversa: [15], [53], [75].
- Sin embargo, en la literatura rusa es atribuido a Chebyshev: [100], [120].

El método de Chebyshev, junto con sus mejoras y modificaciones ha llamado la atención de muchos investigadores. Por ejemplo, desde el punto de vista histórico, podemos encontrar una forma equivalente para escribir (1.1) conocida como fórmula de Schröder [115]. Como una muestra de recientes publicaciones sobre este tema, podemos citar [3], [4], [38], [39], [40], [41], [62], [85] y [93]. El método de Chebyshev, puede ser deducido de diferentes maneras. Por ejemplo, puede ser obtenido por la interpolación cuadrática de la función inversa de  $f(x)$ , con el fin de aproximar  $f^{-1}(0)$ , véase [124]. Admite también una derivación geométrica, en términos de la parábola osculadora  $ay^2(x) + y(x) + bx + c = 0$ , que satisface las condiciones de tangencia

$$y(x_n) = f(x_n), \quad y'(x_n) = f'(x_n) \quad \text{y} \quad y''(x_n) = f''(x_n),$$

más adelante dedicaremos un apartado a las distintas formas en que se ha podido obtener el método de Chebyshev, teniendo como punto de partida ideas diferentes. Para más detalles véase [3] y [93].

Dedicamos la Sección 1.1 a la presentación de algunas notas biográficas sobre la vida y el legado que Chebyshev, en su incansable labor de investigación, aportara a las escuelas de matemáticas rusas, a las ciencias, la técnica y a un significativo sector de la humanidad.

En la Sección 1.2 presentamos la traducción al español del artículo original de Chebyshev, que estaba en ruso, en el que Chebyshev presentó un importante método de aproximación de ceros de ecuaciones, partiendo de las ideas básicas de la existencia de las operaciones matemáticas y sus inversas. En esta traducción, hemos intentado respetar al máximo la redacción, terminología y simbología utilizadas en la obra original, aunque en determinadas ocasiones era «difícil encontrar una expresión equivalente en la lengua española»<sup>1</sup>, debido al alto nivel cultural que a Chebyshev le permitía tener una forma de expresión un tanto rebuscada para su época, incluso para la nuestra.

El trabajo de Chebyshev sale a la luz por primera vez, cuando el departamento de física y matemáticas de la universidad de Moscú, en el que Chebyshev estudiaba, convocó un concurso para jóvenes investigadores, durante el curso

---

<sup>1</sup>Opinión que comparte la rusa Svetlana Voznesenskaya Abonosimova (Ana), con quien nos dedicamos a realizar la labor de traducción.

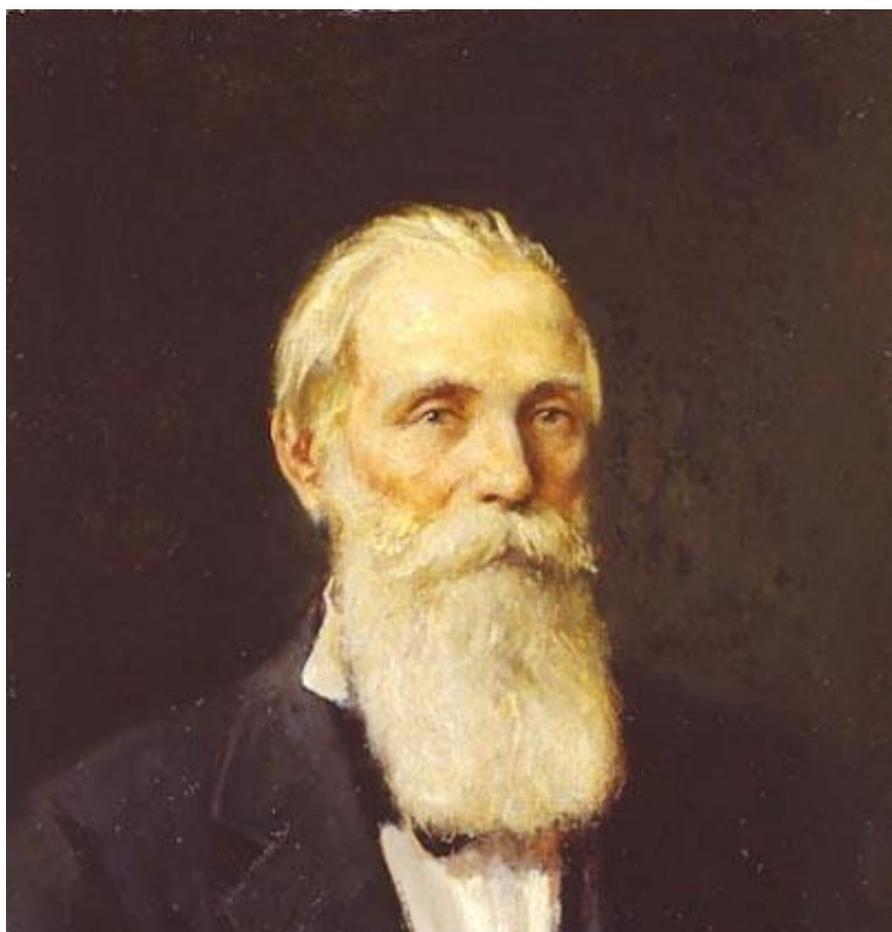


Figura 1.2: Retrato de Chebyshev, por Nikolayev Yaroslav Sergeyeovich (1899–1978), Rusia, 1954. Se encuentra en el Museo de Artillería, Central del Estado San Petersburgo, es un óleo sobre lienzo y pertenece a la colección de arte soviético.

1840–1841. Chebyshev, en su trabajo «Cálculo de las raíces de ecuaciones», que había terminado en 1838, derivó una aproximación algorítmica para la solución de ecuaciones algebraicas  $y = f(x)$  de  $n$ -ésimo grado, basándose en el algoritmo de Newton y usando el desarrollo en serie de la función inversa de  $f$ . Chebyshev notó que los polinomios de mayor grado que se obtenían de estas operaciones, generaban convergencia más rápida, esto, sin tomar en cuenta el coste operacional. El trabajo, no publicado en su momento, fue premiado con la medalla de plata en dicho concurso universitario, véase [26], [32]. Hubo que esperar más de 50 años para que este trabajo viera la luz, en las obras completas que se publicaron (en ruso) entre 1946 y 1951, véase [32]. Y fue en el quinto volumen, publicado en 1951, dedicado a otros trabajos y materiales biográficos, donde aparece publicado



Figura 1.3: Chebyshev en uno de sus viajes a París.

«Cálculo de las raíces de ecuaciones».

Esta sección concluye con la traducción de los comentarios sobre el método de Chebyshev, hecha por L. Vasilkov y V. Goncharov. Dichos comentarios en realidad explican de manera resumida la forma en que Chebyshev construye su método de aproximación.

Las aportaciones al desarrollo, evolución y aplicaciones del método de Chebyshev, por parte de otros autores, son tratadas en la Sección 1.3. Ahora, presentamos de manera resumida, el aporte que hicieron varios autores a la teoría de aproximación de raíces antes, durante y después de la aparición en escenario de Chebyshev, hacia el año 1838. Además, arrojamamos luz respecto al controvertido tema sobre el verdadero creador del método iterativo cuya autoría ha sido atribuida, con el paso de los años, a varios autores.

Nos gustaría destacar que el tema tratado en «Cálculo de las raíces de ecuaciones» podría considerarse como una rareza dentro del extenso campo conceptual en el que se movió Chebyshev, del que se conocen más de 80 publicaciones en temas muy diversos, entre los cuales se encontraba el análisis o la construcción de mecanismos, aspecto este último del cual se sentía muy orgulloso, véase los artículos de Luquin [26] y [90], para profundizar en esta línea. Como se aprecia en sus obras completas, tanto en su tesis doctoral como en sus trabajos post-doctorales,

Chebyshev no volvió a publicar nada en el campo de la resolución numérica de ecuaciones algebraicas.

## 1.1. Notas biográficas de Chebyshev

Chebyshev es uno de los más célebres matemáticos del siglo XIX. Fue creador de varias escuelas de matemáticas en Rusia, entre las que destacan por su trascendencia: teoría de los números, teoría de probabilidades, teoría de aproximación de funciones, teoría de mecanismos y máquinas, algunas de las cuales no tienen títulos matemáticos, como son: «Sobre un mecanismo», «Sobre la confección de vestidos», «Sobre la construcción de mapas geográficos», «Sobre las ruedas dentadas». Todo ello le convierte en uno de los matemáticos más prolíficos de todos los tiempos, y esto es más que una justificación para dedicarle unas páginas al célebre ruso que marcó un hito como hombre de ciencia dedicado a la investigación.

Un enfoque particular sobre la vida y obra de Chebyshev puede verse en [26], donde los autores Paul Butzer, de la Aachen University of Technology Alemana Y Francois Jongmans, del *Centre d'histoire des sciences et des techniques*, de la Université de Liège, citan la disyuntiva existente respecto a la escritura del nombre de Chebyshev, cosa que en los últimos años, cada vez se nota menos, debido a que la comunidad científica, al parecer, ha asumido la notación que hemos incluido en este trabajo. Además, resumen el trabajo de Chebyshev, haciendo una lista más o menos ordenada de los temas diversos en los que se involucró el ruso en su labor productiva. Mostramos especial atención por la amplia bibliografía que da referencia de su amplia labor de investigación, para esta publicación.

### 1.1.1. Un grande de la ciencia ¿nace o se hace?

Pafnuty Lvóvich Chebyshev, nació el 4 (16)<sup>2</sup> de mayo de 1821 en una finca de su padre ubicada en la aldea de Okatovo, distrito de Boronsk de la gobernación de Kaluga (los datos biográficos fueron tomados en su mayoría de [104] y [105]), al oeste de Rusia, en el seno de una familia de rancio abolengo. Su padre, Lev Pavlovich Chebyshev, fue un oficial militar que combatió contra Napoleón Bonaparte. Según [35], sobre la historia de la familia de Chebyshev, éste figura como descendiente del líder militar tártaro del siglo XVIII, Khan Chabysh.

---

<sup>2</sup>Hasta 1917 el calendario juliano era válido. Éste no lleva a cabo la corrección de años bisiestos cada 100 años, como en el caso del calendario gregoriano, sino cada 400 años. Así que, en el siglo XIX las fechas de Rusia se desvían 12 días de la fecha católica y 13 días en el siglo XX. Por lo tanto, se añade a las fechas de Rusia, las del gregoriano, que son las fechas entre paréntesis. Esta regla es la que permite ver diferencias en algunos textos, entre las respectivas fechas de nacimiento y muerte, así como de publicaciones.

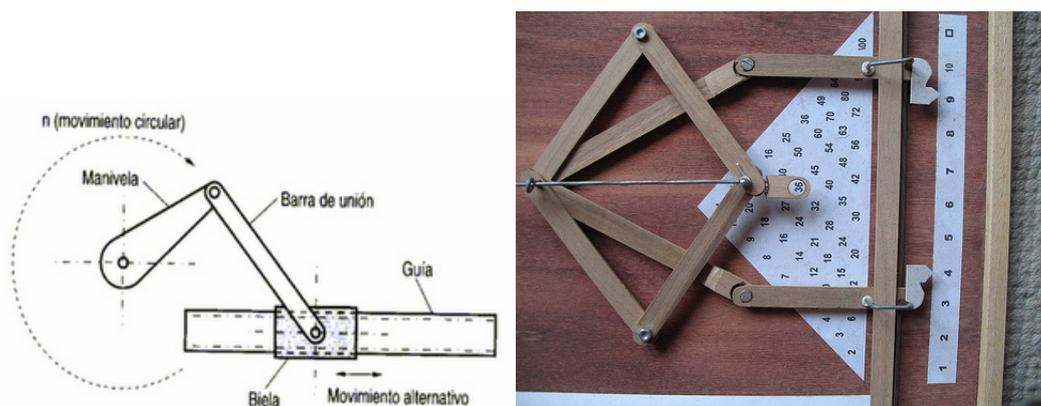


Figura 1.4: A la izquierda, mecanismo que convierte el movimiento circular en rectilíneo y a la derecha un aritmómetro o calculadora mecánica, construidos por Chebyshev.

Chebyshev recibió la educación primaria en su casa. Su madre, Agrafena Ivánovna, le enseñó a leer y escribir, mientras que su prima Avdotya Kvintillianovna Sukhareva (Sújarieva) le enseñó la aritmética y la lengua francesa, las cuales le serían de gran utilidad en el desarrollo de su ocupación profesional. Chebyshev tuvo nueve hermanos y uno de ellos, Vladimir, siguió la tradición militar de su padre, pues fue general y profesor en la Academia de Artillería de San Petersburgo.

En el año de 1832 la familia Chebyshev se trasladó a Moscú, donde logró completar su educación secundaria, también en su casa, teniendo como tutor en matemáticas y física a P. N. Pogorelsky<sup>3</sup>, reconocido en su día como el mejor maestro de matemáticas elementales de Moscú. Para las otras materias se contrataron también a maestros de excelente reputación.

Según mencionó el propio Chebyshev, su profesora de música jugó también un papel muy importante en su educación, ya que llevó su mente a la exactitud y al análisis.

Durante su adolescencia, Chebyshev padecía de una minusvalía física, cuyas razones son desconocidas. Cojeó desde su niñez y caminaba ayudado por un bastón. Por tanto, sus padres desistieron de la idea que Chebyshev hiciera carrera militar, aunque él hubiera seguido la tradición de la familia. Su impedimento le alejó de la mayoría de los juegos infantiles, así que muy pronto se dedicó a una pasión que le ocupaba gran parte de su tiempo, la construcción de mecanismos.

Chebyshev aprobó los exámenes de admisión a la universidad en verano de 1837 y en septiembre del mismo año comenzó los estudios de matemáticas en el segundo

<sup>3</sup>Pogorelsky escribió alguno de los más populares textos de matemáticas elementales de la época, que ciertamente inspiraron a su discípulo dándole además, una sólida formación matemática.

departamento filosófico (departamento de física y matemáticas) de la universidad de Moscú. Entre sus profesores se contaron N. D. Brashman<sup>4</sup>, N. E. Zernov<sup>5</sup> y D. M. Perevoshchikov<sup>6</sup>, véase [141]. Chebyshev estaba muy bien preparado para el estudio de las Ciencias Matemáticas al ingresar a la Universidad.

En 1841 la situación económica de Chebyshev cambió drásticamente. Se declaró una hambruna en Rusia, sus padres se vieron forzados a dejar la ciudad e incapaces de seguir manteniendo a sus hijos. De todas maneras, Chebyshev decidió continuar sus estudios matemáticos y se preparó para los exámenes de maestría que se distribuían durante medio año. Aprobó el examen final en octubre de 1843. En verano de 1846 defendió su tesis titulada «Experiencia sobre el análisis elemental de la teoría probabilística» en la Universidad de Moscú, siendo su supervisor, de nuevo, el profesor Brashman.

Puesto que Chebyshev no encontró un trabajo satisfactorio en Moscú, se trasladó a la Universidad de San Petersburgo, donde en 1847 defiende su segunda tesis «Sobre la Integración mediante logaritmos», consiguiendo con ello el título de profesor adjunto. En el año 1849 defiende su tercera tesis, «Teoría de Congruencias», obra muy importante en el siglo XIX. Con ella, Chebyshev obtiene el grado científico de Doctor. Esta obra obtuvo un premio de la Academia de Ciencias y durante mucho tiempo sirvió como libro de texto en las universidades, reeditándose en los años 1879 y 1907. En el año 1888 fue traducida al alemán y en 1895 al italiano.

Chebyshev trabajó como profesor en la Universidad de San Petersburgo durante 35 años. Desde el año 1847 hasta el 1853 fue profesor adjunto, desde el año 1853 hasta el 1857 fue profesor extraordinario y desde el año 1857 hasta el 1882 fue profesor ordinario, fecha en que se retiró de la enseñanza para dedicarse exclusivamente a la investigación.

En ese tiempo, acostumbraba a recibir visitas una vez por semana, a unas horas determinadas. Las puertas de su casa estaban abiertas a todos aquéllos que

---

<sup>4</sup>Nikolai Dmitrievich Brashman (1796–1866), asesor matemático y de mecánica de Chebyshev, mientras éste estudiaba en la Universidad de Moscú. En 1834 se convirtió en profesor de matemáticas aplicadas en la Universidad de Moscú. Allí, es recordado como uno de los fundadores de la Sociedad Matemática de Moscú y de su revista. En 1836 Brashman fue galardonado con el Premio Demidov por la Academia de Ciencias de Rusia, por su libro de texto sobre mecánica. La academia lo eligió como miembro correspondiente en 1855.

<sup>5</sup>Nikolai Efimovich Zernov (1804–1862), fue el primero en la obtención del título de Doctor en Ciencias Matemáticas de Rusia y de quien Chebyshev aprendió matemáticas puras. Le infundió un conocimiento sólido de los fundamentos de las matemáticas, lo que permitió a Chebyshev llevar a cabo investigaciones de manera independiente.

<sup>6</sup>Perevoshchikov Dmitrii Matveyevich (1788–1880), quien instruyó a Chebyshev en mecánica práctica y probablemente le mostró los trabajos de Poncelet. Fue un astrónomo y matemático ruso, miembro de la Academia de Ciencias de San Petersburgo, escribió los primeros textos rusos de astronomía, así como libros de texto de física experimental y de geometría analítica en tres dimensiones, entre otras obras.

necesitasen una consulta o desearan informar sobre sus investigaciones o recibir algún consejo sobre algún tema.

### 1.1.2. Obra científica de Chebyshev

Hurgando en la web nos encontramos con una traducción de *Studies in the History of Statistics and Probability*, un trabajo de compilación y traducción realizado por Oscar Sheynin, Berlin 2009. Curiosamente, en el Capítulo XVII de este trabajo aparece el trabajo en que A. M. Liapunov hace una minibiografía homenaje a Chebyshev, a la vez que incluye la bibliografía de las publicaciones de temas matemáticos de Chebyshev y cita en especial *P. L. Chebyshev, Izbrannye Matematicheskie Trudy (Sel. Math. Works) Moscow-Leningrad, 1946, pp. 9–21*. En el trabajo de Liapunov puede leerse:

*El académico P. L. Chebyshev murió el 26 de noviembre de 1894 y en su persona la ciencia pierde uno de los más grandes geómetras del siglo que casi termina. Con sus investigaciones, Chebyshev explicó el análisis de muchas cuestiones difíciles, estableciendo conexiones entre diferentes teorías heterogéneas y preparó el camino para resolver muchos problemas importantes no asequibles con los tratamientos usuales.*

En una nota de Markov y Sonin 1895, dedicado a la memoria póstuma del sabio Chebyshev, nos encontramos, en particular, con un excelente testimonio de sus obras:

*Chebyshev's Works bear the imprint of greatness. He derived new methods for solving many difficult problems proposed long ago and have been remaining unsolved. And he also formulated a series of new important issues with whose development he busied himself to his last hour. Owing to the originality of Chebyshev's investigations, he rarely had to mention research made by others, whereas other scientists ever oftener cite our glorious fellow member [of the Academy] and are drawing their ideas from that rich treasury of Chebyshev's works<sup>7</sup>.*

---

<sup>7</sup>Las obras de Chebyshev llevan el sello de la grandeza. Se derivan nuevos métodos para resolver muchos problemas difíciles propuesto hace mucho tiempo y se resolverán los restantes. Y también formuló una serie de nuevas cuestiones importantes a cuyo desarrollo se ocupó en sus últimos días de vida. Debido a la originalidad de las investigaciones de Chebyshev, que rara vez tenía que hablar de la investigación realizada por los demás, mientras que otros cada vez con más frecuencia, los científicos citan nuestro glorioso compañero [de la Academia] y están elaborando sus ideas a partir de ese rico tesoro de las Obras de Chebyshev.

Aunque se hicieron varios esfuerzos por rescatar las obras matemáticas de Chebyshev, en distintas épocas, así como intentos por traducirlas a otros idiomas distintos del ruso, es en torno al 1951 cuando gran parte de su trabajo matemático se traduce al francés, como puede verse en [117]:

*En lo que respecta a los volúmenes de sus Obras y sus obras completas en ruso que figuran en el volumen 5, recuperada en 1951, aparece la nota: [-, 5, pp. 26–87]. Esto significa que el trabajo correspondiente no se incluyó en las Obras recuperadas y posteriormente traducidas al francés, pero el citado trabajo de Chebyshev, fue reeditado en el volumen 5 de la Obras Completas.*

A efectos de un resumen podemos clasificar los trabajos matemáticos de Chebyshev en las ramas siguientes:

- Mecanismos.
- Teoría de la Aproximación de Funciones.
- Análisis de las dependencias entre variables aleatorias.
- Teoría de los Números.
- Convergencia de la serie de Taylor.
- Teoría de Probabilidades.
- Teoría de Integración.
- Formas cuadráticas.
- Construcción de mapas.
- Cálculo geométrico.
- Cálculo de volúmenes.
- Funciones ortogonales.
- Proyecciones cartográficas.

Mostramos especial interés por los pasos seguidos por Chebyshev para escribir su teoría de aproximación numérica, sus polinomios y su afamado método para encontrar los ceros de ecuaciones de  $n$ -ésimo grado.

Chebyshev dedicó mucha atención al perfeccionamiento del mecanismo llamado «Paralelogramo de Watt», que convierte el movimiento circular en rectilíneo. Este

mecanismo, fundamental en las máquinas de vapor, resultaba tan imperfecto que la varilla del pistón realizaba un recorrido curvilíneo en vez del rectilíneo deseado, véase la imagen de la izquierda de la Figura 1.4, dando lugar a muchas fricciones que estropeaban las máquinas. El movimiento paralelo de Chebyshev consiste en tres barras articuladas  $AB$ ,  $BC$ ,  $AD$  cuyo punto de trazado  $P$  se aproxima al movimiento rectilíneo.

Chebyshev, con su nueva teoría de aproximación de funciones consigue muy buenas aproximaciones en la solución del paralelogramo de Watt. Además, sus fórmulas generales resuelven otros tipos de mecanismos y problemas. Estos aportes de Chebyshev quedaron plasmados en sus trabajos [33] y [34], los cuales marcan el comienzo de sus 40 años de investigación sobre aproximación y el estudio de mecanismos.

Chebyshev fue creador de muchos mecanismos y máquinas que asombraron a sus contemporáneos por su ingenio. Por ejemplo, construyó una máquina que andaba, imitando el movimiento de un animal. Su mecanismo más elaborado fue un aritmómetro, véase la imagen derecha de la Figura 1.4, construido por la firma Gautier en París. En total construyó más de 40 mecanismos distintos y cerca de 80 modificaciones más de los mismos.

Donde Chebyshev sienta las bases de su teoría de aproximación es al formular el siguiente problema: Dada una función continua  $f(x)$ , encontrar un polinomio de grado dado, tal que el máximo de la desviación de  $f(x)$  en un intervalo  $[a, b]$ , sea más pequeño que el de los otros polinomios del mismo grado. En este trabajo también aparecen por primera vez los polinomios que llevan su nombre. Temáticamente, el trabajo total de Chebyshev sobre aproximación incluye la teoría de polinomios ortogonales, interpolación, teoría de momentos, método de cuadraturas y fracciones continuas.

### 1.1.3. Méritos alcanzados por Chebyshev

Los méritos de Chebyshev fueron debidamente reconocidos en su tiempo. Fue miembro honorífico de todas las universidades rusas, así como de la Academia de Artillería. Fue elegido miembro correspondiente de la *Real Sociedad de las Ciencias de Lieja* y de la *Société Philomathique* en 1856, de la *Academia de Ciencias de París* en 1860 y miembro extranjero de ésta en 1874, en 1871 miembro correspondiente de la *Academia de Ciencias de Berlín*, de la *Academia de Bolonia* en 1873, miembro de la *Real Sociedad de Londres* en 1877, de la *Academia Real de Italia* en 1880 y de la *Academia de Ciencias de Suecia* en 1893. En el año 1890, y a petición del Presidente de la *Academia de Ciencias de París*, el conocido matemático francés Charles Hermite, le concede a Chebyshev la *Orden de La Legión de Honor*.

A Chebyshev se le reconoce como el creador de la escuela matemática de San Petersburgo. Esta escuela se distinguía por la tendencia a relacionar los problemas



Figura 1.5: Sello de distinción a la memoria de Chebyshev.

teóricos de la matemática con los problemas de la técnica y de la naturaleza.

Con el objetivo de obtener un mayor reconocimiento, Chebyshev creía necesario publicar también fuera de su país y, por ende, en otras lenguas distintas de la rusa, que debido a su formación fue el francés. Su primer trabajo fue sobre integrales múltiples y lo remitió en 1842 al *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées*, revista fundada por Liouville en 1836. El trabajo de Chebyshev aparece en una publicación del 1843. No se sabe con certeza cómo llegó el manuscrito a las manos de Liouville. Lo cierto es que el trabajo presentaba una fórmula sin demostrar y sorprendentemente la revista contenía un trabajo de Eugène Charles Catalan (1814–1894), dando una demostración de dicha fórmula, véase [26].

Su segundo y tercer trabajo, también en francés, fueron dedicados a la *Convergencia de la Serie de Taylor* y a la *Teoría de la Probabilidad*, respectivamente. Estos trabajos fueron publicados por August Leopold Crelle en su *Journal für Reine und Angewandte Mathematik* en 1844 y 1846, respectivamente. De nuevo se desconoce cómo Chebyshev hizo llegar los trabajos a la editorial. Chebyshev publicó un solo trabajo más en Crelle Journal, en 1855, año de la muerte de Crelle. Después, publicaría en el *Bulletin de la Société Mathématique de France*.

Chebyshev realizó múltiples giras científicas por Europa, destacando sus es-

tancias en Francia, sobre todo las de París, donde se solía hospedar en el hotel Corneille frente al Odeón, comía en restaurantes baratos y viajaba en los servicios públicos de transporte. En Francia estuvo al menos en los años 1852, 1856, 1864, 1873, 1875, 1876, 1878, 1882, 1884, 1893. Nunca hizo referencia a estas giras, exceptuando la del año 1852, de la que existe una detallada descripción.

Durante esos viajes a Francia, Chebyshev tuvo contactos con los matemáticos franceses: Joseph Liouville (1809–1882), Charles Hermite (1822–1901), Irenée Jules Bienaymé (1796–1878), Joseph Alfred Serrete (1819–1885), Henri Léon Lebesgue (1875–1941), Jean Victor Poncelet (1788–1867) (si no directamente con él, sí con el círculo de sus ideas), con los matemáticos ingleses: Arthur Cayley (1821–1895) y James Joseph Sylvester (1814–1897), y con el matemático alemán Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), disfrutando tanto de las discusiones científicas como de la atmósfera de libertad reinante en Europa.

Sus logros científicos dan razón de su elección como académico adjunto en 1856. Más adelante, se convirtió en miembro extraordinario de la *Academia Imperial de Ciencias* en 1856 y en miembro ordinario en 1858. Luego, asumió otros cargos honorables y fue condecorado varias veces. En 1856 se convirtió en miembro del comité científico del *Ministerio de Educación Nacional*, a lo que le siguió en 1859 la pertenencia ordinaria al *Departamento de Ordenanza de la Academia*, con la adopción de la jefatura de la comisión para cuestiones matemáticas y experimentos relacionados a la teoría de tiro, de acuerdo a la ordenanza. La *Academia de París*, le escogió como miembro corresponsal en 1860 y como miembro de pleno derecho en 1874. En 1893 fue elegido miembro honorario de la *Sociedad Matemática de San Petersburgo*, fundada en 1890.

Como puede leerse en estas líneas [11], debe bastar esta breve reseña, para que ubiquemos a Pafnuty Lvóvich Chebyshev en la justa dimensión que conquistó con sus alcances y aportes a las matemáticas y las ciencias.

#### 1.1.4. Notas curiosas sobre la vida de Chebyshev

Un comentario extraído del diario de Thomas Archer Hirst<sup>8</sup>, registrado el 16 de mayo 1864, véase [143], dice textualmente:

*... Chebyshev me llamó y me dejó algunos de sus papeles. Es evidentemente un hombre afable, que tiene una manera balbuceante de habla francesa y es cojo.*

Las siguientes notas curiosas pueden ser ampliadas en [24]:

---

<sup>8</sup>Presidente de la *London Mathematical Society*, entre los años 1872–1874.

- La primera dificultad que encontramos al iniciar el estudio sobre la vida y obra científica de Chebyshev, fue respecto a cómo obtener información, debido a la distintas maneras en que aparece su nombre escrito en la literatura matemática, habiéndose contabilizado hasta nueve formas distintas. Un comité internacional creado a tal efecto, tuvo que decidir sobre el deletreo estándar del nombre de Chebyshev. Philip J. Davis, ha escrito un gracioso libro con este problema como tema central. Nosotros, de acuerdo con Emiliano Aparicio [11], lo escribiremos de esta forma, por ser la transcripción literal del nombre ruso a nuestro alfabeto.
- Aunque nunca se casó, Chebyshev tuvo una hija, a la que no reconoció oficialmente pero sí ayudó económicamente. Más tarde se encontraría con ella y su esposo, el coronel Leer, y la hija de ambos, en la casa de su hermana Nadiejda en Rudakovo, Rusia.
- Chebyshev no quiso celebrar sus 25 años y tampoco su 50 aniversario de actividad científica.
- Aparte de sus lecciones en la universidad, de 1852 a 1858 Chebyshev enseñó mecánica práctica en el *Liceo Imperial de Tsarskoye Selo* (ahora Pushkin), al sur de San Petersburgo.
- Según el propio Chebyshev *la unión de la teoría y la práctica proporciona los resultados más provechosos. Con ello, no solo gana la práctica, sino que también salen beneficiadas las ciencias. La práctica descubre a la teoría nuevos objetivos de investigación o nuevas facetas en los objetos ya conocidos.*
- En 1893, con motivo del 400 aniversario del descubrimiento de América por Cristóbal Colón, se realizó una exposición mundial en Chicago, exhibiéndose siete de los inventos mecánicos de Chebyshev, incluyendo su invento de una bicicleta especial para mujeres.
- Fue maestro de Andréi Andréyevich Márkov y de Aleksandr Mijáilovich Lyapunov, en la escuela probabilística rusa.
- Chebyshev murió sentado en su escritorio a los 73 años de edad, en San Petersburgo, Rusia, el 8 de diciembre de 1894, día siguiente a la consulta ordinaria que ofrecía a los visitantes.
- Las únicas dos jóvenes vistas en el funeral de Chebyshev fueron su hija y su nieta.

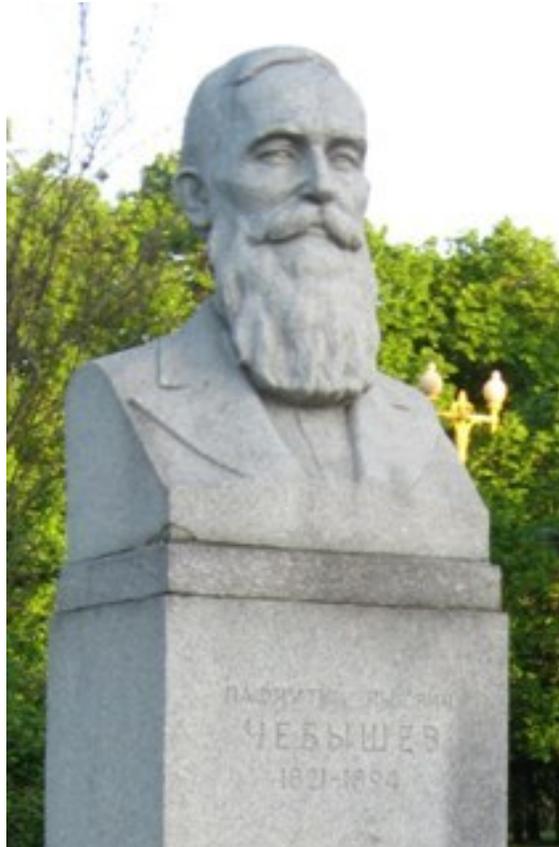


Figura 1.6: Busto en memoria de Chebyshev. Está ubicado en la entrada del Alma Máter de la Universidad Estatal de Moscú.

### 1.1.5. Cronología de la vida de Chebyshev

- 1821 16 de mayo, nace P. L. Chebyshev, en una finca de su padre, ubicada en la aldea de Okatovo, distrito de Boronsk de la gobernación de Kaluga, al oeste de Rusia.
- 1832 Traslado de la familia a Moscú.
- 1837 Aprueba los exámenes de admisión a la universidad en verano y en septiembre del mismo año comenzó los estudios de matemáticas en el segundo departamento filosófico (departamento de física y matemáticas) de la universidad de Moscú.
- 1841 Concluye sus estudios de grado con un trabajo científico.
- 1846 Defensa de su primera tesis de Master titulada «Experiencia sobre el análisis elemental de la teoría de probabilidades» en la Universidad de

Moscú. Su supervisor fue el profesor Brashman.

- 1847 Traslado a San Petersburgo, defendió su segunda tesis de Master titulada «Sobre la integración mediante logaritmos», donde obtuvo el título de profesor adjunto.
- 1849 Defiende su tesis Doctoral, tercera en defender, con el título «Teoría de Congruencias». Con ella obtuvo el grado científico de Doctor. Esta obra llegó a tener un premio de la Academia de Ciencias.
- 1850 Chebyshev demostró la famosa «Conjetura de Bertrand» en el sentido de que existe por lo menos un número primo entre  $n$  y  $2n$  para  $n > 3$ . En este mismo año, sentó las bases para poder demostrar el famoso teorema de los números primos que fue finalmente probado por Jacques Hadamard y Charles-Jean de la Vallée Poussin (Universidad de Lovaina).
- 1850 Catedrático de la universidad de San Petersburgo.
- 1856 Miembro extraordinario de la Academia de Ciencias de San Petersburgo.
- 1859 Miembro de número de la Academia de San Petersburgo.
- 1871 Miembro de la Academia de la Ciencia de Berlín.
- 1873 Miembro de la Academia de la Ciencia de Bolonia.
- 1874 Miembro de la Academia de París.
- 1877 Miembro de la Royal Society. En este mismo año recibió la máxima distinción científica del Gobierno Británico y hay un cráter en la Luna que fue bautizado con su nombre, en su honor.
- 1893 Miembro de la Academia de Ciencias de Suecia.
- 1894 8 de diciembre, fallecimiento de P. L. Chebyshev.

## 1.2. Traducción del artículo original «Cálculo de las raíces de ecuaciones (1838)»

En esta sección presentamos la traducción del ruso al español del artículo original en el que aparece el histórico algoritmo iterativo «Cálculo de las raíces de ecuaciones» del joven matemático ruso, Pafnuty Lvóvich Chebyshev, en la Figura

1.7 mostramos la primera página de dicho artículo. Esta traducción ha sido un tanto compleja, debido a que el lenguaje en que Chebyshev escribía, puede calificarse en nuestro tiempo, de lenguaje rebuscado. Hemos introducido algunos cambios en la notación e incluso en ocasiones modificaciones en la sintaxis con el marcado objetivo de hacer legible todo el contenido del texto, pero respetando en todo caso las ideas matemáticas.

Para la exacta comprensión del contenido de este trabajo es necesario diferenciar las notas a pie de página, entre las que diferenciamos:

- Con notación estándar las que ya aparecían en el texto original en ruso. Nótese que muchas de ellas venían firmadas por «La Redacción».
- Con «N.O.» denotamos las notas atribuidas a Ostrogradskii y que ya figuraban en la versión rusa original.
- Con «N.T.» se indican nuestras notas, es decir, las introducidas por los traductores de la versión rusa al español.

El trabajo consta de siete apartados. En el apartado I, Chebyshev pone de manifiesto que ha dedicado muchas horas de investigación sobre la cuestión de resolver ecuaciones. Como buen anfitrión, Chebyshev dirige el debate al que ha invitado un grupo selecto de matemáticos que ya habían trabajado en estos menesteres, como son: Jacques Charles Francois Sturm (1803–1855), Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830), Joseph Louis Lagrange (1736–1813) y Sir Isaac Newton (1643–1727). Además, hemos dedicado la Sección 1.3 a explicar en qué consisten los trabajos que justificaron la inclusión de dichos autores en el artículo original de Chebyshev, desde nuestro punto de vista. Éstos estarán presentes en todo el desarrollo del trabajo de Chebyshev, referente a la resolución de ecuaciones. Aquí compara su método con los métodos que la literatura matemática atribuye a cada uno de ellos. Chebyshev no usa una definición de orden de convergencia de un método iterativo, como lo conocemos hoy día, pero implícitamente deja claro entre sus explicaciones que domina el concepto, al menos de manera intuitiva.

En el apartado II, Chebyshev expone de manera clara y explícita, la manera sutil y delicada con la que concibe la idea de su método. Utiliza el desarrollo del polinomio de Taylor para deducir una familia de métodos iterativos, de la cual se derivan, varios métodos de orden superior. De dicha familia se obtienen, como casos particulares, varios métodos ya conocidos. Nombré dicha familia como «Principio de todos los métodos particulares». Su expresión exacta es:

$$x = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} - \left(\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^2 \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} - \left(\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^3 \left[ \frac{(f''(\alpha))^2}{2f'(\alpha)^2} - \frac{f'''(\alpha)}{6f'(\alpha)} \right] - \\ \left(\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^4 \left[ \frac{5f''(\alpha)^3}{8f'(\alpha)^3} - \frac{5f''(\alpha)f'''(\alpha)}{12f'(\alpha)^2} + \frac{f^{IV}(\alpha)}{f'(\alpha)} \right] - \dots$$

## ВЫЧИСЛЕНИЕ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЙ\*

S'il existe une méthode générale pour la résolution des équations, elle doit être analogue à ces opérations qui n'en seraient que des cas particuliers.

Fourier\*\*

### I

После тысячелетних изысканий вопрос о последнем действии алгебры в наше время переходит в ряд вопросов совершенно решенных, и вот в чем заключается это решение, плод многосложных исследований и обширнейших соображений великих математиков.

«Решить уравнение — значит найти, каким образом произвести действие, означенное через  $\sqrt{\quad}$ . Это действие... состоит в двух приемах. Первый прием *отделяет* корни; ... Другой прием, после отделения корней, есть собственно *решение* уравнений: вычисление корней и радикалов»\*\*\*.

Выводом этого заключения не оканчиваются еще многочисленные изыскания относительно решения уравнений, но получают от него большую определенность и вместе с тем большую важность. Теперь с помощью его легко можем видеть, что сделано и что остается еще сделать для совершенства теории уравнений.

Не входя в подробности касательно отделения корней, как действия, легко выполнимого по способу Штурма или, еще удобнее, по способу Фурье в соединении с лагранжевым, обратимся теперь к теории вычисления корней, главнейшей в решении уравнений, и займемся рассмотрением ее.

Эта теория ныне представляется нам соединенным исследованием двух, трех, ... известнейших способов; каковы: Ньютона или Фурье, Лагранжа, высших порядков, ... Эти способы были открыты и усовершенствованы в продолжение нескольких столетий и в это время преемственно один после другого получали название *удобнейшего*,

\* Студенческая работа Н. Л. Чебышева, публикуемая впервые. Комментарий см. на стр. 173. — *Ред.*

\*\* Если существует общий метод решения уравнений, то он должен быть аналогичен тем операциям, которые представляют собой лишь его частные случаи. — *Фурье.*

\*\*\* Слова Остроградского. *Лекция IV.* [Чебышев цитирует «Лекции алгебраического и трансцендентного анализа» М. В. Остроградского. — *Ред.*]

Chebyshev llama esta fórmula, la serie  $Q$  y denota como  $x$  a la solución exacta de la ecuación que quiere resolver, y como  $\alpha$  la aproximación con la que da inicio a su método de resolución.

En el apartado III, Chebyshev estudia los métodos de Fourier y Newton y da un ejemplo concreto, resolviendo la ecuación histórica  $x^3 - 2x - 5 = 0$ . Compara su resultado con los obtenidos por Newton y Fourier y enfatiza la mejora considerable respecto a éstos, que obtiene con la aplicación de su método. Finalmente, introduce la comparación que llevará a cabo en el siguiente apartado, entre su método y el método de Lagrange.

Es en el apartado IV donde Chebyshev descarga toda su energía dejando al desnudo cada una de las deficiencias del método de Lagrange. Además de las dificultades de realización de cada una de las iteraciones, este método también presenta ciertas dificultades al escoger la cifras correctas de la solución, debido a que hay que juzgar sobre la elección de las fracciones adecuadas.

El apartado V está dedicado al estudio progresivo de métodos iterativos a los que Chebyshev ha nombrado como métodos de orden superior y deja de lado los métodos ya tratados en los apartados anteriores, donde, no solo obtiene las expresiones de nuevos métodos, sino que, además los utiliza en ejemplos concretos, a la vez que comenta sobre las ventajas o desventajas de su utilización, dejando bastante claro, en cada ocasión, la defensa que hace de su método.

En el apartado VI Chebyshev se ocupa de presentar varios métodos que se obtienen a partir la serie ( $Q$ ): primero el método de fracciones continuas que corresponde a la aproximación lineal, el segundo es la fórmula de Lagrange y el tercero nos da un método extremadamente rápido. Además, enfatiza sobre las ventajas que representa utilizar su método, frente al método de Newton-Fourier.

Finalmente el apartado VII aparece firmado por L. Vasilkov, V. Goncharov y con el título «Comentarios». Los autores presentan el trabajo de Chebyshev de manera resumida y además lo comentan en un lenguaje matemático más actual.

A continuación presentamos la traducción del trabajo de Chebyshev, dividida en las mismas secciones que contenía el manuscrito original.

# Cálculo de las raíces de ecuaciones<sup>9</sup>

## § I.

S'il existe une méthode générale pour la résolution des équations, elle doit être analogue à ces opérations qui seraient que des cas particuliers.

Fourier<sup>10</sup>

Pasaron miles de años de investigación en la búsqueda de la solución de una ecuación, o la última operación del álgebra<sup>11</sup>, cosa que en nuestro tiempo pasa al grupo de problemas completamente resueltos. El problema de encontrar la solución de una ecuación, es el trabajo que llevan a cabo una gran cantidad de matemáticos por el mundo.

Resolver una ecuación significa, además, de qué modo hay que realizar las operaciones, denotadas por  $\nabla$ . Esta acción se divide en dos pasos: el primer paso es la separación de raíces. El siguiente, después de separar las raíces, es hallar la solución de la ecuación<sup>12</sup>.

En estos tiempos ya es notorio el aumento de las numerosas investigaciones con relación a la solución de ecuaciones. De este modo, la técnica de resolver ecuaciones recibe más precisión y adquiere una gran importancia. Como fruto de esas investigaciones, podemos observar fácilmente qué está hecho y lo que falta por hacer para perfeccionar las teorías para resolver ecuaciones.

En este apartado no entraremos en los detalles aplicados en las técnicas de separación de raíces, las cuales son operaciones fácilmente realizables según los métodos de Sturm, Fourier o el método de Lagrange. Nos centraremos más bien en la teoría del cálculo de las raíces de una ecuación, la cual vamos a examinar de manera detallada.

<sup>9</sup>El trabajo estudiantil de P. L. Chebyshev publicado por primera vez. Véase los comentarios en la página 173. La Redacción.

<sup>10</sup>N.T. Si existe un método general para la resolución de ecuaciones, éste debe ser análogo a las operaciones, las cuales no serían más que casos particulares de dicho método.

<sup>11</sup>N.T. Chebyshev llamaba última operación del álgebra a encontrar las raíces de una ecuación.

<sup>12</sup>Palabras de M. V. Ostrogradskii. «Lección IV». [Chebyshev cita «las lecciones de análisis algebraico y trascendente» M. V. Ostrogradskii. La redacción].

La teoría de resolución de ecuaciones se presenta como un conjunto de investigaciones dispersas. Por ejemplo, son conocidos los métodos de Newton, Fourier y el método de Lagrange, así como otros métodos de orden superior. Esos métodos han sido descubiertos y durante mucho tiempo perfeccionados. Cada método, sucesivamente, recibía un nombre, como el exacto, el perfecto, etc.

El más elegante cálculo de raíces utilizado, era el ya conocido método de Newton<sup>13</sup>. Con este método, la solución de ecuaciones pasó a ser una operación tan fácil y tan simple como cualquier otra operación del álgebra.

¿Qué más perfección de esta teoría se puede esperar de futuros matemáticos? Indiscutiblemente no se puede perder la esperanza de encontrar un método más cómodo que el de Fourier y así, hacer más sencillo el encontrar la solución de una ecuación. Sin embargo, si no se unifica la teoría de resolución de ecuaciones, habrían muchos trabajos, incluso redundantes. Con lo cual, esos descubrimientos no serían muy útiles, por más elegantes que sean. Tal cantidad de nuevos métodos solo complicará y sobrecargará con nuevas teorías de resolución de ecuaciones. Por otra parte, dicha teoría nunca tendrá la totalidad necesaria como para ser una parte importante de la ciencia.

Hay que aspirar a encontrar un método general de resolución de ecuaciones, con la idea de aportar a la teoría, por una parte la unicidad<sup>14</sup> que no podrían darle ni miles de nuevos métodos y por otra parte, la totalidad, que con los métodos existentes estaba perdida. Este método, perfeccionaría la teoría general de la resolución de ecuaciones, dotándola además, de un uso más manejable en sus aplicaciones. La investigación de tal método es la tarea de este trabajo.

## § II.

Observemos que en las ocho operaciones del álgebra, cada dos solucionan problemas absolutamente inversos, lo que es conocido en una operación, en otra se convierte en una incógnita, y viceversa. Esa contraposición de operaciones se puede apreciar en la *adición y sustracción, multiplicación y división, elevación a una potencia y extracción de raíces*; y por último, también se relacionan de la misma forma *la evaluación de polinomios y la solución de ecuaciones*. Como consecuencia de la analogía entre las operaciones anteriores, deducimos las reglas de las segundas operaciones, es decir, sustracción, división y extracción de raíces a partir de las primeras operaciones: adición, multiplicación y elevación a una potencia. ¿Por qué ahora al realizar la última operación del álgebra no seguimos el mismo camino que nos ha conducido en tres ocasiones a un resultado favorable? ¡Este es un punto importante de partida para construir un método general!

---

<sup>13</sup>Este método, o parte, fue corregido en su momento por Fourier, según los apuntes del propio Chebyshev.

<sup>14</sup>N.T. Chebyshev utilizaba la palabra plenitud.

Al evaluar una función, encontramos su valor a partir del valor particular de la variable, haciendo  $f(x) = y$ <sup>15</sup>. La operación inversa consistirá en determinar  $x$  a partir de  $y$ , es decir  $F(y) = x$ . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $y = 0$  o  $f(x) = 0$ . Así pues, *pasar de  $f(x) = 0$  a  $F(0) = x$* , es lo que se conoce como resolución de ecuaciones o cálculo de raíces propiamente dicho. Eso siempre se puede realizar partiendo de un valor aproximado de  $x$ , que denotamos  $\alpha$  (o lo que es lo mismo, de los límites<sup>16</sup> de  $x$ :  $\alpha$  y  $\alpha'$ ).

En realidad, por la analogía entre las ecuaciones  $f(x) = y$  y  $F(y) = x$ , sabemos que si  $f(\alpha) = \beta$ , existe otra ecuación correspondiente  $F(\beta) = \alpha$ . Con lo cual, por el teorema de Taylor, siempre podemos pasar de  $F(\beta)$  a  $F(0) = F(\beta - \beta)$ . En efecto,

$$x = F(0) = F(\beta - \beta) = F(\beta) - \beta F'(\beta) + \frac{\beta^2}{2} F''(\beta) - \frac{\beta^3}{6} F'''(\beta) + \dots$$

o

$$x = \alpha - \beta F'(\beta) + \frac{\beta^2}{2} F''(\beta) - \frac{\beta^3}{6} F'''(\beta) + \frac{\beta^4}{24} F^{IV}(\beta) - \dots$$

Esta es la verdadera expresión de  $x$  como raíz de la ecuación  $f(x) = 0$ ; queda por determinar

$$F'(\beta), F''(\beta), F'''(\beta), \dots$$

en términos de

$$f'(\alpha), f''(\alpha), f'''(\alpha), \dots, f^n(\alpha), \dots$$

lo cual es fácil obtener a partir de las identidades  $f(x) = y$  y  $F(y) = x$ .

Como podemos observar, la existencia de la ecuación  $f(\alpha) = \beta$  condiciona a  $F(\beta) = \alpha$ . Si aumentamos  $\alpha$  en un valor  $\alpha'$ , entonces obtenemos

$$f(\alpha + \alpha') = \beta + \beta',$$

donde  $\beta'$  significa el incremento de  $f(\alpha)$ . De aquí, se deduce la siguiente ecuación

$$F(\beta + \beta') = \alpha + \alpha'.$$

Dando un valor  $\alpha'$  suficientemente<sup>17</sup> pequeño, encontramos  $f'(\alpha)$  del siguiente modo

$$\beta + \beta' = f(\alpha + \alpha') = f(\alpha) + \alpha' f'(\alpha) + \frac{\alpha'^2}{2} f''(\alpha) + \dots$$

<sup>15</sup>N.T. Chebyshev utiliza la notación  $fx$  en su versión original. En esta traducción se ha empleado la notación  $f(x)$  para referirse al valor de la función  $f$  en un punto  $x$ .

<sup>16</sup>N.T. Chebyshev se refiere a los límites de  $x$  como los extremos de un intervalo abierto que contiene a la raíz:  $x \in (\alpha, \alpha')$ .

<sup>17</sup>N.T. Hemos cambiado el infinitamente pequeño de Chebyshev por el actual suficientemente pequeño.

$$\frac{-\beta = -f(\alpha)}{\beta' = \alpha' f'(\alpha) + \frac{\alpha'^2}{2} f''(\alpha) + \frac{\alpha'^3}{6} f'''(\alpha) + \dots}$$

Equivalentemente, dividiendo por  $\alpha'$

$$\frac{\beta'}{\alpha'} = f'(\alpha) + \frac{\alpha'}{2} f''(\alpha) + \frac{\alpha'^2}{6} f'''(\alpha) + \dots$$

Tomando  $\alpha'$  infinitamente pequeño<sup>18</sup>

$$\frac{\beta'}{\alpha'} = f'(\alpha).$$

Pero, por otra parte, dando a  $\beta'$  un valor infinitamente pequeño, obtendremos del mismo modo una expresión  $F'(\beta)$

$$F(\beta + \beta') = \alpha + \alpha' = F(\beta) + \beta' F'(\beta) + \frac{\beta'^2}{2} F''(\beta) + \frac{\beta'^3}{6} F'''(\beta) + \dots,$$

$$\frac{-\alpha = -F(\beta),}{\alpha' = \beta' F'(\beta) + \frac{\beta'^2}{2} F''(\beta) + \frac{\beta'^3}{6} F'''(\beta) + \dots},$$

pero con  $\beta'$  suficientemente pequeño, entonces<sup>19</sup>

$$F'(\beta) = \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

Con lo cual,

$$f'(\alpha) \cdot F'(\beta) = \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\beta'} = 1 \quad \text{o} \quad F'(\beta) = \frac{1}{f'(\alpha)}.$$

De esta ecuación podemos deducir otras derivadas de  $F(\beta)$ . Para eso, incrementamos  $\beta$  en  $\beta'$ , y obtenemos una expresión correspondiente a dicho incremento. De la nueva ecuación se resta la anterior,  $F'(\beta) = \frac{1}{f'(\alpha)}$ . Pasamos al límite, y así

$$F''(\beta) = -\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)^3}.$$

Luego, del mismo modo, partiendo de esta ecuación obtenemos

$$F'''(\beta) = \frac{3f''(\alpha)^2}{f'(\alpha)^5} - \frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)^4},$$

$$F^{IV}(\beta) = -\frac{15f''(\alpha)^3}{f'(\alpha)^7} + \frac{10f''(\alpha)f'''(\alpha)}{f'(\alpha)^6} - \frac{f^{IV}(\alpha)}{f'(\alpha)^5},$$

<sup>18</sup>N.T. Implícitamente Chebyshev estaba utilizando la noción de límite.

<sup>19</sup>N.T. En esta fórmula Chebyshev está aplicando el teorema de la función inversa.

y así sucesivamente.

Así pues,

$$x = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} - \left(\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^2 \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} - \left(\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^3 \left[ \frac{f''(\alpha)^2}{2f'(\alpha)^2} - \frac{f'''(\alpha)}{6f'(\alpha)} \right] - \\ - \left(\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^4 \left[ \frac{5f''(\alpha)^3}{8f'(\alpha)^3} - \frac{5f''(\alpha)f'''(\alpha)}{12f'(\alpha)^2} + \frac{f^{IV}(\alpha)}{24f'(\alpha)} \right] - \dots \quad (Q).$$

Esta es la expresión exacta de la raíz de la ecuación  $f(x) = 0$ . Esta fórmula es la base común de todos los métodos particulares para resolver dicha ecuación. Sus aplicaciones a fracciones decimales y continuas nos dan los métodos de Fourier y Lagrange, otros métodos de orden superior y, en general un gran número de nuevos métodos. Vamos a examinar todo esto por separado, centrándonos mayormente en lo amplia y abarcadora que resulta la expresión deducida.

### § III.

Si en el desarrollo de  $x = F(\beta - \beta)$  paramos en el tercer término, según el método de Lagrange, tendremos

$$x = F(\beta) - \beta F'(\beta) + \frac{\beta^2}{2} F''(\beta - \varphi\beta),$$

o<sup>20</sup>

$$x = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} - \frac{f(\alpha)^2}{f'(\alpha \dots x)^2} \cdot \frac{f''(\alpha \dots x)}{2f'(\alpha \dots x)} \quad {}^{21}.$$

Y si tenemos otra estimación para  $x$ , digamos  $\alpha'$ , tal que  $\alpha < x < \alpha'$ , podemos decir que el valor verdadero de  $x$  está necesariamente entre  $\alpha$  y  $\alpha'$ , así

$$x = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} - f(\alpha)^2 \frac{f''(\alpha \dots \alpha')}{2f'(\alpha \dots \alpha')^3}.$$

De esta simple fórmula se deducen muchos otros métodos, incluyendo el de aproximación lineal y además, con una nueva mejoría en cuanto a la expresión del error, la cual no estaba clara para los métodos del gran Newton y Fourier.

<sup>20</sup>N.O. Con  $f(\alpha \dots x)$  Chebyshev señala el valor de la función  $f$  en un valor de la variable que se encuentra entre  $\alpha$  y  $x$ .

<sup>21</sup> $F''(\beta - \varphi\beta)$  se encuentra entre  $-\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)^3}$  y  $-\frac{f''(x)}{f'(x)^3}$ . En realidad,  $\varphi$  está entre 0 y 1; por consiguiente,  $F''(\beta - \varphi\beta) = F''(\beta(1 - \varphi))$  está entre  $F''(0)$  y  $F''(\beta)$ ; pero  $F''(0) = -\frac{f''(x)}{f'(x)^3}$  (el valor  $\alpha$  asociado a  $\beta = 0$  se corresponde con la solución  $x$ ),  $F''(\beta) = -\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)^3}$ ; por eso  $F''(\beta - \varphi\beta) = -\frac{f''(\alpha \dots x)}{\{f'(\alpha \dots x)\}^3}$ .

$\alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$  expresa el valor aproximado de la raíz y  $f(\alpha)^2 \frac{f''(\alpha \dots \alpha')}{2f'(\alpha \dots \alpha')^3}$  es la diferencia entre su valor aproximado y el verdadero.

Este procedimiento es más cómodo que el utilizado normalmente para la deducción de los métodos de Newton y Fourier. Ya hemos mencionado que el procedimiento desarrollado es el esencial. Comprobaremos más adelante que es el procedimiento común a todos los métodos conocidos. Pero además, determina con precisión el error cometido por la nueva aproximación. Newton no determinaba en absoluto el error cometido, sino que lo deducía nada más que aproximadamente. En eso consistía la mayor deficiencia de su método. Fourier corregía esta deficiencia, pero ¿con qué ayuda la había determinado? ¡Con ayuda de una incógnita<sup>22</sup>! Según Fourier el error es igual a

$$\frac{(x - \alpha)^2 f''(\beta)}{\alpha f'(A)}.$$

Sin embargo, nuestra fórmula contiene solo valores conocidos y con mayor rapidez le da suficiente precisión al método de Newton.

Por ejemplo, comparamos la resolución de la ecuación  $x^3 - 2x - 5 = 0$  por el método de Fourier y por nuestro método.

En sus palabras textuales<sup>23</sup> (Fourier, *Analyse des équations numériques*, L. 11, 211): «En substituant des nombres intermédiaires de l'ordre décimal immédiatement inférieur, il viendra:

	$f'''(x)$	$f''(x)$	$f'(x)$	$f(x)$
2.0	+	+	+	-
		12	10	-1
2.1	+	+	+	+
		12.6	11, 23	0.061

La plus grande limite 2.1 est ici extérieure, qui a été désignée par  $b$ , puisque cette valeur donne le même signe + aux deux fonctions  $f'(x)$  et  $f''(x)$ . Par conséquent la première valeur approchée se formera en retranchant de  $b = 2.1$  le quotient  $\frac{f(b)}{f'(b)} = \frac{0.061}{11.23}$ ; la division doit être continuée jusqu'au chiffre décimal de l'ordre  $2n+k$ , c'est-à-dire ici jusqu'aux centièmes, et avant d'opérer la soustraction, on doit augmenter le dernier chiffre d'une unité. Comme l'on trouve  $\frac{0.061}{11.23} = 0.0054$ , le nombre à retrancher de 2.1 est 0.01: il vient donc pour première valeur approchée 2.09.

<sup>22</sup>N.T. La incógnita de la que habla Fourier es el parámetro  $A$  que aparece en el denominador de la siguiente ecuación.

<sup>23</sup>N.T. Hemos corregido una errata del texto original de Chebyshev referente al valor de  $f(2)$ . En el texto original aparece  $-10$  en lugar de  $-1$ .

Cette valeur est exacte au moins de  $\frac{1}{100}$  près: mais on ignore jusqu'ici si elle est moindre ou plus grande que la racine»<sup>24</sup>.

Así es como determinaba Fourier la diferencia entre el nuevo valor aproximado de la raíz y su valor verdadero. Hoy en día se hace de la misma forma. Pero este cálculo es bastante más preciso y cómodo según nuestra fórmula. La fórmula determina el error al aproximar la raíz, descubierto por Fourier en el ejemplo anterior, con la siguiente fórmula

$$f(2.1)^2 \frac{f''(2 \dots 2.1)}{2\{f'(2 \dots 2.1)\}^3},$$

la cual con el máximo valor es igual a

$$(0.061)^2 \frac{12.6}{2 \cdot 10^3} < 0.000038 \cdot 0.63 < 0.000024.$$

Asimismo, la división de 0.061 por 11.23 no tiene que seguir hasta centésimas partes, como lo hacía Fourier, sino por lo menos hasta cienmilésimas partes. De donde el nuevo valor aproximado de la raíz será  $2.1 - 0.00543 = 2.09457$ . Este valor será verdadero como siempre se puede observar del símbolo  $\Delta' = x - \alpha_1$ . En este ejemplo  $\Delta'$  tiene signo negativo, por consiguiente  $x < \alpha_1$  y con eso le supera en menos que 0.000024; entonces, el menor límite de la raíz es 2.09454, y las cuatro primeras cifras son correctas.

Ahora es evidente la ventaja de nuestro método ante el método de Fourier. De la misma operación él obtenía solo dos cifras correctas; sin embargo nosotros cuatro; y si hubiéramos repetido el método de Newton como lo hizo Fourier, unas

---

<sup>24</sup>N.T. Este texto aparece en francés en el trabajo original, con la correspondiente traducción al ruso como nota al pie de página, nosotros presentamos la traducción al español: (Fourier, *Análisis de las ecuaciones numéricas*, L. 11, 211): «Sustituyendo números intermedios del orden decimal inmediatamente inferior, se obtendrá:

	$f'''(x)$	$f''(x)$	$f'(x)$	$f(x)$
2.0	+	+	+	-
		12	10	-1
2.1	+	+	+	+
		12.6	11, 23	0.061

El límite mayor 2.1 es aquí exterior, y ha sido designado por  $b$ , ya que este valor da el mismo signo + a las dos funciones  $f'(x)$  y  $f''(x)$ . En consecuencia el primer valor aproximado se formará restando de  $b = 2.1$  el cociente  $f(b)/f'(b) = 0.061/11.23$ ; la división se debe continuar hasta que la cifra decimal de orden  $2n + k$ , es decir hasta las centésimas, y antes de operar la sustracción se debe aumentar la última cifra en una unidad. Como se tiene que  $0.061/11.23 = 0.0054$ , el número a sustraer de 2.1 es 0.01: resulta por tanto como *primer valor aproximado* 2.09. Este valor es exacto al menos hasta las centésimas, pero no se sabe hasta aquí si es menor o mayor que la raíz».

cuatro veces más, entonces habiéramos obtenido por lo menos 64 cifras correctas mientras que él no pudo encontrar más que 32. Esto es lo que se deduce claramente del primer ejemplo. Pasamos ahora a analizar el método de Lagrange.

### § IV.

Resulta muy sencillo desarrollar un valor desconocido en fracciones continuas. Si solo es posible determinar su parte entera  $a$ , sustituimos  $x$  por  $a + y$  y después en vez de  $y$  escribimos  $\frac{1}{x}$ . Entonces, repitiendo esta operación encontraremos un denominador tras otro y así, poco a poco, aproximaremos al valor buscado. Este método se usa para el cálculo de una incógnita y, sin duda, puede ser aplicado para determinar las raíces de una ecuación, así como también para el cálculo de logaritmos, etc. Sin embargo, para obtener la raíz de una ecuación con cierta precisión, resulta muy laborioso, ya que para calcular cada nuevo denominador se requiere la evaluación de nuevas funciones y de sus derivadas en puntos de la forma 1, 2, 3, etc.

El siguiente método nos libra de esas operaciones sucesivas y nos da la oportunidad de encontrar no solamente un denominador, sino unos cuantos a la vez. Si conocemos una cierta parte de la fracción continua, que exprese la raíz de la ecuación  $f(x) = 0$ , suponemos<sup>25</sup>

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{\dots + \frac{1}{f + \frac{1}{g}}}}}$$

y unas fracciones adecuadas  $\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \dots, \frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}, \frac{P_i}{Q_i}$ , que corresponden a los denominadores conocidos  $a, b, c, \dots, f, g$ , entonces, el resto expresa la parte que desconocemos,

---

<sup>25</sup>N.T. Hemos denotado las fracciones continuas con la notación habitual de nuestros días, aunque Chebyshev usaba otra notación. En concreto, en su manuscrito original las fracciones continuas aparecen de la siguiente forma

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \dots + \frac{1}{f + \frac{1}{g}}}}$$

$$h + \frac{1}{k + \frac{1}{l + \frac{1}{\ddots}}}$$

y que denotamos por  $t$ . Es conocido que

$$x = \frac{P_i t + P_{i-1}}{Q_i t + Q_{i-1}},$$

de donde

$$t = \frac{xQ_{i-1} - P_{i-1}}{P_i - xQ_i}.$$

Ahora, para determinar  $t$ , tenemos que encontrar el valor  $x$ : esta es la relación entre el método de las fracciones continuas y nuestro método. Así, encontramos de la expresión anterior<sup>26</sup>

$$x = \frac{P_i}{Q_i} - \frac{f\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)}{f'\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)} - \left\{ \frac{f\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)}{f'\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)} \right\}^2 \frac{f''\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)}{2f'\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)} - \left\{ \frac{f\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)}{f'\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)} \right\}^3 \left[ \frac{\left\{ f''\left(\frac{P_i}{Q_i}\right) \right\}^2}{2\left\{ f'\left(\frac{P_i}{Q_i}\right) \right\}^2} - \frac{f'''\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)}{6f'\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)} \right] - \dots,$$

y de aquí podemos deducir el valor de  $t$ :

$$\begin{aligned} t &= \frac{Q_{i-1} \frac{P_i}{Q_i} - Q_{i-1} \left[ \frac{f\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)}{f'\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)} + \dots \right] - P_{i-1}}{P_i - P_i + Q_i \left[ \frac{f\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)}{f'\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)} + \dots \right]} \\ &= \frac{Q_{i-1} P_i - Q_i Q_{i-1} \left[ \frac{f\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)}{f'\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)} + \dots \right] - Q_i P_{i-1}}{Q_i^2 \left[ \frac{f\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)}{f'\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)} + \dots \right]} \\ &= \frac{(-1)^i \frac{1}{Q_i^2} \frac{f\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)}{f'\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)} + \dots - \frac{Q_i Q_{i-1}}{Q_i^2}}{(-1)^i \left\{ \frac{Q_i Q_{i-1}}{(-1)^{i+1}} + \frac{f'\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)}{f\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)} - \frac{f''\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)}{2f'\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)} - \frac{f\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)}{f'\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)} \left[ \left( \frac{f''\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)}{2f'\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)} \right)^2 - \frac{f'''\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)}{6f'\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)} \right] - \dots \right\}}. \end{aligned}$$

<sup>26</sup>N.T. Refiriéndose al método definido en la fórmula (Q). Chebyshev hace reconocimiento de que su método no es una copia, pero que lo deduce a partir de los métodos existentes.

Los tres primeros términos de esta fórmula, fueron encontrados en el siglo pasado<sup>27</sup> por Lagrange y han sido aceptados como base del segundo método de fracciones continuas<sup>28</sup>. Para deducir esta fórmula, es suficiente con aplicar nuestro método, que es mucho más simple. Además, nos enseña claramente *con qué especial precisión* la fórmula de Lagrange expresa el verdadero valor  $t$ , mientras que si seguimos el procedimiento de su gran inventor solo podemos «adivinar» resultado. Por eso, si [¿omisión? La Redacción] en ocasiones tomamos las cifras erróneas como verdaderas o subestimamos las cifras verdaderas tomándolas por erróneas, pasamos al otro extremo<sup>29</sup>. Sin embargo, utilizando nuestro método, podemos esquivar tanto el primer error como el segundo. Para comparar nuestro método con el de Lagrange deduzco la solución de la ecuación  $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ , según su método, explicado en las *Lecciones de análisis algebraico y trascendente* (Sección I, Lección X)<sup>30</sup>

«Para una de las raíces de la ecuación  $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ , encontraremos las siguientes fracciones adecuadas

$$\frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{9}{5}, \frac{182}{101}, \frac{373}{207}, \frac{1301}{722}, \frac{1674}{929}, \frac{11345}{6929}, \frac{115124}{63889},$$

que corresponden a los denominadores de la fracción continua

$$1, 1, 4, 20, 2, 3, 1, 6, 10.$$

Si  $i = 3$ , luego  $\frac{P_i}{Q_i} = \frac{9}{5}$ ,  $Q_{i-1} = 1$  y, sustituyendo en las expresiones que aparecen en la fórmula de Lagrange, obtenemos

$$f\left(\frac{9}{5}\right) = -\frac{1}{125}, \quad f'\left(\frac{9}{5}\right) = \frac{103}{25}, \quad f''\left(\frac{9}{5}\right) = \frac{44}{5}.$$

Así pues,  $t = \frac{1}{5}(103 + \frac{22}{103} - 1)$  ó

$$t = \frac{10528}{515} = 20 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{2}}}}}$$

<sup>27</sup>N.T. Refiriéndose al siglo XVIII.

<sup>28</sup>N.T. Asumiendo que el primer método de fracciones continuas es el de Fourier, desarrollado en la Sección III.

<sup>29</sup>N.T. Entendemos que para Chebyshev, pasar al otro extremo significa que la elección de un valor inadecuado en un paso nos puede llevar a una solución incorrecta.

<sup>30</sup>P. L. Chebyshev cita a M. V. Ostrogradskii de una manera no muy exacta. La Redacción.

¿Pero, cuántos denominadores verdaderos hay aquí? Así es como lo llega a saber Lagrange:

«Al encontrar el primer cociente  $t = 20$ , se obtiene

$$Q_{i+1} = 201 \quad y \quad \partial x < \frac{-1}{5^3 \cdot 101^2} \cdot \frac{22}{33} < -\frac{1}{5400000} \text{.} \text{»}$$

En ningún caso hemos querido cambiar el texto original de Lagrange. Pongo sin ningún cambio esa expresión de desigualdad, aunque sinceramente no es muy exacta.

«De donde se tiene que obtener un valor  $Q_{i+\lambda}$  que sea menor que  $\sqrt{5400000}$  y a su vez, menor que 2300. Así que, tenemos que parar en la séptima fracción adecuada:  $\frac{P_7}{Q_7} = \frac{1674}{929}$  ».

La falta de precisión de este resultado es evidente, el siguiente denominador pertenece a la verdadera expresión de la raíz, y tenemos que parar en la octava fracción  $\frac{P_8}{Q_8} = \frac{11345}{6296}$ . En realidad nuestra fórmula nos enseña claramente que el octavo denominador de  $x$  o el quinto de la expresión de  $t$  son correctos. Aceptando  $t$  como valor aproximado según el método de Lagrange

$$\frac{(-1)^i}{Q_i^2} \left( \frac{Q_i Q_{i-1}}{(-1)^{i+1}} + \frac{f' \left( \frac{P_i}{Q_i} \right)}{f \left( \frac{P_i}{Q_i} \right)} - \frac{f'' \left( \frac{P_i}{Q_i} \right)}{2f \left( \frac{P_i}{Q_i} \right)} \right),$$

cometemos el error  $t$ , que es igual a los términos restantes de la verdadera expresión. Pero, para reducir su cálculo aproximado nos quedamos solo con su primer término. Debido a que las fracciones que se obtienen

$$\frac{f \left( \frac{P_i}{Q_i} \right)}{Q \left( \frac{P_i}{Q_i} \right)},$$

son valores suficientemente pequeños y teniendo en cuenta, además, el grado de las potencias, no pueden de ninguna manera influenciar en las primeras cifras, que son las únicas que necesitamos. Así, a partir del término

$$-\frac{(-1)^i}{Q_i^2} \frac{f \left( \frac{P_i}{Q_i} \right)}{f' \left( \frac{P_i}{Q_i} \right)} \left[ \left( \frac{f'' \left( \frac{P_i}{Q_i} \right)}{2f' \left( \frac{P_i}{Q_i} \right)} \right)^2 - \frac{f''' \left( \frac{P_i}{Q_i} \right)}{6f' \left( \frac{P_i}{Q_i} \right)} \right],$$

podemos estimar el error  $t$  de nuestra aproximación, el cual es menor que

$$\frac{1}{25} \left( \frac{1}{515} (1.21 - 0.24) \right) < \frac{1}{25(515)} = \frac{1}{12875} < \frac{1}{10000}.$$

Por consiguiente, la última fracción adecuada de  $t$  debe tener un denominador no mayor que 100. Examinemos ahora la expresión encontrada<sup>31</sup>

$$t = \frac{10528}{515} = 20 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{2}}}}}$$

y las fracciones adecuadas que corresponden a los denominadores 20, 2, 3, 1, 6, 2. La incógnita corresponde al denominador 6, con el cual<sup>32</sup>  $t = \frac{1247}{61}$  y  $x = \frac{11345}{6296}$ .

Del mismo modo, según este método, es fácil determinar cuántos denominadores tenemos que encontrar de antemano, aplicando el método general de fracciones continuas, para que el método de Lagrange tenga éxito. Para eso, tenemos que prestar atención al valor del cuarto término de la expresión de  $t$  encontrada por nosotros, y determinar, si es posible, un verdadero y único denominador. Así de simple y sencillo es aplicar nuestro método.

## § V.

Las aplicaciones de la serie ( $Q$ ), «como llamaremos en adelante la secuencia encontrada anteriormente para la expresión de  $x$ , para mayor comodidad», no terminan solo en la deducción de los métodos de Fourier y Lagrange, sino que además, nos da unos cuantos métodos más, excelentes por su rapidez de aproximación al verdadero valor de la raíz. Pero, dejemos sus investigaciones aparte por un momento, y ahora nos dedicamos a revisar los métodos de orden superior.

La serie ( $Q$ ), como hemos visto antes, es la expresión general para el cálculo de raíces de ecuaciones; se obtienen casos particulares en función del grado de la función (ecuación) considerada.

Si tenemos una ecuación  $f(x)$  de grado  $n$ , *no más de  $n$  funciones derivadas* obtendrán valores reales; el resto,  $f^{n+1}, f^{n+2}, \dots$  sucesivamente son iguales a cero. Por tal razón, en la aplicación particular de nuestra serie a la ecuación  $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots + q = 0$ , hay que omitir los términos que contienen  $f^{n+1}, f^{n+2}, \dots$  como iguales a cero; esa es la diferencia entre la expresión de la raíz de la ecuación que

<sup>31</sup>N.T. En el manuscrito de Chebyshev hay una errata en esta fracción continua, en la cual se omite el cuarto denominador, es decir, falta el 1, comprendido entre los denominadores 3 y 6. Esta misma omisión se produce en el listado de denominadores que aparece a continuación.

<sup>32</sup>N.T. A pesar de las omisiones anteriores, los cálculos de  $t$  y  $x$  están hechos incluyendo el término omitido. Pero sin embargo, aparece una nueva errata en el denominador de  $t$ , donde aparece 60 en vez de 61.

elegimos y la expresión general para cualquier potencia. Pero, por otra parte, observamos que en el estudio de la serie (Q), aparecen sucesivamente los términos

$$f'(\alpha), f''(\alpha), f'''(\alpha), \dots, f^{n-1}(\alpha), f^n(\alpha), f^{n+1}(\alpha), \dots$$

y, como consecuencia de eso, cuanto más alto es el grado de la ecuación que elegimos, más términos hay en la expresión de su raíz iguales a los de la expresión general. Este hecho, nos da la oportunidad de sustituir en la expresión general y, de manera más simple, obtener una mejor aproximación de la raíz de una ecuación particular.

Esta es la base de varios métodos de orden superior. Ahora, apliquemos nuestro razonamiento general al método de segundo orden.

Supongamos que  $f(x)$  es una ecuación de segundo grado<sup>33</sup>, entonces encontramos  $f(\alpha)$ ,  $f'(\alpha)$ ,  $f''(\alpha)$  y tendrán valores reales, las siguientes derivadas  $f'''(\alpha)$ ,  $f^{IV}(\alpha)$ , ... serán iguales a cero. Por eso, en la aplicación de la serie (Q) a una ecuación particular cuadrática, encontraremos la siguiente expresión para su raíz:

$$x = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} - \frac{1}{2} \left( \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \right)^2 \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} - \frac{1}{6} \left( \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \right)^3 \frac{3f''(\alpha)^2}{f'(\alpha)^3} \\ - \frac{1}{24} \left( \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \right)^4 \frac{15f''(\alpha)^3}{f'(\alpha)^3} - \dots = \alpha + \frac{-f'(\alpha) + \sqrt{f'(\alpha)^2 - 2f(\alpha)f''(\alpha)}}{f''(\alpha)}.$$

Conocemos que la raíz de la ecuación de segundo grado se expresa con la fórmula. Buscamos y la encontramos<sup>34</sup>

$$\alpha + \frac{-f'(\alpha) + \sqrt{f'(\alpha)^2 - 2f(\alpha)f''(\alpha)}}{f''(\alpha)}.$$

Si ahora sustituimos directamente, o lo que es igual,

$$\alpha + \frac{-f'\alpha + \sqrt{f'(\alpha)^2 - 2f(\alpha)f''(\alpha)}}{f''(\alpha)},$$

la expresión general de la raíz

$$\alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} - \frac{1}{2} \left( \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \right)^2 \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} - \frac{1}{6} \left( \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \right)^3 \left[ \frac{3f''(\alpha)^2}{f'(\alpha)^3} - \frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)} \right] \\ - \frac{1}{24} \left( \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \right)^4 \left[ \frac{15f''(\alpha)^2}{f'(\alpha)^2} - \frac{8f''(\alpha)f'''(\alpha)}{f'(\alpha)^2} + \frac{f^{IV}(\alpha)}{f'(\alpha)} \right] - \dots,$$

<sup>33</sup>N.T. Chebyshev se refiere a la ecuación  $f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2}(x - \alpha)^2$ .

<sup>34</sup>No es difícil determinar qué signo hace falta utilizar con  $\sqrt{\dots}$ . Una expresión radical tiene que dar nuestro orden y eso es solo posible con signo +.

entonces encontramos que los tres primeros términos son exactamente iguales. La diferencia empieza a partir del cuarto, y en una serie particular, a diferencia de la serie general ( $Q$ ), solo falta

$$\frac{1}{6} \left( \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \right)^3 \frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)} + \frac{1}{24} \left( \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \right)^4 \frac{8f''(\alpha)f'''(\alpha)}{f'(\alpha)^2}.$$

Estas conclusiones son suficientes para obtener una idea exacta y determinada sobre la aproximación de segundo orden, si nos dan una ecuación  $f(x) = 0$  y conocemos un valor  $\alpha$  aproximado de la raíz, entonces

$$\alpha + \frac{-f'(\alpha) + \sqrt{f'(\alpha)^2 - 2f(\alpha)f''(\alpha)}}{f''(\alpha)},$$

obtendrá un nuevo valor que será más exacto, y la diferencia con el valor verdadero es

$$- \left[ \frac{1}{6} \left( \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \right)^3 \frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left( \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \right)^4 \frac{8f''(\alpha)f'''(\alpha)}{f'(\alpha)^2} + \dots \right].$$

Por breve que sea esta conclusión, es donde está la mayor importancia de la investigación «VIII Lec[ciones] de análisis alg[ebráico] tras[cendente]». Intentaremos analizarlo.

Por eso, de antemano reducimos nuestra fórmula, que expresa el error de la aproximación de segundo orden, quitando los términos, que contienen  $\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$  y el factor en tercera potencia, como lo hace Fourier en una fórmula similar con términos que contienen  $\Delta^4, \Delta^5, \dots$ . Por lo tanto<sup>35</sup>

$$\Delta_1 = x - \alpha_1 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left( \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \right)^3 \frac{f'''(\alpha)}{f''(\alpha)}$$

y eso nos llevará a las siguientes conclusiones.

Si  $\alpha$  y  $\alpha'$  son los límites de las raíces de la ecuación  $f(x) = 0$ , con los cuales queremos aproximarnos hacia la raíz por el método de segundo orden, entonces al introducirlos en la serie de funciones  $f(x), f'(x), f''(x), \dots$  encontraremos dos líneas de signos.

Aquí se pueden diferenciar ocho casos; vamos a considerar cada uno de ellos por separado:

I)	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$\dots$
	$(\alpha)$	-	+	+	+
	$(\alpha')$	+	+	+	+

---

<sup>35</sup> $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  tendrá significado el segundo, tercero y cuarto,  $\dots$  los valores aproximados  $\alpha$ , que se encuentran sucesivamente al calcular la raíz.

La aproximación obtenida a partir de  $\alpha$  superará la raíz, porque

$$\Delta' = x - \alpha_1 = \frac{1}{6} \left( \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \right)^3 \frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

será negativo y por consiguiente  $x < \alpha_1$ . Sin embargo,

$$\alpha' + \frac{-f'(\alpha') + \sqrt{f'(\alpha')^2 - 2f(\alpha')f''(\alpha')}}{f''(\alpha')}$$

es menor que la raíz y el error que le corresponde es negativo. Así, los nuevos valores aproximados de la raíz  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  nos servirán como nuevos límites más ajustados<sup>36</sup>.

II)	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	...
	$(\alpha)$	-	+	+	+
	$(\alpha')$	+	+	+	-

En este caso

$$\frac{1}{6} \left( \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \right)^3 \frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

es un valor positivo, mientras que

$$\frac{1}{6} \left( \frac{f(\alpha')}{f'(\alpha')} \right)^3 \frac{f'''(\alpha')}{f'(\alpha')},$$

es negativo, por consiguiente, la aproximación obtenida a partir de  $\alpha$  es el límite inferior, y la obtenida a partir de  $\alpha'$  es el límite superior.

III)	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	...
	$(\alpha)$	-	-	+	-
	$(\alpha')$	-	-	+	-

Aquí, también hay que notar, igual que en el caso anterior, que la aproximación del menor límite da el menor, y la del mayor da el mayor.

IV)	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	...
	$(\alpha)$	+	-	+	-
	$(\alpha')$	-	-	+	-

En este caso, por la razón explicada en el primer ejemplo, la aproximación tanto de  $\alpha$  como de  $\alpha'$  superará la raíz y por consiguiente de nuevo aparecen sus dos límites (de la raíz).

---

<sup>36</sup>N.T. Con la notación de Chebyshev, se pasa de la situación  $\alpha < x < \alpha_1$  a  $\alpha_2 < x < \alpha_1$ , donde  $x$  es la raíz buscada y  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$  son los límites calculados por su método.

$$\begin{array}{rcccccc}
 V) & & f(x) & f'(x) & f''(x) & f'''(x) & \dots \\
 & (\alpha) & - & + & - & + & \dots \\
 & (\alpha') & + & + & - & + & \dots
 \end{array}$$

Aquí, se obtiene lo mismo que en el caso *IV*).

$$\begin{array}{rcccccc}
 VI) & & f(x) & f'(x) & f''(x) & f'''(x) & \dots \\
 & (\alpha) & - & + & + & - & \dots \\
 & (\alpha') & + & + & + & - & \dots
 \end{array}$$

Aquí, como en el caso *II*, los límites de la raíz solo se acercan, pero la aproximación del menor límite da el menor y la del mayor da el mayor.

$$\begin{array}{rcccccc}
 VII) & & f(x) & f'(x) & f''(x) & f'''(x) & \dots \\
 & (\alpha) & - & - & - & + & \dots \\
 & (\alpha') & - & - & - & + & \dots
 \end{array}$$

En la expresión del error del nuevo límite no entra  $f''(\alpha)$ , por consig[ui]ente, no depende de la expresión  $\Delta_1 = x - \alpha$ . Así que, el caso *VII* coincide con el caso *III*.

$$\begin{array}{rcccccc}
 VIII) & & f(x) & f'(x) & f''(x) & f'''(x) & \dots \\
 & (\alpha) & + & - & - & - & \dots \\
 & (\alpha') & - & - & - & - & \dots
 \end{array}$$

Aquí, lo mismo, como en el caso *I*. Para el método de segundo orden pasamos del menor límite al mayor y viceversa. Pero en este caso, de igual modo aparecen dos límites, mayor y menor.

Sin duda alguna, todas estas conclusiones se deducen fácilmente de nuestra fórmula, por lo que este estudio tan detallado es casi innecesario; pero yo lo hice únicamente para refutar la falsa opinión sobre aproximación de segundo orden de nuestro académico Ostrogradskii o tal vez solo del redactor a sus lecciones. La última me parece la más probable, y por eso a partir de aquí me refiero a *G. Burachek*, y además en lo siguiente él mismo se lo atribuye a sí mismo (Parte *I*, Pág. 263 y 264, comentarios)<sup>37</sup>.

Sin ninguna base y no solamente verdadera sino tampoco parecida a la verdadera, el autor de *Lec[ciones] de análisis alg[ebr]ico tras[cendente]* llega a la siguiente conclusión: «Por la aproximación de segundo orden se pueden calcular las raíces con la ventaja de que usa un solo límite, porque en la mayor parte de los casos considerados del otro límite, el valor calculado por la fórmula *no corregida*, no supera la raíz». Ahora, hemos examinado todos los casos posibles y hemos notado que no solamente de vez en cuando, sino hasta siempre, si la aproximación de

<sup>37</sup>N.T. Probablemente esta referencia se refiere a las *Lec[ciones] de análisis alg[ebr]ico tras[cendente]* de G. Burachek, pero no hemos podido comprobarlo.

segundo orden supera la raíz para un límite, entonces, sin duda superará para el otro, y por consig[ui]ente siempre da límites mayor y menor. Pero, el mismo G. Burachek, como si aceptando la injusticia de las palabras antes dichas en esta misma lección, en lo adelante confirma que  $\Delta'$ , que es la diferencia entre dos valores de  $x$  encontrados para los dos límites, que siempre son menores que la diferencia entre cada uno de ellos y el verdadero valor de  $x$ . ¿No será que aquí él admite que su valor verdadero siempre está entre los valores de los límites encontrados al aplicar el método de segundo orden? ¿No es lo que él negaba unas líneas más arriba?

G. Burachek elige como base de sus reflexiones la verdad contra la cual, como hemos visto, se oponía fuertemente, y concluye con la siguiente fórmula para la expresión del error de la nueva aproximación. La fórmula según su conclusión es menor que  $\frac{\Delta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{f^{IV}(\alpha')}{f'(\alpha')}$ .  $\alpha'$ , es el mayor límite de  $x$  que Ostrogradskii marca como  $b$ ; y por eso él tiene

$$\Delta' < \frac{\Delta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{f^{IV}(b)}{f'(b)},$$

y nosotros tenemos

$$\Delta' < \frac{\Delta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{f^{IV}(\alpha')}{f'(\alpha')}.$$

La falsedad de esa fórmula se puede observar con la imprecisión de su conclusión y con el resultado de una fórmula similar de Fourier. ¡Pero fuera todos estos argumentos! La fórmula de G. Burachek es por sí misma absurda y eso se nota claramente.

Si para la solución, según el método de segundo orden, elegimos una ecuación en tercera potencia (¿Y por qué no hacerlo?), entonces se observa qué diferencia habrá según esa fórmula, entre el valor encontrado de  $x$  y el valor verdadero. Ya sabemos que para la ecuación cúbica  $f^{IV}(\alpha)$  es cero; por consig[ui]ente, es siempre

$$\Delta' < \frac{\Delta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{0}{f'(\alpha')}, \quad \Delta' < 0.$$

¿Cómo se puede comprender esta expresión  $\Delta'$ ?

Podemos hacer dos suposiciones, pero ninguna de ellas puede justificar a G. Burachek.

- 1) Es posible que, en realidad, aplicando el método de segundo orden a una ecuación de tercer grado, siempre encontramos un valor  $x$ , que se diferencia del verdadero en menos que cualquier dato. Entonces, coincide con él. La contrariedad de semejante suposición es evidente.
- 2) Si en este caso  $\Delta'$  no es 0, entonces ¿no será un valor negativo? Pero, esta suposición se refuta también, no solamente con nuestra fórmula, que prueba,

que la aproximación de segundo orden para una ecuación cúbica puede muy a menudo da un valor menor que la raíz, por consiguiente,  $\Delta' = x - \alpha_1$  es positivo, sino también con numerosa variedad de ejemplos. He aquí uno de ellos<sup>38</sup>:

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0, f'(x) = 3x^2 - 2, f''(x) = 6x, f'''(x) = 6.$$

Los límites  $x_2$  y  $x_1 = 2.1$ , son bastante cercanos para empezar la aproximación de segundo orden. Y así encontramos:

$$\begin{aligned} \alpha'_1 &= 2.1 - \frac{f'(2.1) - \sqrt{f'(2.1)^2 - 2f(2.1)f''(2.1)}}{f'(2.1)} \\ &= 2.1 - \frac{11.23 - \sqrt{(11.23)^2 - 2 \cdot 12.6 \cdot 0.061}}{12.6} \\ &= 2.1 - \frac{11.23 - \sqrt{124.5754}}{12.6} \\ &= 2.1 - \frac{11.23 - 11.1613484848}{12.6} \\ &= 2.1 - 0.005448539 = 2.094551464. \end{aligned}$$

La diferencia entre el verdadero valor de la raíz y el segundo valor aproximado 2.094551464, es 0.000000351, que no es ni cero ni tampoco un valor negativo, como se hubiera deducido de la fórmula de *Lec[ciones] de análisis alg[ebraico] y tras[cendente]*.

Aquí, sin querer surge la pregunta: ¿acaso G. Burachek no se percató de esa dificultad en la aplicación de su fórmula a la ecuación de tercer grado, y eso no le hizo darse cuenta lo absurdo que es? Y así, él vio esta dificultad cuando intentaba resolver la ecuación  $x^3 - 2x - 5 = 0$  por el método de segundo orden. Pero, al final decidió que era mejor no considerar las ecuaciones de tercer grado en vez de comprobar de nuevo la demostración de su fórmula (a veces hay pereza mental en este asunto), y así, sin dar ninguna razón, introdujo en la conocida ecuación de Newton el factor  $x + 1$  de donde encontró la ecuación de cuarto grado  $x^4 + x^3 - 2x^2 - 7x - 5 = 0$ . En relación a las ecuaciones cúbicas, que son las que descubren la barbaridad de la fórmula de G. Burachek, están concienzudamente olvidadas por él.

Por otra parte el error se descubre hasta con el ejemplo dado por G. Burachek; qué pena que él no se había fijado en eso. O tal vez no quiso fijarse el redactor de Ostrogradskii. Él escoge los límites 3.5 y 3.6 para una de las raíces de la ecuación

<sup>38</sup>N.T. Como curiosidad, Chebyshev denota  $f''' = 6$  en vez de  $f'''(x) = 6$ .

$x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 9x + 2 = 0$  y se aproxima al valor verdadero de  $x$  por el método de segundo orden. Para el nuevo valor aproximado de la raíz encuentra

$$\begin{aligned} 3.5 + \frac{-2 + \sqrt{4 + 2 \cdot 33 \cdot 0.1875}}{33} &= 3.5 + \frac{-2 + \sqrt{16.375}}{33} \\ &= 3.5 + \frac{2.046603528}{23} = 3.5620016. \end{aligned}$$

¿En qué consiste la diferencia entre este valor y el verdadero? Según la fórmula de G. Burachek encontramos

$$\Delta' < \frac{\Delta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{f^{IV}(3,6)}{f''(3.6)} < \frac{(0.1)^3}{6} \cdot \frac{24}{38} < 0.000106.$$

En realidad el valor es 0.000443. Así, el error de la fórmula es

$$\Delta_1 < \frac{\Delta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{f^{IV}(b)}{f'(b)}.$$

## § VI.

El estudio de la serie ( $Q$ ), nos llevó a una gran cantidad de métodos particulares para el cálculo de raíces. En párrafos anteriores, hemos examinado todos los que hoy día se conocen como sencillos, y hemos visto que estos métodos componen solo unas cuantas aplicaciones de la verdadera expresión de la raíz de una ecuación. En este apartado tenemos la intención de examinar unas cuantas nuevas aplicaciones y enseñar su importancia para el cálculo de las raíces de una ecuación.

- 2) Si en el desarrollo de Taylor de un valor encontrado  $x = F(\beta - \beta)$ , paramos en el cuarto término, entonces según el teorema de Lagrange, obtendremos

$$x = F(\beta) - \beta F'(\beta) + \frac{\beta^2}{2} F''(\beta) - \frac{\beta^3}{6} F'''(\beta - \varphi\beta)$$

o con nuestra expresión,

$$\begin{aligned} x = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} - \left( \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \right)^2 \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \\ - \left\{ \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha \dots \alpha')} \right\}^3 \left[ \frac{\{f''(\alpha \dots \alpha')\}^2}{2\{f'(\alpha \dots \alpha')\}^2} - \frac{f'''(\alpha \dots \alpha')}{6f'(\alpha \dots \alpha')} \right]. \end{aligned}$$

La aproximación hacia el verdadero valor de la raíz, según esta fórmula, siempre es más exitoso que por el método de Fourier, y por otra parte, es bastante más simple que la aproximación de segundo orden. La expresión

$$\alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} - \left( \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \right)^2 \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)},$$

expresa el nuevo valor aproximado de la raíz, y

$$\left(\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha \dots \alpha')}\right)^3 \left[ \frac{f''(\alpha \dots \alpha')}{2\{f'(\alpha \dots \alpha')\}^2} - \frac{f'''(\alpha \dots \alpha')}{6f'(\alpha \dots \alpha')} \right],$$

es su diferencia con el verdadero valor de la raíz.

Para mostrar la importancia de este método, lo aplicaremos a la conocida ecuación de Newton

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Al sustituir 2 y 2.1 en dicha función y sus derivadas, encontramos las siguientes líneas de signos:

	$f(\alpha)$	$f'(\alpha)$	$f''(\alpha)$	$f'''(\alpha)$
	-	+	+	+
2	1	10	12	6
	+	+	+	+
2.1	0.061	11.23	12.6	6

de donde observamos:

- 1) La raíz se encuentra entre 2 y 2.1.
- 2) La expresión

$$\left(\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha \dots \alpha')}\right)^3 \left[ \frac{\{f''(\alpha \dots \alpha')\}^2}{2\{f'(\alpha \dots \alpha')\}^2} - \frac{f'''(\alpha \dots \alpha')}{6f'(\alpha \dots \alpha')} \right]$$

con el mayor valor es igual a

$$\begin{aligned} & (0.0061)^3 \left[ \frac{(12.6)^2}{2(102)} - \frac{6}{6(11.23)} \right] \\ &= (0.0061)^3 \left( \frac{(1.26)^2}{2} - \frac{1}{11.23} \right) \\ &< (0.000000216)(0.85 - 0.09) < 0.00000023. \end{aligned}$$

Partiendo de este hecho,

- 3) El nuevo valor aproximado de la raíz se diferencia del verdadero en menos que 0.0000003, y por consiguiente, por lo menos las seis cifras decimales del valor encontrado de la raíz pertenecen a su verdadera expresión.

Así, calculando hasta las cienmillonésimas partes, obtenemos

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} - \left( \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \right)^2 \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \\
 &= 2.1 - \frac{0.061}{11.23} - \left( \frac{0.061}{11.23} \right)^2 \frac{12.6}{2(11.23)} \\
 &= 2.10000000 \\
 &\quad - 0.00543187 \\
 &\quad - 0.00001654 \\
 \alpha_1 &= \overline{2.09455159}.
 \end{aligned}$$

$\Delta_1 = x - \alpha_1$ , es un valor negativo, luego  $\alpha_1 = 2.09455159$ , es mayor que la raíz, pero su diferencia con el valor verdadero es menor que 0.0000003, por consig[ui]ente, 2.0945512 es el límite menor, y en 2.094551 todas las cifras son correctas.

Al repetir este método una vez más, encontraremos 16 cifras correctas;  $\alpha_1$  será igual a 2.0945514815423265, y la diferencia entre este valor y el verdadero es menor que 0.000000000000000001. Sustituyendo 2.0945514815423265 en nuestra fórmula en vez de  $\alpha_1$ , encontramos el tercer valor aproximado a  $x$ , es decir

$$\begin{aligned}
 &2.0945514815423265 - \frac{f(2.0945514815423265)}{f'(2.0945514815423265)} \\
 &- \left\{ \frac{f(2.094551\dots)}{f'(2.094551\dots)} \right\}^2 \frac{f''(2.0945514\dots)}{2f'(2.0945514\dots)} \\
 &= 2.0945514815423265 \\
 &+ \frac{0.0000000000000001021074960443679545432495185865375}{11.16143772649346472644563309780675} \\
 &- \left\{ \frac{0.000000000000000102\dots}{11.161437\dots} \right\}^2 \frac{12.5673088892539590}{2 \cdot 11.1614377264934647264456330} \\
 &= 2.0945514815423265000000000000000000000000000000000000 \\
 &+ 0.00000000000000009148238654057930767544341990572422 \\
 &- 00470158602419672514 \\
 &= 2.09455148154232659148238654057930397385739570899908.
 \end{aligned}$$

Hemos visto que el máximo valor

$$\frac{\{f''(\alpha \dots \alpha')\}^2}{2\{f'(\alpha \dots \alpha')\}^2} - \frac{f'''(\alpha \dots \alpha')}{6f'(\alpha \dots \alpha')}$$



que además da aproximaciones para las tres expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^i}{Q_i^2} \left\{ \frac{Q_i Q_{i-1}}{(-1)^{i+1}} + \frac{f' \left( \frac{P_i}{Q_i} \right)}{f \left( \frac{P_i}{Q_i} \right)} \right\}, \\ & \frac{(-1)^i}{Q_i^2} \left\{ \frac{Q_i Q_{i-1}}{(-1)^{i+1}} + \frac{f' \left( \frac{P_i}{Q_i} \right)}{f \left( \frac{P_i}{Q_i} \right)} - \frac{f'' \left( \frac{P_i}{Q_i} \right)}{2f' \left( \frac{P_i}{Q_i} \right)} \right\}, \\ & \frac{(-1)^i}{Q_i^2} \left\{ \frac{Q_i Q_{i-1}}{(-1)^{i+1}} + \frac{f' \left( \frac{P_i}{Q_i} \right)}{f \left( \frac{P_i}{Q_i} \right)} - \frac{f'' \left( \frac{P_i}{Q_i} \right)}{2f' \left( \frac{P_i}{Q_i} \right)} \right. \\ & \left. - \frac{f \left( \frac{P_i}{Q_i} \right)}{f' \left( \frac{P_i}{Q_i} \right)} \left[ \left( \frac{f'' \left( \frac{P_i}{Q_i} \right)}{2f' \left( \frac{P_i}{Q_i} \right)} \right)^2 - \frac{f''' \left( \frac{P_i}{Q_i} \right)}{6f' \left( \frac{P_i}{Q_i} \right)} \right] \right\}. \end{aligned}$$

- a) La primera de estas fórmulas, nos da el método de fracciones continuas que corresponde a la aproximación lineal. Por la misma ley, como en el método, la cantidad de cifras correctas cada vez aumenta más rápidamente. Lo mostramos en la raíz de la ecuación  $x^3 - 2x - 5 = 0$ .

Si conocemos las siguientes fracciones adecuadas:  $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{2}{1}$ ,  $\frac{P_2}{Q_2} = \frac{21}{10}$ , entonces  $t$  se expresa como

$$\frac{1}{100} \left( \frac{16}{(-1)^3} + \frac{1123}{610} \right) = \frac{1062}{610} = 1 \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2}}}}}}$$

¿Cuántos denominadores correctos hay aquí? El término mayor de la parte desechada de  $t$  es

$$\frac{1}{100} \cdot \frac{12.6}{2 \cdot 11.23} < \frac{1}{100}.$$

Como consecuencia, la última fracción adecuada de  $t$  debe tener el denominador no mayor que  $\sqrt{100} = 10$ . Examinando la expresión encontrada

$$t = 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2}}}}}}$$

y las fracciones adecuadas  $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{47}{27}, \dots$ , encontramos que a la incógnita le corresponde el denominador 1, con el cual  $t = \frac{7}{4}$ , y  $x = \frac{155}{74} = 2.09459$ . Este valor es correcto hasta  $\frac{1}{74^2} < \frac{1}{4900} < 0.0005$  y con eso  $x$  es mayor, luego su límite menor es 2.09454. Lo mismo hemos encontrado para esa raíz, según el método de Fourier.

- b) El método de segundo orden es la fórmula de Lagrange, de la cual ya hemos hablado bastante en el apartado § IV.
- c) El método de tercer orden nos da un método extremadamente rápido. Es fácil observar la esencia del método en nuestra fórmula y por eso aquí solamente nos limitamos a señalar su alcance.

Así de numerosas y variadas son las aplicaciones de la serie (Q). Anotamos también, que su aplicación a las ecuaciones binomiales nos da el binomio de Newton con exponente fraccionario, las ecuaciones de segundo, tercer y cuarto grado, conocidas sus fórmulas finales.

Por una parte, mi objetivo es mostrar el principio general de todos los métodos particulares de cálculo de las raíces, por otra parte, es enseñar su infinita y variada multitud. Es una gran tarea, que se extiende a la mayor parte del álgebra. Sé que mi trabajo no corresponde del todo a la tarea, pero por lo menos tendré la ocasión de escuchar vuestras opiniones en relación a mis pensamientos de ese importante análisis y que tal vez me liberará de futuras equivocaciones.

## Comentarios

Según Ostrogradskii <sup>39</sup>, Chebyshev trata la solución de una ecuación algebraica

$$f(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad (1)$$

como «la última operación del álgebra», siguiendo el esquema: adición - sustracción; multiplicación - división; elevación a una potencia - extracción de una raíz; cálculo del valor de un polinomio  $P(x)$  - determinación de  $x$  en la ecuación  $P(x) = A$  ó en la igualdad  $P(x) - A = 0$  en la forma<sup>40</sup>(1).

También según Ostrogradskii, Chebyshev entiende la «última operación del álgebra» en sentido muy amplio: abarcaba tanto métodos de separación de raíces, como toda clase de métodos analíticos de búsqueda aproximada de raíces (método de Newton, método de las cuerdas, etcétera). La separación de raíces no se considera en este trabajo. El polinomio  $f(x)$  se estudia en un entorno de una raíz simple  $x$ .

En la Sección I de su trabajo, Chebyshev formula el objetivo de la investigación: dar un método general de búsqueda de las raíces de la ecuación (1), que incluya como casos particulares «tantos métodos conocidos como sea posible».

El autor lleva esto a cabo en la Sección II. Su idea se basa en el uso de series de potencias. En concreto, si la serie

$$Y = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu}X^{\nu}$$

converge en alguna región  $|X| < r$ ,  $r > 0$ , entonces con la condición  $c_1 \neq 0$ , en alguna región  $|Y| < R$ ,  $R > 0$ , se tiene el desarrollo

$$X = \sum_{\nu=1} d_{\nu}Y^{\nu},$$

y además los coeficientes  $d_{\nu}$  se expresan fácilmente en función de los  $c_{\nu}$ :  $d_1 = \frac{1}{c_1}$ ,  $d_2 = -\frac{c_2}{c_1^2}$ ,  $d_3 = \frac{2c_2^2 - c_1c_3}{c_1^3}$ ,  $d_4 = \frac{-5c_2^3 + 5c_1c_2c_3 - c_1^2c_4}{c_1^4}$ , etcétera.

Haciendo aquí el cambio de variables dado por las fórmulas

$$X = x - \alpha, \quad Y = y - \beta,$$

<sup>39</sup>«Lecciones de análisis algebraico y trascendente», leídas en la sede de los cadetes de marina en el año 1836 por el académico Ostrogradskii. Recogidas por el ingeniero de marina G. Burachek y el teniente S. Zelenii. Las llamamos brevemente «Lecciones» y las citamos en su segunda edición (Ed. Academia de Ciencias de la URSS, M-L, 1940).

<sup>40</sup>N.O. Ostrogradskii, en sus «Lecciones» (parte 1; IV) usa incluso el símbolo especial  $\nabla$ :  $x = \nabla(a_0, a_1, \dots, a_n)$  significa la solución de la ecuación (1) como función de los coeficientes del polinomio  $f(x)$ . Más adelante, según Somov, Ostrogradskii rechazó esta notación.

transformamos el desarrollo

$$y = f(x) \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu}(x - \alpha)^{\nu}, \quad (2)$$

donde

$$c_0 = \beta = f(\alpha), \quad c_{\nu} = \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!} \quad (\nu \geq 1),$$

de esta manera

$$x = F(y) \equiv \alpha + \sum_{\nu=1}^{\infty} d_{\nu}(y - \beta)^{\nu}. \quad (3)$$

En lugar de hacer  $y = 0$  en la fórmula (2) y resolver la ecuación obtenida con respecto a  $x$ , se puede sustituir  $y = 0$  en la fórmula (3), entonces la solución de dichas ecuaciones se expresa explícitamente como la serie

$$x = \alpha + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} d_{\nu} \beta^{\nu}, \quad (4)$$

que es justo lo que se conoce como la serie de Chebyshev

$$\begin{aligned} x = \alpha &- \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} - \left( \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \right)^2 \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} - \left( \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \right)^3 \left( \frac{f''(\alpha)^2}{2f'(\alpha)^2} - \frac{f'''(\alpha)}{6f'(\alpha)} \right) \\ &- \left( \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \right)^4 \left( \frac{5f''(\alpha)^2}{8f'(\alpha)^3} - \frac{5f''(\alpha)f'''(\alpha)}{12f'(\alpha)^2} + \frac{f^{(iv)}(\alpha)}{24f'(\alpha)} \right) + \dots \end{aligned}$$

El desarrollo (3) es convergente si  $|y - \beta| < R$ , y bajo esta condición tiene suma  $x$ , cumpliéndose la desigualdad  $|x - \alpha| < r$ . Tomemos un número arbitrario  $\alpha$ , suficientemente próximo a una raíz buscada  $x$  de la ecuación  $f(x) = 0$ , de modo que se tenga  $|\beta = f(\alpha)| < R$ ; obsérvese que  $R$  depende, desde luego, de la elección de  $\alpha$ , pero converge a un límite positivo cuando  $\alpha$  tiende a  $x$ , si  $x$  es un raíz simple de la ecuación dada. En este caso, los desarrollos (4) o (5) convergen a la raíz buscada de la ecuación. Así, el proceso de búsqueda de una raíz descrito por Chebyshev ciertamente converge, en algún entorno de cada raíz simple de la ecuación, a esa misma raíz.

La desigualdad  $|f(\alpha)| < R$ , determina exactamente la región de convergencia, salvo quizás en los puntos de la frontera; como el radio de convergencia  $R$  de la serie (3) es fácil expresarlo como la distancia del punto  $\beta = f(\alpha)$  hasta la singularidad (punto de ramificación) más cercana de la función inversa  $F(y)$ , en general multivalorada (pero esas singularidades, si la función  $f(x)$  es entera, solo pueden estar en términos de  $f(x)$  en los ceros de su derivada), entonces en los

ejemplos concretos, la determinación de la región de convergencia de la serie (5) no es difícil.

Parando el desarrollo (5) en un término cualquiera, Chebyshev estima la aproximación obtenida mediante la forma de Lagrange del resto de la serie de Taylor. Este impecable razonamiento permite evitar la cuestión de la convergencia, que en aquel tiempo difícilmente se podía afrontar. Basta observar que incluso la posibilidad de desarrollar una función analítica en serie de potencias, establecida por Cauchy en el año 1831, superó el rechazo de las revistas francesas solo algunos años después y difícilmente pudo haberla conocido Chebyshev en sus años de estudiante. Que su atención se fijaba en este aspecto y que buscó la respuesta a la cuestión con un gran nivel de rigor lo prueba su posterior «Nota sobre la convergencia de la serie de Taylor», véase el tomo II de esta edición, página 8, que contiene una referencia a los «Exercices d'analyse» de Cauchy.

En la Sección III Chebyshev obtiene de su fórmula, como una primera aproximación, un resultado sobre el «método de las tangentes» de Newton

$$x \approx \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

con una estimación del error considerablemente mejor que la de Fourier:

$$\left| x - \left( \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \right) \right| \leq \text{máx} \left| f(\alpha)^2 \frac{f''}{f'^3} \right|$$

(el argumento que aquí se omite pertenece al intervalo de  $x$  a  $\alpha$ ).

En la Sección IV Chebyshev da, con ayuda de la fórmula (5), una expresión del error  $t$  que se obtiene si sustituimos la raíz  $x$ , que tenga el desarrollo en fracción continua

$$x = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \dots}}$$

por algún convergente (fracción finita) de esta fracción. La fórmula de Lagrange obtenida da una expresión precisa <sup>41</sup> para  $t$  y permite obtener una estimación del error. Esta precisión, Chebyshev la muestra en uno de los ejemplos, mencionados en las «Lecciones» de Ostrogradskii.

En la Sección V se aplica la fórmula (5) para obtener un «método de segundo orden»; en (2) se sustituye  $f(x)$  por el polinomio de segundo grado  $f_1(x)$  que cumple las condiciones  $f_1(\alpha) = f(\alpha)$ ,  $f'_1(\alpha) = f'(\alpha)$ ,  $f''_1(\alpha) = f''(\alpha)$ ; como valor

<sup>41</sup>N.O. Ostrogradskii, «Lecciones» (parte 1; X).

aproximado de  $x$  se toma una raíz del polinomio  $f_1(x)$ :

$$\begin{aligned} x &\approx \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} - \frac{1}{2} \left( \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \right)^2 \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} - \frac{1}{6} \left( \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \right)^3 \frac{3f''(\alpha)^2}{f'(\alpha)^2} - \dots \\ &= \alpha + \frac{-f'(\alpha) + \sqrt{f'^2(x) - 2f(\alpha)f''(\alpha)}}{f'(\alpha)}. \end{aligned}$$

La expresión del error

$$\frac{1}{6} \left( \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \right)^2 \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} + \frac{1}{24} \left( \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \right)^4 \frac{8f''(\alpha)f'''(\alpha)}{f'(\alpha)^2} + \dots,$$

se reduce solo al primer término de tercer grado con respecto a  $\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$ . Para esto, se supone además que las derivadas  $f'$ ,  $f''$  y  $f'''$  no son idénticamente nulas en ningún intervalo de  $\alpha$  a  $\alpha'$  que contenga la raíz  $x$ .

En las «Lecciones» de Ostrogradskii (parte 1; XIII) se incluye la afirmación de que si se toman aproximaciones a  $x$  según la fórmula (6), a partir de unas aproximaciones iniciales («de orden cero»)  $\alpha$  y  $\alpha'$  por defecto y por exceso, entonces los nuevos valores mejorados  $\alpha_1$  y  $\alpha'_1$  («primeras» aproximaciones) puede probarse<sup>42</sup> que están a un lado de  $x$ . Un simple análisis, realizado por Chebyshev, demuestra que para  $\alpha$  y  $\alpha'$  suficientemente próximos, esto no es posible. De paso, Chebyshev demuestra que es falsa la estimación para  $|\alpha_1 - \alpha'_1|$ , que se deduce en las «Lecciones» (parte 1, lección XIII, página 192).

En la Sección VI Chebyshev, tomando en la fórmula (5) los tres primeros términos, obtiene la expresión aproximada

$$x \approx \alpha_1 = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} - \left( \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \right)^2 \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)},$$

con la estimación del error

$$|x - \alpha_1| \leq \text{máx} \left| f(\alpha)^3 \left( \frac{f'^2}{6f^2} - \frac{f''}{6f^2} \right) \right|$$

y demuestra, por ejemplo, operando con fracciones de 50 cifras, la rapidez de las sucesivas aproximaciones a  $x$  mediante este método.

L. Vasilkov y V. Goncharov

---

<sup>42</sup>Esta conclusión errónea, como muestra Chebyshev, se debe con toda probabilidad no a Ostrogradskii, sino a los redactores de sus «Lecciones», G. Burachek y S. Zelenii. Con más certeza aún ya que según sus palabras (véase la nota al pie de la página 190 de las «Lecciones») Ostrogradskii dejó a la audiencia el análisis de la fórmula (2) de la lección XIII. Esta misma observación se aplica a la estimación (3) en la página 192 de las «Lecciones».

### 1.3. Aportaciones de otros autores

Después de lo desarrollado en la Sección 1.2 y haciendo una comparación con el apartado 1.3.1, parece claro que Chebyshev conocía la obra de Euler. El hecho de haber trabajado, bajo la supervisión de Bunyakovskii, en la edición completa de las obras de Euler sobre teoría de números, no parece tener relevancia en este aspecto, ya que fue realizado con posterioridad (en 1849) a que escribiera su «Cálculo de las raíces de ecuaciones». No obstante, la carrera académica de Chebyshev se desarrolló bajo el legado que Euler dejó en San Petersburgo, donde pasó una buena parte de su vida (de 1727 a 1741 y de 1766 a 1783) y donde dejó un gran número de discípulos. Es más, citando de nuevo a Butzer y Jongmans [26, pp. 133–134] destacamos que:

*Chebyshev y Euler tenían mucho en común como matemáticos. Ambos estaban interesados en una gran variedad de problemas, desde la teoría de números a la ingeniería. Ambos eran plenamente conscientes de lo necesaria que era la comunicación entre la teoría y las aplicaciones. Ambos buscaron la solución más eficiente para los problemas, con el descubrimiento de algoritmos que o bien dieran una solución numérica exacta o, al menos, una buena aproximación.*

Aunque, en nuestra opinión, está claro que Chebyshev estuvo influenciado por la obra de Euler, no encontramos en «Cálculo de las raíces de ecuaciones» ninguna referencia explícita a Euler. Podemos disculpar a Chebyshev ya que, el citado trabajo no es ningún artículo de investigación y, como ya hemos comentado, se trata de un trabajo realizado durante su etapa de estudiante. No obstante, sí que encontramos citas explícitas a otros importantes matemáticos. En concreto a Sir Isaac Newton (1642–1727), J. L. Lagrange (1736–1813), Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830), Jacques Charles Francois Sturm (1803–1855) y Mikhail Vasilyevich Ostrogradsky (1801–1862).

Desde una perspectiva histórica, el método de Chebyshev (1.1) aparece dentro de una familia de procesos iterativos de la forma  $x_{n+1} = E_m(x_n)$ , definida en (3), donde  $f^{-1}$  es la inversa de  $f$ . La familia de métodos definidos en (3) se conoce como métodos de Schröder de primer tipo y es conocido que el orden de convergencia de cada método  $E_m$  definido en (3) es  $m$ . Nótese que para  $m = 2$ , se obtiene el método de Newton y que para  $m = 3$  se obtiene el método de Chebyshev.

Pero el objetivo de estas notas no es el analizar las condiciones de convergencia, ni las propiedades numéricas del método de Chebyshev. Más bien pretendemos profundizar en sus raíces históricas, con el objetivo de comprobar hasta qué punto es correcto «bautizar» al proceso definido en (1.1) como método de Chebyshev. O mejor aún, teniendo en cuenta que el método de Chebyshev es uno de los métodos

incluidos en la familia (3), la pregunta es: ¿A quién o quiénes se debe la deducción de los métodos de la familia (3)?

La controversia existente acerca de la autoría de (1.1) (o de (3)) no es nueva. En efecto, en el conocido libro de J. F. Traub [124, p. 81], sobre métodos iterativos para resolver ecuaciones algebraicas, se afirma que la familia  $E_m$  se atribuye tanto a Euler como a Chebyshev. En consecuencia, Traub usa ambos nombres de forma conjunta para referirse a la familia  $E_m$ .

La duda sobre a quién atribuir el método (1.1) es compartida por otros autores, como por ejemplo M. S. Petković, L. D. Petković y D. Herceg [100, p. 1759], quienes advierten que en la literatura rusa la secuencia  $E_m$  definida en (3) se atribuye a un trabajo de Chebyshev escrito en 1837 o 1838 y hacen referencia a la cita anterior de Traub sobre este aspecto. Sin embargo, también indican que otros autores como E. Bodewig [23] o S. Smale y M. Shub [118] adjudican  $E_m$  a Euler y, en concreto, a su *Opera Omnia*, Ser. I, Vol. X, véase [46].

Como hemos visto en las secciones anteriores, la construcción del método (1.1) por parte de Chebyshev, se basa en la interpolación cuadrática de la función inversa de  $f(x)$ .

Los distintos nombres de relevantes científicos a los que también se les atribuye el método de Chebyshev (Bernoulli, Euler, Schröder, Newton, etc.) nos hace pensar en cuáles fueron las aportaciones de cada uno de ellos. Así, podemos reflexionar sobre algunas cuestiones de interés, por ejemplo: ¿se trata del mismo método iterativo para aproximar raíces de ecuaciones no lineales?, ¿a quién en realidad le corresponden los créditos de la invención de dicho método? Incluso podemos intentar aclarar si acaso la literatura le atribuye el mismo método a varios autores o viceversa.

Una forma que se nos ocurre emprender, con el objetivo de irradiar un poco de claridad sobre este tema, es haciendo no solo la traducción de los artículos originales, o comparar la estructura matemática de cada método por separado, sino, además ser capaces de llegar a las ideas iniciales que hay detrás de cada proceso.

### 1.3.1. Leonhard Euler

En este apartado queremos resaltar que, debido a que en la literatura matemática aparecen múltiples referencias, en las que se atribuye la expresión (1.1) a varios autores, como hemos citado en párrafos anteriores, no hemos tenido otra alternativa que, acudir a las obras originales de varios de los autores a los cuales se les atribuye. Todo esto, con la intención de verificar si efectivamente, entre sus trabajos se encuentra o se puede deducir la existencia de la expresión en cuestión.

Es bien conocido que Euler es uno de los autores más prolíficos de la historia de las matemáticas. Entre los temas en los que trabajó se encuentran la teoría de



Figura 1.8: Retrato de Leonhard Euler (1707–1783), pintado por Johann Georg Brucker.

números, las series infinitas o las ecuaciones diferenciales. Afortunadamente, en la actualidad la gran mayoría de sus trabajos son accesibles desde sitios tales como *The Euler archive* [140].

Euler también trabajó en la resolución numérica de ecuaciones algebraicas, fundamentalmente polinómicas. En el Capítulo 17 de su obra *Introductio in analysin infinitorum*, véase *Opera Omnia*, Serie I volúmenes VIII y IX [45], [46] y [140], Euler desarrolló un método, basado en el uso de series recurrentes, para encontrar las raíces de una ecuación. En dicho trabajo, Euler usaba algunos resultados de De Moivre, para obtener el desarrollo en serie de una función racional. Una versión comentada y escrita con notación actual de este trabajo puede verse en [138].

La serie I, volumen X de *Opera Omnia* [140] es un texto sobre cálculo diferencial titulado *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum*<sup>43</sup>. Se trata de un libro escrito en latín y dividido en dos partes, la primera con 9 capítulos y la segunda con 18. Precisamente en el Capítulo 9 de la segunda parte, en un artículo titulado *De usu calculi differentialis in aequationibus resolvendis*<sup>44</sup> en las páginas 438 y 439 nos encontramos un desarrollo en el que

<sup>43</sup>Fundamentos de cálculo diferencial con aplicaciones al análisis finito y a la teoría de series.

<sup>44</sup>Uso del cálculo diferencial para resolver ecuaciones.

Euler, tal vez de una manera poco rigurosa, indica una forma de aproximar la raíz de una ecuación y en el que encontramos el «germen» de lo que nosotros hemos denominado método de Chebyshev. La referencia concreta a esta publicación es: <http://www.math.dartmouth.edu/~euler/docs/originals/E212sec2ch9.pdf>.

A pesar de que la expresión del método de Chebyshev resulta ser un caso particular de la familia (3), Euler no se detuvo a entrar en detalles tan puntuales como las regiones de convergencia, el orden de convergencia, ni menciona la existencia de métodos de orden superior en la familia de métodos que describe en (3), no obstante estos hechos sí quedan bastante claros en el trabajo de Chebyshev. Con la notación actual, es como sigue:

Si  $\alpha$  es la solución de la ecuación  $f(x) = 0$ , entonces, el desarrollo de Taylor de  $f(\alpha)$  en torno a un valor  $x$  da lugar a

$$0 = f(\alpha) = f(x) + f'(x)(\alpha - x) + \frac{f''(x)}{2}(\alpha - x)^2 + \frac{f'''(x)}{6}(\alpha - x)^3 + \dots$$

Sin embargo, en el trabajo de Euler la solución de la ecuación aparece escrita como

$$0 = y + zp + \frac{z^2q}{2} + \frac{z^3r}{6} + \frac{z^4s}{24} + \frac{z^5t}{120} + \&c,$$

donde  $\&c$  representa los términos restantes de la serie. La simbología utilizada en el citado artículo, junto con sus equivalentes actuales son:  $f(x) = y$ ,  $f'(x) = p$ ,  $f''(x) = q$ ,  $f'''(x) = r$ ,  $f^{(IV)}(x) = s$ , y  $f^V(x) = t$ , y la expresión de la raíz buscada es  $\alpha = x + z$ , donde

$$\begin{aligned} z = & -\frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f(x)^2 f''(x)}{2f'(x)^2} - \frac{f(x)^3 f''(x)^2}{2f'(x)^3} + \frac{f(x)^3 f'''(x)}{6f'(x)^4} \\ & - \frac{5f(x)^4 f''(x)^3}{8f'(x)^7} + \frac{5f(x)^4 f''(x) f'''(x)}{12f'(x)^6} - \frac{f(x)^4 f^{IV}(x)}{24f'(x)^5} - \&c, \end{aligned} \quad (1.2)$$

o, en otras palabras,

$$\begin{aligned} \alpha = x - & \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f(x)^2 f''(x)}{2f'(x)^2} - \frac{f(x)^3 f''(x)^2}{2f'(x)^3} + \frac{f(x)^3 f'''(x)}{6f'(x)^4} \\ & - \frac{5f(x)^4 f''(x)^3}{8f'(x)^7} + \frac{5f(x)^4 f''(x) f'''(x)}{12f'(x)^6} - \frac{f(x)^4 f^{IV}(x)}{24f'(x)^5} - \&c. \end{aligned}$$

Para determinar el valor de la solución  $\alpha$ , Euler parte de un valor aproximado  $x$ . A partir de aquí, teniendo en cuenta la fórmula (1.2), Euler obtiene un término corrector  $z$  de manera que  $x + z$  sea una mejor aproximación de  $\alpha$ .

A continuación Euler expresa  $z$  como una serie convergente

$$z = A + B + C + D + E + \&c,$$

pero sin precisar nada acerca de la naturaleza de los términos  $A, B, C, \dots$ . Luego de una cantidad de cálculos, sustituciones y reagrupación de términos, que parece interminable, podemos escribir los términos de dicha serie como:

$$\begin{array}{rcl}
 y & = & y \\
 pz & = & Ap + Bp + Cp + Dp + Ep + \&c \\
 \frac{1}{2}qz^2 & = & +\frac{1}{2}A^2q + ABq + ACq + ADq + \&c \\
 & & +\frac{1}{2}B^2q + BCq + \&c \\
 \frac{1}{6}rz^3 & = & +\frac{1}{6}A^3r + \frac{1}{2}A^2Br + \frac{1}{2}A^2Cr + \&c \\
 & & +\frac{1}{2}AB^2r + \&c \\
 \frac{1}{24}sz^4 & = & +\frac{1}{24}A^4s + \frac{1}{6}A^3Bs + \&c \\
 \frac{1}{120}tz^5 & = & +\frac{1}{120}A^5t + \&c.
 \end{array}$$

Ahora, Euler agrupa los términos de la manera siguiente, sin especificar el criterio que usa para dicha agrupación. Para ser más exactos, Euler lo resume como sigue:

$$\begin{aligned}
 A &= -\frac{f(x)}{f'(x)}, \\
 B &= -\frac{f(x)^2 f''(x)}{2f'(x)^2}, \\
 C &= -\frac{f(x)^3 f''(x)^2}{2f'(x)^3} + \frac{f(x)^3 f'''(x)}{6f'(x)^4}, \\
 D &= -\frac{5f(x)^4 f''(x)^3}{8f'(x)^7} + \frac{5f(x)^4 f''(x) f'''(x)}{12f'(x)^6} - \frac{f(x)^4 f^{IV}(x)}{24f'(x)^5},
 \end{aligned}$$

y así sucesivamente.

Como puede observarse, la familia de métodos que se obtiene contiene el método de Newton, para  $z = A$ . Otro método que extraemos de esta histórica familia es el método de Chebyshev, concretamente cuando  $z = A + B$ .

En la misma obra de Euler, se utiliza el método anterior para resolver la ecuación  $x^5 + 2x - 2 = 0$ . En este caso,

$$p = f'(x) = 5x^4 + 2, \quad q = f''(x) = 20x^3,$$

$$r = f'''(x) = 60x^2, \quad s = f^{IV}(x) = 120x.$$

Tomando como primera aproximación  $x = 1$ , se obtiene como segunda aproxima-

ción

$$\begin{aligned}
 z &= A + B + C + D + E \\
 &= -\frac{1}{7} - \frac{10}{7^3} - \frac{200}{7^5} + \frac{10}{7^4} - \frac{5 \cdot 1000}{7^7} + \frac{500}{7^6} - \frac{5}{7^5} \\
 &= -\frac{1}{7} - \frac{10}{7^3} - \frac{130}{7^5} + \frac{1745}{7^7} \\
 &= -0.18.
 \end{aligned}$$

Para Euler, la solución buscada es  $\alpha = x + z = 1 - 0.18 = 0.82$ .

Como  $\alpha = x - z$ , entonces  $\alpha = 1 - 0.18 = 0.82$ , que es muy buena aproximación. Euler acaba de emplear un método de quinto orden de convergencia.

Esperamos que al igual que quien suscribe, puedan identificar el espíritu del método de Chebyshev, a pesar de que Euler no truncó su serie en el segundo término, como sí lo hace Chebyshev. Probablemente Euler no se detuvo a pensar que por truncamiento de esa serie, podía obtener métodos con distinto orden de convergencia. Sin embargo, como ya hemos indicado, Chebyshev sí que se dio cuenta de este matiz.

### 1.3.2. Joseph Louis Lagrange

Otro gran invitado a esta selecta reunión, no menos importante, es Lagrange, quien a edad temprana, en la escuela, sus intereses infantiles eran leer a Homero y Virgilio, y cuando una memoria de Halley llegó a sus manos, le alumbró la chispa matemática.

Llegó al corazón de las matemáticas en un espacio de tiempo increíblemente corto. A los dieciseis años de edad, fue nombrado profesor de matemáticas en la *Escuela Real de Artillería de Turín*, transcribía a las matemáticas todos los pequeños temas sobre investigaciones físicas que le traían sus amigos, de la misma manera que Schubert pondría música a cualquier ritmo perdido que arrebatara su fantasía. Con tan solo diecinueve años de edad, obtuvo fama resolviendo el problema isoperimétrico, que había desconcertado al mundo matemático durante medio siglo. Comunicó su demostración en una carta a Euler, el cual se interesó enormemente por la solución, de modo especial en cuanto concordaba con un resultado que él mismo había hallado. Euler con admirable tacto y amabilidad respondió a Lagrange, ocultando deliberadamente su propia obra, de manera que todo el honor recayera sobre su joven amigo.

En la Sección IV del «Cálculo de las raíces de ecuaciones», Chebyshev se dedica a analizar en profundidad lo que él denomina como *Método de Lagrange*. Por dicho método se refiere al aparecido en el texto *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés*, publicado por primera vez por Lagrange en 1798,

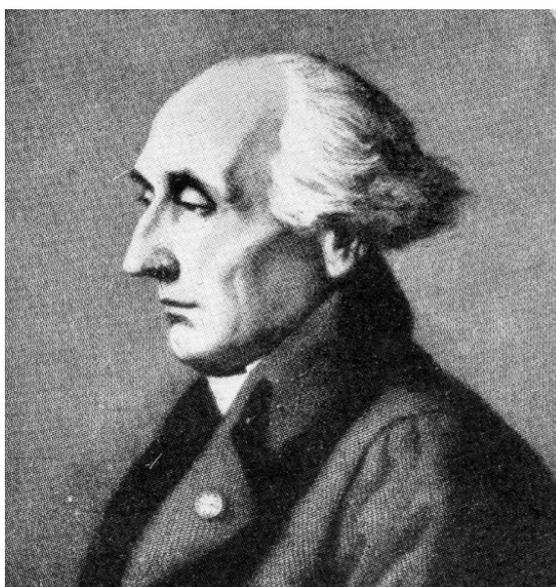


Figura 1.9: Joseph Louis Lagrange (1736–1813). Fue matemático, físico y astrónomo italiano. Demostró el teorema del valor medio, desarrolló la mecánica Lagrangiana y tuvo una importante contribución en astronomía.

véase [87]. La citada obra es un compendio de trabajos sobre la teoría de ecuaciones algebraicas en el que aparecen, entre otros, métodos para separar las raíces reales de una ecuación algebraica o métodos de aproximación de raíces mediante fracciones continuas, para más información sobre la obra de Lagrange, véase [89] y [111].

La referencia de Chebyshev al texto de Lagrange no es directa. Lo hace de manera indirecta, a través de las *Lecciones de análisis algebraico y transcendente* de Ostrogadski. En concreto, hace una comparativa entre el método de fracciones continuas de Lagrange y su método para resolver la ecuación  $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ . Ahora, recogemos la siguiente cita de Chebyshev que aparece al final de la Sección IV:

*Del mismo modo, según este método es fácil determinar cuantos denominadores tenemos que encontrar de antemano, aplicando el método general de fracciones continuas, para que el método de Lagrange tenga éxito.*

*Parando el desarrollo  $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$  en un término cualquiera, nuestro método estima la aproximación obtenida mediante la forma de Lagrange del resto de la serie de Taylor. Este impecable razonamiento permite evitar la cuestión de la convergencia, que en aquel tiempo difícilmente se podía afrontar.*

En realidad, Lagrange no solo había resuelto un problema, también había inventado un nuevo método, un nuevo cálculo de variaciones, que sería el tema central de la obra de su vida. Lagrange vivió en Prusia durante veinte años, produciendo obras de alta distinción, que culminaron en su *Mécanique Analytique*. Decidió publicarla en Francia. Produjo muchas joyas de la literatura del álgebra y el análisis. Sin embargo, la inclusión de Lagrange en esta discusión obedece a sus resultados presentados en su obra *Traité de la Résolution des Équations Numériques de Tous les Degrés*, véase [87]. El método de resolución de ecuaciones de Lagrange y notas adicionales sobre la resolución numérica de ecuaciones, apareció en las memorias de la Real Academia de las Ciencias de Berlín, Vol. XXIII, 1769 y Vol. XXIV, 1770. Además, figuran en el Vol. II de Oeuvres de Lagrange, pp. 539 y pp. 581.

En el ejemplo que sigue, dejaremos establecida la diferencia entre el método de Chebyshev y el de Lagrange. Dicha diferencia, empieza en la idea con que cada uno concibe la forma de aproximar las raíces de una ecuación polinómica. Dada la ecuación

$$f(x) = x^3 - 2x - 5,$$

queremos aproximar una raíz  $\alpha$  de modo que  $f(\alpha) = 0$ . Así que, de acuerdo al método de Lagrange, los números para sustituir en lugar de  $x$  son los números naturales  $0, 1, 2, 3, \dots$ , esto da como resultado la secuencia:  $-5, -6, -1, +16, \dots$ . Vemos que hay al menos una raíz de la ecuación entre los números  $2$  y  $3$ , y que  $2$  es el valor más aproximado a esta raíz. Ahora, seguimos el planteamiento mediante la sustitución de  $x = 2 + \frac{1}{y}$ , y ordenando los términos en relación a  $y$  se obtiene la ecuación

$$y^3 - 10y^2 - 6y - 1 = 0,$$

hacemos un cambio de signos para que el primer término sea positivo. Para encontrar el valor aproximado  $y$ , sustituimos los números  $0, 1, 2, 3, \dots$ , hasta que nos encontramos con dos sustituciones cuyos resultados de signos opuestos. Observamos que para  $y = 0, \dots, 9$  obtenemos resultados negativos. Sin embargo, entre  $y = 10$  e  $y = 11$  surge el primer cambio de signo, con lo cual obtenemos los primeros resultados  $-61, +54$ , por lo tanto, el valor aproximado es  $10$ . Ahora hacemos

$$y = 10 + \frac{1}{z}$$

tenemos la ecuación

$$61z^3 - 94z^2 - 20z - 1 = 0,$$

y suponiendo sucesivamente  $z = 1, 2, \dots$ , obtenemos los resultados  $-54, +71, \dots$ , donde nos quedamos con  $1$ .

Continuamos con  $z = 1 + (1/u)$ . Luego de hacer la sustitución adecuada llegamos a la ecuación

$$54u^3 + 25u^2 - 89u - 61 = 0,$$



Figura 1.10: Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830).

y suponiendo  $u = 1, 2, \dots$ , obtenemos los resultados  $-71, +293, \dots$ , aquí nos quedamos con 1 como la siguiente aproximación, y así sucesivamente. Y de esta manera, encontramos la secuencia

$$2, 10, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 12, \dots$$

Por último, la raíz buscada se expresa por la fracción continua

$$\alpha = 2 + \frac{1}{10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$$

de donde obtenemos las fracciones

$$\frac{2}{1}, \frac{21}{10}, \frac{23}{11}, \frac{44}{21}, \frac{111}{53}, \frac{155}{74}, \frac{576}{275}, \frac{731}{349}, \frac{1307}{624}, \frac{16415}{7837}, \dots,$$

que son, alternativamente, más pequeñas y más grandes que el valor de  $\alpha$ .

La última fracción  $\frac{16415}{7837}$  es mayor que la raíz buscada, pero el error será menor que  $\frac{1}{(7837)^2}$ , es decir, menos de 0.000000163. De hecho, si se reduce la fracción  $\frac{16415}{7837}$  como fracción decimal, será exacta hasta la séptima cifra, y por división es 2.0945514865... , luego la raíz se buscará entre los números 2.09455149 y 2.09455147.

### 1.3.3. Jean Baptiste Joseph Fourier

Jean Baptiste Joseph Fourier nació el 21 de marzo de 1768 en Auxerre, capital del departamento de Yonne, en la región de Borgoña (Francia), al sureste de París, y fallece el 16 de mayo de 1830 en París, faltando tan solo 7 años para que Chebyshev escribiera su artículo. Fourier fue matemático y físico francés, conocido por sus trabajos sobre la descomposición de funciones periódicas en series trigonométricas convergentes, llamadas series de Fourier. Con este método consiguió resolver la ecuación del calor. Fue el primero en dar una explicación científica al efecto invernadero en un tratado. Se le dedicó un asteroide que lleva su nombre y que fue descubierto en 1992.

*Si existe un método general para la resolución de ecuaciones, éste debe ser análogo a las operaciones, las cuales no serían más que casos particulares de dicho método.*

Con esta cita de Fourier, Chebyshev deja marcadas sus pretensiones en cuanto a la búsqueda de un método general para resolver ecuaciones algebraicas, que es el objetivo fundamental de su trabajo. De este modo, una y otra vez encontraremos en su escrito, comentarios como el siguiente:

*Indiscutiblemente no se puede perder la esperanza de encontrar un método más cómodo que el de Fourier y así hacer más sencillo el encontrar la solución de una ecuación.*

Nos gustaría destacar que en la Sección III, Chebyshev habla de los métodos de Newton y Fourier. Pero cuando Chebyshev habla del método que se dice de Fourier, realmente se está refiriendo al mismo método que actualmente conocemos como método de Newton, pero al que se le ha aportado una cota del error, además de ser el primero en nombrarlo método de Newton. Además, resaltamos que el método de Newton que conoció Fourier no incluía derivadas. Entre las aportaciones de Chebyshev está la de mejorar dicha estimación del error:

*Es evidente la ventaja de nuestro método frente al método de Fourier. De una operación él obtenía solo dos cifras correctas, sin embargo nosotros cuatro. Y si repetimos nuestro método, como lo hizo Fourier, unas cuatro veces más, entonces habríamos obtenido por lo menos 64 cifras correctas mientras que él no pudo encontrar más que 32.*



Figura 1.11: Jacques Charles Francois Sturm (1803–1855).

#### 1.3.4. Jacques Charles Francois Sturm

Jacques Charles Francois Sturm ([119], [122]), [142], cuyo nacimiento se produce el 29 de septiembre de 1803 en Ginebra, y fallece el día 15 de diciembre de 1855 en París, Francia. A diferencia de la mayoría de los personajes citados, Sturm fue contemporáneo de Chebyshev, a pesar de que murió cuando a penas éste daba inicio a su vida científica-productiva. Sturm fue un matemático francés de ascendencia alemana. Su familia había emigrado desde Estrasburgo, hacia el año 1760. En 1818, comenzó a asistir a las conferencias de la academia de Ginebra. En 1819, el fallecimiento de su padre lo obligó a tener que darles clases a niños ricos para poder mantener a su familia. En 1823, comenzó a trabajar como tutor para el hijo de Madame de Staël<sup>45</sup>.

Otro de los matemáticos a los que se hace referencia en «Cálculo de las raíces de ecuaciones» es Sturm, del cual Chebyshev conocía su obra en profundidad. La relevancia del método de Sturm se puede apreciar en esta cita textual:

*En este apartado no entraremos en los detalles aplicados en las técnicas*

---

<sup>45</sup>Anne Louise Germaine Necker (1766–1817), Baronesa de Staël-Holstein, más conocida como Madame de Staël, fue una escritora suiza, considerada francesa por su vida e influencia en la vida cultural parisina.

*de separación de raíces, las cuales son operaciones fácilmente realizables según los métodos de Sturm.*

El trabajo más famoso de Sturm es una memoria sobre la resolución de ecuaciones numéricas, publicada en 1829. Trata sobre el problema de determinar el número de ecuaciones reales de una ecuación en un intervalo. Este problema era muy famoso y con una larga historia, ya que fue considerado por René Descartes (1596–1650), Michel Rolle (1652–1719), Lagrange y Fourier. El primero en dar una solución completa fue Augustin Louis Cauchy (1789–1857), pero su método resultó ser muy incómodo y poco práctico. Sturm adquirió fama con su trabajo sobre este importante problema, usando las ideas de Fourier, dio una solución sencilla. Hermite escribió:

*Sturm's theorem had the good fortune of immediately becoming a classic and of finding a place in teaching that it will hold forever. His demonstration, which utilises only the most elementary considerations, is a rare example of simplicity and elegance<sup>46</sup>.*

Como se pone de manifiesto en [120], Sturm era discípulo de Fourier y por tanto, buen conocedor de su obra. La obra de Sturm tuvo gran repercusión en los ambientes científicos de la época. Su teorema fue presentado a la *Académie Royale des Sciences* de París en 1829 y obtuvo el premio de dicha academia en 1834, aunque no se publicó hasta seis años más tarde, en 1835. También es conocido que Sturm colaboró activamente con otros científicos de la época, en especial con Joseph Liouville. Curiosamente, Liouville fue a su vez amigo personal de Chebyshev, con el cual coincidía en varias ocasiones en sus visitas a Francia.

El conocido como *Teorema de Sturm*, trata sobre el cálculo de las raíces reales de una ecuación numérica. En concreto (véase [119]), establece un procedimiento para determinar el número de raíces reales de una ecuación  $f(x) = 0$  entre dos valores  $a$  y  $b$ , en función del número de cambios de signo de una sucesión de funciones, conocidas como funciones auxiliares de Sturm, evaluadas en  $x = b$  y en  $x = a$ .

Este método es utilizado para aislar las raíces reales de una ecuación polinómica  $f(x)$ . Si la raíz no se encuentra directamente, se debe utilizar algún método de aproximación en los intervalos donde se encuentren las raíces. Este hecho pone en evidencia que, en ocasiones este método puede resultar un tanto laborioso.

En el artículo original de Chebyshev, que abordamos concretamente en la Sección 1.2, de este capítulo, hay una frase que alude a la utilización del método de

---

<sup>46</sup>El teorema de Sturm ha tenido la buena fortuna de convertirse inmediatamente en un clásico y ha encontrado un espacio en la enseñanza que durará para siempre. Su demostración, que utiliza solo las más elementales consideraciones, es un raro ejemplo de sencillez y elegancia.

Sturm, en la labor de separación de las raíces de una ecuación polinómica. Esta es la razón por la que hemos incluido el método de separación de raíces de Sturm, en este apartado.

A finales de 1823, Sturm pasó una corta temporada en París junto a la familia de su estudiante. Decidió, junto a su compañero de estudios Jean Daniel Colladon, véase [136], probar fortuna en París, y obtuvo un empleo en el Bulletin universel. En 1829, descubrió el teorema que lleva su nombre y que permite hallar el número de raíces reales en una función polinómica.

Sturm sacó provecho de la revolución de 1830, ya que su fe protestante le impedía conseguir empleo en las escuelas secundarias públicas. A fines de 1830, comenzó a desempeñarse como profesor de matemáticas especiales en el Collège Rollin. Ingresó a la Académie des Sciences en 1836, ocupando el lugar de André Marie Ampère. Sturm fue designado profesor titular en la École Polytechnique en 1840. Ese mismo año, después de la muerte de Siméon Denis Poisson (1781–1840), fue seleccionado como el profesor de mecánica de la Faculté des Sciences de París. Sus obras, Cours d'analyse de l'école polytechnique, entre los años 1857–1863 y Cours de mécanique de l'école polytechnique en 1861, fueron publicadas póstumamente en París, y más tarde se publicaron varias veces más.

Junto a Liouville, Sturm desarrolló la teoría Sturm-Liouville. En 1826, en conjunto con su colega Colladon, ayudó a llevar a cabo la primera demostración experimental de la velocidad del sonido en el agua. El nombre de Sturm es parte de la lista de los 72 nombres grabada en la Torre Eiffel.

### 1.3.5. Friedrich Wilhelm Karl Ernst Schröder

Hasta ahora hemos citado algunos autores que, sin duda, tuvieron influencia en el trabajo de Chebyshev sobre resolución de ecuaciones no lineales. Pasamos ahora a ver algunos autores que pudieron ser influenciados por Chebyshev, uno de ellos pudo ser Schröder. Otras posibles influencias se verán en la sección dedicada a las construcciones del método de Chebyshev.

Schröder nació el 25 de noviembre de 1841 en Mannheim y murió el 16 de junio de 1902 en Karlsruhe, fue un matemático alemán, conocido especialmente por sus trabajos sobre lógica algebraica. Estudió Matemáticas en Heidelberg, Königsberg y Zürich, bajo la tutoría de Otto Hesse, Gustav Kirchhoff, y Franz Neumann. Después, fue profesor por algunos años, enseñó en la Universidad Técnica de Darmstadt en 1874; dos años después fue profesor en la Escuela Politécnica de Karlsruhe, cargo en el que permaneció hasta el final de su vida. Nunca se casó.

Fue una figura principal en la historia de la lógica matemática (término que él generalizó), debido a que sintetizó y difundió las obras de George Boole, Augustus De Morgan, Hugh MacColl y especialmente la de Charles Peirce. Se hizo famoso



Figura 1.12: Friedrich Wilhelm Karl Ernst Schröder (1841–1902).

con su monumental *Vorlesungen über die Algebra der Logik*<sup>47</sup>, en 3 volúmenes, que preparó el camino para el surgimiento de la lógica matemática como una disciplina separada, durante el siglo XX y para la construcción de los diversos sistemas actuales de lógica formal. Hizo destacadas contribuciones originales sobre álgebra, teoría de conjuntos, retículos, teoría del orden y números ordinales. Junto con George Cantor, fue codescubridor en 1898 del Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder, cuya demostración fue corregida por Felix Bernstein<sup>48</sup>. Schröder dijo que su objetivo era:

*... diseñar la lógica como una disciplina de cálculo, especialmente para tener acceso a la dirección exacta de los conceptos relativos y a partir de allí, emanciparse de las demandas rutinarias del lenguaje natural, para apartar cualquier suelo fértil del «cliché», también en el campo de la filosofía. Esto deberá preparar el terreno para un lenguaje universal científico que sea más un lenguaje de signos que un lenguaje de sonidos.*

---

<sup>47</sup>Lecciones sobre el Álgebra de la Lógica.

<sup>48</sup>Felix Bernstein (1878, Halle, Alemania–1956, Zúrich, Suiza) fue un matemático conocido por desarrollar un teorema de equivalencia de conjuntos en 1897. Fue alumno del matemático alemán George Cantor.

La familia de procesos iterativos definida en (3) ha sido descubierta de forma independiente por muchos autores, además de Euler y Chebyshev. En [125] podemos encontrar una serie de referencias y notas históricas que justifican esta afirmación. En concreto, el descubrimiento de la familia (3) se puede atribuir también a J. S. Frame [53], H. J. Hamilton [70], J. König, [101], H. W. Richmond [109], o incluso a S. Wall [128].

De entre estos trabajos podemos destacar, sin duda, los de E. Schröder [116], [139]. El propio Traub afirma en [125] que el trabajo de Schröder es una «mina de oro de información sobre procesos iterativos». En efecto, Schröder distingue dos familias de métodos iterativos para resolver ecuaciones algebraicas. En ellas, podemos encontrar la mayor parte de los métodos iterativos más conocidos (Newton, Halley, Chebyshev, etc.). Stewart (véase [139]), traductor al inglés del trabajo original de Schröder, citaba palabras de Householder para poner de manifiesto la importancia de la obra de Schröder:

*A. S. Householder solía afirmar que se puede evaluar un trabajo sobre cálculo de raíces de ecuaciones algebraicas buscando una cita de Schröder en el artículo. Si falta dicha cita, es que, probablemente, el autor ha redescubierto algo ya conocido por Schröder. Esta observación puede parecer un poco exagerada, puesto que se han hecho muchas cosas con posterioridad al trabajo de Schröder; sin embargo, se puede afirmar sin género de dudas que el artículo de Schröder contiene, por primera vez, una descripción general y el análisis sistemático de los algoritmos para resolver ecuaciones.*

Otro artículo, más reciente, en el que se pone de manifiesto la importancia de la obra de Schröder, es el de Petković (véase [100]). En él, ponen de manifiesto que los métodos de Schröder han sido redescubiertos por diferentes autores y expresados de diferentes formas durante los últimos 130 años. Además, en este mismo artículo los autores prueban la equivalencia entre las familias de métodos de primer y segundo tipo desarrollados por Schröder.

De forma resumida y con una notación actualizada, la técnica de Schröder para desarrollar su familia de métodos de primer tipo es la siguiente. Sea  $\alpha$  una raíz simple de una función  $f(x)$  y a su vez un punto fijo de una cierta función de iteración  $F(x)$ , es decir,  $f(\alpha) = 0$  y  $F(\alpha) = \alpha$ . La técnica de Schröder se apoya en el hecho de que si

$$0 = F'(\alpha) = F''(\alpha) = \dots = F^{(m-1)}(\alpha) \text{ y } F^{(m)}(\alpha) \neq 0,$$

entonces la sucesión  $x_{n+1} = F(x_n)$  converge a  $\alpha$  con orden de convergencia  $m$ .

Si se supone que  $F(x)$  es de la forma  $F(x) = x - \varphi(x)$ , entonces  $\alpha$  es un punto fijo de  $F(x)$  si y solo si  $\varphi(\alpha) = 0$ , es decir, si  $\alpha$  es una raíz de  $f(x)$  y de

$\varphi(x)$ . Por lo tanto, podemos suponer que  $\varphi(x) = f(x)\varphi_1(x)$  y, en consecuencia,  $F(x) = x - f(x)\varphi_1(x)$ .

Si se busca ahora un algoritmo con convergencia cuadrática, se deberá cumplir que  $F'(\alpha) = 0$ , o equivalentemente,  $f'(\alpha)\varphi_1(\alpha) = 1$ . La idea de Schröder es asumir que

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{f'(x)} + f(x)\varphi_2(x)$$

y, por tanto,

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - f(x)^2\varphi_2(x).$$

Nos podemos preguntar ahora por cómo debería ser la función  $\varphi_2(x)$  para que el método  $x_{n+1} = F(x_n)$  tenga convergencia cúbica. Esto se cumple cuando  $F''(\alpha) = 0$ , lo cual es cierto si

$$\varphi_2(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)^3}.$$

Esta ecuación sugiere tomar como

$$\varphi_2(x) = \frac{f''(x)}{2f'(x)^3} + f(x)\varphi_3(x)$$

y, por consiguiente,

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f(x)^2 f''(x)}{2f'(x)^3} - f(x)^3 \varphi_3(x).$$

Nótese que tomando  $\varphi_3(x)$  constantemente igual a cero, obtenemos el método de Chebyshev. Si seguimos repitiendo el proceso, buscando ahora una función  $\varphi_3(x)$  para que se cumpla  $F'''(\alpha) = 0$  y así sucesivamente, se va obteniendo una familia de procesos iterativos en los que se va incrementando el orden de convergencia. En concreto, Schröder deduce los conocidos como métodos de primer tipo (véase [100] o [139]):

$$E_m(x) = x + \sum_{\nu=1}^{m-1} (-1)^\nu \frac{f(x)^\nu}{\nu!} (f^{-1})^{(\nu)}(f(x)),$$

donde  $f^{-1}$  es la inversa de  $f$ . Schröder afirma que la sucesión  $x_{n+1} = E_m(x_n)$  converge a  $\alpha$  con orden de convergencia  $m$ . Es más Schröder afirma que, para resolver ecuaciones algebraicas de la forma  $f(x) = 0$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , cualquier método iterativo  $F_m$  con orden de convergencia  $m$  puede escribirse de la forma

$$F_m(x) = E_m(x) + f(x)^m \varphi_m(x),$$

donde  $E_m$  es la familia definida en (3) y  $\varphi_m$  es una función acotada en la raíz  $\alpha$  que depende únicamente de  $f$  y sus derivadas.

Schröder escribió un artículo más sobre encontrar raíces de ecuaciones, o más bien sobre iteración de funciones (véase [116]), y luego dirigió su atención hacia otros temas.

Vista la forma en que Schröder construye esta familia de métodos, es probable que en algún momento Schröder haya tenido contacto con el trabajo de Chebyshev, y ya sabemos que a la inversa no pudo ocurrir.

## 1.4. Construcciones del método de Chebyshev

El método de Chebyshev es un conocido método iterativo para aproximar las raíces de una ecuación  $f(x)$ , su expresión clásica es

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{f(x_n)f''(x_n)}{2f'(x_n)^2}\right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n \geq 0. \quad (1.3)$$

Este método, junto con sus mejoras, aplicaciones y modificaciones ha llamado la atención de muchos investigadores. Por ejemplo, desde el punto de vista histórico, podemos encontrar una forma equivalente para escribir (1.3) conocida como fórmula de Schröder, véase [116]. Como muestra de recientes publicaciones sobre este tema, podemos citar por ejemplo [3], [4], [38], [40], [39], [62], [85] o [93].

El método de Chebyshev, puede deducirse de diferentes maneras. Por ejemplo, puede ser obtenido por la interpolación cuadrática de la función inversa de  $f(x)$  con el fin de aproximar  $f^{-1}(0)$ , véase [3], [64] y [124]. Admite también una derivación geométrica, en términos de la parábola osculadora

$$ay(x)^2 + y(x) + bx + c = 0, \quad (1.4)$$

que satisface las condiciones de tangencia

$$y(x_n) = f(x_n), \quad y'(x_n) = f'(x_n) \quad y \quad y''(x_n) = f''(x_n).$$

Dedicamos este apartado a las distintas formas en que se ha podido obtener la construcción del método de Chebyshev, teniendo como punto de partida ideas diferentes, véase [93].

En primer lugar, usaremos una forma clásica de construcción de métodos iterativos, que consiste en la aproximación de la función inversa de  $f(x)$ . Esta forma se conoce como «interpolación cuadrática inversa», la misma ha sido estudiada por autores como [1], [93] y [124]. Otra forma de deducción del método de Chebyshev que presentamos en esta sección es el método de la parábola tangente, véase [112], [113] y [133]. Dicho método consiste en tomar una parábola que tenga algún

punto de tangencia respecto a la función  $f(x)$ , y a continuación con un poco de manipulación algebraica se obtiene la función iterativa del método de Chebyshev.

Otra forma en la que se puede deducir el método de Chebyshev, que también es un tipo de deducción geométrica, es por medio de la interpolación exponencial. A diferencia de la interpolación cuadrática inversa y del método de las parábolas tangentes, aquí consideramos la curva de aproximación dada por la expresión

$$y(x) = e^{a(y-y(x_n))}(b(x-x_n) + c),$$

y procedemos de manera similar a como lo han hecho V. Kanwar, S. Singh y S. Bakshi en [81] o R. Behl, V. Kanwar y K. K. Sharma en [19].

Finalmente, presentamos una forma muy particular de deducir una familia de métodos iterativos, entre los cuales está el método de Chebyshev, para encontrar ceros de ecuaciones, que tiene como base, los métodos de Obreshkov, que son métodos para resolver ecuaciones diferenciales, véase [63] y [95].

### 1.4.1. Interpolación cuadrática inversa

Dada la función  $y = f(x)$ , llamaremos  $x = \phi(y)$  a la función inversa de  $f$ . Haciendo el desarrollo en series de Taylor, en torno a un punto, digamos  $y_0$ , entonces tenemos

$$\phi(y) \approx \phi(y_0) + \phi'(y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}\phi''(y_0)(y - y_0)^2.$$

Encontrar la raíz  $\alpha$  de la ecuación  $f(x) = 0$ , es lo mismo que encontrar la imagen del cero por medio de la función  $\phi$ , es decir calcular  $\phi(0)$ . Así, si  $x_0$  es un valor próximo a  $\alpha$  y  $f(x_0) = y_0$ , entonces,

$$\phi(0) \approx \phi(y_0) - \phi'(y_0)y_0 + \frac{1}{2}\phi''(y_0)(y_0)^2.$$

De aquí podemos deducir una nueva aproximación a  $\alpha$ , que denotamos  $x_1$ :

$$x_1 = x_0 - \phi'(y_0)f(x_0) + \frac{1}{2}\phi''(y_0)f(x_0)^2. \quad (1.5)$$

Ahora calculamos  $\phi'(y)$  y  $\phi''(y)$  para sustituirlo en (1.5). Sabemos que  $x = \phi(y)$ ,  $y' = f'(x)$  e  $y'' = f''(x)$ , de modo que ahora, por el teorema de la función inversa,

$$\phi'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{y'} = \frac{1}{f'(x)}, \quad (1.6)$$

y

$$\phi''(y) = \frac{d\phi'(y)}{dy} = \frac{d(1/f'(x))}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = -\frac{y''}{(y')^3}. \quad (1.7)$$

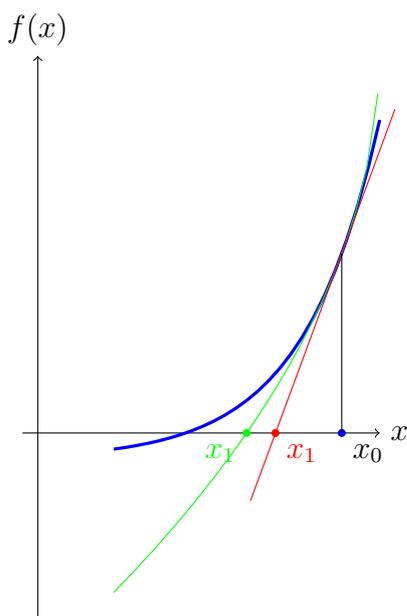


Figura 1.13: Interpretación geométrica del método de Chebyshev.

Sustituyendo (1.6) y (1.7) en (1.5) se obtiene

$$x_1 = x_0 - \left(1 + \frac{1}{2}L_f(x_0)\right) \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Repitiendo el mismo proceso para el punto  $x_1$ , conseguimos la nueva aproximación  $x_2$  y por recurrencia obtenemos la expresión (1.3) que representa el algoritmo iterativo del método de Chebyshev.

### 1.4.2. Método de las parábolas tangentes

Una forma sencilla de obtener el método iterativo de Chebyshev, es por medio de una derivación geométrica a partir de una parábola tangente a la gráfica de la función cuya raíz se desea aproximar, como ilustramos en la Figura 1.13.

Consideremos una parábola de la forma

$$ay^2 + y + bx + c = 0, \tag{1.8}$$

la idea consiste en aproximar la función  $f(x)$  eligiendo como semilla un punto  $x_0$  suficientemente próximo a la raíz  $f(x) = 0$ . Si ahora tomamos en cuenta que la

función debe cumplir las condiciones de tangencia siguientes

$$y(x_n) = f(x_n), \quad (1.9)$$

$$y'(x_n) = f'(x_n), \quad (1.10)$$

$$y''(x_n) = f''(x_n), \quad (1.11)$$

podemos escribir la parábola (1.8) de la forma conveniente

$$a(y - f(x_n))^2 + (y - f(x_n)) + b(x - x_n) = 0, \quad (1.12)$$

de modo que si  $x = x_n$ , entonces  $y(x_n) = f(x_n)$ , este hecho cumple la condición de tangencia (1.9).

Ahora determinamos los parámetros  $a$  y  $b$  para que se cumplan las condiciones

$$y'(x_n) = f'(x_n), \quad y''(x_n) = f''(x_n).$$

Si derivamos la expresión (1.12), nos queda

$$2a(y(x_n) - f(x_n))y'(x_n) + y'(x_n) + b = 0, \quad (1.13)$$

luego evaluando en el punto  $(x_n, f(x_n))$  nos queda

$$y'(x_n) + b = 0,$$

es decir

$$b = -y'(x_n) = -f'(x_n).$$

Como podemos observar, ahora falta derivar la expresión (1.13) y despejar  $a$ , como sigue

$$2a(y'(x_n))^2 + 2a(y(x_n) - f(x_n))y''(x_n) + y''(x_n) = 0,$$

esta expresión, evaluada en el punto de intersección  $(x_n, f(x_n))$  queda reducida a la expresión

$$2a(y'(x_n))^2 + y''(x_n) = 0.$$

Si ahora despejamos  $a$ , se tiene que

$$a = -\frac{y''(x_n)}{2y'(x_n)^2} = -\frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)^2}.$$

Luego sustituyendo los valores encontrados para  $a$  y  $b$  en la expresión (1.12), obtenemos

$$-\frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)^2}(y - f(x_n))^2 + y - f(x_n) - f'(x_n)(x - x_n) = 0.$$

La intersección de esta curva con el eje  $OX$ , es decir cuando  $y = 0$ , nos daría la siguiente iteración del método de Chebyshev

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{f(x_n)^2 f''(x_n)}{2f'(x_n)^2} - f(x_n) - f'(x_n)(x - x_n) \\ f'(x_n)(x - x_n) &= -\frac{f(x_n)^2 f''(x_n)}{2f'(x_n)^2} - f(x_n) \\ x - x_n &= -\frac{f(x_n)^2 f''(x_n)}{2f'(x_n)^3} - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x &= x_n - \left(1 + \frac{f(x_n)f''(x_n)}{2f'(x_n)^2}\right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \end{aligned}$$

Como puede verse en (1.3), esta es la expresión del método de Chebyshev.

La Figura 1.13 es la interpretación geométrica del método de Chebyshev por medio de la parábola tangente, donde la línea recta en color rojo representa la recta tangente de la primera iteración del método de Newton, la curva verde es la parábola aproximante que emplea el método de Chebyshev y la curva azul es la función cuyas raíces queremos aproximar.

**Ejemplo 1.1.** *La Figura 1.13 representa la aproximación a una raíz de la función  $f(x) = e^x - 7$ , aplicando el método de Chebyshev y el método de Newton. La primera aproximación del método de Newton está dada por la recta tangente (roja) dada por la expresión*

$$2.3799075 + 7299075(x - 4) = 0.$$

*Sin embargo, la primera aproximación del método de Chebyshev, representada por la parábola (verde), cuya expresión es*

$$-2.3799075 - 2.7299075(x - 4) - 0.18315638888734(y - 2.3799075)^2 + y = 0,$$

*es mejor aproximación, como habría de esperarse.*

### 1.4.3. Interpolación exponencial

Para continuar con esta colección de las formas geométricas en que podemos obtener la expresión del método de Chebyshev, emplearemos el método de la interpolación exponencial, este procedimiento aproxima la función  $f(x)$  por medio de una curva osculadora  $y(x)$ , de manera que cumpla con la condición

$$y^{(j)}(x_n) = f^{(j)}(x_n), \quad j = 0, 1, 2.$$

En este caso, la curva de aproximación está dada por la expresión siguiente, véase [19] y [81],

$$y(x) = e^{a(y-y(x_n))}(b(x-x_n) + c), \quad (1.14)$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son tres parámetros a determinar. Partiendo de la curva de aproximación (1.14), e imponiendo condiciones de tangencia, se deducen las siguientes expresiones para los parámetros  $b$  y  $c$ :

$$\begin{aligned} y(x_n) &= f(x_n) \Rightarrow c = f(x_n) \\ y'(x_n) &= f'(x_n) \Rightarrow b = f'(x_n)(1 - af(x_n)). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Queda por determinarse el parámetro  $a$ . Las condiciones (1.15) aseguran que el método (1.14) tiene convergencia cuadrática, pero debemos afinar un poco, debido a que el método de Chebyshev es cúbicamente convergente.

Conocidos  $b$  y  $c$ , ahora la familia de nuevos métodos iterativos de la forma

$$x_{n+1} = x_n - c/b,$$

se convierten en

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{1 - af(x_n)} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (1.16)$$

Para que la familia de métodos iterativos (1.14) asegure la convergencia cúbica debe cumplir, además, la condición

$$y''(x_n) = f''(x_n),$$

y esto implica que

$$a^2 f(x_n) f'(x_n)^2 - a(f(x_n) f''(x_n) + 2f'(x_n)^2) + f''(x_n) = 0. \quad (1.17)$$

Observemos que para valores de  $a$  muy próximos a cero y despreciando el término que contiene  $a^2$  en (1.17), obtenemos

$$a = \frac{f''(x_n)}{f(x_n) f''(x_n) + 2f'(x_n)^2}, \quad (1.18)$$

si ahora sustituimos (1.18) en (1.16), obtenemos la misma expresión conseguida en los casos presentados anteriormente y que también coincide con el método de Chebyshev.

#### 1.4.4. Siguiendo los métodos de Obreshkov

Los métodos de Obreshkov fueron introducidos con el objetivo de combinar ciertas propiedades que tienen los métodos multipaso y los métodos de derivadas múltiples, utilizados para la resolución de ecuaciones diferenciales, véase [88] y [95], como puede verse en [63] también el método de Chebyshev puede obtenerse

en este contexto. En efecto, dada una ecuación autónoma con  $m \geq 1$ , definimos los operadores diferenciales lineales  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{M}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x(y); h, h_1, \dots, h_{m-1}) &= x(y+h) - x(y) - h \sum_{k=1}^m [\beta_k D(x)(y_k) \\ &\quad + \gamma_k H_k D^2(x)(y_k)] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(x(y); h, h_1, \dots, h_{m-1}) &= x(y+h) - x(y) - h \left[ \sum_{k=1}^m \beta_k D(x)(y_k) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{m-1} \gamma_k H_k D^2(x)(y_k) \right], \end{aligned}$$

donde

$$y_k = y - \sum_{\ell=1}^{k-1} h_\ell, \beta_k \quad y \quad \gamma_k, 1 \leq k \leq m$$

son constantes reales a determinar, y  $H_k$  está definida por

$$\begin{cases} H_k = h, & \text{si } k = 1, \\ \sum_{\ell=1}^{k-1} h_\ell, & \text{si } k > 1. \end{cases}$$

Consideremos una función  $x(y)$  suficientemente diferenciable en torno a  $y$ . Entonces al desarrollar en series  $x(y+h)$ ,  $x'(y_k)$  y  $x''(y_k)$  en un entorno de  $y$ , obtenemos el siguiente tipo de serie:

$$\sum_{q \geq 0} C_q x^{(q)}(y) \mathcal{H}^q,$$

donde la  $C_q$  es una constante real y

$$\mathcal{H}^q = h^{q_0} h_1^{q_1} \cdots h_{m-1}^{q_{m-1}},$$

con  $q_0 + q_1 + \cdots + q_{m-1} = q$ . Decimos que el proceso desarrollado es de orden  $d$  cuando  $C_0 = C_1 = \cdots = C_d = 0$  y  $C_{d+1} \neq 0$ .

Por otra parte, se dice que una función que depende de  $m$  variables  $x_0, \dots, x_{m-1}$  es de la forma

$$O_q(x_0, \dots),$$

si resulta que

$$O(x_0^{q_0} x_1^{q_1} \cdots x_{m-1}^{q_{m-1}}),$$

donde

$$q_0 + q_1 + \cdots + q_{m-1} = q, \quad q_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, m-1.$$

En este punto, una elección adecuada de  $\beta$  y  $\gamma$  nos permite encontrar el máximo orden de convergencia.

La clave en el desarrollo de esta idea es la siguiente. Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función con una raíz simple  $\alpha$ , es decir,  $f(\alpha) = 0$  y  $f'(\alpha) \neq 0$  en un entorno de  $I_\alpha$  de  $\alpha$ . Entonces, la función inversa  $x = g(y)$  está bien definida en  $J_0 \subseteq f(I_\alpha)$  y satisface la relación  $g(0) = \alpha$ . Al derivar la función  $x(y)$  con respecto a la variable  $y$ , obtenemos

$$\frac{dx}{dy} = g'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \quad (1.19)$$

La ecuación (1.19) puede ser escrita como

$$D(x)(y) = x'(y) = F(x),$$

donde

$$F(x) = \frac{1}{f'(x)}. \quad (1.20)$$

Si  $x_0$  es una primera aproximación de  $\alpha$ , a la raíz simple de  $f$ , y denotamos  $y_0 = f(x_0)$ .

Definimos ahora el operador  $\mathcal{L}$  como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x(y); h, h_1, \dots, h_{m-1}) &= x(y+h) - x(y) - h \sum_{k=1}^m [\beta_k D(x)(y_k) \\ &\quad + \gamma_k H_k D^2(x)(y_k)]. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Siguiendo la técnica planteada, deducimos el método de Chebyshev en términos del operador  $\mathcal{L}$  definido en (1.21). Para  $m = 1$ , la ecuación (1.21) se convierte en

$$\mathcal{L}(x(y); h) = x(y+h) - x(y) - h (\beta_1 D(x)(y) + h\gamma_1 D^2(x)(y)), \quad (1.22)$$

donde  $\beta_1$  y  $\gamma_1$  son las constantes reales a determinar.

Desarrollando  $\mathcal{L}(x(y), h)$  en series de Taylor en torno a  $y$  se obtiene

$$\mathcal{L}(x(y); h) = (1 - \beta)hD(x)(y) + \left(\frac{1}{2} - \gamma_1\right)h^2D^{(2)}(x)(y)O_3(h).$$

Si en la ecuación anterior hacemos  $\beta = 1$  y  $\gamma = \frac{1}{2}$ , entonces encontramos el máximo orden de convergencia para  $x(y+h)$ . Sustituyendo este valor en (1.22) llegamos al método iterativo de la forma

$$x^+ = x_n + h \left( D(x)(y) + \frac{h}{2} D^{(2)}(x)(y) \right).$$

En otras palabras, iniciando con  $x_0$ , la secuencia obtenida es definida por

$$x_{n+1} = x_n + h \left( F(x_n) + \frac{h}{2} F(x_n) F'(x_n) \right).$$

Hemos tomado en cuenta el hecho de que  $D(x)(y) = F(x)$  y  $D^{(2)}(x)(y) = F'(x)F(x)$ , con  $F(x)$  definida en (1.20).

Es importante observar que la clave de este aporte consiste en la elección del paso de integración  $h$ . En este caso, consideramos  $h = -f(x_n)$ . Como  $F(x_n) = \frac{1}{f'(x_n)}$  y  $F'(x_n) = -\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)^2}$ , el método derivado correspondiente es el método de Chebyshev (1.3).

## Capítulo 2

# Dinámica real del método de Chebyshev

Es bien conocido que el comportamiento dinámico de algunas funciones aparentemente sencillas, como los polinomios de segundo grado o la función logística, puede ser extremadamente complicado. En este capítulo nos dedicamos al estudio del comportamiento dinámico del método de Chebyshev, cuando se usa para resolver una ecuación

$$f(x) = 0, \tag{2.1}$$

siendo  $f$  una función real de variable real. Dejamos para el Capítulo 3 el estudio del método de Chebyshev para funciones de variables complejas. En concreto, hacemos el estudio de ecuaciones diversas, como los distintos casos cuadráticos y distintos casos de ecuaciones cúbicas, véase [7] y [8]. En la primera de las referencias, Amat, Busquier y Plaza<sup>(†)</sup>, estudian la dinámica de una familia de funciones iterativas de tercer orden de convergencia, que incluye además del método de Chebyshev, otros famosos métodos iterativos. En la segunda referencia, los autores presentan varios resultados obtenidos al estudiar la dinámica de métodos de tercer orden tipo Newton. Nosotros utilizamos estas ideas y notaciones para hacer el estudio de la dinámica del método de Chebyshev. En el Capítulo 3 hacemos una introducción más detallada de algunos conceptos de dinámica básicos. No obstante, por hacer este capítulo autocontenido citamos a continuación unas definiciones sobre dinámica de funciones reales que emplearemos.

**Definición 2.1.** *Sea  $\mathcal{G} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función real de variable real, definimos su órbita como el conjunto*

$$\text{orb}(x_0) = \{x_0, \mathcal{G}(x_0), \mathcal{G}^2(x_0), \dots, \mathcal{G}^k(x_0), \dots\},$$

donde  $\mathcal{G}^k$  indica la composición de  $\mathcal{G}$  consigo misma  $k$  veces,  $\mathcal{G}^k = \mathcal{G} \circ \dots \circ \mathcal{G}$ .

**Definición 2.2.** Se dice que  $x_0^* \in \bar{\mathbb{R}}$ , es un punto fijo de  $\mathcal{G}(x_0)$  si  $\mathcal{G}(x_0^*) = x_0^*$ . Un punto periódico de la función  $\mathcal{G}$  de período  $n > 1$  es un punto  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\mathcal{G}^n(x_0) = x_0$  y  $\mathcal{G}^j(x_0) \neq x_0$  para  $0 < j < n$ . Obsérvese que si  $x_0 \in \mathbb{R}$  es un punto periódico de período  $n \geq 1$ , entonces  $x_0$  es un punto fijo de  $\mathcal{G}^n$ . La órbita de un punto periódico está constituida por los  $n$  diferentes puntos  $\{x_0, \mathcal{G}(x_0), \mathcal{G}^2(x_0), \dots, \mathcal{G}^{n-1}(x_0)\}$ , y al conjunto de estos  $n$  puntos se le llama órbita periódica de período  $n$  (o  $n$ -ciclo).

En consecuencia, todos los puntos de una órbita periódica de período  $n$  son periódicos de período  $n$ .

**Definición 2.3.** Sea  $x^* \in \mathbb{C}$  un punto fijo de una función racional  $\mathcal{G}$ . Se dice que  $x^*$  es

- i. Superatractor si  $\mathcal{G}'(x^*) = 0$ .
- ii. Atractor si  $|\mathcal{G}'(x^*)| < 1$ .
- iii. Indiferente si  $|\mathcal{G}'(x^*)| = 1$ .
- iv. Repulsor si  $|\mathcal{G}'(x^*)| > 1$ .

Al valor  $\tau = \mathcal{G}'(x^*)$ , se le llama multiplicador asociado al punto fijo  $x^*$ .

**Definición 2.4.** Un punto periódico de período  $n$  es superatractor, repulsor o indiferente, si como punto fijo de  $\mathcal{G}^n(x)$  es respectivamente superatractor, repulsor o indiferente. El multiplicador asociado a un  $n$ -ciclo  $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$  es

$$\tau = (\mathcal{G}^n)'(x_0) = \mathcal{G}'(x_0)\mathcal{G}'(x_1)\cdots\mathcal{G}'(x_{n-1}).$$

## 2.1. Propiedades del método de Chebyshev

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida en la ecuación (2.1). El método de Chebyshev es entonces

$$C_f(x) = x - \left(1 + \frac{1}{2}L_f(x)\right) \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad (2.2)$$

con

$$L_f(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}, \quad (2.3)$$

donde (2.3) es el grado de convexidad logarítmico de  $f(x)$ , véase [65], [72] y [75]. El grado de convexidad logarítmico es utilizado para comparar la velocidad con que las sucesiones se aproximan a la raíz  $x^*$ , donde se tiene que  $f(x^*) = 0$ . En concreto, se demuestra que si  $\{s_n\}$  y  $\{t_n\}$  son dos sucesiones de convergencia generadas por

el método de Chebyshev sobre  $g(x)$  y  $f(x)$  (con raíz común  $x^*$ ), respectivamente, y si además  $L_g(t) < L_f(t)$  para  $t \in [t_0, x^*)$ , entonces la sucesión  $\{s_n\}$  converge a  $x^*$  más rápidamente que  $\{t_n\}$ . Además, se tiene que  $t_n < s_n < x^*$  para  $n \geq 1$ .

El método de Chebyshev (2.2) genera una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , que bajo ciertas condiciones converge a la solución de la ecuación (2.1). Nuestro objetivo es el estudio del comportamiento de la función de iteración de Chebyshev

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2}L_f(x_n)\right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = C_f(x_n) = C_f^n(x_0), \quad (2.4)$$

para distintos puntos de partida  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Una exhaustiva inspección a la función de iteración del método de Chebyshev nos permite identificar las siguientes propiedades:

- 1) Las raíces  $x^*$  de (2.1) son puntos fijos de (2.4).
- 2) Las raíces simples de (2.1), son puntos fijos superatractores de (2.4). En efecto, como

$$C'_f(x) = \frac{(3 - L_{f'}(x))L_f(x)^2}{2},$$

y además  $L_f(x^*) = 0$ , se tiene que  $C'_f(x^*) = 0$ . Notemos que además  $C''_f(x^*) = 0$  y, por lo tanto, es un método de orden de convergencia 3.

- 3) Si  $x^*$  es una raíz de (2.1) de multiplicidad  $m > 1$ , entonces es un punto fijo atractor de (2.4) con multiplicador asociado

$$C'_f(x^*) = \frac{(m-1)(2m-1)}{2m^2}.$$

Notemos que

$$0 < \frac{(m-1)(2m-1)}{2m^2} < 1, \quad \forall m > 1.$$

En consecuencia, el método de Chebyshev tiene convergencia lineal para raíces múltiples.

- 4) Además existen puntos fijos extraños (puntos fijos de (2.4), pero que no son raíces de (2.1)). En concreto, estos son la solución de la ecuación

$$L_f(x) = -2.$$

Notemos que estos puntos fijos son atractores ([84]) si

$$\left|6 - \frac{L_f(x)^2 L_{f'}(x)}{2}\right| < 1,$$

y superatractores si

$$L_f(x)^2 L_{f'}(x) = 12.$$

- 5) Los puntos críticos de (2.4) son los ceros de  $C'_f(x)$ , es decir, las raíces de  $f(x)$ , las raíces de  $f''(x)$ , que a su vez son los puntos de inflexión de  $f(x)$  y finalmente están las soluciones de  $L_{f'}(x) = 3$ .

**Definición 2.5.** Sea  $T_f(x)$  un algoritmo iterativo asociado a una ecuación polinómica  $f(x) = 0$ . Sea  $A(x) = \alpha x + \beta$ , con  $\alpha \neq 0$ , una aplicación afín y  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$  una constante. Definimos el polinomio  $g(x) = \lambda f(A(x))$  y denotamos  $T_g(x)$  al correspondiente algoritmo iterativo para resolver la ecuación polinómica  $g(x) = 0$ . Entonces si  $A \circ T_g \circ A^{-1}(x) = T_f(x)$ , es decir,  $A$  es una conjugación entre  $T_f(x)$  y  $T_g(x)$ , se dice que el proceso iterativo  $T_f(x)$  admite un escalado.

El escalado permite simplificar en ocasiones el estudio dinámico de una función de iteración relacionándolo con otra equivalente, pero con una expresión más sencilla, véase [10] y [102]. Del mismo modo, permite mostrar que las cuencas de atracción asociadas a dos funciones de iteración escaladas son esencialmente las mismas, modificadas por un cambio afín de coordenadas.

La influencia del escalado en diversos procesos iterativos ha sido un tema ampliamente tratado por otros autores, véase [2], [7], [8], [9] y [10]. De forma resumida podemos decir que algunos procesos iterativos como el método de Newton, el método de Halley o el método del punto medio, admiten un escalado, mientras que otros no, como por ejemplo los métodos de Stirling y Steffensen, véase [123].

Para estudiar la dinámica del método de Chebyshev aplicado a diferentes polinomios, vamos a utilizar el siguiente teorema que va a simplificar considerablemente el estudio. Las conjugaciones topológicas juegan un papel muy importante para entender el comportamiento de clases de funciones, desde el punto de vista de los sistemas dinámicos en el sentido siguiente.

**Teorema 2.1.** (Teorema de escalado para el método de Chebyshev) Sea  $f(x)$  una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y sea  $T(x) = \alpha x + \beta$ , con  $\alpha \neq 0$ , una aplicación afín. Si  $g(x) = (f \circ T)(x)$ , entonces  $T \circ C_g \circ T^{-1}(x) = C_f(x)$ . Es decir que  $C_f(x)$  y  $C_g(x)$  son conjugadas por  $T$ .

*Demostración.* Notemos que

$$C_g(T^{-1}(x)) = T^{-1}(x) - \left(1 + \frac{1}{2}L_g(T^{-1}(x))\right) \frac{g(T^{-1}(x))}{g'(T^{-1}(x))}.$$

Como sabemos que

$$g \circ T^{-1}(x) = f(x) \quad y \quad (g \circ T^{-1}(x))' = \frac{1}{\alpha}g'(T^{-1}(x)),$$

entonces

$$g'(T^{-1}(x)) = \alpha(g \circ T^{-1})'(x) = \alpha f'(x).$$

De forma análoga, se sigue que

$$g''(T^{-1}(x)) = \alpha^2 f''(x).$$

Como consecuencia

$$\begin{aligned} \frac{g(T^{-1}(x))}{g'(T^{-1}(x))} &= \frac{1}{\alpha} \frac{f(x)}{f'(x)}, \\ L_g(T^{-1}(x)) &= L_f(x). \end{aligned}$$

Sustituyendo ahora en  $C_g(T^{-1}(x))$ , obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} T \circ C_g \circ T^{-1}(x) &= T(C_g(T^{-1}(x))) \\ &= \alpha C_g(T^{-1}(x)) + \beta \\ &= \alpha T^{-1}(x) - \left[1 + \frac{1}{2}L_g(T^{-1}(x))\right] \alpha \frac{g(T^{-1}(x))}{g'(T^{-1}(x))} + \beta \\ &= \alpha T^{-1}(x) - \left(1 + \frac{1}{2}L_f(x)\right) \frac{f(x)}{f'(x)} + \beta \\ &= x - \left(1 + \frac{1}{2}L_f(x)\right) \frac{f(x)}{f'(x)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$T \circ C_g \circ T^{-1}(x) = C_f(x),$$

con lo cual concluimos la demostración □

El teorema de escalado es también válido para cualquier constante no nula  $c$ , tal que  $g(x) = c(f \circ T)(x)$ .

La aplicación del teorema de escalado a distintos procesos iterativos es una técnica habitual en el estudio dinámico de dichos procesos, como puede verse en [5], [6], [69].

## 2.2. Polinomios cuadráticos

El teorema de escalado, presentado anteriormente permite hacer cambios de coordenadas adecuados, para reducir el estudio de la dinámica de la función de iteración  $C_f(x)$ , haciendo que pasemos de estudiar las familias específicas de iteración a estudiar funciones simples. Ejemplo de esto, es lo laborioso que resultaría estudiar cada polinomio de la familia  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , con  $a \neq 0$ . Sin embargo, una transformación afín reduce la ardua labor a uno de los tres siguientes casos:  $f_1(x) = x^2$ ,  $f_2(x) = x^2 - 1$  o  $f_3(x) = x^2 + 1$ , donde se tiene que  $f(x) = 0$  tiene una raíz doble, dos raíces distintas o ninguna raíz real, respectivamente, véase [6] y [69].

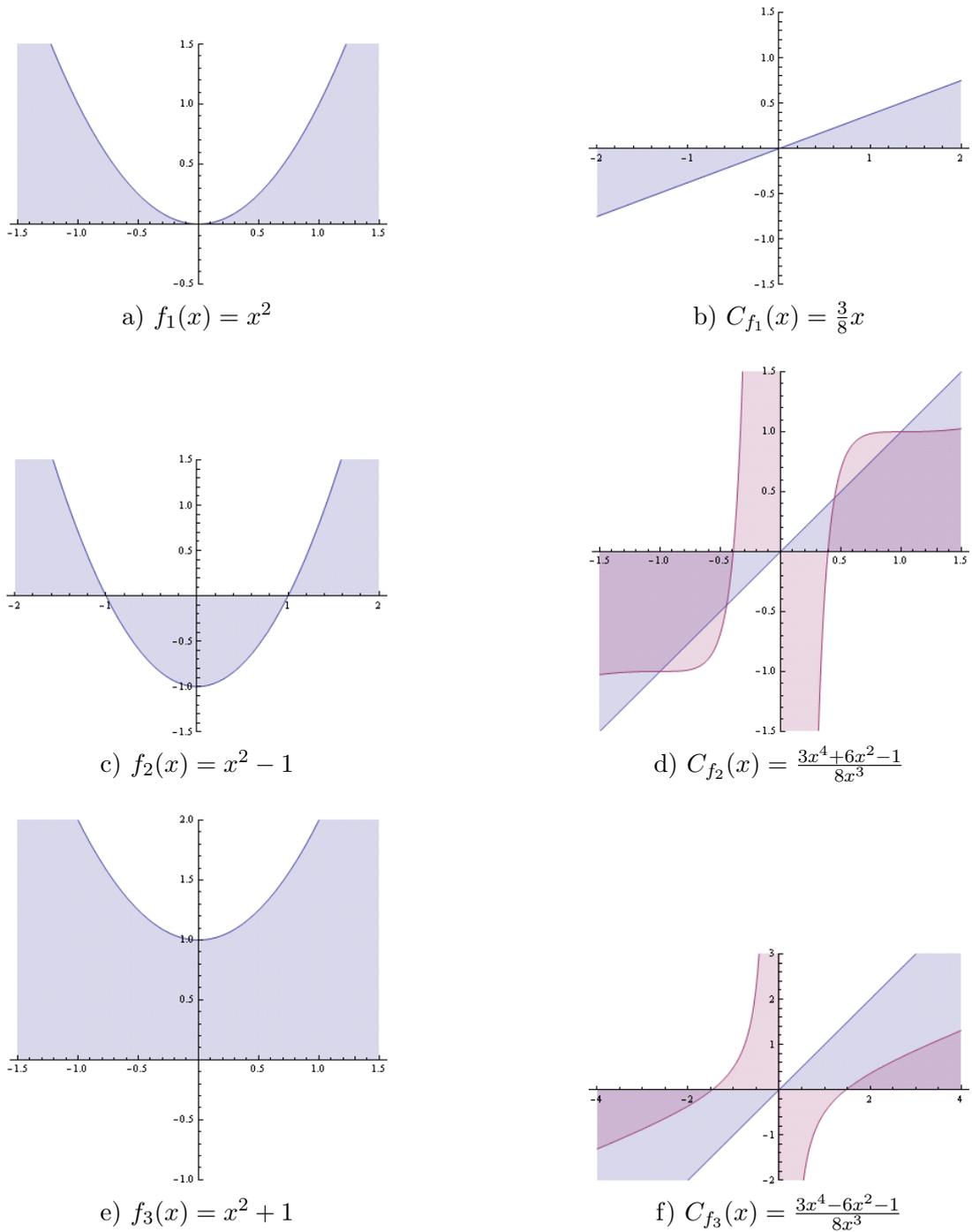


Figura 2.1: Galería I. En a), c) y e), se muestran las gráficas de los polinomios cuadráticos estudiados y en b), d) y f), las gráficas de sus respectivas funciones racionales.

**2.2.1. Caso  $f_1(x) = x^2$** 

En las imágenes a) y b), Figura 2.1 Galería I, mostramos la representación gráfica de la función  $f_1(x)$  junta a su correspondiente función racional, es decir

$$C_{f_1}(x) = \frac{3}{8}x.$$

Esta función es una contracción lineal. Por lo tanto, su dinámica es trivial, el único punto fijo que contiene es  $x = 0$ , el cual es un atractor, pero no es superatractor.

**2.2.2. Caso  $f_2(x) = x^2 - 1$** 

Para  $f_2(x) = x^2 - 1$ , cuya función de iteración es

$$C_{f_2}(x) = \frac{3x^4 + 6x^2 - 1}{8x^3},$$

podemos ver la gráfica de  $f_2(x)$  en la imagen c) de la Figura 2.1, Galería I, tenemos que los puntos fijos de  $C_{f_2}(x)$  son  $x^* = 1$  y  $x^{**} = -1$ , raíces de  $f_2(x)$ , los cuales son superatractores. Además, aparecen otros dos puntos fijos extraños, como ilustramos en la imagen d) Figura 2.1, Galería I:

$$x^{*+} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad y \quad x^{*-} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Como

$$C'_{f_2} \left( \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = 6,$$

ambos puntos fijos extraños de  $C_{f_2}(x)$  son repulsores. Notemos que  $C_{f_2}(x)$  tiene una asíntota oblicua en  $y = \frac{3}{8}x$ . Como

$$C'_{f_2}(x) = \frac{3(x^2 - 1)^2}{8x^4} > 0,$$

esto implica que  $C_{f_2}(x)$  es creciente en  $(-\infty, 0)$  y en  $(0, \infty)$ .

Nuestro objetivo ahora es estudiar la convergencia global de  $C_{f_2}(x)$ . Para ello, vamos a caracterizar los puntos de no convergencia a las raíces. Consideramos las siguientes biyecciones:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{f_2} : (0, \infty) &\longmapsto \mathbb{R} \\ x &\longmapsto C_{f_2}(x) \\ \tilde{\tilde{C}}_{f_2} : (-\infty, 0) &\longmapsto \mathbb{R} \\ x &\longmapsto C_{f_2}(x), \end{aligned}$$

y sus correspondientes inversas,

$$\begin{aligned} g_0 : \mathbb{R} &\longmapsto (0, \infty) \\ x &\longmapsto \tilde{C}_{f_2}^{-1}(x) \\ g_1 : \mathbb{R} &\longmapsto (-\infty, 0) \\ x &\longmapsto \tilde{\tilde{C}}_{f_2}^{-1}(x). \end{aligned}$$

Sea  $\beta = x^{*+}$  el punto fijo repulsor positivo. Definimos

$$\begin{aligned} \beta_0 &= g_0(\beta), \\ \beta_1 &= g_1(\beta). \end{aligned}$$

Notemos que  $\beta_0 = \beta$  pero  $\beta_1 < 0$ . De hecho, se tiene que  $\beta_1 = -0.36081$ .

Definimos ahora

$$\begin{aligned} \beta_{0,0} &= g_0(g_0(\beta)) \\ &= \beta \\ &= 0.447214. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{0,1} &= g_0(g_1(\beta)) \\ &= 0.366149. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{1,0} &= g_1(g_0(\beta)) \\ &= -0.36081. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{1,1} &= g_1(g_1(\beta)) \\ &= -0.433866. \end{aligned}$$

Y así sucesivamente construimos una sucesión de puntos

$$\beta_{x_1 \dots x_n} = g_{x_1} \dots g_{x_n}(\beta),$$

donde  $x_i \in \{0, 1\}$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Identificando cada punto  $\beta_{x_1 \dots x_n}$  con su subíndice  $x_1 \dots x_n$ , tenemos un conjunto infinito no numerable de preimágenes del punto fijo repulsor  $\beta$ , tantos como sucesiones de la forma

$$S = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}}; x_i \in \{0, 1\}\}.$$

Notemos que existe una aplicación suprayectiva entre  $S$  y el intervalo  $[0, 1]$ , pues todo punto  $x \in [0, 1]$  se puede escribir como número binario de la forma

$$(0.x_1 \dots x_n \dots)_2.$$

Además, esta representación no es única pues, por ejemplo  $\frac{1}{2} = (0.1)_2$ , pero también  $\frac{1}{2} = (0.0111 \dots)_2$ . En definitiva, hemos probado la existencia de un conjunto no numerable de tipo Cantor de puntos de no convergencia a las raíces. Dicho conjunto forma parte del conjunto de Julia asociado a  $C_{f_2}(x)$ . Además, en el conjunto de Julia de  $C_{f_2}(x)$  están también los 2-ciclos repulsores y el resto de  $n$ -ciclos repulsores, así como las preimágenes del polo  $x = 0$ .

**2.2.3. Caso  $f_3(x) = x^2 + 1$** 

Las raíces de la ecuación  $f_3(x)$  son:  $x = \pm i$ , es decir que no existen raíces reales, como puede observarse en las imágenes e) y f) Figura 2.1, Galería I. A pesar de que  $f_3(x)$  no tiene raíces reales, como es el caso de estudio del presente capítulo, sin embargo nos interesa estudiar cómo es el comportamiento dinámico del método de Chebyshev con este tipo de polinomios. En este caso, la función racional obtenida es

$$C_{f_3}(x) = \frac{3x^4 - 6x^2 - 1}{8x^3},$$

como puede observarse, no tiene puntos fijos reales, ni tampoco puntos críticos, ni puntos de inflexión, ya que

$$C'_{f_3}(x) = \frac{3(x^2 + 1)^2}{8x^4}.$$

$C_{f_3}(x)$  es una función creciente en  $(-\infty, 0)$  y en  $(0, \infty)$ , con una asíntota vertical en  $x = 0$  y una asíntota oblicua en  $y = \frac{3x}{8}$ .

A continuación estudiamos la función de iteración  $C_{f_3}(x)$  en busca de 2-ciclos y 3-ciclos, luego damos la caracterización de los mismos. Sabemos que

$$C_{f_3}^2(x) - x = -\frac{(1+x^2)(1+5x^2)(-1-6x^2+11x^4)(3+36x^2+154x^4-108x^6+27x^8)}{64x^3(-1-6x^2+3x^4)^3}.$$

Así, el análisis de  $C_{f_3}^2(x)$  nos revela que aparecen 3 asíntotas verticales en  $x = 0$ ,  $x = s_1$ ,  $x = s_2$ , donde  $s_2 = -s_1 = 1.46789$ . En concreto, son las raíces reales de

$$3x^4 - 6x^2 - 1 = 0.$$

Además aparece un 2-ciclo repulsor de la forma  $\{c_1, c_2\}$ , donde

$$-c_1 = c_2 = \sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{5}}{11}} \approx 0.824188,$$

son las raíces reales de

$$11x^4 - 6x^2 - 1 = 0.$$

El polinomio  $27x^8 - 108x^6 + 154x^4 + 36x^2 + 3$ , que también aparece en la expresión  $C_{f_3}^2(x)$  no tiene raíces reales y, por tanto, no aporta 2-ciclos nuevos.

También aparece un 3-ciclo repulsor de la forma

$$\{-0.413775, 3.4219, 1.06091\}.$$

En general, el número de asíntotas de  $C_{f_3}^n(x)$  va aumentando con  $n$ , lo que justifica la existencia de soluciones para  $C_{f_3}^n(x) = x$ , esto es,  $n$ -ciclos. Además, hay

ciclos repulsores de todas las longitudes que, junto con sus preimágenes también formarían parte del conjunto de Julia.

Por último, notemos que el polo  $x = 0$  tiene 2 preimágenes que son las soluciones de

$$3x^4 - 6x^2 - 1 = 0.$$

El número de preimágenes del polo va duplicándose, como puede verse en el Cuadro 2.1. En este caso, todos los puntos de la recta real formarían parte del conjunto de Julia.

## 2.3. Polinomios cúbicos

En esta sección vamos estudiar los polinomios cúbicos  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Para simplificar el trabajo, hacemos un cambio de coordenadas afín  $\tau(x) = \alpha x + \beta$ , de esta manera, el polinomio  $f(x)$  se reduce a uno de los tipos de polinomios simples siguientes:  $f_{\bullet}(x) = x^3$ ,  $f_+(x) = x^3 + x$ ,  $f_-(x) = x^3 - x$  o a un miembro de la familia uniparamétrica de polinomios cúbicos dada por  $f_{\gamma}(x) = x^3 + \gamma x + 1$ , véase [2]. A su vez, el estudio del método de Chebyshev aplicado a los polinomios  $f_{\gamma}(x)$  se divide en cinco casos, dependiendo del número de raíces reales de  $f_{\gamma}(x)$  y del número de asíntotas de  $C_{f_{\gamma}}(x)$ .

Obsérvese que  $f_{\gamma}(x)$  tiene una única raíz real simple si  $\gamma > \gamma^*$ , una raíz doble y una simple si  $\gamma = \gamma^*$  y tres raíces reales simples si  $\gamma < \gamma^*$ , véase las imágenes de la Figura 2.3, donde

$$\gamma^* = -\frac{3\sqrt[3]{2}}{2} \approx -1.88988. \quad (2.5)$$

### 2.3.1. Caso $f_{\bullet}(x) = x^3$

La función racional correspondiente a la iteración de Chebyshev para el polinomio  $f_{\bullet}(x)$  está dada por la expresión:

$$C_{f_{\bullet}}(x) = \frac{5}{9}x.$$

Esta función es una contracción lineal, como se puede contrastar entre la gráfica de  $f_{\bullet}(x)$ , en la imagen a) y la gráfica de  $C_{f_{\bullet}}(x)$  en la imagen b) de la Figura 2.2, Galería II. Es importante destacar respecto a  $C_{f_{\bullet}}(x)$  lo siguiente:

- 1) No existe asíntota vertical.
- 2) Hay una asíntota oblicua en  $y = \frac{5x}{9}$ .

Cuadro 2.1: Preimágenes  $P_n = C_{f_3}^{-n}(0)$  del polo  $x = 0$ .

$n$	0	1	2	3	4
					31.62860
				11.83702	-0.24193
			4.37545	-0.36925	-2.01691
					1.09521
	1.46789			-2.49516	-6.94283
			-0.62706		0.48166
				0.92207	3.11248
$P_n$	0				-0.78398
					0.78398
				-0.92207	-3.11248
			0.62706		-0.48166
				2.49516	6.94283
	-1.46789				-1.09521
				0.36925	2.01691
			-4.37545		0.24193
				-11.83702	-31.62860

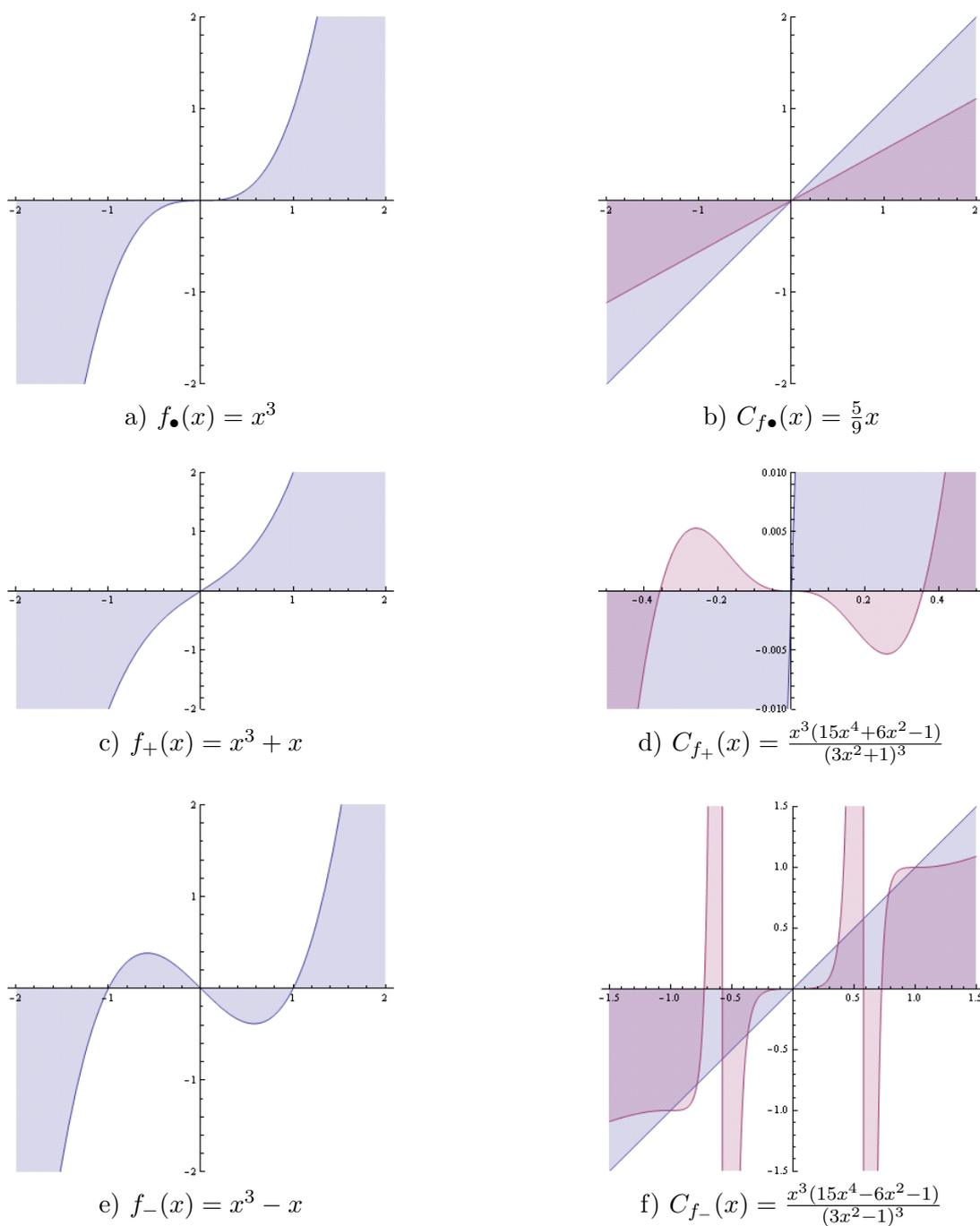


Figura 2.2: Galería II. Las imágenes a), c) y e) muestran las gráficas de tres polinomios cúbicos estudiados, mientras que en b), d) y f) mostramos las gráficas de sus respectivas funciones racionales.

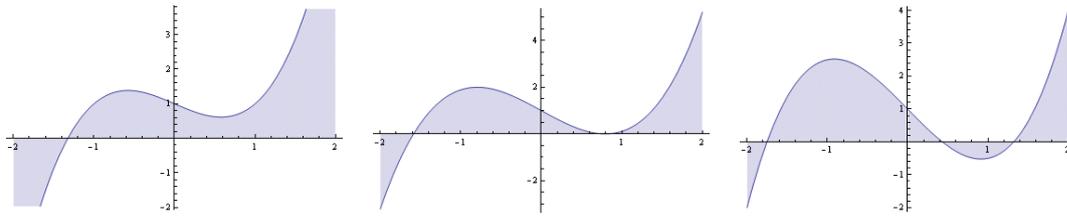


Figura 2.3: Representación del polinomio  $f_\gamma(x)$  para los casos  $\gamma > \gamma^*$ ,  $\gamma = \gamma^*$  y  $\gamma < \gamma^*$ , respectivamente. Notemos que  $\gamma^*$  está definida como en (2.5).

- 3) La raíz  $x = 0$  es un punto fijo atractor.
- 4) No existen puntos fijos extraños.
- 5)  $C_{f_\bullet}(x)$  no tiene puntos críticos libres.

Por lo tanto, su dinámica es trivial, el único punto fijo existente es  $x = 0$ , el cual es un atractor, pero no es superatractor.

### 2.3.2. Caso $f_+(x) = x^3 + x$

En este caso  $f_+(x)$  tiene una sola raíz real en  $x = 0$ , véase la imagen c) de la Figura 2.2, Galería II. Además, podemos observar en la imagen d), aspectos importantes respecto a la función racional

$$C_{f_+}(x) = \frac{-x^3 + 6x^5 + 15x^7}{(1 + 3x^2)^3},$$

como son:

- 1) No existe asíntota vertical.
- 2) Hay una asíntota oblicua en  $y = \frac{5x}{9}$ .
- 3) La raíz  $x = 0$  es un punto fijo superatractor.
- 4) No existen puntos fijos extraños. Las soluciones de  $C_{f_+}(x) = x$  son:  $x = 0$ , la única raíz real de  $f_+(x)$ , y las raíces del polinomio  $12x^4 + 9x^2 + 1$ , que no tiene raíces reales.
- 5)  $C_{f_+}(x)$  tiene dos puntos críticos libres. Como

$$C'_{f_+}(x) = \frac{3f_+(x)^2(15x^2 - 1)}{(3x^2 + 1)^4},$$

Cuadro 2.2: Listado de las preimágenes  $q_n$  del 0.

$n$	$q_n$
1	0.355807
2	1.06575
3	2.1755
4	4.0607
5	7.38996

además de  $x = 0$  (raíz de  $f_+(x)$ ), aparecen los puntos críticos

$$c_1 = -\frac{1}{\sqrt{15}} \quad y \quad c_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}.$$

Estos puntos críticos representan un máximo y un mínimo relativos, respectivamente, como podemos observar en la imagen d) Figura 2.2, Galería II.

En este caso, las órbitas de los puntos críticos convergen a 0. Además, mediante experimentos numéricos hemos comprobado que las órbitas de cualquier  $x_0 \in \mathbb{R}$  van a parar al cero. Ahora, estudiemos este comportamiento con más detalles. Como  $C_{f_+}(x)$  presenta una simetría respecto al origen, basta con que estudiemos las órbitas de  $x_0 > 0$ . Así, sean  $q_n$  las preimágenes positivas de 0, véase el Cuadro 2.2. Es decir

$$q_{n+1} = C_{f_+}^{-1}(q_n),$$

o equivalentemente

$$q_n = C_{f_+}^{-n}(0).$$

Si resulta que  $x_0 \in (q_n, q_{n+1})$ , entonces  $x_1 \in (q_{n-1}, q_n)$  y consecuentemente  $x_n \in (0, q_1)$ . Entonces, a partir de aquí, comienza una sucesión que converge a 0 de forma alternada

$$x_0 > x_1 > x_2 > \cdots > x_n > -x_{n+1} > x_{n+2} > -x_{n+3} \cdots,$$

con  $|x_n| \rightarrow 0$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ . Este comportamiento obedece al carácter superatractor del 0.

### 2.3.3. Caso $f_-(x) = x^3 - x$

Hemos llegado a un punto interesante del estudio, debido principalmente a que nos encontramos de frente con el polinomio  $f_-(x)$ , que tiene tres raíces reales,

véase la imagen e) de la Figura 2.2, Galería II, las cuales son:  $x = -1$ ,  $x = 0$  y  $x = 1$ . Además, la función de iteración correspondiente a  $f_-(x)$  es

$$C_{f_-}(x) = \frac{-x^3 - 6x^5 + 15x^7}{(3x^2 - 1)^3}. \quad (2.6)$$

Como se trata del método de Chebyshev en la recta real, manos a la obra. De la función racional (2.6), véase la imagen f) de la Figura 2.2, Galería II, se observa lo siguiente:

- 1) Hay dos asíntotas verticales de  $C_{f_-}(x)$  en los puntos  $a_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  y  $a_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Además

$$\lim_{x \rightarrow a_i^-} C_{f_-}(x) = +\infty, \quad i = 1, 2,$$

y

$$\lim_{x \rightarrow a_i^+} C_{f_-}(x) = -\infty, \quad i = 1, 2.$$

- 2) Hay una asíntota oblicua en  $y = \frac{5x}{9}$ .  
 3) Las raíces de  $f_-(x)$  son puntos fijos superatractores de  $C_{f_-}(x)$ .  
 4) Además aparecen cuatro puntos fijos extraños  $\pm p_1$  y  $\pm p_2$ , con

$$p_1 = 0.368298, \quad p_2 = 0.783809.$$

Partiendo de los puntos fijos extraños, hemos encontrado que  $|C'_{f_-}(\pm p_i)| > 1$ ,  $i = 1, 2$ . Por lo tanto los puntos fijos extraños de  $C_{f_-}(x)$  son repulsores.

- 5) De la evaluación de

$$C'_{f_-}(x) = \frac{3f_-(x)^2(15x^2 + 1)}{(3x^2 - 1)^4},$$

se tiene que no hay puntos críticos libres.

En este punto, estamos interesados en saber hacia cuál de las raíces hay convergencia en cada uno de los intervalos abiertos en que la recta real queda subdividida, como puede apreciarse en la imagen f) Figura 2.2, Galería II. Como  $C_{f_-}(x)$  es una función simétrica respecto al origen, estudiamos solo las órbitas de  $x_0 > 0$ .

El semieje real positivo queda dividido en ocho intervalos cuyos extremos tienen una clara interpretación dinámica, véase la Figura 2.4. En concreto,  $0$ ,  $p_1$ ,  $p_2$  y  $1$  son los puntos fijos no negativos de  $C_{f_-}(x)$ ,  $a_2$  es la asíntota positiva,  $q_0 = C_{f_-}^{-1}(0)$  es el punto de corte de la gráfica de  $C_{f_-}(x)$  con  $OX$  y  $\tilde{p}_1$  es una preimagen positiva del punto fijo extraño  $p_1$ . Se plantean por tanto las siguientes situaciones:

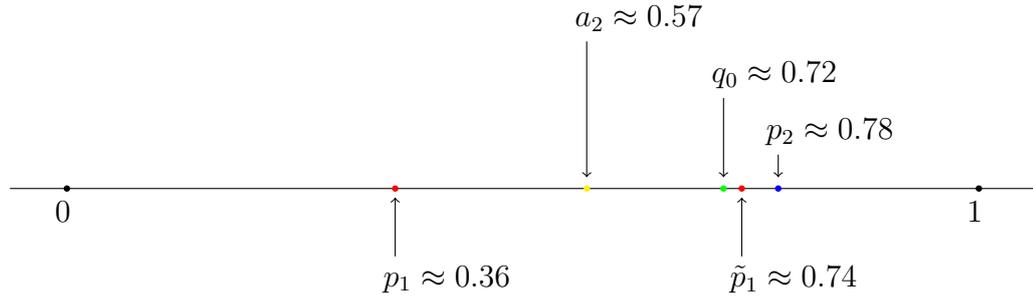


Figura 2.4: Subintervalos en los que queda dividido el segmento de la recta real  $(0, \infty)$  para el estudio de  $C_{f_-}(x)$ .

- 1) Si  $x_0 > 1$ , entonces  $x_0 > x_1 > \dots > x_n > x_{n+1} > \dots > 1$ , por tanto,  $x_n \rightarrow 1$ .
- 2) Si  $x_0 \in (p_2, 1)$ , entonces  $x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots < 1$ , por tanto,  $x_n \rightarrow 1$ .
- 3) Si  $x_0 \in (0, p_1)$ , entonces  $x_0 > x_1 > \dots > x_n > x_{n+1} > \dots > 0$ , por tanto,  $x_n \rightarrow 0$ .
- 4) Si  $x_0 \in (\tilde{p}_2, a_2)$ , con  $\tilde{p}_2 = C_{f_-}^{-1}(p_2) \approx 0.40401$ , en algún momento  $x_n > p_2$  y entonces volvemos a los casos 1) o 2).
- 5) Si  $x_0 \in (q_0, \tilde{p}_1)$ , se tiene que  $x_n \rightarrow 0$ .
- 6) Finalmente, en los intervalos  $(p_1, \tilde{p}_2)$  y  $(a_2, q_0)$ , entonces  $x_n \rightarrow 1$  la sucesión  $x_n$  puede ir a 0, 1 o  $-1$ . Este hecho puede verse en el Cuadro 2.3.

Como habíamos planteado a principio de la Sección 2.3, el estudio de la familia de polinomios dada por  $f_\gamma(x) = x^3 + \gamma x + 1$  se subdivide en cinco casos, las siguientes subsecciones están dedicadas, de manera particular, a cada uno de ellos.

#### 2.3.4. Caso $f_\gamma(x) = x^3 + \gamma x + 1$ con $\gamma > 0$

Si  $\gamma > 0$ , entonces  $f'_\gamma(x) = 3x^2 + \gamma$ . Así  $f_\gamma(x)$  es una función continua y creciente para todo  $x$  en  $\mathbb{R}$ . Luego existe una sola raíz real  $x^*$  que es negativa. Además, como  $f''_\gamma(x) = 6x$ , entonces  $x = 0$  es un punto de inflexión de  $f_\gamma(x)$ , como puede verse en la imagen a) Figura 2.5, Galería III. A continuación detallamos los resultados del estudio de  $f_\gamma(x)$ , cuando  $\gamma > 0$ .

- 1) La función de iteración correspondiente es:

$$C_{f_\gamma}(x) = \frac{-\gamma^2 - 3x - 12\gamma x^2 - \gamma^2 x^3 - 15x^4 + 6\gamma x^5 + 15x^7}{(3x^2 + \gamma)^3}. \quad (2.7)$$

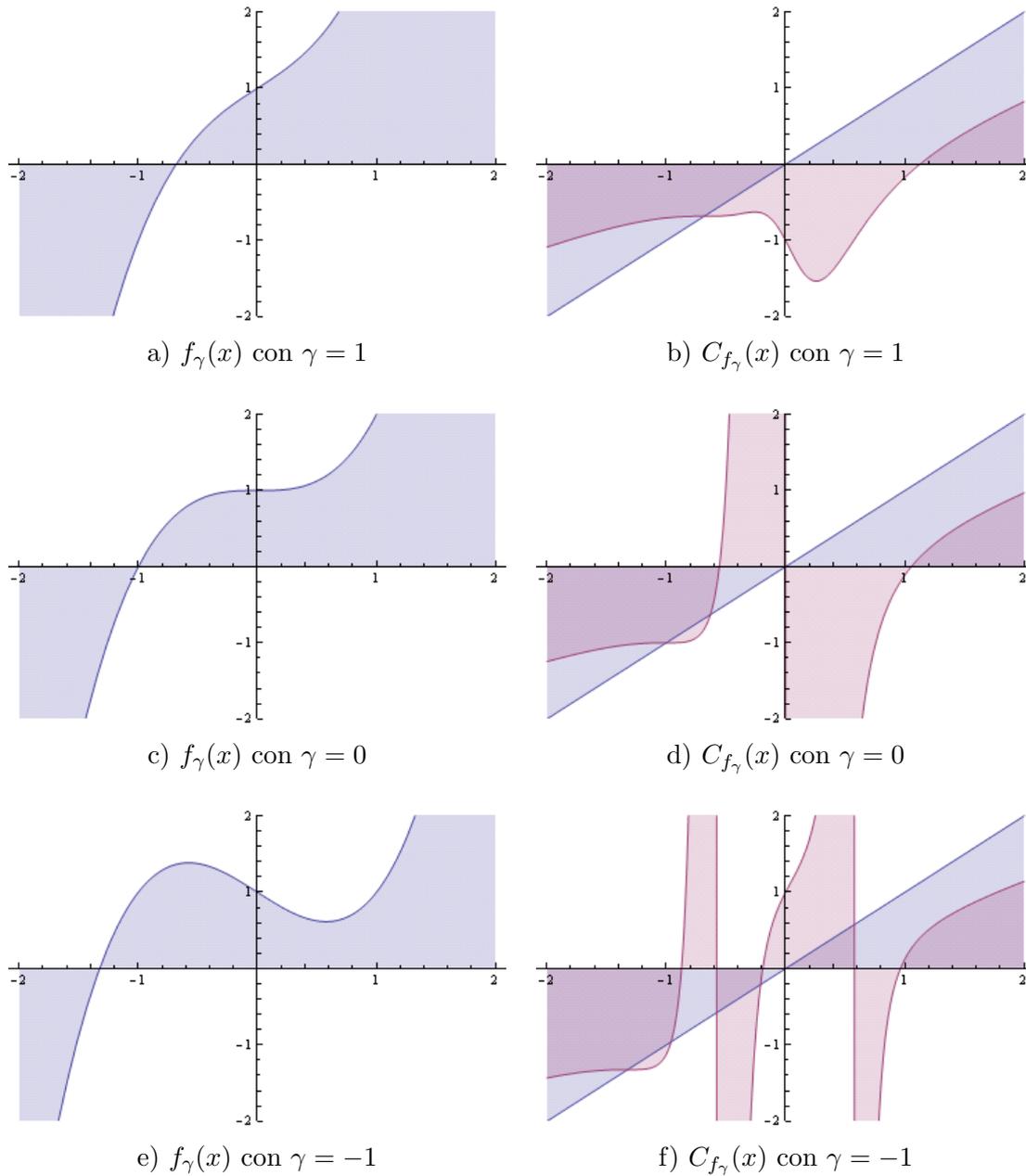


Figura 2.5: Galería III. Las imágenes a), c) y e) muestran las gráficas de  $f_\gamma(x)$  para tres valores concretos de  $\gamma$ , tomando en cuenta  $\gamma > 0$ ,  $\gamma = 0$  y  $\gamma \in (\gamma^*, 0)$ , respectivamente. También, en las imágenes b), d) y f), acompaña a cada polinomio su función racional correspondiente para el mismo valor de  $\gamma$ .

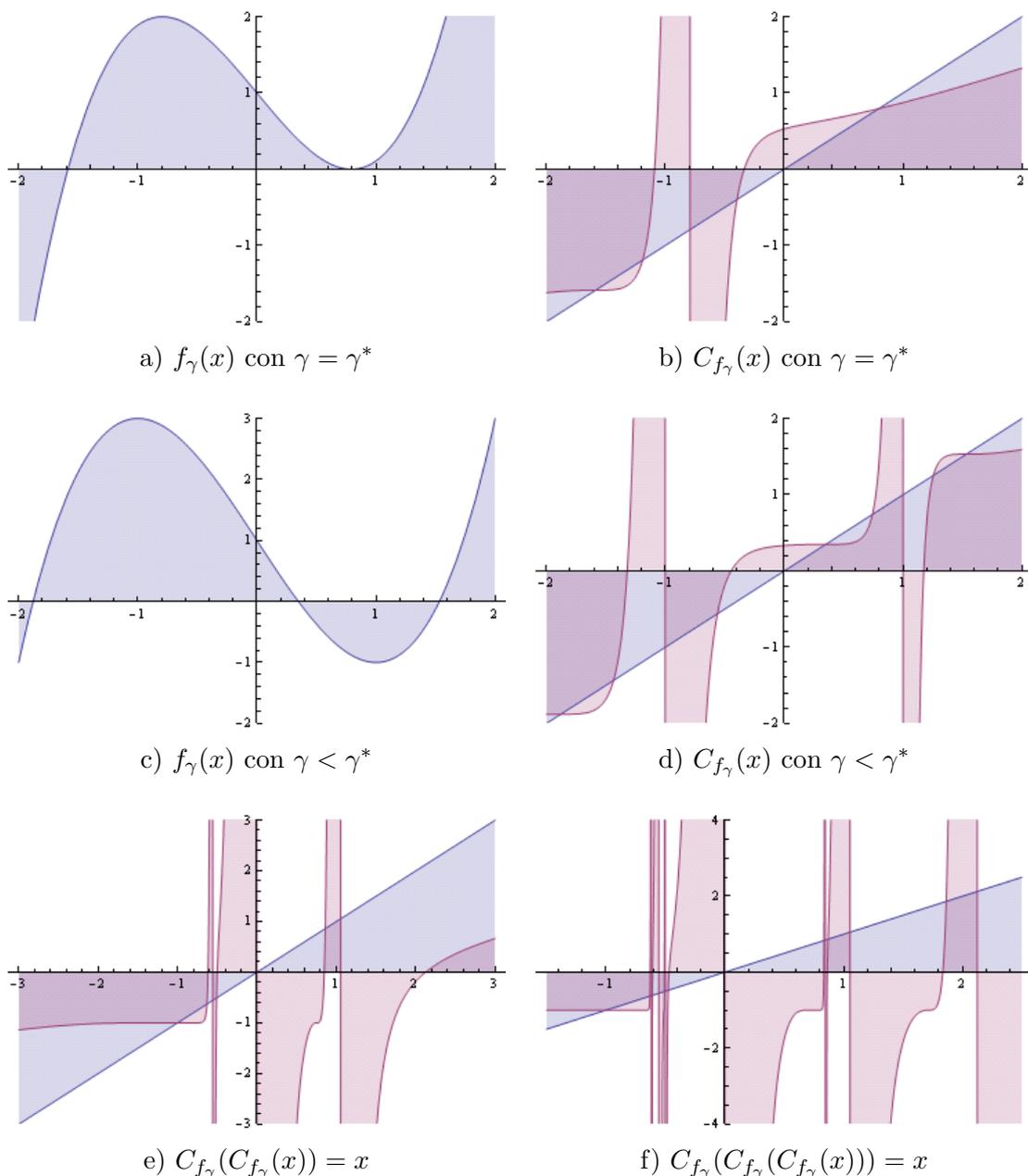


Figura 2.6: Galería IV. Las imágenes a) y c) muestran las gráficas de  $f_\gamma(x)$  para valores concretos de  $\gamma$ , tomando en cuenta  $\gamma = \gamma^*$  y  $\gamma < \gamma^*$ , respectivamente. En las imágenes b) y d), acompaña a cada polinomio su función racional correspondiente para el mismo valor de  $\gamma$ . Además, en la figura e) se muestra la aparición de 2-ciclos y en la imagen f) mostramos los 3-ciclos, ambos para  $C_{f_\gamma}(x)$ , con  $\gamma = 0$ .

Cuadro 2.3: Límite de las órbitas de  $C_{f_-}(x)$  para diferentes puntos de partida  $x_0 \in (a_2, q_0)$ .

$x_0$	$x^*$	$x_0$	$x^*$	$x_0$	$x^*$	$x_0$	$x^*$
0.3693	1	0.3873	1	0.70564	-1	0.71014	-1
0.3713	-1	0.3893	1	0.70614	-1	0.71064	-1
0.3733	1	0.3913	-1	0.70664	0	0.71114	-1
0.3753	1	0.3933	-1	0.70714	1	0.71164	-1
0.3773	1	0.3953	-1	0.70764	1	0.71214	-1
0.3793	1	0.3973	-1	0.70814	1	0.71264	-1
0.3813	1	0.3993	-1	0.70864	1	0.71314	-1
0.3833	1	0.4013	0	0.70914	1	0.71364	-1
0.3853	1	0.4033	-1	0.70964	1	0.71414	-1

Notemos que no existen asíntotas verticales.

- 2) Sin embargo, (2.7) tiene una asíntota oblicua en  $y = \frac{5x}{9}$ .
- 3) Como se tiene que

$$C'_{f_\gamma}(x) = \frac{3f_\gamma(x)^2(15x^2 - \gamma)}{(3x^2 + \gamma)^4},$$

entonces los únicos puntos críticos libres son:

$$x = \pm \sqrt{\frac{\gamma}{15}}.$$

Para encontrar los puntos fijos extraños, resolvemos la ecuación  $C_{f_\gamma}(x) = x$ , o equivalentemente

$$\frac{f_\gamma(x)(12x^4 + 9\gamma x^2 + 3x + \gamma^2)}{(3x^2 + \gamma)^3} = 0.$$

Por lo tanto, los puntos fijos extraños, si existen, son solución de la ecuación

$$\nu_\gamma(x) = 12x^4 + 9\gamma x^2 + 3x + \gamma^2 = 0 \tag{2.8}$$

En el rango de parámetros que estamos considerando,  $\gamma > 0$ , tenemos que  $\nu_\gamma(x)$  tiene raíces reales si y solo si

$$0 < \gamma \leq \frac{3}{\sqrt[3]{121}} \approx 0.60654.$$

Además, si  $\gamma \in (0.595937, 0.60654)$  podemos encontrar puntos fijos extraños atractores, como se muestra en la Figura 2.7. Para

$$\gamma = \frac{15}{2\sqrt[3]{1922}} \approx 0.603221,$$

el punto fijo obtenido tiene carácter superatractor.

Como  $C_{f_\gamma}(x)$  tiene puntos críticos, una técnica para encontrar posibles ciclos atractores es resolver en  $\gamma$  las ecuaciones

$$C_{f_\gamma}^m \left( \sqrt{\frac{\gamma}{15}} \right) = \sqrt{\frac{\gamma}{15}}, \quad (2.9)$$

o

$$C_{f_\gamma}^m \left( -\sqrt{\frac{\gamma}{15}} \right) = -\sqrt{\frac{\gamma}{15}}. \quad (2.10)$$

Así, por ejemplo, para  $n = 2$  no se obtienen 2-ciclos a partir de la ecuación (2.9). Sin embargo, se obtienen 2-ciclos a partir de la ecuación (2.10). Experimentalmente, hemos obtenido dos de ellos.

- $\gamma = 0.4436856427550957$ :  $\{-0.171986, 0.987388\}$ , con multiplicador asociado  $-1.69142 \times 10^{-15}$ .
- $\gamma = 0.5938624562281627$ :  $\{-0.198974, -0.165558\}$ , con multiplicador asociado  $1.87549 \times 10^{-15}$ .

Además, de forma experimental si  $n = 3$  obtenemos tres 3-ciclos.

- $\gamma = 0.383221$ :  $\{2.11513, 0.991967, -0.159838\}$ , con multiplicador asociado  $-2.95171$ .
- $\gamma = 0.439536$ :  $\{1.04564, -0.0670879, -0.17118\}$ , con multiplicador asociado  $12.9828$ .
- $\gamma = 0.450452$ :  $\{0.897058, -0.362535, -0.173292\}$ , con multiplicador asociado  $-4.66866 \times 10^{-9}$ .

### 2.3.5. Caso $f_\gamma(x) = x^3 + \gamma x + 1$ con $\gamma = 0$

Si  $\gamma = 0$ , entonces la función de iteración correspondiente a  $f_\gamma(x)$  es

$$C_{f_\gamma}(x) = \frac{5x^6 - 5x^3 - 1}{9x^5},$$

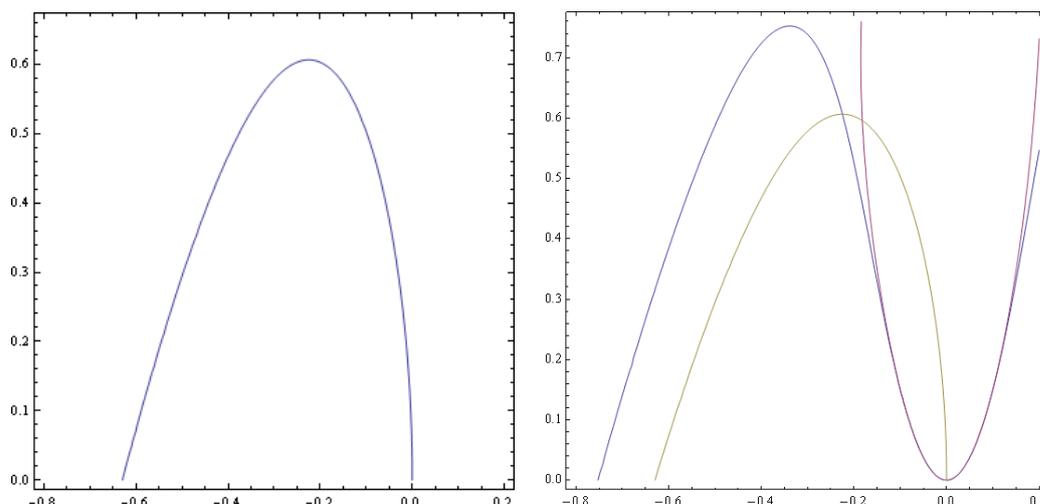


Figura 2.7: A la izquierda gráfica de la curva implícita  $\nu_\gamma(x) = 0$  definida en (2.8) para  $x \in (-0.8, 0.2)$ , y  $\gamma \in (0, 0.66)$ . A la derecha porción de dicha curva donde se encuentran los puntos fijos atractores: son puntos de la curva amarilla, comprendidos entre los puntos  $(-0.224, 0.606)$  y  $(-0.181, 0.595)$  del plano  $(x, \gamma)$ .

véase la imagen de  $f_\gamma(x)$  acompañada de su correspondiente función de iteración en las imágenes c) y d) de la Figura 2.5, Galería III. A continuación detallamos los resultados del estudio de  $f_\gamma(x)$ . Cuando  $\gamma = 0$ , observamos las características siguientes:

- 1) Como novedad aparece una asíntota vertical en  $x = 0$ .
- 2) Se mantiene la asíntota oblicua en  $y = \frac{5x}{9}$ .
- 3) Las derivadas de  $C_{f_\gamma}(x)$  son

$$C'_{f_\gamma}(x) = \frac{5f_\gamma(x)^2}{9x^6},$$

$$C''_{f_\gamma}(x) = \frac{-10f_\gamma(x)}{3x^7}.$$

Por lo tanto,  $C_{f_\gamma}(x)$  es creciente en  $(-\infty, 0)$  y en  $(0, +\infty)$ , tiene punto de inflexión en  $x = 1$  y cambia su convexidad en  $x = 0$ .

- 4)  $C_{f_\gamma}(x)$  corta al eje  $y = 0$  en los puntos

$$p_1 = \sqrt[3]{\frac{5 - 3\sqrt{5}}{10}} \approx -0.554856,$$

y

$$p_2 = \sqrt[3]{\frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}} \approx 1.05397.$$

- 5) Puntos fijos de  $C_{f_\gamma}(x)$ : Además de  $x = -1$ , la raíz de  $f_\gamma(x)$ , está el punto fijo extraño:

$$p_0 = \frac{-1}{\sqrt[3]{4}} \approx -0.629961,$$

y como  $C'_{f_\gamma}(p_0) = 5$ , entonces  $p_0$  es un punto fijo repulsor.

- 6) Los únicos puntos críticos de  $C_{f_\gamma}(x)$  son las raíces de  $f_\gamma(x)$ . Luego no existen puntos críticos libres.
- 7) Para la búsqueda de 2-ciclos, tenemos que la gráfica de  $C_{f_\gamma}^2(x)$  tiene tres asíntotas verticales, coincidiendo estas con las raíces de  $C_{f_\gamma}(x)$ , es decir  $x = 0$ ,  $x = p_1$  y  $x = p_2$ .

Las soluciones de  $C_{f_\gamma}(C_{f_\gamma}(x)) = x$ , son, además de  $x = -1$  y  $x = p_0$ , las siguientes:  $x = c_1 = -0.507539$  y  $x = c_2 = 0.860554$ . Así,  $\{c_1, c_2\}$  es un 2-ciclo repulsor de  $C_{f_\gamma}(x)$  con multiplicador asociado

$$C'_{f_\gamma}(c_1) \cdot C'_{f_\gamma}(c_2) = 90.0574,$$

véase la imagen e) de la Figura 2.6, Galería V.

- 8) Para obtener los 3-ciclos:  $C_{f_\gamma}(C_{f_\gamma}(C_{f_\gamma}(x))) = x$ , hay que encontrar las raíces de un polinomio de grado 198, véase el 3-ciclo en la imagen f) Figura 2.6, Galería V.

El número de asíntotas de  $C_{f_\gamma}^3(x)$  va aumentando, ya que a  $x = 0$ ,  $x = p_1$  y  $x = p_2$  hay que añadir las cuatro raíces reales del polinomio de grado 36 que aparece como factor en el numerador de  $C_{f_\gamma}^2(x)$ .

Aunque el cálculo de  $n$ -ciclos es un problema complicado, podemos establecer un resultado general que caracteriza el carácter atractor o repulsor de los mismos.

**Teorema 2.2.** *No existen ciclos superatractores para  $C_{f_\gamma}(x)$ , con  $\gamma = 0$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $\{C_1, \dots, C_n\}$  es un  $n$ -ciclo de  $C_{f_\gamma}(x)$ , es decir

$$\begin{cases} C_{k+1} = C_{f_\gamma}(C_k), & k = 1, 2, \dots, n-1, \\ C_{f_\gamma}(C_n) = C_1. \end{cases}$$

Si este ciclo fuese superatractor, tendríamos que

$$0 = C'_{f_\gamma}(C_1) \cdots C'_{f_\gamma}(C_n) = \left(\frac{5}{9}\right)^n \frac{f(C_1)^2 \cdots f(C_n)^2}{C_1^6 \cdots C_n^6},$$

y por lo tanto  $C_j$  debería ser raíz de  $f_\gamma(x)$ , es decir  $C_j = -1$ . Como  $-1$  es un punto fijo, no puede formar parte de ningún ciclo. En consecuencia la igualdad anterior no puede ser cierta.  $\square$

**Nota:** Como

$$C'_{f_\gamma}(x) = \frac{5f_\gamma(x)^2}{9x^6},$$

la función de iteración  $C_{f_\gamma}(x)$  es contractiva, es decir que  $0 < C'_{f_\gamma}(x) < 1$ , si y solo si  $x < -[\sqrt{5}/(3 + \sqrt{5})]^{1/3} \approx -0.7530$  o  $x > [\sqrt{5}/(3 - \sqrt{5})]^{1/3} \approx 1.4304$ .

### 2.3.6. Caso $f_\gamma(x) = x^3 + \gamma x + 1$ con $\gamma \in (\gamma^*, 0)$

En este caso  $f_\gamma(x)$  es de la forma de la imagen e) Figura 2.5, Galería III, y la función racional correspondiente es

$$C_{f_\gamma}(x) = \frac{15x^7 + 6\gamma x^5 - 15x^4 - \gamma^2 x^3 - 12\gamma x^2 - 3x - \gamma^2}{(3x^2 + \gamma)^3}.$$

Este estudio arroja los datos siguientes:

- 1) La función  $f_\gamma(x)$  tiene una sola raíz real  $x^*$ .
- 2) El polinomio  $f_\gamma(x)$  tiene un máximo en

$$-a_1 = -\sqrt{\frac{-\gamma}{3}},$$

y un mínimo en

$$a_1 = \sqrt{\frac{-\gamma}{3}}.$$

- 3) En consecuencia,  $C_{f_\gamma}(x)$  tiene dos asíntotas verticales en  $x = -a_1$  y  $x = a_1$ , es decir, la única asíntota vertical del caso  $\gamma = 0$  se ha desdoblado en dos asíntotas.
- 4) Se mantiene la asíntota oblicua en  $y = \frac{5x}{9}$ .

5) Por otra parte, se tiene que

$$C'_{f_\gamma}(x) = \frac{3f_\gamma(x)^2(15x^2 - \gamma)}{(3x^2 + \gamma)^4},$$

y como  $C'_{f_\gamma}(x) > 0$  para todo  $\mathbb{R}$ , luego  $C_{f_\gamma}(x)$  es creciente en  $(-\infty, -a_1)$ , en  $(-a_1, a_1)$  y en  $(a_1, +\infty)$ , pero no en  $\mathbb{R}$ .

- 6) Si  $\gamma \rightarrow 0$ ,  $a_1$  y  $-a_1$  tienden a juntarse en una única asíntota en  $x = 0$  y además, el punto de corte con el eje  $OY$  está cada vez más alto.
- 7) Los puntos fijos extraños que aparecen son las soluciones de (2.8).
- 8) Para  $\gamma \in (\gamma^*, 0)$ , hay solo dos soluciones de (2.8), una entre  $x^*$  y  $-a_1$ , y la otra entre  $-a_1$  y 0.
- 9) Hemos comprobado que todos los puntos fijos extraños son repulsores.
- 10) Experimentos numéricos prueban que hay convergencia a la raíz para  $x_0 \in \mathbb{R} - M$ , siendo  $M$  la unión de las preimágenes de los puntos fijos extraños, las preimágenes de las asíntotas y las preimágenes de los ciclos repulsores.

Queremos resaltar que aparecen varios 2-ciclos, sin embargo todos son repulsores. Por ejemplo, si  $\gamma = -1.8$  aparecen tres 2-ciclos:  $\{-1.093401, -0.436226\}$ ,  $\{-1.042428, 0.818439\}$  y  $\{0.616916, 0.906139\}$ , con multiplicador asociado 284.152, 3772.26 y 5.1807, respectivamente.

### 2.3.7. Caso $f_\gamma(x) = x^3 + \gamma x + 1$ con $\gamma = \gamma^*$

En esta sección denotamos  $f_*(x)$  y  $C_*(x)$  al polinomio  $f_\gamma(x)$  y su función de iteración  $C_{f_\gamma}(x)$  para  $\gamma^*$ . Para simplificar las notaciones que aparecen en nuestro estudio, introducimos la notación

$$a = \sqrt[3]{2}. \quad (2.11)$$

Este caso representa una singularidad en nuestro estudio. Por una parte, el polinomio  $f_*(x)$  mantiene una única raíz real simple,  $x = -a^2 \approx -1.5874$ , pero aparece una raíz doble,  $x = 1/a \approx 0.7937$ , es decir

$$f_*(x) = (x + a^2)(x - 1/a)^2.$$

véase imagen a) de la Figura 2.6, Galería IV. Por otra parte, una de las asíntotas de la función de iteración  $C_{f_*}(x)$  desaparece, al cancelarse con la nueva raíz de  $f_*(x)$ . En concreto, la expresión de la función de iteración, en este caso es

$$C_*(x) = \frac{10x^4 + 15a^2x^3 + 24ax^2 + 22x + 3a^2}{9(ax + 1)^3}, \quad (2.12)$$

con  $a$  definido en (2.11), véase la imagen b) de la Figura 2.6, Galería IV.

Listamos a continuación las principales propiedades de  $C_*(x)$ :

- 1)  $C_*(x)$  tiene una única asíntota vertical en  $x = -1/a \approx -0.7937$ .
- 2)  $C_*(x)$  tiene una asíntota oblicua en  $\frac{5x}{9}$ .
- 3)  $C'_*(-a^2) = 0$ , luego la raíz simple  $x = -a^2$  es un punto fijo superatractor.

Como

$$C'_*\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{3}{8},$$

entonces  $x = 1/a$  es atractor.

- 4) Para obtener los puntos fijos hay que resolver  $C_*(x) = x$ , es decir,

$$C_*(x) - x = \frac{f_*(x)(2ax + a^3 - 1)(6ax + 5a^3 - 1)}{(3ax + 2a^3 - 1)^3} = 0.$$

De aquí, obtenemos los puntos fijos extraños:

$$x = \frac{1 - a^3}{2a} \approx -0.39685, \quad x = \frac{1 - 5a^3}{6a} \approx -1.99055.$$

- 5) La derivada de  $C_*(x)$  es

$$C'_*(x) = \frac{a^2(x + a^2)^2(5a^2x^2 + 1)}{9(ax + 1)^4}.$$

Por tanto, el único punto crítico es la raíz simple  $x = -a^2$ . Además,  $C'_*(x) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , luego  $C_*(x)$  es una función creciente en  $(-\infty, -1/a)$  y en  $(-1/a, +\infty)$ .

- 6) La derivada segunda de  $C_*(x)$  es

$$C''_*(x) = \frac{2a^2(x + a^2)(3ax - 1)}{3(ax + 1)^5}.$$

Por lo tanto,  $C_*(x)$  tiene puntos de inflexión en la raíz simple  $x = -a^2$  y en  $x = \frac{1}{3a} \approx 0.2645$ .

- 7) Por último, destacamos la aparición de un 2-ciclo repulsor en

$$\{-0.4532, -1.1146\},$$

con multiplicador asociado 282.279.

**2.3.8. Caso  $f_\gamma(x) = x^3 + \gamma x + 1$  con  $\gamma < \gamma^*$** 

Este apartado tiene la particularidad de que bajo esta condición, el polinomio considerado  $f_\gamma(x) = x^3 + \gamma x + 1$ , tiene tres raíces reales y distintas, esto puede verse en la imagen c) Figura 2.6, Galería IV. Ocurre que la raíz doble del caso  $\gamma = \gamma^*$  se ha bifurcado en dos raíces simples. Además, la función de iteración dada por la expresión

$$C_{f_\gamma}(x) = \frac{15x^7 + 6\gamma x^5 - 15x^4 - \gamma^2 x^3 - 12\gamma x^2 - 3x - \gamma^2}{(3x^2 + \gamma)^3},$$

vuelve a tener dos asíntotas, como puede verse en la imagen d) de la Figura 2.6, Galería IV. Otras propiedades de  $C_{f_\gamma}(x)$  son:

- 1) El polinomio  $f_\gamma(x)$  tiene un máximo en

$$-a_1 = -\sqrt{\frac{-\gamma}{3}},$$

y un mínimo en

$$a_1 = \sqrt{\frac{-\gamma}{3}}.$$

- 2) Además,  $C_{f_\gamma}(x)$  tiene dos asíntotas verticales en  $x = -a_1$  y  $x = a_1$ .  
 3) Se mantiene la asíntota oblicua en  $y = \frac{5x}{9}$ .  
 4) Por otra parte, se tiene que

$$C'_{f_\gamma}(x) = \frac{3f_\gamma(x)^2(15x^2 - \gamma)}{(3x^2 + \gamma)^4},$$

y como  $C'_{f_\gamma}(x) > 0$  para todo  $\mathbb{R}$ , luego  $C_{f_\gamma}(x)$  es creciente en

$$\left(-\infty, -\sqrt{-\frac{\gamma}{3}}\right) \cup \left(-\sqrt{-\frac{\gamma}{3}}, \sqrt{-\frac{\gamma}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{-\frac{\gamma}{3}}, +\infty\right).$$

Llegados a este punto, estamos en condiciones de estudiar el polinomio

$$\nu_\gamma(x) = 12x^4 + 9\gamma x^2 + 3x + \gamma^2,$$

ya definido en (2.8), que aparece en el cómputo de los puntos fijos extraños de  $C_{f_\gamma}(x)$ . Si bien hasta ahora habíamos limitado su estudio a valores de  $\gamma \geq 0$  o  $\gamma > \gamma^*$ , planteamos ahora su estudio más general.

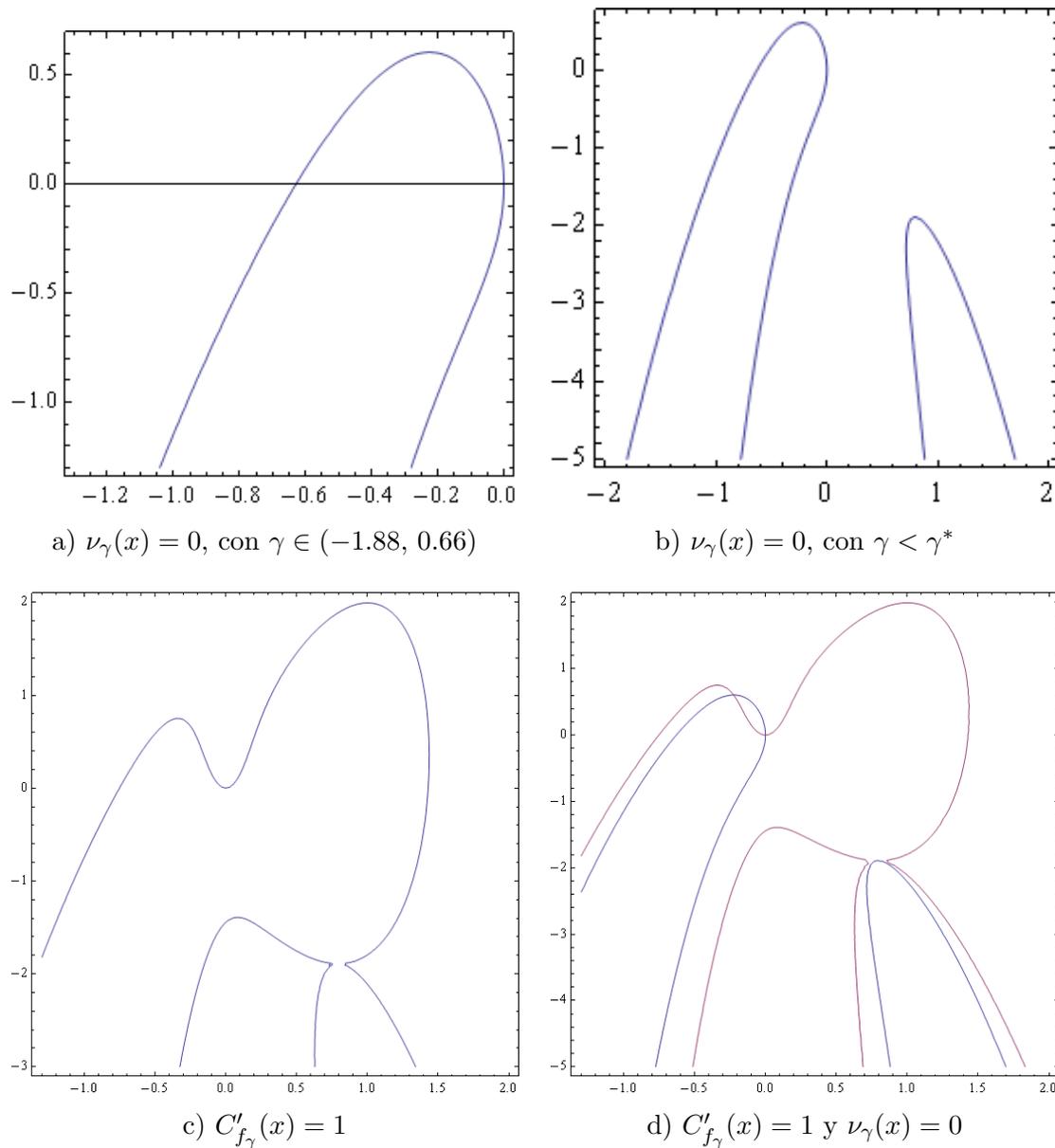


Figura 2.8: Galería V. En la imagen a) podemos observar las dos soluciones reales de la curva (2.8) para  $\gamma \in (\gamma^*, 3/(\sqrt[3]{121}) \approx (-1.88, 0.66)$ . La imagen b) muestra la aparición de una curva parabólica que aporta dos nuevas soluciones a la función (2.8). En la imagen c) mostramos el *Amor materno* en las matemáticas, si observamos un poco, esta curva asemeja una madre que despide o recibe su hijo con un beso en la frente, a la vez que representa las tres soluciones de (2.8). Finalmente, en la imagen d) se muestra la región donde aparecen los puntos fijos extraños.

Obtenemos los puntos fijos al resolver la expresión

$$x = C_{f_\gamma}(x) \iff \frac{f_\gamma(x)(12x^4 + 9\gamma x^2 + 3x + \gamma^2)}{(3x^2 + \gamma)^3} = 0.$$

Sin embargo, como puede observarse, los puntos fijos extraños se obtienen resolviendo  $\nu(x)$  en  $x$ , esto es, una ecuación de grado 4. En concreto, se tiene:

1) Si

$$\gamma = \frac{3}{\sqrt[3]{121}} \approx 0.606,$$

la ecuación (2.8) tiene una única solución en

$$x = \frac{-1}{2\sqrt[3]{11}} \approx -0.224822.$$

2) Si

$$\gamma \in \left( \gamma^*, \frac{3}{\sqrt[3]{121}} \right) \approx (-1.88, 0.606),$$

entonces la ecuación (2.8) tiene dos soluciones en  $x$ , como se muestra en la imagen a) de la Figura 2.8, Galería V. Notemos que si  $\gamma = 0$  una de las soluciones es  $x = 0$ .

3) Si  $\gamma = \gamma^* \approx -1.88$ , entonces la función (2.8) tiene tres soluciones.

4) Si  $\gamma < \gamma^* \approx -1.88$ , aparece una nueva rama parabólica para la ecuación (2.8) que aporta dos soluciones más, véase la imagen b) de la Figura 2.8, Galería V. En este caso,  $\nu(x)$  tiene 4 soluciones distintas.

Para saber si los puntos fijos extraños son atractores, como  $C'_{f_\gamma}(x) > 0$  para todo  $x$  y para  $\gamma < 0$ , calculamos cuando  $C'_{f_\gamma}(x) = 1$ . La curva solución de esta ecuación se muestra en la imagen c) de la Figura 2.8, Galería V. En la imagen d) se aprecia que las curvas  $\nu(x)$  y  $C'_{f_\gamma}(x) = 1$  solo se cortan cuando  $x = 0.793$  y  $\gamma = \gamma^*$ , cuando  $x = 0$  y  $\gamma = 0$  o cuando  $x = -0.224$  y  $\gamma = 0.606$ . Sin embargo, para valores negativos del parámetro  $\gamma$ , todos los puntos fijos extraños están en el interior de la región donde  $C'_{f_\gamma}(x) > 1$ , luego son todos repulsores. En efecto, no hay ninguna solución en el rango de  $\gamma$  adecuado. Por lo tanto, los únicos puntos fijos extraños que tienen carácter atractor son los correspondientes a valores positivos de  $\gamma$ , es decir  $\gamma \in (0, 0.606)$ , tal y como se puso de manifiesto en la Sección 2.3.4.

### 2.3.9. Diagramas de bifurcación

Consideramos imposible cerrar este capítulo sin dejar en evidencia la belleza poética que encierra el estudio de la dinámica de métodos iterativos, y en especial el método de Chebyshev, además de su paralelismo con las formas en la naturaleza en general. Una manera elegantemente poética de describir una bifurcación, como lo describe Carlos E. Puentes en [137], es:

Existe un *orden en el camino al desorden* para la ruta al caos mediante bifurcaciones, pues cualquier curva unimodal no lineal llana da lugar a una raíz, a una rama, o incluso a ramas de bifurcaciones, y de una manera ordenada y entrelazada, a ramas periódicas que conducen al follaje del caos.

Los diagramas de Feigenbaum (véase las imágenes de la Figura 2.9, Galería VI y la referencia [52]), muestran los puntos a los que converge la órbita de un punto inicial  $x_0$  para diferentes valores del parámetro  $\gamma$ . Mostramos a continuación algunos diagramas de Feigenbaum para el método de Chebyshev aplicado al polinomio

$$f_\gamma(x) = x^3 + \gamma x + 1.$$

Para un valor inicial concreto, digamos  $x_0 \approx 0.9883163848556824$  y para  $\gamma \in (0.4432, 0.4475)$ , se obtiene la galería de imágenes de diagramas de Feigenbaum que mostramos en la Figura 2.9.

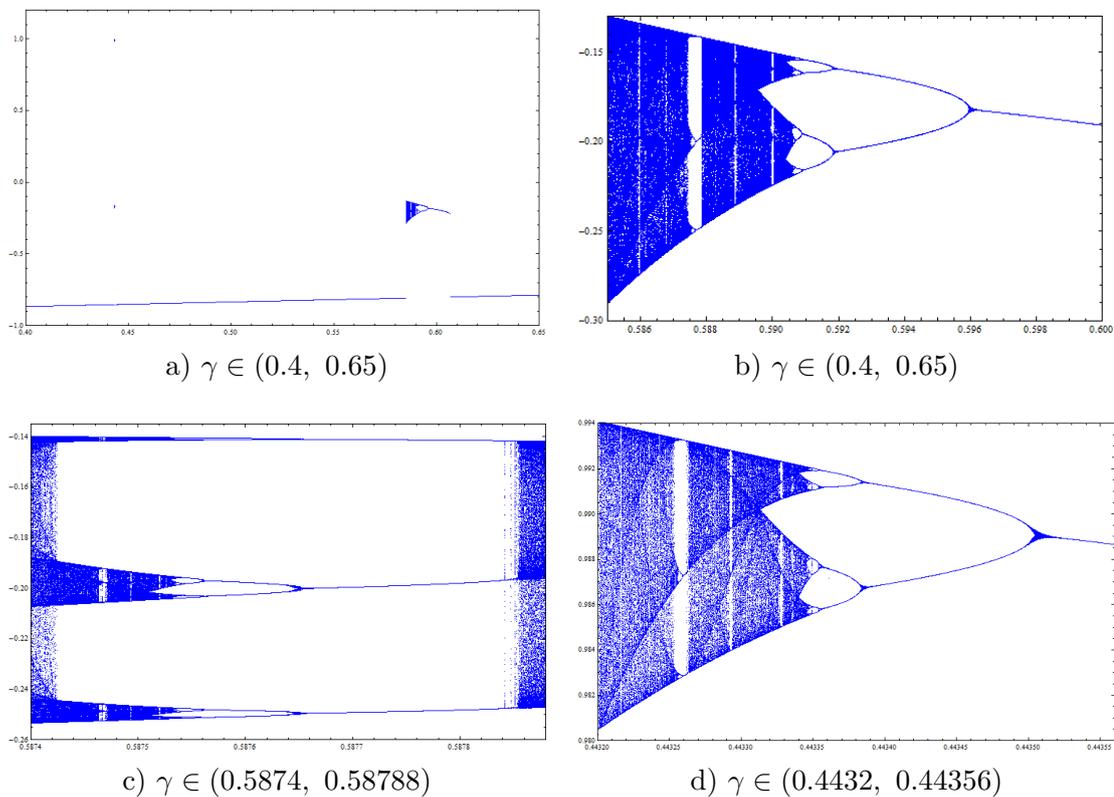


Figura 2.9: Galería VI. En la imagen a) puede apreciarse el diagrama de Feigenbaum donde aparecen los  $n$ -ciclos del método de Chebyshev aplicado al polinomio  $f_\gamma(x) = x^3 + \gamma x + 1$ . En la imagen b) mostramos una ampliación de la primera cascada de bifurcación de la imagen a). La imagen c) es la ampliación que abarca los 6-ciclos que aparecen en la imagen b). Finalmente en d) hacemos una ampliación de la secuencia de cascadas superpuestas que casi no pueden apreciarse a la izquierda de la imagen a).

## Capítulo 3

# Dinámica compleja del método de Chebyshev

En este capítulo, vamos a considerar el comportamiento dinámico de las sucesiones que se originan, cuando se aplica un método numérico para resolver una ecuación no lineal  $f(z) = 0$ , con  $z \in \mathbb{C}$ . El conjunto de puntos de partida, que da lugar a sucesiones convergentes a una misma solución, forman la cuenca de atracción de dicha solución. Para polinomios  $f$  definidos en el campo complejo, la caracterización de las cuencas de atracción genera imágenes fractales de las que se conoce poco sobre su estructura, véase [126]. Por ejemplo, si consideramos el método de Newton:

$$N_f(z_n) = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}, \quad n \geq 0, \quad (3.1)$$

y si además son conocidas las raíces del polinomio complejo  $f(z)$ , ¿se pueden caracterizar sus cuencas de atracción? Este planteamiento se conoce como el problema de Cayley, véase la Figura 3.2, quien lo resolvió en 1879, caracterizando las regiones de convergencia  $\mathbf{A}(z^*) = \{z_0 \in \mathbb{C}; z_n \rightarrow z^*\}$ , cuando  $f$  es un polinomio de segundo grado. El propio Cayley fracasó, en su intento por caracterizar las cuencas de atracción de polinomios de tercer grado y grados superiores. Según sus propias palabras: «el caso de las ecuaciones cúbicas parece que presenta considerables dificultades» (véase [18], [31], [37] y [84]).

Estamos interesados en estudiar el comportamiento dinámico del método de Chebyshev, cuya expresión es  $z_{n+1} = C_f(z_n)$ , donde hemos definido

$$C_f(z_n) = z_n - \left(1 + \frac{1}{2}L_f(z_n)\right) \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}, \quad n \geq 0. \quad (3.2)$$

Para el estudio dinámico de la función  $C_f(z)$  definida en (3.2), será de utilidad conocer el siguiente resultado.

**Lema 3.1.** *La derivada de  $C_f(z)$  es:*

$$C'_f(z) = \frac{L_f(z)^2}{2}(3 - L_{f'}(z)), \quad (3.3)$$

donde

$$L_{f'}(z) = \frac{f'(z)f'''(z)}{f''(z)^2}.$$

*Demostración.* Dada una función en general  $f(z)$ , aplicando el método de Chebyshev (3.2) y derivando, obtenemos

$$C'_f(z) = -\frac{f(z)^2(-3f''(z) + f'(z)f'''(z))}{2f'(z)^4}. \quad (3.4)$$

Reagrupando los términos convenientemente obtenemos

$$C'_f(z) = \frac{3}{2}L_f(z)^2 - \frac{1}{2} \frac{f(z)^2 f''(z)^2}{f'(z)^4} \frac{f'(z)f'''(z)}{f''(z)^2},$$

podemos escribir esta expresión como

$$C'_f(z) = \frac{3}{2}L_f(z)^2 - \frac{1}{2}L_f(z)^2 L_{f'}(z),$$

luego factorizando llegamos a

$$C'_f(z) = \frac{L_f(z)^2}{2}(3 - L_{f'}(z)).$$

Como queríamos demostrar. □

No obstante, en este capítulo también usaremos, como procesos iterativos de referencia, el método de Newton, definido por (3.1) y el método de Halley, definido por  $z_{n+1} = H_f(z_n)$ , donde

$$H_f(z_n) = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \left( \frac{2}{2 - L_f(z_n)} \right). \quad (3.5)$$

### 3.1. Preliminares de dinámica compleja

Antes de comenzar con el estudio del método de Chebyshev propiamente dicho, vamos a introducir algunos conceptos básicos sobre la iteración de funciones en el plano complejo, haciendo especial énfasis en la iteración de funciones racionales. Además, algunas definiciones y resultados, que brindarán la claridad necesaria para el mejor entendimiento, por parte de los lectores.

Cuando se usa una función de manera iterativa, en realidad buscamos la secuencia de Picard correspondiente. La función  $f^n$  es llamada una sucesión de Picard, en honor a Charles Émile Picard. En este caso, buscamos la secuencia de Picard de  $C_f(z)$  dada por (3.2). Además, otro enfoque que hemos querido dar al estudio dinámico del método de Chebyshev en el plano complejo, es: dado un punto  $z_0 \in \mathbb{C}$  se trata de analizar la evolución de la órbita

$$\text{orb}(z_0) = \{z_0, C_f(z_0), C_f^2(z_0), \dots, C_f^n(z_0), \dots\},$$

donde  $C_f^n(z_n)$  representa la composición de  $C_f(z_n)$  consigo misma  $n$  veces.

**Definición 3.1.** Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función. Se define el iterado  $n$ -ésimo  $f^n$  de  $f$  mediante  $f^0 = Id$ , donde  $Id$  es la función identidad en  $\mathbb{C}$ , y  $f^{n+1} = f \circ f^n$ . En la expresión previa,  $f \circ f^n$  indica una composición de función, que tiene el valor,  $f \circ f^n(z) = f(f^n(z))$ .

**Definición 3.2.** Sea  $\mathcal{R} : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$  una función racional sobre la esfera de Riemann ( $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ), es decir,  $\mathcal{R}(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ , donde  $P(z)$  y  $Q(z)$  son polinomios complejos sin factores comunes.

El grado de  $\mathcal{R}(z)$  se define como  $\text{grad}(\mathcal{R}) = \text{máx}\{\text{grad}(P), \text{grad}(Q)\}$ . En lo sucesivo consideraremos funciones de grado mayor o igual que dos.

**Definición 3.3.** Para  $z \in \bar{\mathbb{C}}$  definimos su órbita como el conjunto

$$\text{orb}(z) = \{z, \mathcal{R}(z), \mathcal{R}^2(z), \dots, \mathcal{R}^k(z), \dots\},$$

donde  $\mathcal{R}^k$  indica la composición de  $\mathcal{R}$  consigo misma  $k$  veces,  $\mathcal{R}^k = \mathcal{R} \circ \dots \circ \mathcal{R}$ .

**Definición 3.4.** Se dice que  $z^* \in \bar{\mathbb{C}}$ , es un punto fijo de  $\mathcal{R}(z)$  si  $\mathcal{R}(z^*) = z^*$ . Un punto periódico de la función  $\mathcal{R}$  de período  $n > 1$  es un punto  $z_0 \in \mathbb{C}$  tal que  $\mathcal{R}^n(z_0) = z_0$  y  $\mathcal{R}^j(z_0) \neq z_0$  para  $0 < j < n$ . Obsérvese que si  $z_0 \in \mathbb{C}$  es un punto periódico de período  $n \geq 1$ , entonces  $z_0$  es un punto fijo de  $\mathcal{R}^n$ . La órbita de un punto periódico está constituida por los  $n$  diferentes puntos  $\{z, \mathcal{R}(z), \mathcal{R}^2(z), \dots, \mathcal{R}^{n-1}(z)\}$ , y al conjunto de estos  $n$  puntos se le llama órbita periódica de período  $n$  (o  $n$ -ciclo).

En consecuencia, todos los puntos de una órbita periódica de período  $n$  son periódicos de período  $n$ .

**Definición 3.5.** Sea  $z^* \in \mathbb{C}$  un punto fijo de una función racional  $\mathcal{R}$ . Se dice que  $z^*$  es

i. Superatractor si  $\mathcal{R}'(z^*) = 0$ .

ii. Atractor si  $|\mathcal{R}'(z^*)| < 1$ .

iii. Indiferente si  $|\mathcal{R}'(z^*)| = 1$ .

iv. Repulsor si  $|\mathcal{R}'(z^*)| > 1$ .

Al valor  $\tau = \mathcal{R}'(z^*)$ , se le llama *multiplicador asociado al punto fijo*  $z^*$ .

**Definición 3.6.** Un punto periódico de período  $n$  es *superatractor*, *repulsor* o *indiferente*, si como punto fijo de  $\mathcal{R}^n(z)$  es respectivamente *superatractor*, *repulsor* o *indiferente*. El *multiplicador asociado a un  $n$ -ciclo*  $\{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$  es

$$\tau = (\mathcal{R}^n)'(z_0) = \mathcal{R}'(z_0)\mathcal{R}'(z_1)\cdots\mathcal{R}'(z_{n-1}).$$

Los puntos fijos indiferentes y, en general, los puntos periódicos indiferentes, se clasifican a su vez en racionalmente indiferentes o irracionalmente indiferentes dependiendo de si  $\tau^n = 1$  para algún  $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$  o si  $\tau^n \neq 1$  para ningún  $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ , respectivamente, donde  $\tau$  es el multiplicador asociado al punto fijo o ciclo indiferente. A su vez, los puntos irracionalmente indiferentes admiten otro tipo de clasificaciones (puntos de Siegel, puntos de Cremer, etc.) en las que no vamos a profundizar. Recomendamos al lector interesado las referencias clásicas de Beardon [18], Carleson y Gamelin [29] o Milnor [94].

**Definición 3.7.** Si  $\mathcal{R}$  es una función racional sobre la esfera de Riemann  $\bar{\mathbb{C}}$ , el punto del infinito  $z_\infty = \infty$  es un punto fijo de  $\mathcal{R}$ , si y solo si  $z = 0$  es un punto fijo de la función

$$z \xrightarrow{f} \frac{1}{\mathcal{R}(1/z)}.$$

Siguiendo a Beardon [18, p. 41], si  $\mathcal{R}$  tiene un punto fijo en el infinito, el multiplicador  $\tau$  en el infinito es igual a

$$\tau = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathcal{R}'(z)}.$$

En particular, el punto fijo  $z_\infty$  es *superatractor* si y solo si

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \mathcal{R}'(z) = \infty.$$

**Ejemplo 3.1.**

- i. Si  $\mathcal{R}(z) = 5z$ ,  $\infty$  es un punto fijo *atractor* de  $\mathcal{R}$  con *multiplicador asociado*  $1/5$ .
- ii. Si  $\mathcal{R}(z) = z/2$ ,  $\infty$  es un punto fijo *repulsor* de  $\mathcal{R}$  con *multiplicador asociado*  $2$ .

iii. Si  $\mathcal{R}(z) = z^2$ ,  $\infty$  es un punto fijo superatractor de  $\mathcal{R}$ .

**Definición 3.8.** Sea  $\zeta$  un punto fijo atractor de  $\mathcal{R}(z)$ . La cuenca de atracción de  $\zeta$  es el conjunto

$$B(\zeta) = \{z \in \bar{\mathbb{C}} : \mathcal{R}^n(z) \rightarrow \zeta\},$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ . La cuenca inmediata de atracción de un punto fijo atractor  $\zeta$  de  $\mathcal{R}(z)$ , denotado por  $B^*(\zeta)$ , es la componente conexa de  $B(\zeta)$  que contiene a  $\zeta$ . Si  $z_0$  es un punto periódico atractor de período  $n$  de  $\mathcal{R}(z)$ , la cuenca de atracción de la órbita,  $\text{orb}(z)$  es el conjunto

$$B(\text{orb}(z_0)) = \bigcup_{j=0}^{n-1} \mathcal{R}^j(B(z_0)),$$

donde  $B(z_0)$  es la cuenca de atracción de  $z_0$ , que es punto fijo de  $\mathcal{R}^n$ , y su cuenca inmediata de atracción es el conjunto

$$B^*(\text{orb}(z)) = \bigcup_{j=0}^{n-1} \mathcal{R}^j(B^*(z)).$$

**Definición 3.9.** Sea  $\mathcal{R} : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$  una función racional de grado  $d \geq 2$ . Decimos que  $\mathcal{R}$  es normal en un punto  $z \in \mathbb{C}$ , si existe un entorno  $U$  de  $z$  tal que la secuencia de iterados  $\{\mathcal{R}^n|_U : n \in \mathbb{N}\}$  es una familia equicontinua de funciones de  $U$  en  $\mathbb{C}$ , es decir, dados  $u, v \in U$  y  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $d(u, v) < \delta$  implica  $d(\mathcal{R}^n(u), \mathcal{R}^n(v)) < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Definición 3.10.** Se define el conjunto de Fatou de una función racional  $\mathcal{R}$  como

$$\mathcal{F}(\mathcal{R}) = \{z \in \bar{\mathbb{C}} : \mathcal{R} \text{ es normal en } z\}.$$

Su complementario es el conjunto de Julia de  $\mathcal{R}(z)$ ,

$$\mathcal{J}(\mathcal{R}) = \bar{\mathbb{C}} - \mathcal{F}(\mathcal{R}).$$

Los conjuntos de Julia y Fatou de una función racional, de grado mayor o igual que dos, verifican las siguientes propiedades, véase [98].

- i. El conjunto de Julia,  $\mathcal{J}(\mathcal{R})$ , es no vacío.
- ii. Si  $\mathcal{R}(z)$  tiene un punto periódico atractor  $z_0$ , de período mayor o igual que uno,  $z_0 \in \mathcal{F}$ , y su cuenca de atracción  $B(z_0)$  está incluida en el conjunto de Fatou y el conjunto de Julia  $\mathcal{J}(\mathcal{R}) = \partial B(z_0)$ , es la frontera topológica de  $B(z_0)$ .

- iii. Los conjunto de Fatou  $\mathcal{F}(\mathcal{R})$  y de Julia  $\mathcal{J}(\mathcal{R})$  son totalmente invariantes, es decir,

$$\mathcal{R}(\mathcal{F}(\mathcal{R})) = \mathcal{F}(\mathcal{R})$$

y

$$\mathcal{R}(\mathcal{J}(\mathcal{R})) = \mathcal{J}(\mathcal{R}).$$

Además, para todo  $n \in \mathbb{N}$  se verifica que  $\mathcal{J}(\mathcal{R}) = \mathcal{J}(\mathcal{R}^n)$ .

- iv. El conjunto de Julia  $\mathcal{J}(\mathcal{R})$ , es la clausura del conjunto de los puntos periódicos repulsores de  $\mathcal{R}(z)$ . Y si  $z \in \mathcal{J}(\mathcal{R})$  y  $U$  es un entorno de  $z$ , entonces  $\{\mathcal{R}^n(U)\}_{n \in \mathbb{N}}$ , cubre todo  $\bar{\mathbb{C}}$ , excepto a lo sumo dos puntos, véase el teorema de Montel en la referencia [25]. Por lo tanto, la dinámica caótica de  $\mathcal{R}(z)$  está contenida en el conjunto de Julia, véase [20] y [21].

La importancia de la siguiente definición se hará notoria de inmediato, específicamente en la próxima sección 3.2, véase [18].

**Definición 3.11.** *Sea  $\mathcal{R}$  una función racional de grado  $d$ . Un punto  $w \in \bar{\mathbb{C}}$  para el cual la cardinalidad de  $\mathcal{R}^{-1}(w)$  es menor que  $d$  se llama un valor crítico de  $\mathcal{R}$ . Un punto  $z \in \mathcal{R}^{-1}(w)$  que es una raíz de  $\mathcal{R}(z) - w$ , con multiplicidad mayor que 1, se llama un punto crítico de  $\mathcal{R}$ .*

$\infty$  es un punto crítico de  $\mathcal{R}$ , si 0 es un punto crítico de  $1/(\mathcal{R}(1/z))$ . La multiplicidad de  $\infty$ , como punto crítico de  $\mathcal{R}$ , es la multiplicidad del 0 como punto crítico de  $1/(\mathcal{R}(1/z))$ .

$z$  es un punto crítico de una función holomorfa  $f$  si  $f'(z) = 0$ .

Por ejemplo la función  $\mathcal{R} = z/(z-1)^2$  tiene un punto crítico en  $z = -1$ , para el que se anula  $\mathcal{R}'(z) = 0$ . El valor crítico asociado a  $z = -1$  es  $-1/4$ . Además, si  $\omega = \infty$ ,  $\mathcal{R}^{-1}(\omega) = 1$ , por lo que  $\omega = \infty$  es otro valor crítico, en este caso, asociado al punto crítico  $z = 1$ .

Los puntos críticos juegan un papel fundamental en el estudio de la dinámica de una función  $f$ . De hecho, son puntos alrededor de los cuales la función  $f$  no es un homeomorfismo local. Es decir, si  $p_1$  es un punto crítico de  $f$ , ninguna rama de la función inversa de  $f$  está definida en ningún entorno del valor crítico  $f(p_1)$ .

Pero la importancia de los puntos críticos desde el punto de vista dinámico radica en el hecho de que la topología de los conjuntos de Fatou y Julia asociados a una función  $f$  está estrechamente relacionada con las órbitas de los puntos críticos, como aseguran los teoremas que enunciaremos a continuación.

**Teorema 3.2. (de Fatou y Julia) [18, Tma. 9.3.1]** *Sea  $\mathcal{R}$  una aplicación racional, de grado mayor o igual que dos, entonces la cuenca de atracción inmediata de cada ciclo atractor de  $\mathcal{R}$  contiene al menos un punto crítico de  $\mathcal{R}$ .*

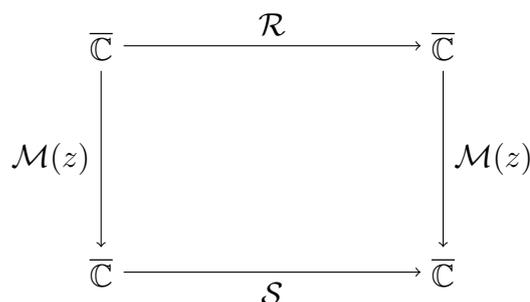


Figura 3.1: Diagrama resultante de una conjugación topológica.

El teorema anterior se extiende al caso de ciclos racionalmente indiferentes, véase [18, Tma. 9.3.2].

**Teorema 3.3.** [18, Tma. 9.4.1] *Sea  $\mathcal{R}$  una aplicación racional de grado  $d \geq 2$ . Entonces  $\mathcal{R}$  tiene a lo sumo  $2d - 2$  puntos críticos. Por lo tanto, como máximo tiene  $2d - 2$  órbitas periódicas atractoras o racionalmente indiferentes.*

**Teorema 3.4.** [18, Tma. 5.6.2] *El número de componentes del conjunto de Fatou de una aplicación racional  $\mathcal{R}$  es 0, 1, 2 o infinito.*

**Teorema 3.5.** [29, Tmas. 2.2 y 2.3] *Si las órbitas de los puntos críticos de una aplicación racional  $\mathcal{R}$  son finitas, entonces la medida de Lebesgue del conjunto de Julia de  $\mathcal{R}$  es cero.*

El concepto de conjugación topológica es una herramienta fundamental en el estudio dinámico de funciones racionales. Para dicho estudio utilizamos transformaciones de tipo Möbius, que son funciones de la forma:

$$\mathcal{M}(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad z \in \mathbb{C}$$

donde  $a, b, c, d$  son números complejos que verifican  $ad - bc \neq 0$ . Una transformación de Möbius puede verse en el plano complejo como la composición de una proyección estereográfica del plano sobre la esfera, seguida de una rotación o desplazamiento de la esfera a una nueva localización y finalmente una proyección estereográfica, esta vez de la esfera sobre el plano. Resulta más natural, como veremos en lo adelante, considerar directamente las transformaciones de Möbius como transformaciones de la esfera de Riemann, es decir, del plano complejo aumentado con un punto en el infinito.

**Definición 3.12.** *Dos aplicaciones  $\mathcal{R}, \mathcal{S} : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ , se dicen conjugadas si existe una transformación de Möbius  $\mathcal{M}$ , tal que*

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{M}(z) = \mathcal{M} \circ \mathcal{R}(z),$$

donde  $\mathcal{M}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , con  $ad \neq bc$ , véase la Figura 3.1.

Si llamamos  $z_{n+1} = \mathcal{R}(z_n)$  y  $\omega_{n+1} = \mathcal{S}(\omega_n)$ , se tiene que ambas secuencias, están muy relacionadas. En efecto, si  $\omega_n = \mathcal{M}(z_n)$ , entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{S} \circ \mathcal{M}(z_n) &= \mathcal{M} \circ \mathcal{R}(z_n) \\ \mathcal{S}(\omega_n) &= \mathcal{M}(z_{n+1}) \\ \omega_{n+1} &= \mathcal{M}(z_{n+1}).\end{aligned}$$

El comportamiento de la secuencia  $\{\omega_n\}$  queda determinado por el de la secuencia  $\{z_n\}$  y viceversa, es decir  $z_n = \mathcal{M}^{-1}(\omega_n)$ . Además, los conjuntos de Julia y Fatou también están relacionados, de hecho  $\mathcal{S} = \mathcal{M} \circ \mathcal{R} \circ \mathcal{M}^{-1}$ , y esto a su vez implica que  $\mathcal{F}(\mathcal{S}) = \mathcal{M}(\mathcal{F}(\mathcal{R}))$  y  $\mathcal{J}(\mathcal{S}) = \mathcal{M}(\mathcal{J}(\mathcal{R}))$ .

Partiendo del resultado anterior, la conjugación de funciones es pieza clave para entender a fondo el comportamiento dinámico de una función de iteración, ya que:

- i. Conserva los puntos fijos (si  $s$  es punto fijo de  $\mathcal{R}$ , entonces  $\mathcal{M}(s)$  es punto fijo de  $\mathcal{S}$ ).
- ii. Conserva los ciclos periódicos y su carácter es decir (atractor, superatractor, repulsor, etc.).
- iii. Conserva la cuenca de atracción.

## 3.2. El problema de Cayley y el caso de polinomios de segundo grado

El clásico problema de Cayley establece que el conjunto de Julia para el método de Newton aplicado a polinomios cuadráticos tiene una forma particularmente sencilla: es una línea recta. De forma más explícita, podemos decir que la función de iteración  $N_p(z)$  asociada a  $p(z) = (z-a)(z-b)$ ,  $a \neq b$ :

$$N_p(z) = \frac{z^2 - ab}{2z - a - b},$$

es conjugada con la aplicación  $N(z) = z^2$  mediante la transformada de Möbius  $M(z) = (z-a)/(z-b)$ , es decir  $N(z) = M \circ N_p \circ M^{-1}(z)$ .

Como el conjunto de Julia asociado con  $N(z)$  es

$$J(N) = S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\},$$

se tiene que el conjunto de Julia asociado con  $N_p(z)$  es una línea recta formada por los puntos a igual distancia de las raíces  $a$  y  $b$ .

### *Desiderata and Suggestions.*

BY PROFESSOR CAYLEY, *Cambridge, England.*

#### No. 3.—THE NEWTON-FOURIER IMAGINARY PROBLEM.

THE Newtonian method as completed by Fourier, or say the Newton-Fourier method, for the solution of a numerical equation by successive approximations, relates to an equation  $f(x) = 0$ , with real coefficients, and to the determination of a certain real root thereof  $\alpha$  by means of an assumed approximate real value  $\xi$  satisfying prescribed conditions: we then, from  $\xi$ , derive a nearer approximate value  $\xi_1$  by the formula  $\xi_1 = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$ ; and thence, in like manner,  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$  approximating more and more nearly to the required root  $\alpha$ .

In connexion herewith, throwing aside the restrictions as to reality, we have what I call the Newton-Fourier Imaginary Problem, as follows.

Take  $f(u)$ , a given rational and integral function of  $u$ , with real or imaginary coefficients;  $\xi$ , a given real or imaginary value, and from this derive  $\xi_1$  by the formula  $\xi_1 = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$ , and thence  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$  each from the preceding one by the like formula.

A given imaginary quantity  $x + iy$  may be represented by a point the coordinates of which are  $(x, y)$ : the roots of the equation are thus represented by given points  $A, B, C, \dots$ , and the values  $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$  by points  $P, P_1, P_2, \dots$  the first of which is assumed at pleasure, and the others each from the preceding one by the like given geometrical construction. The problem is to determine the regions of the plane, such that  $P$  being taken at pleasure anywhere within one region we arrive ultimately at the point  $A$ ; anywhere within another region at the point  $B$ ; and so for the several points representing the roots of the equation.

The solution is easy and elegant in the case of a quadric equation, but the next succeeding case of the cubic equation appears to present considerable difficulty.

Саммидж, Миссѳ 3д, 1879.

Figura 3.2: En 1879, Cayley publica en el American Journal of Mathematics, un artículo de una sola página titulado The Newton-Fourier imaginary problem [31].

De forma parecida, véase [84, Tma. 3.2.3], el conjunto de Julia para el método de Halley aplicado a polinomios cuadráticos es también conjugado con la circunferencia unidad  $S^1$ . Para ello se prueba que la función de iteración del método de Halley

$$H_p(z) = \frac{z^3 - 3abz + a^2b + ab^2}{3z^2 - 3(a+b)z + a^2 + ab + b^2},$$

es conjugada con la aplicación  $H(z) = z^3$  mediante la transformada de Möbius  $M(z) = (z-a)/(z-b)$ , es decir  $H(z) = M \circ H_p \circ M^{-1}(z)$ .

Ahora vamos a estudiar en detalle el comportamiento dinámico del método de Chebyshev aplicado a polinomios de la forma

$$p(z) = (z-a)(z-b), \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad a \neq b.$$

Obtenemos que la función de iteración asociada al método (3.2) es, por tanto,

$$C_p(z) = \frac{-ab(a^2 + 3ab + b^2) + 6ab(a+b)z - 6abz^2 - 2(a+b)z^3 + 3z^4}{(-a-b+2z)^3}. \quad (3.6)$$

La función racional  $C_p(z)$  definida en (3.6), tiene las siguientes características:

- i. Es una función racional de grado 4, dependiente de dos parámetros: las raíces  $a$  y  $b$  del polinomio.
- ii. Tiene 5 puntos fijos, véase el Cuadro 3.1, con las características mostradas en el Cuadro 3.2. Nótese la aparición de tres puntos fijos extraños (distintos de las raíces de  $p(z)$ ), aunque en este caso son repulsores.
- iii. Teniendo en cuenta (3.2) para el caso  $p(z) = (z-a)(z-b)$ , se tiene que

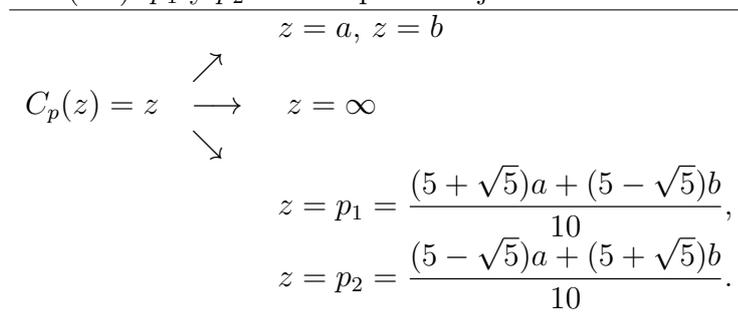
$$C'_p(z) = \frac{3}{2}L_p(z)^2 = 6\frac{p(z)^2}{p'(z)^4}.$$

Por lo tanto, las raíces de  $p(z)$  son puntos críticos de  $C_p(z)$ , (cada una con multiplicidad 3). Además,  $(a+b)/2$  también es un punto crítico de multiplicidad 3 que proviene de la preimagen del  $\infty$ , véase el estudio posteriormente realizado para  $S_2(z)$ , pues resulta mucho más sencillo.

En lugar de estudiar la función de iteración  $C_p(z)$ , resulta más conveniente estudiar las correspondientes funciones racionales obtenidas mediante conjugación topológica con las funciones adecuadas. En concreto, usaremos la transformación afín  $\mathbb{M}_1$  definida por

$$\mathbb{M}_1(z) = 1 + \frac{2(z-a)}{a-b}, \quad (3.7)$$

Cuadro 3.1: Esquema de la ubicación de los puntos fijos de la función de iteración  $C_p(z)$  definida en (3.6).  $p_1$  y  $p_2$  son los puntos fijos extraños.



Cuadro 3.2: Caracterización de los puntos fijos de la función de iteración  $C_p(z)$  definida en (3.6).

Puntos fijos	Carácter	Multiplicador asociado
$a$	Superatractor	0
$b$	Superatractor	0
$\infty$	Repulsor	8/3
$p_1$	Repulsor	6
$p_2$	Repulsor	6

y la transformación de Möbius  $\mathbb{M}_2$  definida por

$$\mathbb{M}_2(z) = \frac{z - a}{z - b}. \tag{3.8}$$

En lo que sigue vamos a analizar el comportamiento dinámico de las funciones racionales

$$S_j(z) = \mathbb{M}_j \circ C_p \circ \mathbb{M}_j^{-1}(z) \quad j = 1, 2.$$

Notemos que aunque  $S_1$  y  $S_2$  son a su vez conjugadas, el estudio por separado de ambas funciones de iteración nos aportará una visión diferente y, en ocasiones, complementaria del comportamiento del método de Chebyshev aplicado a un polinomio cuadrático. A la función resultante de la conjugación topológica con  $\mathbb{M}_1(z)$ , se le suele llamar escalado o escalamiento, mientras que si la conjugación es con  $\mathbb{M}_2(z)$ , suele decirse compactificado.

Cuadro 3.3: Esquema de la ubicación de los puntos fijos de la función de iteración  $S_1(z)$  definida en (3.9). En rojo, los puntos fijos extraños.

$$\begin{array}{ccc} & & z = 1, z = -1 \\ & \nearrow & \\ \frac{3z^4+6z^2-1}{8z^3} = z & \longrightarrow & z = \infty \\ & \searrow & \\ & & z = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \quad z = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{array}$$

### Estudio de la función de iteración $S_1(z)$

Dado  $p(z) = (z - a)(z - b)$ , calculamos  $S_1(z) = \mathbb{M}_1 \circ C_p \circ \mathbb{M}_1^{-1}(z)$ , con lo cual obtenemos

$$S_1(z) = \frac{3z^4 + 6z^2 - 1}{8z^3}. \quad (3.9)$$

Notemos que la conjugación con la aplicación afín  $\mathbb{M}_1$  introducida en (3.7) tiene como característica que envía la raíz  $a$  al 1 y la raíz  $b$  al  $-1$ . Por lo tanto, (3.9), tiene las siguientes características:

- i. Es una función racional de grado 4 que no depende de ningún parámetro.
- ii. Tiene cinco puntos fijos, véase el Cuadro 3.3, con las características mostradas en el Cuadro 3.4. Nótese la aparición de tres puntos fijos extraños (distintos de las raíces de  $p(z)$ ), aunque en este caso son repulsores.
- iii. Sus puntos críticos son 1,  $-1$  y 0, todos ellos con multiplicidad 3. Nótese que

$$S_1'(z) = \frac{3(z^2 - 1)^2}{8z^4}.$$

Si comparamos el comportamiento de la función de iteración (3.9) con el correspondiente a las de los métodos de Newton ( $N_1$ ) y Halley ( $H_1$ ):

$$N_1(z) = \mathbb{M}_1 \circ N_p \circ \mathbb{M}_1^{-1}(z) = \frac{z^2 + 1}{2z},$$

$$H_1(z) = \mathbb{M}_1 \circ H_p \circ \mathbb{M}_1^{-1}(z) = \frac{z^3 + 3z}{3z^2 + 1},$$

podemos extraer algunas conclusiones interesantes.

Cuadro 3.4: Caracterización de los puntos fijos de la función de iteración  $S_1(z)$  definida en (3.9).

Puntos fijos	Carácter	Multiplicador asociado
1	Superatractor	0
-1	Superatractor	0
$\infty$	Repulsor	8/3
$-\sqrt{5}/5$	Repulsor	6
$\sqrt{5}/5$	Repulsor	6

Como puede apreciarse en las imágenes de la Figura 3.3, para polinomios de segundo grado, los métodos de Newton y Halley cumplen la propiedad de convergencia a la raíz más próxima (*PCRMP*) que consiste en que si

$$|z_0 - a| < |z_0 - b|$$

entonces las órbitas de  $z_0$  definidas por  $N_1$  y  $H_1$  convergen a la raíz  $a$ , la más próxima a  $z_0$ . Del mismo modo, si

$$|z_0 - b| < |z_0 - a|$$

se obtiene convergencia a  $b$ . En el caso en que

$$|z_0 - a| = |z_0 - b|,$$

las secuencias para los métodos de Newton y Halley presentan un comportamiento caótico. Sin embargo,  $S_1$  no cumple *PCRMP*, como veremos en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.2.** Sea  $f(z) = z^2 - 1$  el polinomio cuyas raíces queremos aproximar por medio del método de Chebyshev y sea  $z_0 = 0.25$  el punto de partida. Notemos que este valor de  $z_0$  está más próximo a 1 que a  $-1$ . El método de Chebyshev produce, al ser iterado, la secuencia

$$\{0.25, -4.90525, -1.99165, -1.10762, -1.0005, -1.0000, -1.000\},$$

que, como podemos ver, converge a una raíz que no es la más próxima al punto de partida. Notemos que para polinomios de segundo grado, ya el método de Chebyshev no cumple la propiedad de convergencia a la raíz más próxima. Este hecho queda evidenciado en la imagen de la derecha de la Figura 3.3.

Por otra parte, el análisis gráfico de la Figura 3.3 nos permite obtener otras conclusiones. En primer lugar, apreciamos en los tres casos la simetría de las dos cuencas de atracción respecto al eje imaginario. Por otra parte, se observa que

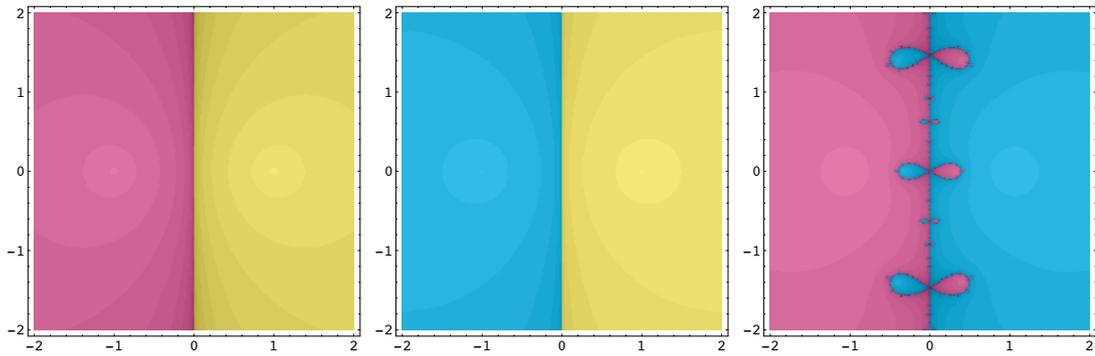


Figura 3.3: Cuencas de atracción a las raíces del polinomio  $f(z) = z^2 - 1$  aplicando las funciones de iteración de Newton, Halley y Chebyshev, respectivamente.

el conjunto de Julia (frontera de las cuencas de atracción) tiene una estructura sencilla para los métodos de Newton o Halley (es el propio eje imaginario) mientras que su estructura es mucho más intrincada para el método de Chebyshev. Para reforzar numéricamente esta idea, se puede calcular la dimensión fractal de dichos conjuntos de Julia. Así, para los métodos de Newton o Halley está claro que la dimensión fractal del conjunto de Julia es 1, al tratarse de una recta. Sin embargo, para el método de Chebyshev, siguiendo las técnicas desarrolladas por Magreñán, Gutiérrez y Varona en [68], se prueba que la dimensión fractal del conjunto de Julia es 1.56943 aproximadamente.

### Estudio de la función de iteración $S_2(z)$

Dado  $p(z) = (z - a)(z - b)$ , calculamos  $S_2(z) = \mathbb{M}_2 \circ C_p \circ \mathbb{M}_2^{-1}(z)$ , con  $\mathbb{M}_2$  introducida en (3.8). Ahora, para el cálculo de la función inversa de  $\mathbb{M}_2$ , puede comprobarse directamente que

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{x - a}{x - b} = w \\ x - a &= wx - bw \\ (1 - w)x &= a - bw \\ x &= \frac{-bw + a}{-w + 1}, \end{aligned}$$

luego

$$\mathbb{M}_2^{-1}(z) = \frac{a - bz}{1 - z}.$$

Sea  $C_p(z)$  la función de iteración definida en (3.6), obtenida al aplicar el método de Chebyshev al polinomio  $p(z) = (z - a)(z - b)$ , entonces, en este caso, se tiene

Cuadro 3.5: Diagrama del comportamiento de la función de iteración  $S_2(z)$  definida en (3.10).

$S_2 :$	$\mathbb{M}_2^{-1}$		$C_p$		$\mathbb{M}_2$		
	0	$\mapsto$	$a$	$\mapsto$	$a$	$\mapsto$	0
	$\infty$	$\mapsto$	$b$	$\mapsto$	$b$	$\mapsto$	$\infty$
	1	$\mapsto$	$\infty$	$\mapsto$	$\infty$	$\mapsto$	1

que  $S_2(z) = \mathbb{M}_2 \circ C_p \circ \mathbb{M}_2^{-1}(z)$  viene dada por

$$S_2(z) = \frac{z^3(z+2)}{2z+1}. \quad (3.10)$$

La conjugación con la transformación de Möbius  $\mathbb{M}_2$ , introducida en (3.8), ha enviado la raíz  $a$  al 0 y la raíz  $b$  al infinito, como se muestra en el Cuadro 3.5.

En este caso, (3.10), tiene las siguientes características:

- i. Es una función racional de cuarto grado que no depende de ningún parámetro.
- ii. Tiene cinco puntos fijos, véase el Cuadro 3.6, con las características mostradas en el Cuadro 3.7. Nótese que los tres puntos fijos extraños se han transformado ahora en los puntos  $z = 1$  y  $z = (-3 \pm \sqrt{5})/2$ .
- iii. Notemos que

$$S_2'(z) = \frac{6z^2(z+1)^2}{(2z+1)^2}.$$

Por lo tanto, 0 y  $-1$  son puntos críticos de  $S_2(z)$  con multiplicidad 3. Además,  $\infty$  es un punto crítico de  $S_2(z)$  si y solo si 0 es punto crítico de

$$\hat{S}_2(z) = 1/S_2(1/z) = S_2(z).$$

Por lo tanto,  $\infty$  es un punto crítico de  $S_2(z)$  de multiplicidad 3.

Obsérvese que los puntos críticos 0,  $\infty$  y  $-1$  de  $S_2(z)$  provienen de los puntos críticos  $a$ ,  $b$  y  $(a+b)/2$  de  $C_p(z)$  definido en (3.6) y de los puntos críticos 1,  $-1$  y 0 de  $S_1(z)$ , respectivamente.

El siguiente resultado, que extiende el resultado presentado por Kneisl en [84, Prop. 3.3.3], expresa de forma analítica algunas de las propiedades del conjunto que mostramos en la Galería VII, Figura 3.5 y, por tanto, del método de Chebyshev aplicado a polinomios de segundo grado. Kneisl llama a este conjunto, el conjunto de Julia universal para el método de Chebyshev aplicado a polinomios de segundo grado, véase [84].

Cuadro 3.6: Esquema de la ubicación de los puntos fijos de la función de iteración  $S_2(z)$  definida en (3.10).

$S_2(z)$	Puntos fijos
	$z = 0$
$z^3 \frac{z+2}{2z+1} = z$	$\nearrow$ $\longrightarrow$ $\searrow$
	$z = \infty$
	$z = 1$
	$z = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$

Cuadro 3.7: Caracterización de los puntos fijos de la función de iteración  $S_2(z)$  definida en (3.10).

Puntos fijos	Carácter	Multiplicador asociado
0	Superatractor	0
$\infty$	Superatractor	0
1	Repulsor	8/3
$(-3 - \sqrt{5})/2$	Repulsor	6
$(-3 + \sqrt{5})/2$	Repulsor	6

**Teorema 3.6.** *El conjunto de Fatou asociado a la función de iteración  $S_2(z)$  definida en (3.10) tiene exactamente dos cuencas de atracción invariantes. Ambas cuencas son superatractoras, en una las órbitas convergen a  $\infty$  mientras que en la otra lo hacen al origen. Además, el conjunto de Fatou,  $\mathcal{F}(S_2)$ , tiene infinitas componentes. Por último, la circunferencia unidad es invariante, está contenida en el conjunto de Julia de  $S_2$ ,  $\mathcal{J}(S_2)$ , y  $m(\mathcal{J}(S_2)) = 0$ , donde  $m$  denota la medida de Lebesgue en  $\mathbb{C}$ .*

*Demostración.* Para entender la dinámica de la aplicación  $S_2(z)$ , estudiamos las órbitas de sus puntos críticos 0,  $-1$  y  $\infty$ . El resultado clave que emplearemos (Teorema 3.2) es que hay al menos un punto crítico asociado a cada una de las cuencas invariantes del conjunto de Fatou,  $\mathcal{F}(S_2)$ . 0 e  $\infty$  son puntos fijos superatractores de  $S_2(z)$ , de manera que cada uno de ellos da lugar a una cuenca del conjunto de Fatou. El punto crítico localizado en  $-1$  va a parar al 1, que a su vez es un punto fijo (repulsor) de  $S_2(z)$ . Por lo tanto,  $-1 \in \mathcal{J}(S_2)$ . En consecuencia,  $S_2(z)$  tiene precisamente dos cuencas de atracción invariantes, la del 0 y la del  $\infty$ .

Por otra parte, se tiene que la circunferencia unidad  $S^1$  es invariante por  $S_2$ ,

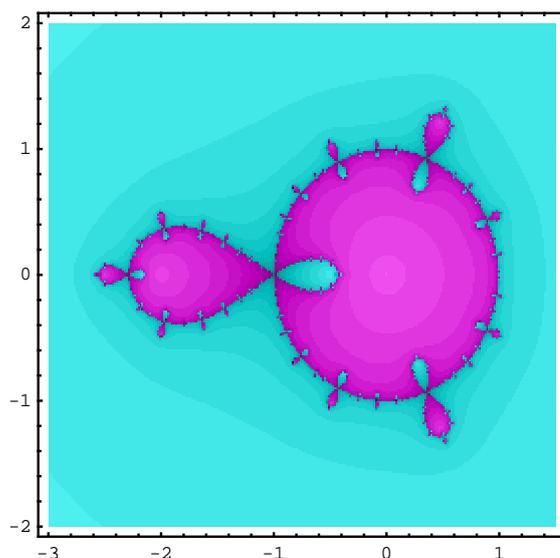


Figura 3.4: Cuencas de atracción para la función de iteración  $S_2(z)$  asociada al método de Chebyshev aplicado al polinomio  $p(z) = (z - a)(z - b)$ . Las áreas en color cian convergen al origen (asociado con la raíz  $a$ ) y las áreas en magenta convergen al punto del infinito (asociado con la raíz  $b$ ). La frontera de ambas zonas muestra la estructura del conjunto de Julia universal de  $S_2(z)$ .

es decir  $S_2$  aplica  $S^1$  en sí misma. En efecto, si  $z = e^{i\theta}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} |S_2(z)|^2 &= \left| \frac{z+2}{2z+1} \right|^2 = \left| \frac{\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta + 2}{2 \cos \theta + 2i \operatorname{sen} \theta + 1} \right|^2 \\ &= \frac{(\cos \theta + 2)^2 + \operatorname{sen}^2 \theta}{(2 \cos \theta + 1)^2 + 4 \operatorname{sen}^2 \theta} = \frac{5 + 4 \cos \theta}{5 + 4 \cos \theta} = 1. \end{aligned}$$

En consecuencia, las órbitas de todo  $z \in S^1$  permanecen en  $S^1$  y no convergen ni a 0 ni a  $\infty$ . Llegamos a la conclusión  $S^1 \subseteq J(S_2)$ .

Denotamos  $F_0$  a la cuenca de atracción inmediata del 0. Se tiene que  $F_0 \subseteq \mathcal{F}(S_2)$ ,  $F_0$  está contenida en el disco unidad  $D^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$  y además  $F_0 \cap S^1 = \emptyset$ .

Como  $S_2(-2) = 0$ , existe otra componente,  $F_1$ , del conjunto de Fatou  $\mathcal{F}(S_2)$  que contiene a  $-2$ . Notemos que  $S_2(F_1) = F_0$  y, por lo tanto, las órbitas de los puntos  $z \in F_1$  convergen al 0. Además  $F_1 \cap S^1 = \emptyset$  y  $F_1 \cap F_0 = \emptyset$ .

Por otra parte, denotamos  $F_\infty$  a la cuenca de atracción inmediata del  $\infty$ . Como  $\infty$  es un punto fijo superatractor, si  $z \in F_\infty$ , entonces  $S_2^n(z) \rightarrow \infty$ .

En definitiva, tenemos que el conjunto de Fatou de  $S_2(z)$ ,  $\mathcal{F}(S_2)$ , tiene al menos

tres componentes disjuntas:  $F_0$ ,  $F_1$  y  $F_\infty$ . Entonces, por el Teorema 3.4,  $\mathcal{F}(S_2)$  tiene infinitas componentes.

Por último, como todos los puntos críticos de  $S_2(z)$  tienen órbitas finitas, el Teorema 3.5 asegura que  $J(S_2)$  tiene medida de Lebesgue cero.  $\square$

### 3.3. El método de Chebyshev para polinomios cúbicos

Como ya le ocurrió a Cayley cuando estudiaba las cuencas de atracción del método de Newton aplicado a polinomios cuadráticos, el paso al caso cúbico le reservaba sorpresas inesperadas. Algo parecido nos va a ocurrir a nosotros al considerar el método de Chebyshev. En esta sección, vamos a estudiar la aplicación del método de Chebyshev (3.2) a polinomios cúbicos de la forma

$$p(z) = z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0, \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C},$$

o, equivalentemente, en términos de sus raíces:

$$p(z) = (z - a)(z - b)(z - c), \quad a, b, c \in \mathbb{C}.$$

En algunos casos (polinomios con raíces múltiples) podremos realizar un desarrollo similar al de la sección anterior. En el resto, deberemos seguir técnicas diferentes, tal y como se hace por ejemplo en [110].

#### 3.3.1. Polinomios cúbicos con una raíz triple

El comportamiento del método de Chebyshev para polinomios cúbicos con una raíz triple es sencillo de caracterizar. De hecho, en el siguiente resultado realizamos un estudio para un caso más general, para polinomios de la forma  $p(z) = (z - a)^n$  con  $a \in \mathbb{C}$ . Es más, se puede hacer un estudio independiente de la raíz  $a$  sin más que conjugar con la aplicación afín  $A(z) = z - a$ .

**Teorema 3.7.** *La función racional resultante de aplicar el método de Chebyshev a polinomios de la forma  $p(z) = (z - a)^n$  con  $a \in \mathbb{C}$  es conjugada topológicamente con*

$$S_0(z) = \frac{2n^2 - 3n + 1}{2n^2}z,$$

*que tiene un único punto fijo atractor en  $z = 0$ . El otro punto fijo,  $z = \infty$ , es repulsor. Por consiguiente, la órbita de todo punto inicial  $z_0 \in \mathbb{C}$  converge por el método de Chebyshev a la raíz múltiple  $z = a$ , es decir, el método de Chebyshev tiene convergencia global en este caso, aunque la convergencia es lineal en todos los casos.*

*Demostración.* Sea  $C_p(z)$  el método de Chebyshev aplicado al polinomio  $p(z) = (z - a)^n$ . Es una comprobación inmediata que  $S_0(z) = A(C_p(A^{-1}))(z)$ , con  $A(z) = z - a$ . Los puntos fijos de  $S_0$  son  $z = 0$  y  $z = \infty$  con multiplicadores asociados

$$\frac{2n^2 - 3n + 1}{2n^2} < 1 \quad y \quad \frac{2n^2}{2n^2 - 3n + 1} > 1,$$

respectivamente. El resto de afirmaciones del teorema se deducen de forma inmediata.  $\square$

Notemos que las constantes de error asintótico asociadas a la función de iteración  $S_0(z)$  tienden a 1 cuando  $n$  tiende a infinito. Por tanto, la convergencia del método de Chebyshev, lineal en todo caso, se hace más lenta según aumenta  $n$ . En los casos particulares de  $n = 2$  o  $n = 3$ , las correspondientes constantes de error asintótico son,  $3/8$  y  $5/9$  respectivamente.

### 3.3.2. Polinomios cúbicos con una raíz doble

Continuando con el estudio del caso cúbico, analizamos ahora los polinomios de la forma

$$p(z) = (z - a)^2(z - b), \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad a \neq b. \quad (3.11)$$

En este caso, la función de iteración asociada al método (3.2) es:

$$C_p(z) = \frac{15z^4 + A_3z^3 + A_2z^2 + A_1z + A_0}{(-a - 2b + 3z)^3}, \quad (3.12)$$

donde hemos definido

$$\begin{aligned} A_0 &= -ab(a^2 + 6ab + 5b^2), \\ A_1 &= 3ab(3a + 5b) - 3b^3, \\ A_2 &= -3b(2a - 5b), \\ A_3 &= -7a - 26b. \end{aligned}$$

La función racional  $C_p(z)$  definida en (3.12), tiene las siguientes características:

- i. Es una función racional de grado 4, dependiente de dos parámetros: las raíces  $a$  y  $b$  del polinomio.
- ii. Tiene cinco puntos fijos, véase el Cuadro 3.8, con las características mostradas en el Cuadro 3.9. Como en el caso cuadrático, aparecen tres puntos fijos extraños (distintos de las raíces de  $p(z)$ ), todos ellos repulsivos.

Cuadro 3.8: Esquema de la ubicación de los puntos fijos de la función de iteración  $C_p(z)$  definida en (3.12). En rojo, los puntos fijos extraños.

Función de iteración	Puntos fijos
$C_p(z) = z$	$z = a, z = b$
	$z = \infty$
	$z = \frac{a+b}{2}, z = \frac{a+5b}{6}$

Cuadro 3.9: Caracterización de los puntos fijos de la función de iteración  $C_p(z)$  definida en (3.12).

Puntos fijos	Carácter	Multiplicador asociado
$a$	Atractor	$3/8$
$b$	Superatractor	$0$
$\infty$	Repulsor	$9/5$
$(a+b)/2$	Repulsor	$9$
$(a+5b)/6$	Repulsor	$49/9$

- iii. Sus puntos críticos son la raíz  $b$  y la preimagen del infinito,  $(a+2b)/3$ , ambos con multiplicidad 3,  $c_1$  y  $c_2$ , donde

$$c_1 = \frac{(10 - \sqrt{5}i)a + (5 + \sqrt{5}i)b}{15}, \quad c_2 = \frac{(10 + \sqrt{5}i)a + (5 - \sqrt{5}i)b}{15}.$$

Nótese en este caso la desaparición de la raíz múltiple,  $z = a$ , como punto crítico y la aparición en su lugar de dos nuevos puntos críticos libres:  $c_1$  y  $c_2$ .

Al igual que en el caso cuadrático, en lugar de estudiar la función de iteración  $C_p(z)$ , resulta más conveniente estudiar las funciones de iteración obtenidas mediante conjugación topológica con la transformación afín  $\mathbb{M}_1$  definida en (3.7) y con la transformación de Möbius  $\mathbb{M}_2$  definida en (3.8). En lo que sigue vamos a analizar el comportamiento dinámico de las funciones racionales

$$S_{j+2}(z) = \mathbb{M}_j \circ C_p \circ \mathbb{M}_j^{-1}(z) \quad j = 1, 2,$$

y  $C_p(z)$  definida en (3.12).

Cuadro 3.10: Esquema de la ubicación de los puntos fijos de la función de iteración  $S_3(z)$  definida en (3.13). En rojo, los puntos fijos extraños.

Función de iteración	Puntos fijos
$S_3(z)$	$z = 1, z = -1$
	$z = \infty$
	$z = 0, z = -\frac{2}{3}$

**Estudio de la función de iteración  $S_3(z)$**

En este caso, la conjugación anterior da lugar a la siguiente función de iteración:

$$S_3(z) = \frac{z(15z^3 + 19z^2 + 21z + 9)}{(3z + 1)^3}. \tag{3.13}$$

La conjugación con la aplicación afín  $M_1$  introducida en (3.7), envía la raíz múltiple  $a$  al punto fijo 1 y la raíz simple  $b$  al punto fijo  $-1$ . Por lo tanto, (3.13), tiene las siguientes características:

- i. Es una función racional de grado 4 que no depende de ningún parámetro.
- ii. Tiene cinco puntos fijos, véase el Cuadro 3.10, con las características mostradas en el Cuadro 3.11. Los tres puntos fijos extraños (distintos de los que provienen de las raíces de  $p(z)$ ) son repulsores.
- iii. Sus puntos críticos son el punto fijo  $-1$ , la preimagen del infinito  $-1/3$ , ambos con multiplicidad 3 y los puntos críticos libres

$$\frac{5 \pm 2\sqrt{5}i}{15}.$$

A continuación vamos a comparar el comportamiento de la función de iteración (3.13) con el correspondiente a las de los métodos de Newton y Halley cuando se aplican a polinomios de la forma  $p(z) = (z - a)^2(z - b)$ . Después de conjugar con la estos dos métodos dan lugar a las funciones de iteración  $N_3$  (Newton) y  $H_3$  (Halley):

$$N_3(z) = \frac{2z^2 + z + 1}{3z + 1},$$

$$H_3(z) = \frac{3z^3 + 3z^2 + 5z + 1}{2(3z^2 + 2z + 1)}.$$

Cuadro 3.11: Caracterización de los puntos fijos de la función de iteración  $S_3(z)$  definida en (3.13).

Puntos fijos	Carácter	Multiplicador asociado
1	Superatractor	3/8
-1	Superatractor	0
$\infty$	Repulsor	9/5
0	Repulsor	9
-2/3	Repulsor	49/9

Cuadro 3.12: Diagrama del comportamiento de la función de iteración  $S_4(z)$  definida en (3.14).

$S_4 :$	$\mathbb{M}_2^{-1}$	$C_p$	$\mathbb{M}_2$
0	$\mapsto a$	$\mapsto a$	$\mapsto 0$
$\infty$	$\mapsto b$	$\mapsto b$	$\mapsto \infty$
1	$\mapsto \infty$	$\mapsto \infty$	$\mapsto 1$

En esta situación, como puede apreciarse en las imágenes de la Galería VII, Figura 3.5, ninguno de los métodos considerados cumple la propiedad de convergencia a la raíz más próxima (*PCRMP*). Hay que diferenciar la velocidad de convergencia relacionada con la intensidad del color, mientras más oscura es la zona, el método se ralentiza. Además, la columna izquierda permite observar como una de las raíces pareciera arropar la región de convergencia de la otra. El compactificado, como se muestra en la columna derecha, hace que el método amplíe la región de convergencia a la raíz, pero por contra, dicho método pierde velocidad, a pesar de que se observan una especie de islas, en las que el método se recupera.

### Estudio de la función de iteración $S_4(z)$

La función racional obtenida mediante conjugación de  $C_p(z)$  definida en (3.12) con la transformada de Möbius  $\mathbb{M}_2$  definida en (3.8) es la siguiente:

$$S_4(z) = \frac{z(z^3 + 5z^2 + 6z + 3)}{7z + 8}. \quad (3.14)$$

La conjugación con la transformada de Möbius  $\mathbb{M}_2$  introducida en (3.8) ha enviado la raíz doble  $a$  al 0 y la raíz simple  $b$  al infinito, como se muestra en el Cuadro 3.12. En este caso, la función de iteración (3.14) tiene las siguientes características:

- i. Es una función racional de grado 4 que no depende de ningún parámetro.

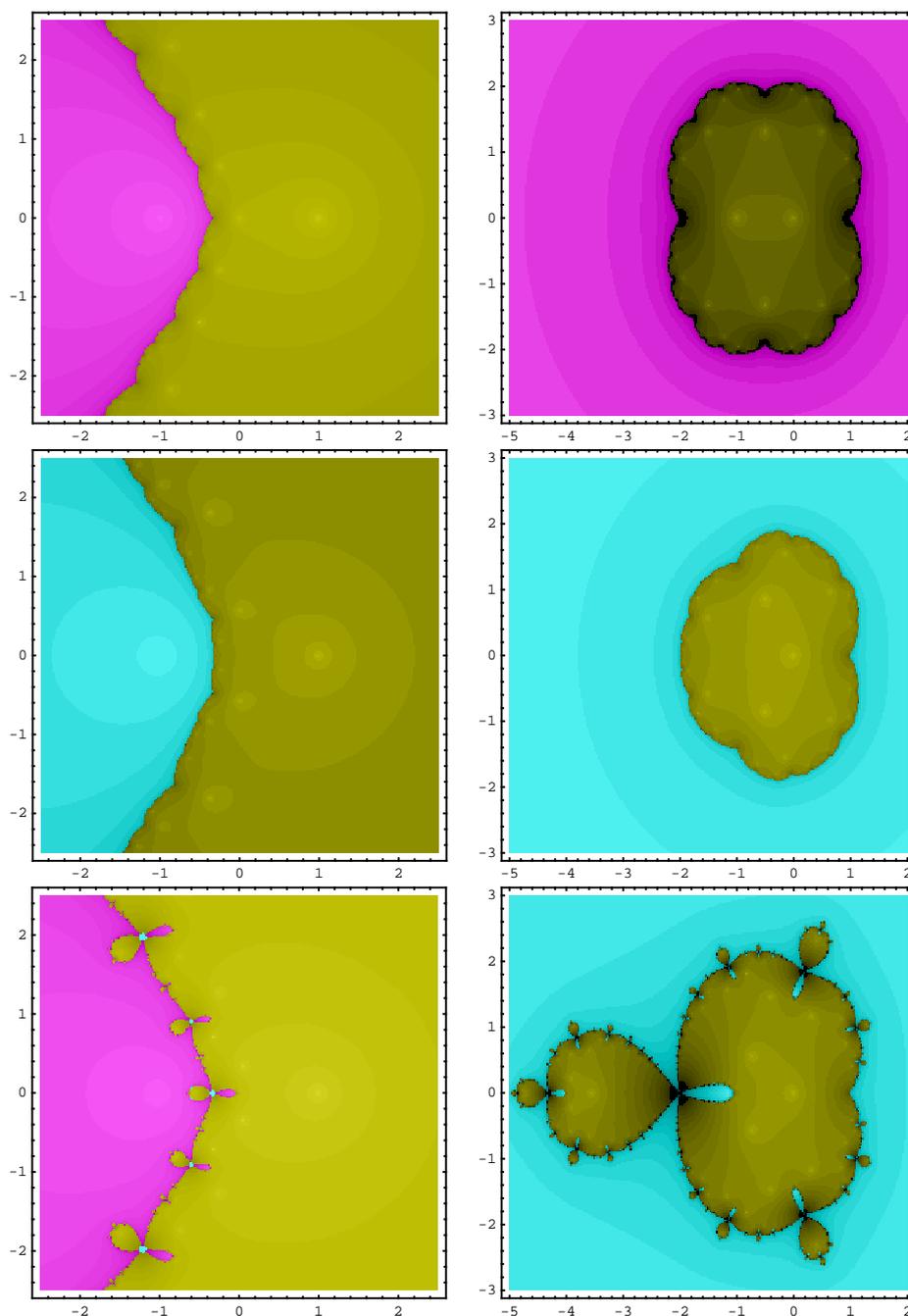


Figura 3.5: Galería VII. Cuencas de atracción para las funciones racionales asociadas a los métodos de Newton, Halley y Chebyshev aplicados al polinomio  $p(z) = (z - a)^2(z - b)$ . En la columna de la izquierda hemos aplicado la técnica de escalado ( $M_1$ ) y en la derecha el compactificado ( $M_2$ ). Las áreas en amarillo se corresponden con la cuenca de atracción de la raíz múltiple. La frontera de ambas zonas muestra la estructura del conjunto de Julia.

Cuadro 3.13: Esquema de la ubicación de los puntos fijos de la función de iteración  $S_4(z)$  definida en (3.14).

Función de iteración	Puntos fijos
$S_4(z)$	$z = 0$
	$\nearrow$
	$\longrightarrow$ $z = \infty$
	$\searrow$
	$z = 1,$ $z = -1$ $z = -5$

Cuadro 3.14: Caracterización de los puntos fijos de la función de iteración  $S_4(z)$  definida en (3.14).

Puntos fijos	Carácter	Multiplicador asociado
0	Atractor	3/8
$\infty$	Superatractor	0
1	Repulsor	9/5
-1	Repulsor	9
-5	Repulsor	49/9

- ii. Tiene 5 puntos fijos, véase el Cuadro 3.13, con las características mostradas en el Cuadro 3.14. Los 3 puntos fijos extraños son  $z = 1$ ,  $z = -1$  y  $z = -5$ , todos ellos repulsores.
- iii. Los críticos son  $-2$ ,  $\infty$  (con multiplicidad 3 cada uno de ellos),  $(-3 - i\sqrt{5})/7$  y  $(-3 + i\sqrt{5})/7$ .

Al igual que en el Teorema 3.6, podemos establecer algunas propiedades de los conjuntos de Fatou y Julia asociados con la función de iteración  $S_4(z)$  definida en (3.14) y que se muestran en la Galería VII, Figura 3.5. En primer lugar, se tiene que  $\infty$  y  $0$  son puntos fijos de  $S_4(z)$ , superatractor y atractor respectivamente. Por lo tanto, cada uno de ellos da lugar a una cuenca de atracción del conjunto de Fatou. Además, las órbitas de los puntos críticos  $(-3 \pm i\sqrt{5})/7$  van a parar al punto fijo  $z = 0$ , la del infinito va al infinito y la de  $-2$  va al  $1$  ( $S_4(-2) = 1$ ) que, como es un punto fijo repulsor, pertenece al conjunto de Julia de  $S_4(z)$ . Como ya tenemos clasificadas las órbitas de los puntos críticos, únicamente hay dos cuencas de atracción para  $S_4$ : la del  $0$  y la del  $\infty$ .

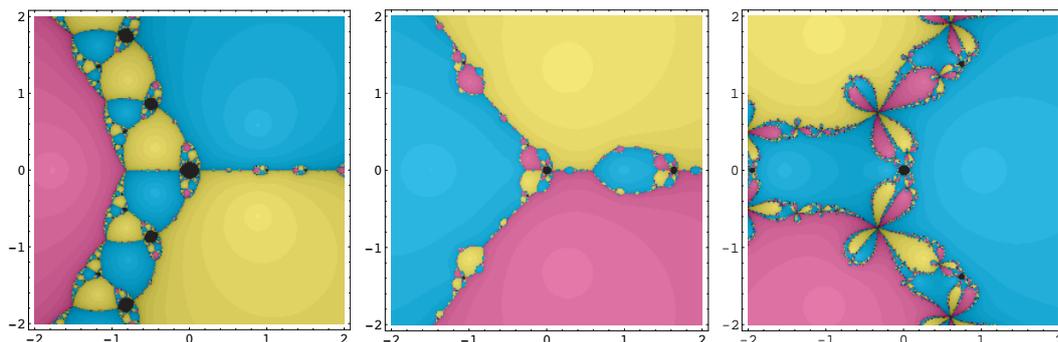


Figura 3.6: Aparición de los «agujeros negros» para los métodos de *Newton*, *Halley* y *Chebyshev* aplicados a polinomios cúbicos.

El análisis gráfico de la Galería VII, Figura 3.5 nos muestra que, el conjunto de Fatou de  $S_4(z)$  tiene infinitas componentes. Sin embargo, en este caso resulta mucho más complicado caracterizar una curva invariante contenida en el conjunto de Julia de  $S_4(z)$ , que juegue el papel de la circunferencia unidad en el caso de la función de iteración  $S_2(z)$  y la Figura 3.4.

### 3.3.3. El método de Chebyshev para polinomios cúbicos (caso general)

Consideramos un polinomio de tercer grado  $p(z) = (z - a)(z - b)(z - c)$  con tres raíces distintas. McMullen [92] ya probó que ninguno de los tres métodos considerados tiene convergencia general para polinomios cúbicos. Esto quiere decir que existe una región  $A$  del plano complejo, con medida positiva, tal que si  $z_0 \in A$ , la secuencia  $\{z_n\}$  no converge a ninguna de las raíces de  $p(z)$ . Nosotros llamaremos a estos conjuntos «agujeros negros». La Figura 3.6 muestra las cuencas de atracción de los métodos de Newton, Halley y Chebyshev aplicados a los polinomios  $p(z) = z^3 - 2z + 2$ ,  $p(z) = z^3 + z^2 + z + 2.57461$  y  $p(z) = z^3 + z^2 + 2z - 4$ , respectivamente.

Los colores cian, magenta y amarillo representan las cuencas de atracción de las raíces de dichos polinomios, y los «agujeros negros» las regiones del plano donde no hay convergencia a las raíces de  $p(z)$ . Sin duda, estamos en presencia de la aparición del comportamiento caótico.

Ahora vamos a buscar «polinomios malos» para estos tres métodos, en el sentido de que sus dinámicas presentan «agujeros negros», y a comprobar que la naturaleza de estos agujeros negros es distinta para el caso de los métodos de Newton y Halley que para el caso del método de Chebyshev, véase [56], [59].

Este escenario es el que hemos elegido para comparar la iteración de los métodos de Newton, Halley y Chebyshev, iniciando la búsqueda con un conjunto de valores del parámetro del polinomio, como los conjuntos Mandelbrot, a los fines de estudiar el comportamiento de cada método desde una perspectiva dinámica. Para caracterizar los polinomios en los cuales aparecen o no los «agujeros negros» para Newton, Halley y Chebyshev, es preciso proporcionar los siguientes argumentos:

- i. Método de Newton.  $\alpha \in \mathbb{C}$  es un punto fijo superatractor de  $N_p(z)$  si y solo si  $\alpha$  es una raíz simple de  $p(z)$ . Además, no hay otros puntos fijos de  $N_p(z)$  en  $\mathbb{C}$ , y el otro único punto fijo en  $\hat{\mathbb{C}}$  sería  $\infty$ .
- ii. Método de Halley, véase [84, Teorema 2.6.3].  $\alpha \in \mathbb{C}$  es un punto fijo superatractor de  $H_p(z)$  si y solo si  $\alpha$  es una raíz simple de  $p(z)$ . El resto de puntos fijos de  $H_p(z)$  son repulsores con multiplicador asociado de la forma  $1 + 2/j$  para algún  $j \in \mathbb{N}$ .
- iii. Método de Chebyshev. A diferencia de lo que ocurre con otros métodos iterativos, como los de Newton o Halley, el método de Chebyshev provoca la aparición de atractores extraños, distintos a las raíces de  $p(z)$ .

**Teorema 3.8.** *Sea  $\alpha \in \mathbb{C}$  un punto fijo de la función de iteración  $C_p(z)$  del método de Chebyshev aplicado a la función  $p(z)$ . Supongamos que*

$$i. L_p(\alpha) = -2$$

$$ii. |3 - L_{p'}(\alpha)| < 1/2, \text{ con } L_{p'}(z) = \frac{p'(z)p'''(z)}{p''(z)^2},$$

*entonces  $\alpha$  es un punto fijo extraño atractor de  $C_p(z)$ . Además, si  $L'_p(\alpha) = 3$  el punto fijo es superatractor.*

*Demostración.* De la propia definición (3.2) se sigue que los puntos fijos de  $C_p(z)$  son las raíces de  $p(z)$  y las soluciones de la ecuación  $L_p(z) = -2$ . Además,

$$C'_p(z) = \frac{L_p(z)^2}{2}(3 - L_{p'}(z)).$$

Por lo tanto, en nuestro caso, como  $L_p(\alpha) = -2$ ,

$$C'_p(\alpha) = 2(3 - L_{p'}(\alpha)).$$

De aquí se sigue la demostración del resultado. □

Como corolario, podemos caracterizar los polinomios de tercer grado que tienen un superatractor extraño en el punto  $z = 0$ .

**Corolario 3.9.** Sea  $p(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ . Supongamos que se cumple:

i.  $b^2 + ac = 0$ ,

ii.  $3|2a^2 - b| < a^2$ .

Entonces el método de Chebyshev (3.2) aplicado al polinomio  $p(z)$  tiene un punto fijo extraño atractor en  $z = 0$ . Si además  $b = 2a^2$ , el punto fijo es superatractor.

*Demostración.* Aplicando el Teorema 3.8 para  $\alpha = 0$  nos queda

i.  $L_p(0) = 2ac/b^2 = -2$ , y

ii.  $|3 - L_{p'}(\alpha)| = |3(1 - b/2a^2)| < 1/2$ .

Por lo que el resultado se sigue directamente. □

**Ejemplo 3.3.** Como primer ejemplo, si  $a = 1$ ,  $b = 2$  y  $c = -4$ , se cumplen las condiciones anteriores y el cero es un punto fijo superatractor de la función de iteración  $C_{p_1}(z)$ , siendo  $p_1(z) = z^3 + z^2 + 2z - 4$  y

$$C_{p_1}(z) = \frac{z^2 (15z^5 + 26z^4 + 27z^3 + 75z^2 + 80z + 120)}{(3z^2 + 2z + 2)^3}.$$

Observando la secuencia de valores para  $C_{p_1}(z)$ , iniciando en  $z_0 = 0.08$

$$\{0.08, 0.0784753, 0.0758219, 0.0712853, 0.0637754, 0.0520671, 0.0357771, \dots\}$$

vemos que converge hacia 0.

**Ejemplo 3.4.** Otro ejemplo numérico, tenemos que  $\alpha = 0$  es un punto fijo superatractor de  $C_{p_2}(z)$ , para  $p_2(z) = 2z^3 + z^2 + z - 1$  aunque no es ninguna raíz de  $p_2(z)$ . Así, la función de iteración correspondiente es

$$C_{p_2}(z) = z^2 \frac{Q(z)}{(6z^2 + 2z + 1)^3},$$

donde hemos denominado

$$Q(z) = 120z^5 + 104z^4 + 54z^3 + 75z^2 + 40z + 30.$$

Observando la secuencia de valores para  $C_{p_2}(z)$ , iniciando en  $z_0 = 0.04$

$$\{0.04, 0.0392377, 0.037911, 0.0356427, 0.0318877, 0.0260336, 0.0178886, \dots\}$$

converge a 0.

El comportamiento dinámico de un método iterativo en el plano complejo, aplicado a un polinomio genérico de tercer grado (dependiente de tres coeficientes) puede reducirse mediante conjugación topológica al estudio de una familia uniparamétrica de polinomios cúbicos. En concreto, hemos encontrado las siguientes familias consideradas por diferentes autores:

- i.  $(z^2 - 1)(z - \lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  (Roberts y Horgan-Kobelski, [110]).
- ii.  $z(z - 1)(z - \lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  (Curry, Garnett y Sullivan, [42]).
- iii.  $z^3 + (\lambda - 1)z - \lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  (Gutiérrez, Plaza y Romero, [69], [103]).

Para proceder con el estudio dinámico del método de Chebyshev aplicado a polinomios cúbicos y teniendo en cuenta que el estudio de cualquiera de estas familias es equivalente desde el punto de vista dinámico, hemos elegido de entre todas las familias uniparamétricas vistas anteriormente quedarnos con

$$p_\lambda(z) = z^3 + (\lambda - 1)z - \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (3.15)$$

que también ha sido considerada por [69].

Notemos que  $p_\lambda(z)$  tiene como raíces a  $z_1 = 1$  y a las raíces del polinomio  $z^2 + z + \lambda$ , esto es

$$z_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4\lambda}}{2}, \quad z_3 = z = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\lambda}}{2}$$

Denotamos  $C_\lambda(z)$  al método de Chebyshev aplicado al polinomio  $p_\lambda(z)$  definido en (3.15). Los puntos fijos extraños de  $C_\lambda(z)$  son las soluciones de

$$12z^4 + 9(\lambda - 1)z^2 - 3\lambda z + (\lambda - 1)^2 = 0.$$

Además,

$$C'_\lambda(z) = \frac{3p_\lambda(z)^2(15z^2 - \lambda + 1)}{(3z^2 + \lambda - 1)^4},$$

por lo que los puntos críticos libres son:

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda - 1}{15}}, \quad c_2 = -\sqrt{\frac{\lambda - 1}{15}}. \quad (3.16)$$

Consideramos aquí la rama principal de la raíz cuadrada compleja (parte real no negativa).

El estudio de las órbitas de los puntos críticos da mucha información sobre el comportamiento dinámico de un método. En concreto, para determinar si existen órbitas periódicas atractoras para  $C_{p_\lambda}(z)$  distintas de las raíces de  $p_\lambda(z)$ , debemos

responder a la pregunta siguiente: ¿Para qué valores del parámetro, las órbitas de los puntos críticos libres convergen aun punto fijo atractor?

Una manera de responder a la pregunta anterior es dibujar el espacio de parámetros en la variable  $\lambda$ . Sin embargo, para encontrar polinomios para los cuales el método de Chebyshev tenga un comportamiento atractor anómalo, desde el punto de vista del buscador de raíces (puntos fijos extraños o ciclos atractores), analizamos las órbitas de los puntos críticos libres. El conocido teorema de Fatou y Julia [20] asegura que cada ciclo atractor debe atraer al menos a un punto crítico. Por ese motivo nos puede ser de gran utilidad la representación de un espacio de parámetros, esto es, un gráfico en el que se muestran los límites de las órbitas de los puntos críticos libres  $c_1$  y  $c_2$  definidos en (3.16) en función de  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Sean  $z_1, z_2$  y  $z_3$  las tres raíces del polinomio  $C_{p_\lambda}(z)$ . En la Galería VIII, Figuras 3.7, la imagen superior izquierda, se muestra en amarillo los valores de  $\lambda$  para los que el punto crítico  $c_1$  converge a  $r_1$ . En cian los valores de  $\lambda$  para los que el punto crítico  $c_1$  converge a  $r_2$  y en magenta los valores de  $\lambda$  para los que el punto crítico  $c_1$  converge a  $r_3$ .

Otros colores como el verde, representan la convergencia a un punto fijo extraño. Finalmente, el color negro indica los valores de  $\lambda$  para los cuales la órbita del punto crítico  $c_1$  no converge a ningún punto fijo.

Un estudio semejante se hace para el punto crítico  $c_2$ , como puede apreciarse en la Galería IX, Figura 3.8.

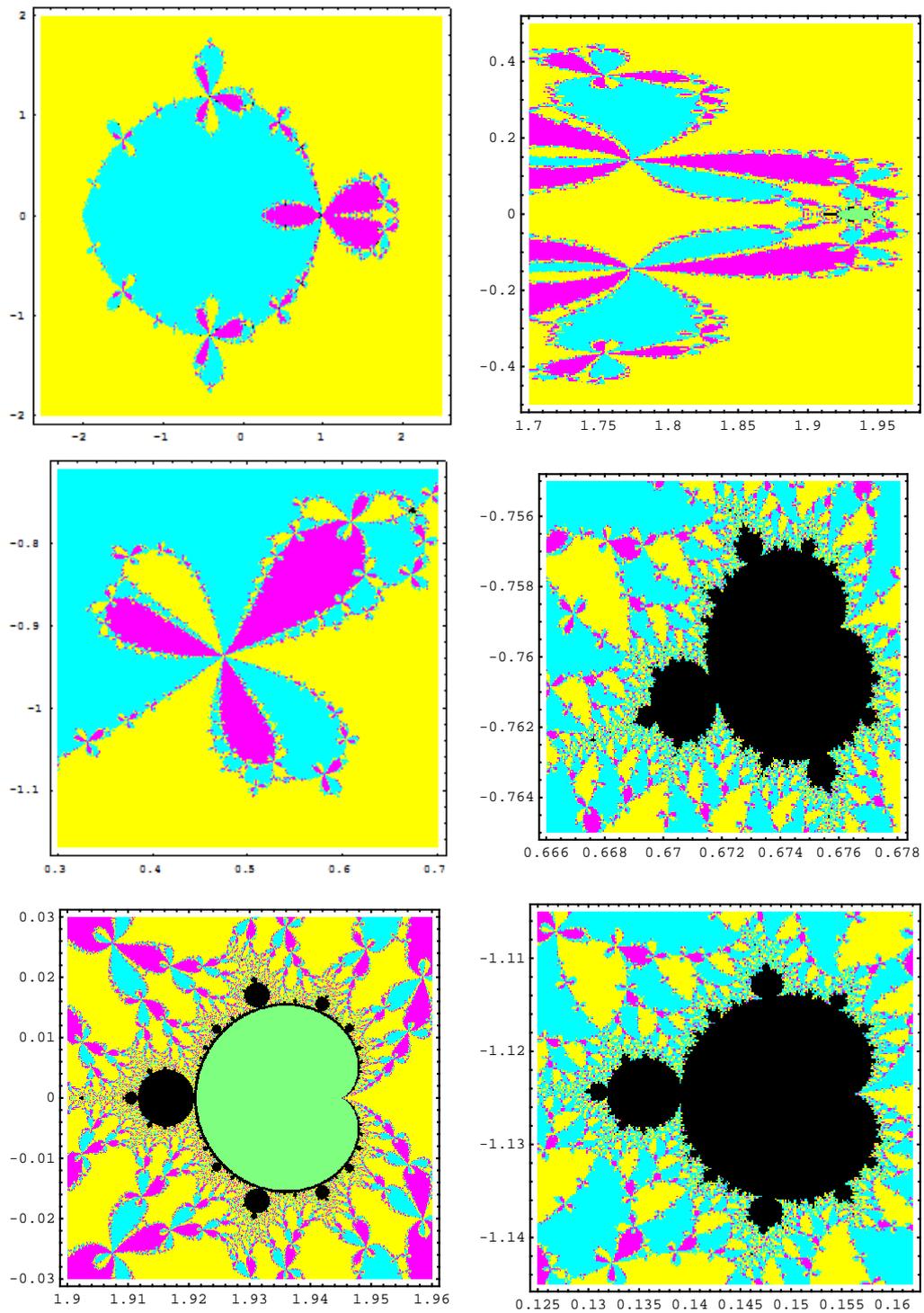


Figura 3.7: Galería VIII. Espacio de parámetros correspondiente al punto crítico libre  $c_1$  de la función de iteración  $C'_\lambda(z)$ , relacionada con la familia  $p_\lambda(z)$ .

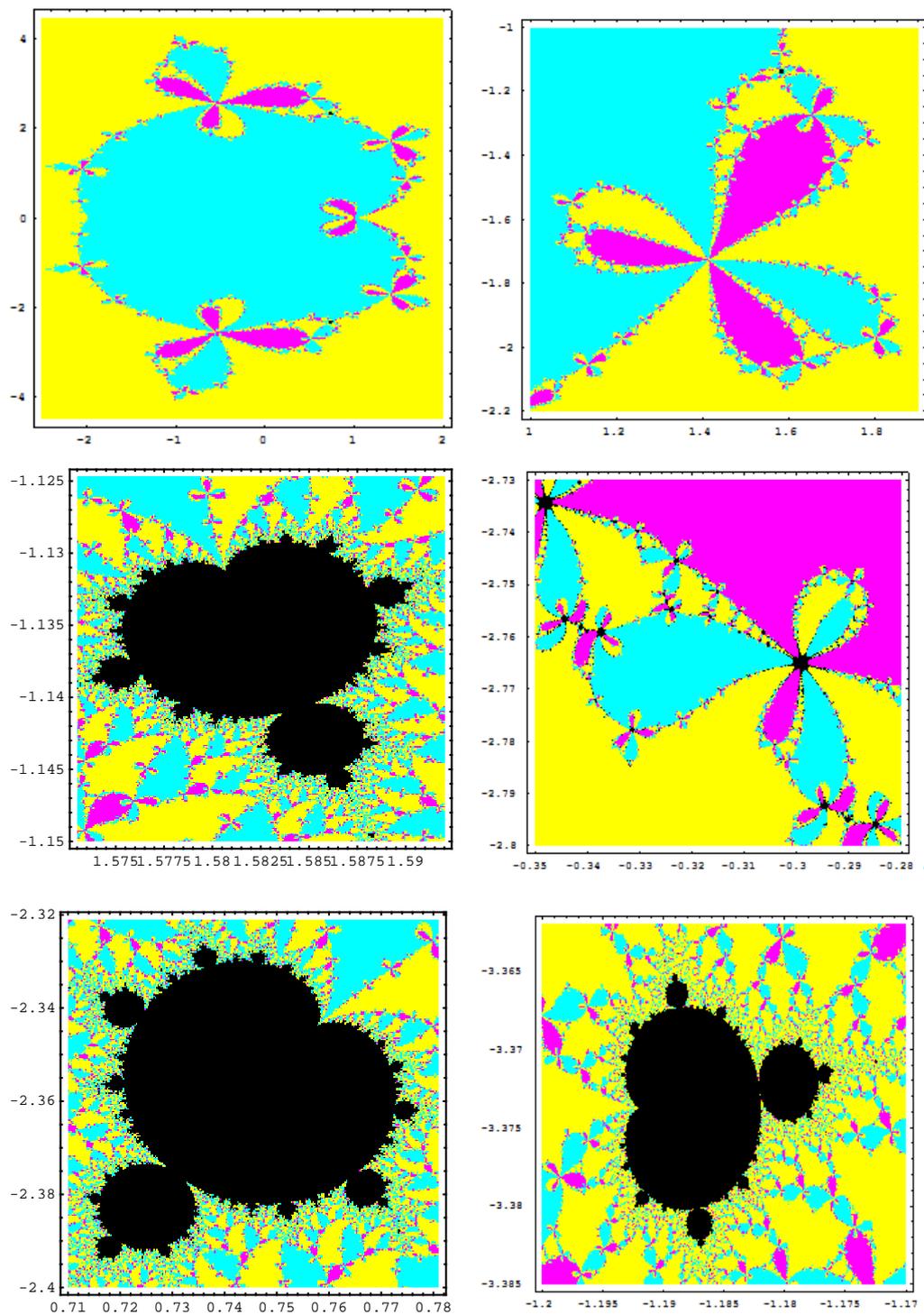


Figura 3.8: Galería IX. Espacio de parámetros correspondiente al punto crítico libre  $c_2$  de la función de iteración  $C'_\lambda(z)$ , relacionada con la familia  $p_\lambda(z)$ .



## Capítulo 4

# Convergencia del método de Chebyshev

El método de Chebyshev puede ser escrito como un proceso iterativo general para resolver sistemas de ecuaciones no lineales o, de una forma más abarcadora, para resolver ecuaciones con operadores definidas en espacios de Banach, véase [4], [13], [15], [40], [66] o [85]. Los primeros en abordar el método de Chebyshev, en este sentido, fueron Candela y Marquina, y Chen en [27] y [36], respectivamente. En este contexto, sean  $X$  e  $Y$  dos espacios de Banach y  $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$  un operador no lineal dos veces diferenciable Fréchet definido en un dominio convexo abierto  $\Omega$ . Entonces, para resolver la ecuación

$$F(x) = 0, \quad (4.1)$$

el método de Chebyshev adquiere la forma

$$C_f(x) = x_{n+1} = x_n - \left( I + \frac{1}{2}L_F(x_n) \right) \Gamma_n F(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.2)$$

donde hemos denotado  $I$  como el operador identidad sobre  $X$ ,  $\Gamma_n = F'(x_n)^{-1}$  y  $L_F(x_n)$  es el operador lineal, definido formalmente como

$$L_F(x_n) = \Gamma_n F''(x_n) \Gamma_n F(x_n). \quad (4.3)$$

Este operador y su relación con el método de Newton fueron estudiados ampliamente en [65] y [76]. Sin embargo, en la referencia [66], el método (4.2) es estudiado como parte de una familia de procesos iterativos, dada por la expresión

$$x_{n+1} = x_n - \left( I + \frac{1}{2}L_F(x_n)(I - \lambda L_F(x_n))^{-1} \right) \Gamma_n F(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

que incluye, junto con el método de Chebyshev ( $\lambda = 0$ ), otros famosos métodos iterativos tales como Halley ( $\lambda = \frac{1}{2}$ ) o super-Halley ( $\lambda = 1$ ). En [66], se unifica la teoría y se desarrolla este tipo de métodos, sin embargo queda mucho por ver. En efecto, solo la convergencia de orden cuadrático está garantizada para los métodos con  $0 \leq \lambda < \frac{1}{2}$ , aunque es bien conocido (véase [124]), que el método de Chebyshev es cúbicamente convergente.

En este capítulo presentamos el estudio en espacios de Banach del método de Chebyshev, definido en (4.2). Además, damos un teorema de convergencia semilocal (véase [66]), que garantiza el orden de convergencia cúbica.

En recientes publicaciones (véase [15], [16] [28], [76], [97]), podemos encontrar diferentes teoremas sobre la convergencia del método de Chebyshev que difieren en las hipótesis y en sus resultados. Nosotros establecemos un teorema tipo Kantorovich para el método de Chebyshev, siguiendo la misma línea encontrada por Zheng y Robbie en [135] para el método de Halley.

## 4.1. Convergencia en la recta real del método de Chebyshev

A pesar de que en la sección anterior nos referimos al método de Chebyshev en espacios de Banach, presentamos algunos resultados de interés para el método de Chebyshev en la recta real. Entendiendo que  $f$  es una función real de variable real, de manera que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . A los fines de cumplir nuestro objetivo, presentamos dos maneras distintas para demostrar la convergencia local del método de Chebyshev, y que ambas conducen al mismo resultado. La primera consiste en la utilización de las derivadas sucesivas que emplea el Teorema de Schröder y la segunda se caracteriza porque usa el desarrollo en serie de Taylor de la función  $f(x)$ .

### 4.1.1. Convergencia local del método de Chebyshev

Los resultados de convergencia que se introducen en esta sección asumen condiciones sobre la raíz de la ecuación  $f(x) = 0$ . Es por ello que se llaman resultados de convergencia local.

**Teorema 4.1.** *Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función con una raíz  $\alpha$ . Supongamos que  $f \in C^{(3)}(I)$ , donde  $I$  es un intervalo que contiene a  $\alpha$ . Entonces, si  $\alpha$  es una raíz simple, es decir  $f'(\alpha) \neq 0$ , el método de Chebyshev definido por*

$$C_f(x) = x - \left(1 + \frac{1}{2}L_f(x)\right) \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad (4.4)$$

tiene orden de convergencia tres. Además si denotamos por  $e_n = x_n - \alpha$ , el error cometido en el paso  $n$ -ésimo, se tiene la siguiente ecuación del error

$$e_{n+1} = (2A_2^2 - A_3)e_n^3 + O(e_n^4),$$

donde hemos denotado

$$A_k = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!f'(\alpha)}, \quad k = 2, 3.$$

*Demostración.* En primer lugar, hemos denotado la función de iteración de Chebyshev como  $C_f(x)$ . Observemos que  $C_f(\alpha) = \alpha$  y además para raíces simples

$$C_f'(\alpha) = C_f''(\alpha) = 0. \quad (4.5)$$

Ahora, necesitamos probar (4.5), como sigue: si derivamos (4.4), se tiene

$$\begin{aligned} C_f'(x) &= L_f(x) - \frac{1}{2}L_f'(x)\frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{1}{2}L_f(x)(1 - L_f(x)) \\ &= \frac{1}{2}L_f(x) + \frac{1}{2}L_f(x)^2 - \frac{1}{2}L_f'(x)\frac{f(x)}{f'(x)}. \end{aligned}$$

Como  $\alpha$  es un cero simple de la función  $f(x)$ ,  $L_f(\alpha) = 0$  y entonces  $C_f'(\alpha) = 0$ . Veamos lo que ocurre con  $C_f''(\alpha)$ ,

$$\begin{aligned} C_f''(x) &= \frac{1}{2}L_f'(x) + L_f(x)L_f'(x) - \frac{1}{2}L_f''(x)\frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{1}{2}L_f'(x)(1 - L_f(x)) \\ &= \frac{3}{2}L_f(x)L_f'(x) - \frac{1}{2}L_f''(x)\frac{f(x)}{f'(x)}. \end{aligned}$$

Como esperábamos,  $C_f''(\alpha) = 0$ . Si observamos, falta saber lo que ocurre con  $C_f'''(x)$

$$C_f'''(x) = \frac{3}{2}L_f'(x)^2 + \frac{3}{2}L_f(x)L_f''(x) - \frac{1}{2}L_f'''(x)\frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{1}{2}L_f''(x)(1 - L_f(x)).$$

Es decir,

$$C_f'''(\alpha) = \frac{3}{2}L_f'(\alpha)^2 - \frac{1}{2}L_f''(\alpha).$$

Calculamos ahora

$$\begin{aligned} L_f'(x) &= \left[ \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \right]' = \frac{[f'(x)f''(x) + f(x)f'''(x)]f'(x)^2 - 2f'(x)f(x)f''(x)^2}{f'(x)^4} \\ &= \frac{f''(x)}{f'(x)} + \frac{f(x)f'''(x)}{f'(x)^2} - \frac{2f(x)f''(x)^2}{f'(x)^3} \\ &= \frac{f''(x)}{f'(x)} + f(x) \left[ \frac{f'''(x)}{f'(x)^2} - \frac{2f''(x)^2}{f'(x)^3} \right]. \end{aligned}$$

Por tanto

$$L'_f(\alpha) = \frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Es evidente que  $L'_f(x)$  no se anula con  $f(\alpha) = 0$ . Además,

$$L''_f(x) = \frac{f'''(x)f'(x) - f''(x)^2}{f'(x)^2} + f'(x) \left[ \frac{f'''(x)}{f'(x)^2} - \frac{2f''(x)^2}{f'(x)^3} \right] \\ + f(x) \left[ \frac{f'''(x)}{f'(x)^2} - \frac{2f''(x)^2}{f'(x)^3} \right]'$$

De manera que

$$L''_f(\alpha) = 2 \frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)} - 3 \frac{f''(\alpha)^2}{f'(\alpha)^2},$$

nos permite calcular

$$C'''_f(\alpha) = \frac{3}{2} L'_f(\alpha)^2 - \frac{1}{2} L''_f(\alpha) = 3 \frac{f''(\alpha)^2}{f'(\alpha)^2} - \frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Luego, por el desarrollo de Taylor

$$e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha = C_f(x_n) - C_f(\alpha) \\ = C_f(\alpha) + C'_f(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{C''_f(\alpha)}{2!}(x_n - \alpha)^2 \\ + \frac{C'''_f(\alpha)}{3!}(x_n - \alpha)^3 + O(x_n - \alpha)^4 - C_f(\alpha) \\ = \left[ \frac{1}{2!} \frac{f''(\alpha)^2}{f'(\alpha)^2} - \frac{1}{3!} \frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)} \right] (x_n - \alpha)^3 + O(x_n - \alpha)^4 \\ = (2A_2^2 - A_3)e_n^3 + O(e_n^4).$$

Alternativamente, también podemos demostrar este teorema usando desarrollos de Taylor. En efecto, a partir de los siguientes desarrollos, tenemos que

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - A_2 e_n^2 + 2(A_2^2 - A_3)e_n^3 + O(e_n^4).$$

$$\frac{L_f(x_n)}{2} = A_2 e_n + 3(A_3 - A_2^2)e_n^2 + (14A_2A_3 - 8A_2^2)e_n^3 + O(e_n^4).$$

En consecuencia,

$$\frac{1}{2} L_f(x_n) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = A_2 e_n^2 + (3A_3 - 4A_2^2)e_n^3 + O(e_n^4).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 e_{n+1} &= x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2}L_f(x_n)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
 &= e_n - (e_n - A_2e_n^2 + 2(A_2^2 - A_3)e_n^3 + O(e_n^4)) \\
 &\quad - (A_2e_n^2 + (3A_3 - 4A_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)) \\
 &= (2A_2^2 - A_3)e_n^3 + O(e_n^4),
 \end{aligned}$$

con lo que, de nuevo, hemos demostrado el resultado.  $\square$

Como hemos demostrado en el Teorema 4.1, la función de iteración de Chebyshev, conserva la convergencia de orden tres, para ceros simples de  $f(x)$ . Sin embargo, la situación cambia cuando se tiene una raíz múltiple, como veremos en el siguiente resultado.

**Teorema 4.2.** *Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función con una raíz  $\alpha$ . Supongamos que  $f \in C^{(3)}(I)$ , donde  $I$  es un intervalo que contiene a  $\alpha$ . Entonces, si  $\alpha$  es una raíz de multiplicidad  $m$ , es decir*

$$f(x) = (x - \alpha)^m g(x) \quad \text{con} \quad g(\alpha) \neq 0 \quad \text{y} \quad m \geq 2,$$

entonces el método de Chebyshev definido por (4.4) tiene convergencia lineal. Si además denotamos por  $e_n = x_n - \alpha$ , al error cometido en el paso  $n$ -ésimo, se tiene la siguiente ecuación del error asintótico

$$e_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{(m-1)(2m-1)}{m^2} e_n + O(e_n^2).$$

*Demostración.* Tenemos que  $f(x) = (x - \alpha)^m g(x)$ , entonces

$$f'(x) = m(x - \alpha)^{m-1}g(x) + (x - \alpha)^m g'(x) = (x - \alpha)^{m-1}[mg(x) + (x - \alpha)g'(x)],$$

y además,

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= (m-1)(x - \alpha)^{m-2}[mg(x) + (x - \alpha)g'(x)] \\
 &\quad + (x - \alpha)^{m-1}[mg'(x) + g'(x) + (x - \alpha)g''(x)] \\
 &= (x - \alpha)^{m-2}[m(m-1)g(x) + [(m-1)(x - \alpha) \\
 &\quad + (m+1)(x - \alpha)]g'(x) + (x - \alpha)^2g''(x)] \\
 &= (x - \alpha)^{m-2}[m(m-1)g(x) + 2m(x - \alpha)g'(x) + (x - \alpha)^2g''(x)].
 \end{aligned}$$

Con este resultado, ya podemos sustituir en la expresión

$$L_f(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

$$= \frac{(x - \alpha)^m g(x)(x - \alpha)^{m-2}[m(m-1)g(x) + 2m(x - \alpha)g'(x) + (x - \alpha)^2 g''(x)]}{(x - \alpha)^{2m-2}[mg(x) + (x - \alpha)g'(x)]^2},$$

entonces

$$L_f(\alpha) = \frac{m(m-1)g(\alpha)^2}{m^2 g(\alpha)^2} = \frac{m-1}{m} \neq 0.$$

En este caso, como

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{(x - \alpha)^m g(x)}{(x - \alpha)^{m-1}[mg(x) + (x - \alpha)g'(x)]},$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{f'(x)} = 0.$$

Tenemos que

$$C'_f(x) = \frac{1}{2}L_f(x) + \frac{1}{2}L_f(x)^2 - \frac{1}{2}L'_f(x)\frac{f(x)}{f'(x)},$$

entonces

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \alpha} C'_f(x) &= \frac{1}{2}L_f(\alpha) + \frac{1}{2}L_f(\alpha)^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{m-1}{m} \left(1 + \frac{m-1}{m}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{(m-1)(2m-1)}{m^2}. \end{aligned}$$

En este caso

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= x_{n+1} - \alpha \\ &= C_f(x_n) - C_f(\alpha) \\ &= C_f(\alpha) + C'_f(\alpha)(x_n - \alpha) + O(e_n^2) - C_f(\alpha) \\ &= \frac{1}{2} \frac{(m-1)(2m-1)}{m^2} e_n + O(e_n^2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el método de Chebyshev tiene convergencia lineal cuando  $\alpha$  es de multiplicidad  $m \geq 2$ . Además, la constante del error asintótico es

$$\frac{1}{2} \frac{(m-1)(2m-1)}{m^2}.$$

Como queríamos demostrar. □

**Observación:** Cuando comparamos el método de Chebyshev con el método de Newton, al aproximar raíces simples, la ventaja en cuanto a velocidad de convergencia del método de Chebyshev es obvia. En el caso de raíces múltiples, no resalta la obviedad, ya que ambos métodos tienen convergencia lineal. Sin embargo, en este caso la constante del error asintótico del método de Chebyshev es más pequeña que la del método de Newton  $((m-1)/m)$ . En efecto, es una comprobación inmediata que

$$\frac{m-1}{m} > \frac{1}{2} \frac{(m-1)(2m-1)}{m^2},$$

ya que siempre se obtiene

$$2m > 2m - 1.$$

Por tanto, en el caso de raíces múltiples, el método de Chebyshev converge más rápidamente que el método de Newton. Ilustramos los resultados anteriores por medio de los ejemplos que siguen.

**Ejemplo 4.1.** *Dada la función  $f(x) = e^x - x - 1$ , que sabemos tiene una raíz múltiple en  $\alpha = 0$ . Comparamos ahora el método de Chebyshev ( $C_f(x)$ ) con el método de Newton ( $N_f(x)$ ) en el Cuadro 4.1, donde hemos iniciado con  $x_0 = 1$  como punto de partida, en ambos casos. Como puede observarse en el Cuadro 4.1, se cumple que el método de Chebyshev aproxima mejor la solución en cada paso que el método de Newton. Como contrapartida, debemos mencionar que el método de Chebyshev necesita de un mayor número de evaluaciones funcionales por paso.*

Para el caso de raíces simples, presentamos el ejemplo siguiente.

**Ejemplo 4.2.** *Dada la función  $f(x) = e^x - x - 2$ , que sabemos tiene raíces simples en  $\alpha_1 = -1.8414056604369606$  y en  $\alpha_2 = 1.1461932206205825$ . Comparamos ahora el método de Chebyshev ( $C_f(x)$ ) con el método de Newton ( $N_f(x)$ ) en el Cuadro 4.2, donde hemos iniciado con  $x_0 = 1.5$  como punto de partida, en ambos casos. Podemos ver los errores obtenidos para ambos métodos en el Cuadro 4.2. Notemos que como estamos comparando un método con convergencia cuadrática y otro con convergencia cúbica, se compara cada dos pasos del método de Chebyshev con tres pasos del de Newton.*

### 4.1.2. Convergencia global del método de Chebyshev

En la referencia [4] encontramos un novedoso teorema de convergencia global, parte del mismo se presenta a continuación.

Cuadro 4.1: Comparación de la velocidad de convergencia entre el método de Chebyshev y el método de Newton aplicados a una función con raíz múltiple,  $f(x) = e^x - x - 1$ .

Iteraciones	$C_f(x)$	$N_f(x)$
0	1.000000	1.000000
1	0.443757	0.581977
2	0.179304	0.319055
3	0.069287	0.167996
4	0.026285	0.086348
5	0.009900	0.043795
6	0.003718	0.022057
7	0.001395	0.011069
8	0.000523	0.005544
9	0.000196	0.002775
10	0.000073	0.001381

Cuadro 4.2: Comparación de la velocidad de convergencia entre el método de Chebyshev y el método de Newton aplicados a una función con raíces simples,  $f(x) = e^x - x - 2$ .

Iteraciones	$C_f(x)$	Iteraciones	$N_f(x)$
0	1.5000000000000000	0	1.5000000000000000
2	1.166875323557297	3	1.2180422919721707
4	1.1462002845589907	6	1.1497723923018075
6	1.1461932206205827	9	1.1462025835399627

**Teorema 4.3.** Sea  $f(x)$  una función de clase  $C^{(3)}(I)$  en un intervalo  $I$  que contiene la raíz  $x^*$  de  $f(x)$ . Sea

$$f'(x) \neq 0, L_f(x) > -2 \quad y \quad \left[ \left( \frac{\eta}{f'(x)^2} \right) \right]'' \geq 0$$

en  $I$ , con  $\eta = \text{sgn}(f'(x))$ . Entonces (4.2), desde cualquier punto de  $I$ , converge monótonamente a la solución  $x^*$

*Demostración.* La demostración estará limitada al caso en que  $f'(x) > 0$  en  $I$ , pues para  $f'(x) < 0$  la demostración es similar.

En primer lugar, partimos de un punto que está a la izquierda de  $x^*$ , es decir, asumiremos que  $x_0 \leq x^*$ , para demostrar que la intersección  $\hat{x}$  de la parábola  $y(x)$  con  $OX$  estará en  $[x_0, x^*]$ .

Por hipótesis sabemos que  $L_f(x_0) > -2$ , luego

$$x_0 - \hat{x} = x_0 - \left(1 + \frac{1}{2}L_f(x_0)\right) \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \leq 0 \Leftrightarrow x_0 \leq \hat{x}.$$

Por tanto, será suficiente que  $x \geq x_0$  para que se cumpla

$$y(x) = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4a(bx + c)}}{2a} \geq f(x). \quad (4.6)$$

En ese caso, obtendremos una secuencia monótona creciente, acotada superiormente por  $x^*$ , luego converge al límite  $\gamma \leq x^*$ . Por lo tanto, debido a la construcción del método y la continuidad de  $f(x)$  se obtiene la convergencia  $\gamma = x^*$ .

Por otro lado, notemos que (4.6) es equivalente a

$$\frac{-1 + \sqrt{1 - 4a(bx + c)}}{2a} - \frac{-1 + \sqrt{1 - 4a(bx_0 + c)}}{2a} \geq f(x) - f(x_0),$$

es decir

$$\int_{x_0}^x \frac{-b}{\sqrt{1 - 4a(bt + c)}} dt \geq \int_{x_0}^x f'(t) dt. \quad (4.7)$$

Como  $f'(x) > 0$ , entonces, por hipótesis se cumple que

$$\left[ \left( \frac{1}{f'(x)} \right)^2 \right]'' \geq 0$$

en  $I$ , luego

$$\left( \frac{1}{f'(x)} \right)^2$$

es convexa. Por lo tanto

$$\left( \frac{1}{f'(x)} \right)^2 \geq \frac{1 - 4a(bx + c)}{(-b)^2},$$

porque

$$\frac{1 - 4a(bx + c)}{(-b)^2}$$

aproxima a

$$\left( \frac{1}{f'(x)} \right)^2$$

hasta el segundo orden. Así,

$$\frac{-b}{\sqrt{1 - 4a(bx + c)}} \geq f'(x) > 0,$$

y en consecuencia la expresión (4.7) se cumple.

Por último, si comenzamos desde cualquier punto ubicado a la derecha de la raíz, se obtendrá que

$$\frac{-1 + \sqrt{1 - 4a(bx + c)}}{2a} \leq f(x),$$

luego la convergencia será monótona por la derecha.  $\square$

Otro teorema de convergencia global de la autoría de M. Hernández y A. Salanova aparece en [76]. Parte del mismo ha sido tomado para demostrar el siguiente resultado.

**Teorema 4.4.** *Sea  $f(x)$  una función y existe  $x^*$  en  $[a, b]$  tal que  $f(x^*) = 0$  y además se cumple que  $L_{f'}(x) \leq 3$ . Si  $f(x_0) > 0$ , entonces la sucesión  $\{x_n\}$  definida por (4.4) es decreciente y converge a  $x^*$ . Además, si  $f(x_0) < 0$  y  $L_f(x_0) \geq -2$  en  $[a, b]$ , entonces la sucesión  $\{x_n\}$  es creciente y converge a  $x^*$ .*

*Demostración.* La demostración estará limitada al caso en que  $f(x_0) > 0$ , pues para  $f(x_0) < 0$  la demostración es análoga.

Asumamos que  $x_0 \in [a, b]$  tal que  $f(x_0) > 0$ , probaremos que  $x_n \geq x^*$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Notemos que  $x_0 - x^* \geq 0$ , por hipótesis  $f(x_0) > 0$ . Además,

$$x_1 - x^* = C_f(x_0) - C_f(x^*) = C'_f(\delta_0)(x_0 - x^*), \quad \text{con } \delta_0 \in (x^*, x_0),$$

y  $C_f(x)$  definida por (4.4).

Por otro lado, como  $L_{f'}(x) \leq 3$  y

$$C'_f(x) = L_f(x)^2 \frac{3 - L_{f'}(x)}{2}, \tag{4.8}$$

luego  $C'_f(x) \geq 0$  en  $[a, b]$ . Entonces  $x_1 \geq x^*$ , y por inducción se sigue que  $x_n \geq x^*$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Por otra parte, como  $f(x_n) > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , luego

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \left[ 1 + \frac{L_f(x_{n-1})}{2} \right] \leq 0 \Leftrightarrow x_{n-1} \geq x_n,$$

luego la secuencia  $\{x_n\}$  es decreciente y pasando al límite de (4.2), se demuestra que converge a la única raíz  $x^*$  de  $f(x) = 0$  en  $[a, b]$ .  $\square$

Para demostrar la convergencia global del método de Chebyshev, también aplicaremos las condiciones del teorema que aparece en la referencia [66]. Notemos que al sustituir el parámetro  $\alpha$  por la constante cero,  $\alpha = 0$ , obtenemos la función de iteración del método de Chebyshev. El teorema que sigue, es una adaptación del teorema anteriormente mencionado.

**Teorema 4.5.** *Supongamos que  $f(x)$  es una función decreciente y convexa en un intervalo  $[0, x^*]$ , con  $f'''(x) > 0$  en  $[0, x^*]$ . En estas condiciones, la sucesión dada por (4.4), empezando en  $x_0 = 0$  es creciente y converge a  $x^*$ , solución de  $f(x) = 0$ .*

*Demostración.* Primero comprobaremos que

$$C_f(x_n) = x_{n+1} = x_n - \left[ 1 + \frac{1}{2}L_f(x_n) \right] \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (4.9)$$

es creciente en  $[0, x^*]$ . En efecto,

$$\begin{aligned} C'_f(x_n) &= -\frac{1}{2} \frac{f(x_n)^2 f'''(x_n)}{f'(x_n)^3} + \frac{3}{2} \frac{f(x_n)^2 f''(x_n)^2}{f'(x_n)^4} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{f(x_n)^2 f'''(x_n)}{f'(x_n)^3} + \frac{3}{2} L_f^2(x_n). \end{aligned}$$

El primer sumando es positivo ya que  $f'''(x_n) \geq 0$  y  $f'(x_n) < 0$  para  $x \in [0, x^*]$ . El segundo sumando también es positivo por tener un exponente par. En consecuencia tenemos que  $C'_f(x_n) > 0$ . Luego  $C_f(x)$  es una función creciente en el intervalo  $[0, x^*]$ . De aquí se sigue que la sucesión  $\{x_n\}$ , generada por (4.9), está acotada superiormente por  $x^*$ . En efecto,  $x_1 = C(x_0) = C(0) < C(x^*) = x^*$ , y por inducción, se sigue que  $x_n < x^*, \forall n \in \mathbb{N}$ . Como además

$$x_{n+1} - x_n = - \left[ 1 + \frac{1}{2}L_f(x_n) \right] \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \geq 0.$$

se tiene que la sucesión  $\{x_n\}$  también es creciente, y por tanto convergente.  $\square$

## 4.2. Convergencia local del método de Chebyshev en espacios de Banach

En primer lugar, presentamos algunos resultados de interés de la teoría de Kantorovich, que han sido obtenidos para el método de Newton, seguidos de los resultados relevantes que hemos obtenido para el método de Chebyshev. La generalización del método de Newton para resolver ecuaciones

$$F(x) = 0,$$

donde  $F$  es un operador no lineal diferenciable, definido entre dos espacios de Banach  $X$  e  $Y$ , se escribe de la forma

$$x_{n+1} = x_n - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n), n \geq 0,$$

siendo  $F'(x_n)$  la derivada de Fréchet del operador  $F(x)$  en el punto  $x_n$  y  $[F'(x_n)]^{-1}$  su operador inverso.

Sobre el método de Newton se conocen varios resultados basados en la teoría de Kantorovich, a los cuales incluso se les ha hecho cierta mejoría en las últimas publicaciones, véase [17], [44], [48] y [61]. El más clásico de los resultados de convergencia local se debe a Rheinboldt (véase [108]), y asegura que si  $x^*$  es un cero simple de  $F$  y se cumple la condición

$$\|F'(x^*)^{-1}[F'(x) - F'(y)]\| \leq l\|x - y\|,$$

para alguna constante  $l > 0$ , entonces el método de Newton  $\{x_n\}$  empezando en cualquier  $x_0$  de la bola

$$B\left(x^*, \frac{2}{3l}\right),$$

está bien definido y converge a  $x^*$ .

Kantorovich introduce en [79] el conocido «principio de la mayorante» para demostrar nuevamente su teorema clásico, que se basa en el concepto de «sucesión mayorizante». Se dice que una sucesión de números reales  $\{t_n\}$  mayoriza a una sucesión  $\{x_n\}$ , definida en un espacio de Banach  $X$ , si y sólo si

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq t_{n+1} - t_n, \quad n \geq 0.$$

El interés de las sucesiones mayorizantes reside en el hecho de que su convergencia asegura la convergencia de la sucesión en el espacio de Banach. En efecto, si  $\{t_n\}$  converge a  $t^*$ , entonces existe  $x^* \in X$  de manera que la sucesión  $\{x_n\}$  converge a  $x^*$  y se cumple

$$\|x^* - x_n\| \leq t^* - t_n, \quad n \geq 0.$$

### 4.2.1. Teoría de Kantorovich local para el método de Chebyshev

Los resultados de teoremas de convergencia local son de considerable importancia no solo porque proporcionen la convergencia, sino, y más importante, porque caracterizan el comportamiento asintótico de ciertos procesos iterativos en la proximidad de la solución.

Dedicamos este apartado a la teoría local de Kantorovich aplicada al método de Chebyshev para resolver la ecuación  $F(x) = 0$ , con  $F : X \rightarrow Y$ , donde tanto  $X$  como  $Y$  son espacios de Banach.

**Teorema 4.6.** *Suponemos que  $x^*$  es una solución de  $F(x) = 0$ , que existe  $\Gamma = F'(x^*)^{-1}$  y que además*

$$\|\Gamma F''(x)\| \leq b, \quad \forall x \in B(x^*, R).$$

Sea  $x_0$  es un punto que cumple

$$x_0 \in B\left(x^*, \frac{u^*}{b}\right), \quad \frac{u^*}{b} < R,$$

donde  $u^* \approx 0.331241$  es la única raíz real de la ecuación

$$13u^3 - 28u^2 + 32u - 8 = 0.$$

Entonces la sucesión de Chebyshev  $\{x_n\}$  definida en (4.2) y empezando en  $x_0$  converge a  $x^*$ .

*Demostración.* En primer lugar, hacemos el desarrollo en serie de Taylor de  $F(x)$ , en torno a  $x^*$ , con lo cual obtenemos:

$$\begin{aligned} F(x) &= F(x^*) + F'(x^*)(x - x^*) + \int_{x^*}^x F''(y)(x - y)dy \\ &= F'(x^*)(x - x^*) + \int_0^1 F''(x^* + t(x - x^*))(x - x^*)^2(1 - t)dt. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Además

$$\begin{aligned} F'(x) &= F'(x^*) + \int_{x^*}^x F''(y)dy \\ &= F'(x^*) + \int_0^1 F''(x^* + t(x - x^*))(x - x^*)(x - x^*)dt. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Entonces, para  $\{x_n\}$ , la secuencia de Chebyshev dada por la expresión (4.2) definimos  $\Gamma_n = F'(x_n)^{-1}$ .

Supongamos que  $\|x_k - x^*\| \leq \|x_{k-1} - x^*\|$  para  $k = 1, \dots, n$ . Veamos que la desigualdad se mantiene para  $k = n + 1$ . En efecto, tenemos la siguiente expresión del error:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x^* &= x_n - x^* - \left(I + \frac{1}{2}L_F(x_n)\right) \Gamma_n F(x_n) \\ &= \Gamma_n \left[-F(x_n) + F'(x_n)(x_n - x^*) - \frac{1}{2}F''(x_n)(\Gamma_n F(x_n))^2\right] \\ &= \Gamma_n \left[-F'(x^*)(x_n - x^*) - \int_{x^*}^{x_n} F''(y)(x_n - y)dy + F'(x^*)(x_n - x^*)\right. \\ &\quad \left.+ \int_{x^*}^{x_n} F''(y)(x_n - x^*)dy - \frac{1}{2}F''(x_n)[\Gamma_n F(x_n)]^2\right] \\ &= \left[\int_{x^*}^{x_n} \Gamma_n F''(y)(y - x^*)dy\right. \\ &\quad \left.- \frac{1}{2}\Gamma_n F''(x_n)[\Gamma_n F'(x_n)\Gamma_n F(x_n)]^2\right] \\ &= \left[\int_0^1 \Gamma_n F''(x^* + t(x_n - x^*))(x_n - x^*)^2 t dt\right. \\ &\quad \left.- \frac{1}{2}\Gamma_n F''(x_n)[\Gamma_n F'(x^*)\Gamma_n F(x_n)]^2\right]. \end{aligned}$$

Es decir que

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \frac{b}{2} \|\Gamma_n F'(x^*)\| [\|x_n - x^*\|^2 + \|\Gamma_n F'(x^*)\|^2 \|\Gamma_n F(x_n)\|^2]. \quad (4.12)$$

Y por la ecuación (4.10), obtenemos

$$\begin{aligned} \|\Gamma F(x_n)\| &\leq \|x_n - x^*\| + b\|x_n - x^*\|^2 \int_0^1 (1-t) dt \\ &= \|x_n - x^*\| + \frac{b}{2} \|x_n - x^*\|^2 \\ &= \|x_n - x^*\| \left(1 + \frac{b}{2} \|x_n - x^*\|\right). \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} I - \Gamma F'(x_n) &= \Gamma[F'(x^*) - F'(x_n)] = \int_{x_n}^{x^*} \Gamma F''(x) dx \\ &= \int_0^1 \Gamma F''(x_n + t(x_n - x^*)) (x^* - x_n) dt. \end{aligned}$$

De manera que

$$\|I - \Gamma F'(x_n)\| \leq b\|x_n - x^*\| < 1.$$

Esto es cierto, ya que  $b\|x_n - x^*\| < b\|x_0 - x^*\| < u^* < 1$ .

Por el Lema de Banach sobre operadores invertibles (véase [106]), sabemos que existe  $[\Gamma F'(x_n)]^{-1} = \Gamma_n F'(x^*)$  y además

$$\|\Gamma_n F'(x^*)\| \leq \frac{1}{1 - b\|x_n - x^*\|}.$$

Entonces, denotando

$$u_n = b\|x_n - x^*\|,$$

llegamos a ver que

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\| &\leq \frac{1}{1-u_n} \left[ \frac{u_n}{2} + \frac{1}{2} b \frac{1}{(1-u_n)^2} \|x_n - x^*\| (1 + \frac{b}{2} \|x_n - x^*\|)^2 \right] \|x_n - x^*\| \\ &= \frac{1}{1-u_n} \left[ \frac{u_n}{2} + \frac{u_n}{2(1-u_n)^2} (1 + \frac{1}{2} u_n)^2 \right] \|x_n - x^*\|. \end{aligned}$$

Ahora falta saber cuándo

$$\frac{u_n}{2(1-u_n)} \left[ 1 + \frac{(1 + \frac{1}{2} u_n)^2}{(1-u_n)^2} \right] < 1.$$

Es decir,

$$\frac{u_n [(1-u_n)^2 + \frac{1+\frac{u_n}{2}}{2}]^2}{2(1-u_n)^3} = \frac{u_n (5u_n^2 - 4u_n + 8)}{8(1-u_n)^3} < 1.$$

Esto es cierto cuando  $u_n \leq u^* \approx 0.331241$ , siendo  $u^*$  la única raíz real del polinomio

$$13u^3 - 28u^2 + 32u - 8 < 0.$$

Como  $u_0 = b\|x_0 - x^*\| < u^*$ , por la hipótesis del teorema, hemos completado el proceso inductivo y tenemos que

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \|x_n - x^*\|, \forall n \geq 0.$$

Además, como la sucesión recurrente

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2(5u_n^2 - 4u_n + 8)}{8(1 - u_n)^3}$$

tiende a 0 siempre que  $u_0 < u^*$ , tenemos que  $\|x_n - x^*\| \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , como queríamos demostrar. □

### 4.2.2. $\gamma$ -teoría de Smale para el método de Chebyshev

Dedicamos esta sección a estudiar la  $\gamma$ -teoría de Smale para el método de Chebyshev (4.2), entendiendo dicha teoría como el estudio de la convergencia local de un proceso iterativo a partir de los datos conocidos del punto  $x_0$ , para obtener aproximación a una solución localmente única  $x^*$  de la ecuación no lineal (4.1), donde  $F$  es un operador definido entre dos espacios de Banach  $X$  e  $Y$ . Seguiremos las ideas y notaciones introducidas por Shub y Smale en [22] y Dedieu en [43], y que más adelante ha sido desarrollada por otros autores, para más información al respecto véase [99], [129] y [130].

Asumimos que existe  $x^*$ , una solución de la ecuación (4.1) y que para un cierto radio, digamos  $R > 0$ , el operador  $F$  es analítico en la bola abierta definida como

$$B(x^*, R) = \{x \in X; \|x - x^*\| < R\}. \quad (4.13)$$

Consecuentemente, para cada  $x \in B(x^*, R)$ ,  $F$  puede ser desarrollada en serie de Taylor en un entorno de  $x$ :

$$F(y) = F(x) + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} F^{(k)}(x)(y - x)^k.$$

Suponemos también que existe el operador

$$\Gamma = F'(x^*)^{-1}.$$

Seguindo a Smale (véase [121]), vamos a introducir la constante  $\gamma$ , definida como

$$\gamma = \sup_{k \geq 2} \left( \frac{1}{k!} \|\Gamma F^{(k)}(x^*)\| \right)^{\frac{1}{k-1}}, \quad (4.14)$$

es decir que

$$\frac{1}{k!} \|\Gamma F^{(k)}(x^*)\| \leq \gamma^{k-1}, \quad k \geq 2.$$

Esta constante juega un rol principal en el estudio de la convergencia local del método de Chebyshev definido en (4.2). En efecto, podemos incluso caracterizar el dominio de accesibilidad a la solución  $x^*$ , encontrando un radio  $R_0 > 0$  tal que (4.2) converge a  $x^*$ , para cada  $x_0 \in B(x^*, R_0)$ . En efecto, se tiene que este radio es

$$R_0 = \frac{u^*}{\gamma}.$$

Presentamos ahora el teorema principal de la  $\gamma$ -teoría de Smale para el método de Chebyshev, que caracteriza el radio  $R_0$  anteriormente citado.

**Teorema 4.7.** *En las condiciones presentadas anteriormente, si  $x_0$  es un punto que cumple*

$$x_0 \in B(x^*, R_0), \quad R_0 = \frac{u^*}{\gamma} < R,$$

*siendo  $R$  el radio introducido en (4.13),  $\gamma$  la constante definida en (4.14) y  $u^* \approx 0.126511$  la menor raíz de la ecuación*

$$-1 + 14u - 63u^2 + 132u^3 - 124u^4 + 52u^5 - 8u^6 = 0.$$

*Entonces el método de Chebyshev definido en (4.2) y empezando en  $x_0$  converge a  $x^*$ .*

*Demostración.* En primer lugar, para cada  $x_0 \in B(x^*, R_0)$ , denotamos

$$u_0 = \gamma \|x_0 - x^*\| \quad y \quad \psi(u_0) = 2u_0^2 - 4u_0 + 1. \quad (4.15)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|\Gamma F'(x_0) - I\| &= \|\Gamma[F'(x_0) - F'(x^*)]\| \\ &\leq \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \|\Gamma F^{(k+1)}(x^*)\| \|x_0 - x^*\|^k \\ &\leq \sum_{k \geq 1} (k+1) \gamma^k \|x_0 - x^*\|^k \\ &= \left( \sum_{k \geq 1} u_0^{k+1} \right)' = \left( \frac{u_0^2}{1-u_0} \right)' \\ &= \frac{1}{(1-u_0)^2} - 1 < 1. \end{aligned}$$

Esta última desigualdad es equivalente a  $\psi(u_0) > 0$ , donde  $\psi(u)$  es el polinomio definido en (4.15). Esto es cierto ya que

$$u_0 < \gamma R_0 = u^* < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ahora, usando el Lema de Banach sobre operadores invertibles (véase [106]), tenemos que

$$\|F'(x_0)^{-1}F'(x^*)\| \leq \frac{1}{1 - (1/(1 - u_0)^2 - 1)} = \frac{(1 - u_0)^2}{\psi(u_0)}. \quad (4.16)$$

Notemos que como  $u_0 < 1$ , entonces

$$\begin{aligned} \|\Gamma F(x_0)\| &\leq \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \|\Gamma F^k(x^*)\| \|x_0 - x^*\|^k \\ &\leq \sum_{k \geq 1} \gamma^{k-1} \|x_0 - x^*\|^k \\ &= \left( \sum_{k \geq 1} u_0^{k-1} \right) \|x_0 - x^*\| \\ &= \frac{1}{1 - u_0} \|x_0 - x^*\|. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Por otro lado tenemos

$$\begin{aligned} \|\Gamma F''(x_0)\| &\leq \sum_{k \geq 2} \frac{k(k-1)}{k!} \|\Gamma F^k(x^*)\| \|x_0 - x^*\|^{k-2} \\ &\leq \sum_{k \geq 2} k(k-1) \gamma^{k-1} \|x_0 - x^*\|^{k-2} \\ &= \gamma \sum_{k \geq 2} k(k-1) u_0^{k-2} \\ &= \gamma \sum_{k \geq 0} (k+2)(k+1) u_0^k \\ &= \gamma \left[ \sum_{k \geq 0} u_0^{k+2} \right]'' \\ &= \gamma \left[ \frac{u_0^2}{1 - u_0} \right]'' \\ &= \gamma \left[ \frac{2u_0 - u_0^2}{(1 - u_0)^2} \right]' \\ &= \frac{2\gamma}{(1 - u_0)^3}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Con estas cuentas hechas, recordemos la expresión del método de Chebyshev (4.2)

$$C_F(x) = x - \left( 1 + \frac{1}{2} L_F(x) \right) \Gamma_0 F(x),$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned}
C_F(x_0) - x^* &= x_0 - x^* - \Gamma_0 F(x_0) - \frac{1}{2} L_F(x_0) \Gamma_0 F(x_0) \\
&= \Gamma_0 F'(x^*) [\Gamma F'(x_0)(x_0 - x^*) - \Gamma F(x_0)] \\
&\quad - \frac{1}{2} \Gamma F''(x_0) (\Gamma_0 F(x_0))^2.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Podemos escribir la expresión entre corchetes anterior como

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geq 1} \frac{1}{(k-1)!} \Gamma F^{(k)}(x^*) (x_0 - x^*)^k &- \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \Gamma F^{(k)}(x^*) (x_0 - x^*)^k \\
&- \frac{1}{2} \Gamma F''(x_0) [\Gamma_0 F'(x^*) \Gamma F(x_0)]^2.
\end{aligned}$$

Reduciendo esta expresión se tiene

$$\sum_{k \geq 2} \frac{(k-1)}{k!} \Gamma F^{(k)}(x^*) (x_0 - x^*)^k - \frac{1}{2} \Gamma F''(x_0) [\Gamma_0 F'(x^*) \Gamma F(x_0)]^2.$$

Tomando normas:

$$\begin{aligned}
\| \sum_{k \geq 2} \frac{(k-1)}{k!} \Gamma F^{(k)}(x^*) (x_0 - x^*)^k \| &\leq \left( \sum_{k \geq 2} (k-1) u_0^{k-1} \right) \|x_0 - x^*\| \\
&= \left[ \sum_{k \geq 2} k u_0^{k-1} - \sum_{k \geq 2} u_0^{k-1} \right] \|x_0 - x^*\| \\
&= \left( \left[ \sum_{k \geq 2} u_0^k \right]' - \frac{u_0}{1-u_0} \right) \|x_0 - x^*\| \\
&= \left[ \left( \frac{u_0^2}{1-u_0} \right)' - \frac{u_0}{1-u_0} \right] \|x_0 - x^*\| \\
&= \left( \frac{2u_0(1-u_0) + u_0^2}{(1-u_0)^2} - \frac{u_0}{1-u_0} \right) \|x_0 - x^*\| \\
&= \frac{2u_0 - u_0^2 - u_0 + u_0^2}{(1-u_0)^2} \|x_0 - x^*\| \\
&= \frac{u_0}{(1-u_0)^2} \|x_0 - x^*\|.
\end{aligned}$$

Luego tenemos

$$\begin{aligned}
\|C_F(x_0) - x^*\| &\leq \| \Gamma_0 F'(x^*) \| \| \Gamma F'(x_0)(x_0 - x^*) - \Gamma F(x_0) \| \\
&\quad - \frac{1}{2} \Gamma F''(x_0) (\Gamma_0 F(x_0))^2 \| \\
&\leq \frac{(1-u_0)^2}{\psi(u_0)} \left[ \frac{u_0}{(1-u_0)^2} + \frac{1}{2} \frac{2\gamma}{(1-u_0)^3} \frac{(1-u_0)^4}{\psi(u_0)^2} \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{(1-u_0)^2} \|x_0 - x^*\| \right] \|x_0 - x^*\| \\
&\leq \frac{1}{\psi(u_0)} \left[ u_0 + \frac{u_0(1-u_0)}{\psi(u_0)^2} \right] \|x_0 - x^*\| \\
&= \frac{u_0(\psi(u_0)^2 + 1 - u_0)}{\psi(u_0)^3} \|x_0 - x^*\|.
\end{aligned}$$

Como  $u_0 < u^* \approx 0.126511$ , siendo  $u^*$  la menor raíz positiva del polinomio

$$-1 + 14u - 63u^2 + 132u^3 - 124u^4 + 52u^5 - 8u^6,$$

se tiene que

$$\frac{u_0[\psi(u_0)^2 + 1 - u_0]}{\psi(u_0)^3} < 1.$$

Por lo tanto

$$\|x_1 - x^*\| = \|C_F(x_0) - x^*\| \leq \|x_0 - x^*\|.$$

Además podemos repetir el mismo argumento con  $x_1$ , partiendo de  $x_0$ . Finalmente llamando

$$T = \frac{u_0[\psi(u_0)^2 + 1 - u_0]}{\psi(u_0)^3},$$

y por recurrencia sobre  $k$  tenemos:

$$\|x_{k+1} - x^*\| = T\|x_k - x^*\| \leq \dots \leq T^{k+1}\|x_0 - x^*\|.$$

Como  $T < 1$ , entonces  $x_k$  converge a  $x^*$ . Esto pudo ser demostrado.  $\square$

### 4.3. Convergencia semilocal del método de Chebyshev en espacios de Banach

En la literatura actual del campo de las matemáticas aplicadas, se puede encontrar una limitada bibliografía referente al estudio de la convergencia semilocal del método de Chebyshev, sin embargo, presentamos a continuación tres maneras diferentes de abordar tal estudio: la teoría de Kantorovich, a quien se debe la generalización del método de Newton a espacios de Banach. En segundo lugar, están las relaciones de recurrencia, que en suma son una extensión de las técnicas que en su momento aplicara Kantorovich, para estudiar el método de Newton y que muchos otros autores han aportado a su desarrollo, aplicándola a distintos métodos, en nuestro caso, al método de Chebyshev. Y finalmente tratamos la  $\alpha$ -teoría de Smale. En los tres casos hemos incluido referencias, en las que se pueden ampliar algunas de las informaciones presentadas.

#### 4.3.1. Teoría de Kantorovich semilocal para el método de Chebyshev

La contribución más destacada de Kantorovich consiste en apoyarse en técnicas de análisis funcional para demostrar resultados de análisis numérico, enfoque

que permite que numerosos problemas no lineales, tales como la resolución de ecuaciones integrales, ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales, o problemas de cálculo variacional, puedan escribirse de la forma (4.1) y utilizar entonces el método de Newton para su resolución. Nosotros hemos utilizado esta experiencia para incorporar el método de Chebyshev como herramienta eficiente de resolución a estos campos. Como resultado de este esfuerzo, hemos publicado en la revista «Bulletin of the Australian Mathematical Society» el artículo «A note on the semilocal convergence of Chebyshev's method», véase [44]. En este artículo, los autores<sup>1</sup> presentamos el desarrollo de la teoría de Kantorovich para el método de Chebyshev, similar a la existente para el muy conocido método de Newton, para resolver ecuaciones no lineales en espacios de Banach. Nosotros mejoramos los resultados obtenidos anteriormente, considerando el método de Chebyshev como un elemento de una familia de procesos iterativos.

Una característica destacable de la teoría de Kantorovich es que no exige a priori la existencia de soluciones de la ecuación (4.1). Por contra, se exigen condiciones sobre el punto de partida. Este tipo de estudio de la convergencia se denomina convergencia semilocal. Así, el teorema clásico de Newton-Kantorovich no es sólo un resultado sobre convergencia del método de Newton, sino también un resultado sobre existencia de soluciones de la ecuación (4.1).

Por otro lado, Daniel González Sánchez, en su tesis Doctoral (véase [61]), de reciente defensa y publicación, presenta nuevos resultados que enriquecen la teoría de Kantorovich, aplicando dicha teoría a la resolución de ecuaciones integrales. Además, nuevas aplicaciones y usos certifican la vigencia que tiene la teoría de Kantorovich, véase [78], [79] y [80]. En el marco general de la teoría de Kantorovich (véase [80]), se demuestra la convergencia semilocal de un método iterativo de tercer orden de convergencia en espacios de Banach. Siendo un poco pretenciosos, seguiremos las huellas que marcó Kantorovich en sus trabajos sobre el método de Newton y daremos el salto para aplicar dicho teorema al método de Chebyshev. Para nuestro objetivo, asumimos a lo largo de este capítulo que  $F : X \rightarrow Y$  es un operador definido entre dos espacios de Banach que es dos veces diferenciable con continuidad en un dominio abierto y conexo  $\Omega \subseteq X$ . Además suponemos que se cumplen las siguientes condiciones, que son clásicas en el estudio de la convergencia semilocal de procesos iterativos de tercer orden bajo condiciones de Kantorovich (véase por ejemplo: [51], [61], [65], [66], [71], [133] y [135]):

- (i) Existe un punto  $x_0 \in \Omega$  donde el operador lineal  $\Gamma_0 = F'(x_0)^{-1}$  está definido.
- (ii)  $\|\Gamma_0(F''(x) - F''(y))\| \leq k\|x - y\|$ ,  $x, y \in \Omega$ ,  $k > 0$ .
- (iii)  $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq a$ ,  $\|\Gamma_0 F''(x_0)\| \leq b$ .

---

<sup>1</sup>M. A. Diloné Alvarado, J. M. Gutiérrez Jiménez y M. García Olivo.

(iv) La ecuación

$$p(t) = \frac{k}{6}t^3 + \frac{b}{2}t^2 - t + a = 0 \quad (4.20)$$

tiene como solución una raíz negativa, que denotamos como  $-r_0$  con  $r_0 > 0$ , y dos raíces positivas:  $r_1$  y  $r_2$  ( $r_1 \leq r_2$ ).

(v)  $S = \{x : \|x - x_0\| \leq r_1\} \subseteq \Omega$ .

**Nota 4.1.** Las condiciones siguientes son equivalentes a las condiciones asumidas previamente en (iv). Ambos casos pueden deducirse simplemente asumiendo  $p(\rho) \leq 0$ , donde  $\rho$  es el mínimo relativo del polinomio  $p(t)$  definido en (4.20).

$$1. a \leq \frac{b^2 + 4k - b\sqrt{b^2 + 2k}}{3k(b + \sqrt{b^2 + 2k})}.$$

$$2. 9k^2a^2 + 18abk + 6ab^3 \leq 3b^2 + 8k.$$

**Lema 4.8.** Vamos a definir la secuencia escalar  $\{t_n\}$  por

$$t_0 = 0, \quad t_{n+1} = C(t_n) = t_n - \left(1 + \frac{1}{2}L_p(t_n)\right) \frac{p(t_n)}{p'(t_n)}, \quad n \geq 0, \quad (4.21)$$

donde  $p(t)$  es el polinomio definido en (4.20). Entonces  $\{t_n\}$  es una secuencia monótona creciente y convergente a  $r_1$ , que es el menor cero positivo de  $p(t)$ .

*Demostración.* Como  $p(t_0) = a > 0$ , por hipótesis tenemos que  $t_0 < r_1$  por el teorema del Valor Medio

$$t_1 - r_1 = H'(s_0)(t_0 - r_1),$$

para algún  $s_0 \in (t_0, r_1)$ . Notemos que

$$C'(t) = \frac{(3 - L'_p(t))L_p(t)^2}{2},$$

donde  $L_p(t)$  y  $L_{p'}(t)$  se definen, respectivamente, por

$$L_p(t) = \frac{p(t)p''(t)}{p'(t)^2}, \quad L_{p'}(t) = \frac{p'(t)p'''(t)}{p''(t)^2}.$$

Ahora, tomemos en cuenta que  $p(t)$  es positivo, decreciente y convexo sobre el intervalo  $[0, r_1]$  y tenemos  $H'(t) \geq 0$  sobre  $[0, r_1]$ . Por lo tanto  $t_1 \leq r_1$ .

Por otro lado,

$$t_1 - t_0 = -\frac{p(t_0)}{p'(t_0)} \left(1 + \frac{1}{2}L_p(t_0)\right) \geq 0.$$

Entonces se obtiene por inducción matemática que  $t_n \leq r_1$  y  $t_{n-1} \geq t_n$  para todo  $n \geq 1$ , partiendo de este hecho, luego  $(t_{n-1}, r_1) \subset (t_0, r_1)$ .

Por lo tanto la secuencia (4.21) converge a  $r_1$ .  $\square$

**Lema 4.9.** Sea  $\rho$  la única raíz positiva de  $p'(t) = 0$ , donde  $p(t)$  es el polinomio definido en (4.20). Bajo las condiciones **(i)**-**(v)** previamente definidas, si  $\|x - x_0\| \leq \rho$ , entonces existe la inversa  $F'(x)^{-1}$  y

$$\|F'(x)^{-1}F'(x_0)\| \leq -\frac{1}{p'(\|x - x_0\|)},$$

$$\|F'(x_0)^{-1}F''(x)\| \leq p''(\|x - x_0\|).$$

*Demostración.* Note que

$$p'(t) = \frac{k}{2}t^2 + bt - 1$$

tiene dos raíces reales dadas por

$$\rho_+ = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 2k}}{k}, \quad t_- = \frac{-b - \sqrt{b^2 + 2k}}{k}.$$

Entonces, cuando  $\|x - x_0\| < t_+$  se tiene que

$$p'(\|x - x_0\|) = \frac{k}{2}\|x - x_0\|^2 + b\|x - x_0\| - 1 < 0.$$

Así, bajo las condiciones (ii) y (iii) dadas en (4.20) tenemos

$$\|F'(x_0)^{-1}F''(x_0)(x - x_0) + \int_0^1 F'(x_0)^{-1}[F''(x_0 + t(x - x_0)) - F''(x_0)]dt(x - x_0)\|$$

$$\leq b\|x - x_0\| + \frac{k}{2}\|x - x_0\|^2 < 1.$$

Considerando el teorema del Valor Medio, se sigue que

$$F'(x) = F'(x_0) + \int_0^1 F''(x_0 + t(x - x_0))dt(x - x_0),$$

donde

$$F'(x_0)^{-1}F'(x) = I + F'(x_0)^{-1}F''(x_0)(x - x_0)$$

$$+ \int_0^1 F'(x_0)^{-1}[F''(x_0 + t(x - x_0)) - F''(x_0)]dt(x - x_0).$$

Entonces, por el Lema de Banach sobre inversión de operadores [106], la inversa de  $F'(x_0)^{-1}F'(x)^{-1}$  y es  $F'(x)^{-1}F'(x_0)$  existe. Luego

$$\|F'(x)^{-1}F'(x_0)\| \leq \frac{1}{1 - b\|x - x_0\| - \frac{k}{2}\|x - x_0\|^2} = \frac{1}{p'(t)},$$

y

$$\begin{aligned} \|F'(x_0)^{-1}F''(x)\| &\leq \|F'(x_0)^{-1}F''(x_0)\| \\ &+ \|F'(x_0)^{-1}[F''(x_0) - F''(x)]\| \\ &\leq b + k\|x - x_0\| = p''(\|x - x_0\|), \end{aligned}$$

así, el lema queda demostrado.  $\square$

**Lema 4.10.** *Con la misma notación y las mismas hipótesis anteriores, podemos escribir  $F(x_{n+1})$  de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} F(x_{n+1}) &= \frac{1}{8}F''(x_n)y_n^2 + \frac{1}{2}F''(x_n)\Gamma_n F(x_n)y_n \\ &+ \int_{x_n}^{x_{n+1}} [F''(x) - F''(x_n)](x_{n+1} - x) dx, \end{aligned}$$

donde  $\Gamma_n = F'(x_n)^{-1}$  e  $y_n = L_F(x_n)\Gamma_n F(x_n)$ .

*Demostración.* Por el desarrollo en serie de Taylor, y teniendo en cuenta la función de iteración (4.2), deducimos

$$\begin{aligned} F(x_{n+1}) &= F(x_n) + F'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{1}{2}F''(x_n)(x_{n+1} - x_n)^2 \\ &+ \int_{x_n}^{x_{n+1}} [F''(x) - F''(x_n)](x_{n+1} - x) dx \\ &= -\frac{1}{2}F''(x_n)\Gamma_n F(x_n)\Gamma_n F(x_n) + \frac{1}{2}F''(x_n)(\Gamma_n F(x_n))^2 \\ &+ \frac{1}{8}F''(x_n)y_n^2 + \frac{1}{2}F''(x_n)\Gamma_n F(x_n)y_n \\ &+ \int_{x_n}^{x_{n+1}} [F''(x) - F''(x_n)](x_{n+1} - x) dx, \end{aligned}$$

por lo que el resultado se sigue directamente.  $\square$

Ahora estamos en condiciones de dar el siguiente teorema tipo Kantorovich para el método de Chebyshev, escrito como lo hemos considerado al inicio de este capítulo (4.2).

**Teorema 4.11.** *Supongamos que se mantienen las condiciones (i)-(v) introducidas al principio de esta sección. Entonces la sucesión  $\{x_n\}$  definida por el método de Chebyshev (4.2) está bien definida, permanece en  $S = \{x : \|x - x_0\| < r_1\}$  y converge a una solución  $x^*$  de la ecuación (4.1). Además, se satisface la siguiente estimación del error:*

$$\|x^* - x_n\| \leq r_1 - t_n, \quad (4.22)$$

donde  $\{t_n\}$  es la sucesión definida en (4.21), que en suma no es más que el método de Chebyshev aplicado al polinomio  $p(t)$  definido en (4.20) y  $r_1$  es el menor cero positivo de  $p(t)$ .

*Demostración.* Siguiendo los pasos que se indican en la referencia [135], veamos que las siguientes condiciones son ciertas para todo entero no negativo  $n$ :

1.  $x_n \in S = \{x : \|x - x_0\| < r_1\}$ .
2. La inversa  $\Gamma_n = F'(x_n)^{-1}$  existe.
3.  $\|\Gamma_0 F(x_n)\| \leq p(t_n)$ .
4.  $\|\Gamma_n F'(x_0)\| \leq \frac{-1}{p(t_n)}$ .
5.  $\|\Gamma_0 F''(x_n)\| \leq p''(t_n)$ .
6.  $\|x_{n+1} - x_n\| \leq t_{n+1} - t_n$ .

En primer lugar, notemos que la sexta condición del listado anterior es consecuencia inmediata de las anteriores. Luego, las hipótesis **(i)**-**(v)** garantizan que las condiciones (1–5) son ciertas para  $n = 0$ .

Por un proceso inductivo, supongamos ahora que (1–5) se cumplen para  $n \leq k$ , entonces la condición (6) también se cumple y, por tanto,

$$\|x_{k+1} - x_0\| \leq t_{k+1} - t_0 < r_1 \leq \rho,$$

donde  $\rho$  es la única raíz positiva de  $p'(t) = 0$ , introducida en el Lema 4.9.

Consecuentemente  $x_{k+1} \in S$ . Del lema 4.9, tenemos que  $\Gamma_{k+1} = F'(x_{k+1})^{-1}$  también existe y las condiciones (4) y (5) se cumplen para  $n = k + 1$ .

Ahora, del lema 4.10, tenemos

$$\begin{aligned} \|\Gamma_0 F(x_{k+1})\| &\leq \frac{1}{8} \|\Gamma_0 F''(x_k) y_k^2\| + \frac{1}{2} \|\Gamma_0 F''(x_k) \Gamma_k F(x_k) y_k\| \\ &\quad + \left\| \int_0^1 \Gamma_0 [F''(x_k + u(x_{k+1} - x_k)) - F''(x_k)] (1-u) du (x_{k+1} - x_k) \right\| \\ &\leq \frac{1}{8} L_p(t_k)^3 p(t_k) + \frac{1}{2} L_p(t_k)^2 p(t_k) + \frac{k}{6} (t_{k+1} - t_k)^3 = p(t_{k+1}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la condición (3) también es verdadera para  $n = k + 1$ . De este modo, las condiciones (1–5) se cumplen para todo  $n \geq 0$  y, por tanto, también la condición (6).

Como  $\{t_n\}$  es una sucesión convergente, la condición (6) implica que  $\{x_n\}$  es también convergente. Denotemos como  $x^*$  su límite. Haciendo  $n \rightarrow \infty$  en la condición (3) deducimos que  $F(x^*) = 0$  y entonces  $x^*$  es una solución de la ecuación (4.1). Finalmente, la estimación del error puede deducirse aplicando recursivamente la condición (6),

$$\|x_{n+j} - x_n\| \leq t_{n+j} - t_n, \quad j \geq 1,$$

y haciendo  $j \rightarrow \infty$ . Como queríamos demostrar.  $\square$

La teoría de Kantorovich [80] puede ser usada, no únicamente para mostrar la convergencia de un método iterativo, sino además simultáneamente como una teoría de existencia y unicidad para ecuaciones no lineales. En esta dirección, podemos establecer el siguiente resultado.

**Teorema 4.12.** *Supongamos que las condiciones (i)–(v) introducidas en la presente sección son ciertas. Entonces la ecuación (4.1) tiene una solución  $x^*$  que se encuentra en la bola cerrada  $B_1 = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r_1\} \subseteq \Omega$  y es única en el conjunto  $B_2 = \{x \in X : \|x - x_0\| < r_2\} \cap \Omega$ , donde  $r_1$  y  $r_2$  son las raíces positivas del polinomio  $p(t)$  definido en (4.20).*

*Demostración.* Partimos del hecho de que  $x^* \in B_1$ , lo cual se sigue directamente tomando  $n = 0$  en (4.22). Para mostrar la unicidad, asumimos que existe otra solución  $y^*$  de la ecuación (4.1) en  $B(x_0, r_2)$ . Siguiendo una técnica utilizada por otros autores, como por ejemplo [15] y [47], tenemos

$$0 = F(y^*) - F(x^*) = \int_0^1 F'(x^* + t(y^* - x^*)) dt (y^* - x^*).$$

Si probamos que el operador  $\int_0^1 F'(x^* + t(y^* - x^*)) dt$  tiene inverso, ya tendremos que  $y^* = x^*$ .

Notemos que

$$\begin{aligned} I - \Gamma_0 \int_0^1 F'(x^* + t(y^* - x^*)) dt &= -\Gamma_0 \int_0^1 \int_{x_0}^{x^* + t(y^* - x^*)} F''(z) dz dt \\ &= -\Gamma_0 \int_0^1 \int_{x_0}^{x^* + t(y^* - x^*)} [F''(x_0) + (F''(z) - F''(x_0))] dz dt. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\left\| I - \Gamma_0 \int_0^1 F'(x^* + t(y^* - x^*)) dt \right\| < \frac{k}{6} r_2^2 + \left( \frac{k}{6} r_1 + \frac{b}{2} \right) (r_2 + r_1) = 1.$$

Necesitamos probar que

$$\frac{k}{6} r_2^2 + \left( \frac{k}{6} r_1 + \frac{b}{2} \right) (r_2 + r_1) = 1. \quad (4.23)$$

Para ello, vamos a definir el polinomio

$$q(r) = \frac{k}{6} r^2 + \left( \frac{k}{6} r_1 + \frac{b}{2} \right) r + \left( \frac{k}{6} r_1^2 + \frac{b}{2} r_1 - 1 \right).$$

La condición (4.23) es equivalente a  $q(r_2) = 0$ . Usando las fórmulas de Cardano, tenemos

$$r_1 + r_2 = r_0 - \frac{3b}{k},$$

y

$$r_1 r_2 = \frac{6a}{kr_0},$$

donde  $-r_0, r_1$  y  $r_2$  son las raíces de (4.20). Luego

$$q(r_2) = -\frac{p(-r_0)}{r_0} = 0.$$

Por lo tanto (4.23) se cumple. De manera que la demostración se ha completado.  $\square$

Los siguientes resultados nos permiten obtener estimaciones a priori para los términos del error (4.22) en función de las raíces del polinomio  $p(t)$  definido en (4.20). Consideramos en primer lugar el caso de que en la función mayorizante definida en (4.20) se tenga  $k = 0$ , es decir, que el operador  $F$  sea cuadrático. En este caso, el polinomio  $p$  es de la forma

$$p(t) = \frac{b}{2}t^2 - t + a = 0,$$

con  $h = ab \leq \frac{1}{2}$ . Entonces  $p(t)$  tiene dos raíces positivas, digamos  $r_1 \leq r_2$ , con

$$r_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{b} \quad y \quad r_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2h}}{b}.$$

Presentamos entonces el siguiente resultado.

**Lema 4.13.** *Sea  $\{t_n\}$  la sucesión de Chebyshev aplicada al polinomio  $p(t)$ . Si*

$$0 < h < -8 + 6\sqrt{2} \approx 0.485281,$$

*se tienen las siguientes acotaciones del error<sup>2</sup>*

$$\frac{(r_2 - r_1) \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{3^n}}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{3^n}} \leq r_1 - t_n \leq \frac{(r_2 - r_1) \left(\sqrt{2}\frac{r_1}{r_2}\right)^{3^n}}{\sqrt{2} - \left(\sqrt{2}\frac{r_1}{r_2}\right)^{3^n}}.$$

*Si  $h = ab = 1/2$ , entonces*

$$r_1 - t_n = \left(\frac{3}{8}\right)^n r_1.$$

---

<sup>2</sup>La cota inferior es válida para  $0 < h < 1/2$ .

*Demostración.* Introducimos las siguientes notaciones:  $a_n = r_1 - t_n$ ,  $b_n = r_2 - t_n$ . Entonces,

$$a_{n+1} = a_n^3 \frac{a_n + 2b_n}{(a_n + b_n)^3}, \quad b_{n+1} = b_n^3 \frac{2a_n + b_n}{(a_n + b_n)^3}.$$

Por tanto,

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \left( \frac{a_n}{b_n} \right)^3 \frac{a_n + 2b_n}{2a_n + b_n}.$$

Llamando  $\Theta_n = a_n/b_n$  se tiene

$$\Theta_{n+1} = \Theta_n^3 \frac{\Theta_n + 2}{2\Theta_n + 1}.$$

Como resulta que  $0 < \Theta_n < 1$  y  $\frac{x+2}{2x+1}$  es decreciente como función de  $x$ , se tiene que

$$\Theta_n^3 \leq \Theta_{n+1} \leq 2\Theta_n^3.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \Theta_{n+1} &\leq 2\Theta_n^3 \leq 2^{1+3}\Theta_{n-1}^3 \leq 2^{1+3+3^2}\Theta_{n-2}^3 \leq \dots \leq 2^{1+3+3^2+\dots+3^n}\Theta_0^{3^{n+1}} \\ &= 2^{\frac{3^{n+1}-1}{2}}\Theta_0^{3^{n+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}\Theta_0)^{3^{n+1}}. \end{aligned}$$

Si  $\sqrt{2}\Theta_n < 1$ , es decir, si  $h < -8 + 6\sqrt{2} \approx 0.485281$ , entonces

$$\Theta_n < \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}\Theta_0)^{3^n}.$$

Esto implica

$$r_1 - t_n < \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}\Theta_0)^{3^n}(r_2 - t_n) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}\Theta_0)^{3^n}(r_2 - r_1 + r_1 - t_n).$$

Con lo cual, obtenemos la cota superior del error que aparece en el enunciado.

Por otra parte

$$\Theta_n \geq \Theta_0^{3^n}.$$

Luego

$$\begin{aligned} r_1 - t_n &\geq \Theta_0^{3^n}(r_2 - r_1 + r_1 - t_n), \\ r_1 - t_n &\geq \frac{(r_2 - r_1)(\frac{r_1}{r_2})^{3^n}}{1 - (\frac{r_1}{r_2})^{3^n}}, \end{aligned}$$

con lo que se deduce la cota inferior del error que aparece en el enunciado.

Por último, analizamos el caso particular  $h = \frac{1}{2}$ . En este caso  $r_1 = r_2$ . Con la notación anterior,

$$a_{n+1} = \frac{3a_n}{8},$$

y por tanto

$$r_1 - t_n = \left(\frac{3}{8}\right)^n r_1,$$

lo cual completa la demostración.  $\square$

Ahora centramos nuestro estudio en obtener la expresión del error para la secuencia de Chebyshev (4.2), cuando  $p$  es un polinomio cúbico [96].

El resultado anterior de la secuencia de Chebyshev para polinomios cuadráticos, pudo llevarse a cabo siguiendo el método aplicado por Ostrowski, sin embargo en el lema siguiente, establecemos la estimación del error del caso cúbico, utilizando un nuevo procedimiento (véase [48] o [65]), debido a la dificultad que presenta, con respecto a la técnica seguida. Usaremos la siguiente notación

$$t_n \sim s_n \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{s_n} = 1.$$

**Lema 4.14.** *Sea  $p$  el polinomio dado por*

$$p(t) = \frac{k}{6}t^3 + \frac{b}{2}t^2 - t + a = 0, \quad k > 0.$$

*Asumimos que  $p$  tiene dos raíces positivas, digamos  $r_1 \leq r_2$ , y una negativa  $-r_0$ . Sea  $\{t_n\}$  la sucesión de Chebyshev aplicada al polinomio anterior. Entonces si  $r_1 < r_2$ ,*

$$r_1 - t_n \sim \frac{(r_2 - r_1)\theta^{3n}}{\sqrt{\lambda} - \theta^{3n}}, \quad n \geq 0,$$

donde  $\theta = \sqrt{\lambda \frac{r_1}{r_2}}$  y

$$\lambda = \frac{(r_2 - r_1)(r_0 - r_1) + 2(r_0 - 2r_1 - r_2)^2}{(r_0 - r_1)^2} < 1.$$

*Si  $r_1 = r_2$ , tenemos*

$$r_1 - t_n \sim r_1 \left(\frac{3}{8}\right)^n.$$

*Demostración.* El polinomio definido antes puede ser escrito en la forma

$$p(t) = \frac{k}{6}(r_1 - t_n)(r_2 - t_n)(r_0 + t_n).$$

Ahora escribimos  $a_n = r_1 - t_n$ ,  $b_n = r_2 - t_n$  y

$$T(t_n) = \frac{b_n^3 a_{n+1}}{a_n^3 b_{n+1}} = \frac{(r_1 - C_p(t_n))(r_2 - t_n)^3}{(r_2 - C_p(t_n))(r_1 - t_n)^3},$$

donde  $C_p(t_n)$  es la función de iteración del método de Chebyshev aplicado a  $p(t)$ .

Como  $C_p(r_1) = r_1$ ,  $C'_p(r_1) = C''_p(r_1) = 0$ , tenemos para  $t$  suficientemente próximo a  $r_1$

$$\begin{aligned} T(t) &\sim (r_2 - r_1)^2 \lim_{t \rightarrow r_1} \frac{r_1 - C_p(t)}{(r_1 - t)^3} \\ &= \frac{C'''_p(r_1)}{6} (r_2 - r_1)^2 \\ &= \frac{3p''(r_1)^2 - p'''(r_1)p'(r_1)}{6p'(r_1)^2} (r_2 - r_1)^2 \\ &= \frac{(r_2 - r_1)(r_0 + r_1) + 2(r_0 + 2r_1 - r_2)^2}{(r_0 + r_1)^2} \\ &= \lambda. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Ya que  $t_n \rightarrow r_1$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , obtenemos

$$\frac{a_n}{b_n} \sim \left( \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \right)^3 \lambda \sim \dots \sim \left( \sqrt{\lambda} \frac{r_1}{r_2} \right)^{3^n} \frac{1}{\sqrt{\lambda}},$$

y ya tenemos la primera parte.

Si  $r_1 = r_2$ , sea

$$\tilde{T}(t_n) = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{r_1 - C_p(t_n)}{r_1 - t_n}.$$

Notemos que para  $t$  suficientemente próximo a  $r_1$

$$\tilde{T}(t) \sim \tilde{T}(r_1) = \frac{3}{8}.$$

Por recurrencia, la segunda parte de esta demostración es inmediata. □

### 4.3.2. Relaciones de recurrencia para el método de Chebyshev

Hasta ahora, las condiciones necesarias para la convergencia del método de Chebyshev (4.2) han sido establecidas en la sección anterior, asumiendo que la segunda derivada Fréchet de  $F$  satisface la condición de Lipschitz siguiente

$$\|\Gamma_0[F'''(x) - F'''(y)]\| \leq k\|x - y\|, \tag{4.25}$$

para  $x$  e  $y$  en una región adecuada de  $X$  y otras condiciones sobre el punto de partida  $x_0$ . A partir de estas condiciones, se construye una función mayorizante

(un polinomio) que regula la convergencia de la sucesión definida en espacios de Banach. La técnica desarrollada es una extensión de la seguida por Kantorovich y otros autores (véase [80] o [106]), para estudiar el método de Newton.

Otra técnica empleada habitualmente para el estudio de la convergencia semilocal de procesos iterativos, son las conocidas como *relaciones de recurrencia*. Desde el punto de vista histórico, las relaciones de recurrencia fueron empleadas por el propio Kantorovich, antes incluso que introducir las funciones mayorizantes, véase [48] y [49]. En el caso del método de Chebyshev, encontramos la aplicación de las relaciones de recurrencia en trabajos de Chen y Argyros, [15], Candela y Marquina, [28] y, sobre todo, Hernández y colaboradores, véase [50], [73] y [76].

Precisamente, de un trabajo de este último grupo, específicamente en [67], es de donde hemos tomado el siguiente resultado.

**Teorema 4.15.** *Sea  $F(x) = 0$  una ecuación, donde  $F$  es un operador continuo dos veces diferenciable Fréchet en un dominio convexo abierto  $\Omega \subseteq X$ . Sea  $x_0 \in \Omega$  un punto donde el operador  $\Gamma_0 = F'(x_0)^{-1}$  existe. Definimos*

$$M_0 = \sup_{x \in \Omega} \|\Gamma_0 F''(x)\|, \quad \alpha_0 = \|\Gamma_0 F(x_0)\| M_0,$$

cuando este supremo es finito, y

$$r_0 = \frac{\left(1 + \frac{\alpha_0}{2}\right) \|\Gamma_0 F(x_0)\|}{1 - \alpha_0 \left(1 + \left(1 + \frac{\alpha_0}{2}\right)^2\right)}.$$

Supongamos que

$$\alpha_0 \leq r \approx 0.326664\dots, \tag{4.26}$$

donde  $r$  es la menor raíz positiva del polinomio  $2x^4 + 7x^3 - 4x^2 - 24x + 8$ , y además

$$\overline{B}(x_0, r_0) = \{x \in X; \|x - x_0\| \leq r_0\},$$

está contenido en  $\Omega$ . Entonces, la sucesión de Chebyshev (4.2) está bien definida, contenida en  $\overline{B}(x_0, r_0)$  y converge a  $x^*$ , una solución de  $F(x) = 0$ . Además,  $x^*$  es la única solución en  $\overline{B}(x_0, 2/M_0 - r_0)$ .

*Demostración.* Para  $n \geq 0$ , definamos

$$M_n = \sup_{x \in \Omega} \|\Gamma_n F''(x)\|, \alpha_n = \|\Gamma_n F(x_n)\| M_n, \beta_n = \left(1 + \frac{\alpha_n}{2}\right) \alpha_n.$$

Las hipótesis del teorema garantizan la existencia de  $x_1$  y

$$\|x_1 - x_0\| \leq \left(1 + \frac{\alpha_0}{2}\right) \|\Gamma_0 F(x_0)\|.$$

Además puede demostrarse sin dificultad que  $\Gamma_0 F'(x_0)$  existe y

$$\|\Gamma_0 F'(x_0)\| \leq \frac{1}{1 - \beta_0} < 2.$$

Luego  $x_2$  está definida y, teniendo en cuenta la hipótesis anterior y por el hecho de que

$$\|\Gamma_0 F(x_1)\| \leq \frac{\alpha_0}{2} \left( 1 + \left( 1 + \frac{\alpha_0}{2} \right)^2 \right) \|\Gamma_0 F(x_0)\|,$$

obtenemos que

$$\|x_2 - x_1\| \leq \left( 1 + \frac{\alpha_1}{2} \right) \|\Gamma_0 F(x_1)\|.$$

Finalmente,  $\alpha_1 \leq \alpha_0$ . En efecto, por (4.26) y por las relaciones de recurrencia,

$$\alpha_1 = \|\Gamma_0 F(x_1)\| M_1 \leq \frac{\alpha_0^2 + \beta_0^2}{2(1 - \beta_0)^2} \leq \alpha_0.$$

Siguiendo un razonamiento inductivo podemos reemplazar  $x_1$  por  $x_2$ ,  $x_2$  por  $x_3$  y, en general,  $x_{n-1}$  por  $x_n$  para obtener la existencia de  $\Gamma_n F'(x_{n-1})$  y las siguientes relaciones de recurrencia:

$$\|\Gamma_n F'(x_{n-1})\| \leq \frac{1}{1 - \beta_{n-1}} \leq \dots \leq \frac{1}{1 - \beta_0} < 2,$$

$$\|\Gamma_{n-1} F(x_n)\| \leq \frac{\alpha_{n-1}}{2} \left( 1 + \left( 1 + \frac{\alpha_{n-1}}{2} \right)^2 \right) \|\Gamma_{n-1} F(x_{n-1})\|,$$

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \left( 1 + \frac{\alpha_n}{2} \right) \|\Gamma_n F(x_n)\|,$$

$$\alpha_n \leq \alpha_{n-1}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &\leq \left( 1 + \frac{\alpha_n}{2} \right) \|\Gamma_n F(x_n)\| \\ &\leq \left( 1 + \frac{\alpha_0}{2} \right) \alpha_{n-1} \left( 1 + \left( 1 + \frac{\alpha_{n-1}}{2} \right)^2 \right) \|\Gamma_{n-1} F(x_{n-1})\| \\ &\leq \dots \leq \left( 1 + \frac{\alpha_0}{2} \right) \|\Gamma_0 F(x_0)\| \left[ \alpha_0 \left( 1 + \left( 1 + \frac{\alpha_0}{2} \right)^2 \right) \right]^n. \end{aligned}$$

Como

$$\alpha_0 \left( 1 + \left( 1 + \frac{\alpha_0}{2} \right)^2 \right) < 1,$$

entonces  $\{x_n\}$  es una sucesión de Cauchy y además converge a

$$x^* \in \overline{B}(x_0, r_0).$$

Para demostrar que  $F(x^*) = 0$ , note que cuando  $n \rightarrow \infty$  se tiene

$$\|\Gamma_{n-1}F(x_n)\| \rightarrow 0.$$

Como ocurre que

$$\|F(x_n)\| \leq \|F'(x_{n-1})\| \|\Gamma_{n-1}F(x_n)\|$$

y además  $\{\|F'(x_n)\|\}$  es una sucesión acotada, deducimos

$$\|F(x_n)\| \rightarrow 0,$$

y por continuidad,  $F(x^*) = 0$ .

Ahora, para mostrar la unicidad, suponemos que  $y^* \in \overline{B}(x_0, 2/M_0 - r_0)$  es otra solución de  $F(x) = 0$ . Luego

$$0 = F(y^*) - F(x^*) = \int_0^1 F'(x^* + t(y^* - x^*)) dt (y^* - x^*).$$

tenemos que demostrar que el operador  $\int_0^1 F'(x^* + t(y^* - x^*)) dt$  tiene inversa y entonces  $y^* = x^*$ . Esta misma demostración se encuentra en [15], donde I. K. Argyros y D. Chen demuestran que la inversa del operador existe y que además  $x^*$  es única.  $\square$

A continuación presentamos un ejemplo donde las condiciones del teorema 4.15 son satisfechas y sin embargo las hipótesis (2) y (3) fallan.

**Ejemplo 4.3.** Consideremos la función

$$f(x) = x^3 \ln x^2 + x^2 - 10x + 2.5, \quad f(0) = 2.5$$

definida en  $X = [-1, 1]$  y sea  $x_0 = 0$ . Notemos que  $f''(x) = 6x \log x^2 + 10x + 2$  no satisface la condición de Lipschitz en  $X$ , ya que si

$$\frac{f''(x) - f''(y)}{x - y}$$

estuviese acotada, también lo estaría  $f'''(x) = 22 + 6 \log x^2$ , lo cual no es cierto. Por lo tanto, el teorema de Kantorovich no se puede aplicar. Sin embargo,

$$\left| \frac{f(0)}{f'(0)} \right| = 0.25, \quad \sup_{x \in X} \left| \frac{f''(x)}{f'(0)} \right| = 1.2,$$

$\alpha_0 = 0.3 < r \approx 0.326664$  se puede aplicar el Teorema 4.15. Por otra parte, las derivadas  $f^{(k)}(x)$  no están definidas en  $x_0$  para  $k \geq 3$ , por lo que las condiciones de tipo Smale que se introducen en la siguiente sección tampoco pueden aplicarse en este ejemplo.

### 4.3.3. $\alpha$ -teoría de Smale para el método de Chebyshev

En esta sección presentamos el estudio de la  $\alpha$ -teoría de Smale, aplicada al método de Chebyshev. De inmediato, consideramos importante dejar en claro ciertas precisiones conceptuales. La idea principal de esta teoría consiste en obtener información acerca de la convergencia de (4.2) para resolver  $F(x) = 0$ , haciendo uso de la información que se tiene sobre el entorno de  $x_0$ .

Consideremos  $F : X \rightarrow Y$ , un operador definido entre dos espacios de Banach  $X$  e  $Y$  y asumimos que  $F$  es analítica en el entorno del punto de partida  $x_0$ , digamos  $B(x_0, R)$ . Supongamos además que existe  $\Gamma_0 = F'(x_0)^{-1}$ .

Ahora vamos a introducir la notación siguiente:

$$\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \beta, \quad \sup_{k \geq 2} \left( \frac{1}{k!} \|\Gamma_0 F^{(k)}(x_0)\| \right)^{\frac{1}{k-1}} \leq \gamma, \quad \alpha = \beta\gamma. \quad (4.27)$$

En el año 1986 Smale obtiene un resultado que garantiza la convergencia del método de Newton para funciones analíticas [121], estableciendo como constante universal la cota

$$\alpha \leq \alpha_0,$$

con  $\alpha_0 \approx 0.130707$ , en lugar de las condiciones que establece Katorovich en su teorema para el método de Newton [78]. Tres años más tarde, Wang y Han [130] consiguen el valor óptimo de  $\alpha$ , dado por

$$\alpha \leq 3 - 2\sqrt{2} \approx 0.17157.$$

Recientemente Yakoubsohn [132] ha propuesto  $\alpha \leq \alpha_1$  con  $\alpha \approx 0.162435$  raíz del polinomio  $4x^3 - 12x^2 + 8x - 1$ . Además de otros aportes, como los de Wang-Zhao en [129], los cuales consideran una sucesión de constantes  $\gamma_k$ , en vez de la constante  $\gamma$  introducida en (4.27). Como puede observarse, es una línea productiva de investigaciones abiertas.

Para nuestros fines, vamos a considerar la notación de los teoremas de Smale, para la convergencia de procesos iterativos. Notemos que (4.27) implica las siguientes desigualdades:

$$\frac{1}{k!} \|\Gamma_0 F^{(k)}(x_0)\| \leq \gamma^{k-1}, \quad k \geq 2. \quad (4.28)$$

Es importante tomar en cuenta que la constante  $\gamma$  es diferente para los distintos procesos iterativos [132], [134]. Nuestro objetivo es demostrar la convergencia de (4.2) asumiendo condiciones puntuales (4.27).

La convergencia del método de Chebyshev en espacios de Banach se deduce de la convergencia del método de Chebyshev aplicado a la siguiente función escalar

$$\phi(t) = \beta - t + \sum_{k \geq 2} \gamma^{k-1} t^k. \quad (4.29)$$

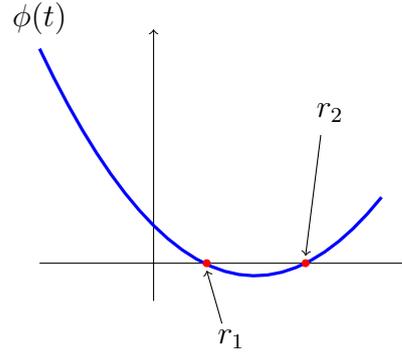


Figura 4.1: Gráfica de la función  $\phi(t) = \beta - t + \frac{\gamma t^2}{1 - \gamma t}$  definida en (4.30).

Notemos que la serie definida en (4.29) es convergente cuando  $\gamma t < 1$ . En este caso, la serie se puede escribir

$$\phi(t) = \beta - t + \frac{\gamma t^2}{1 - \gamma t}. \quad (4.30)$$

En primer lugar, presentamos un lema técnico sobre la convergencia del método de Chebyshev aplicado a la función  $\phi(t)$  definida en (4.30).

**Lema 4.16.** Si  $\alpha \leq 3 - 2\sqrt{2}$ , la función  $\phi(t) = 0$  definida en (4.30) tiene dos raíces reales  $\mathcal{R}$

$$r_1 = \frac{1 + \alpha - \sqrt{(1 + \alpha)^2 - 8\alpha}}{4\gamma} \quad y \quad r_2 = \frac{1 + \alpha + \sqrt{(1 + \alpha)^2 - 8\alpha}}{4\gamma}. \quad (4.31)$$

Además, la sucesión

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ t_{n+1} = t_n - \left(1 + \frac{1}{2}L_\phi(t_n)\right) \frac{\phi(t_n)}{\phi'(t_n)}, n \geq 0 \end{cases} \quad (4.32)$$

definida por el método de Chebyshev aplicado a  $\phi(t) = 0$  converge a  $r_1$ .

*Demostración.* Observe que  $\phi(t) = 0 \Leftrightarrow \beta - (1 + \alpha)t + 2\gamma t^2 = 0$ . Así que, para que existan raíces reales, se debe cumplir que

$$(1 + \alpha)^2 \geq 8\alpha \iff 1 - 6\alpha + \alpha^2 \geq 0.$$

Esto es cierto si  $\alpha \leq 3 - 2\sqrt{2}$ , lo que justifica la condición obtenida para el parámetro  $\alpha$ .

Se tiene que  $\phi(t)$  es una función decreciente, convexa y positiva en  $(0, r_1)$  (véase la figura 4.1). Además

$$\phi'(t) = -1 + \frac{\gamma t(2 - \gamma t)}{(1 - \gamma t)^2}, \quad \phi''(t) = \frac{2\gamma}{(1 - \gamma t)^3}, \quad \phi'''(t) = \frac{6\gamma^2}{(\gamma t - 1)^4}.$$

Teniendo en cuenta el teorema 4.5, se sigue que  $\{t_n\}$  es creciente y acotada superiormente por  $r_1$ .  $\square$

A continuación presentamos un resultado que usa la  $\alpha$ -teoría de Smale para probar la convergencia semivocal del método de Chebyshev en espacios de Banach.

**Teorema 4.17.** *Sea  $F$  un operador analítico definido en la bola  $B(x_0, R)$  para un cierto radio  $R > 0$ . Con las notaciones introducidas en (4.27), si  $\alpha \leq 3 - 2\sqrt{2}$  y  $r_1 \leq R$ , entonces la sucesión  $\{t_n\}$  definida en (4.32) es una sucesión mayorizante para  $\{x_n\}$ , obtenida por el método de Chebyshev (4.2) aplicado al operador  $F$  definido en (4.1).*

*Demostración.* El procedimiento habitual en este tipo de resultados consiste en probar por inducción las siguientes condiciones:

- i.  $\|\Gamma_0 F(x_n)\| \leq -\frac{\phi(t_n)}{\phi'(t_0)}$ .
- ii. Existe  $\Gamma_{n+1} = F'(x_{n+1})^{-1}$  y  $\|\Gamma_{n+1} F'(x_0)\| \leq \frac{\phi'(t_0)}{\phi'(t_{n+1})}$ .
- iii.  $\frac{1}{k!} \|\Gamma_0 F^{(k)}(x_n)\| \leq -\frac{1}{k!} \frac{\phi^{(k)}(t_n)}{\phi'(t_0)}$ ,  $k \geq 2$ .
- iv.  $\|x_{n+1} - x_n\| \leq t_{n+1} - t_n$ .

$\square$

**Teorema 4.18.** *Bajo las condiciones del teorema 4.17, se tiene que la ecuación  $F(x) = 0$  tiene una solución  $x^*$  que está localizada en la bola cerrada  $\bar{B}(x_0, r_1)$  y que es única en  $B(x_0, r_2)$ , donde  $r_1$  y  $r_2$  se han definido en (4.31). Además, el método de Chebyshev aplicado al operador  $F$  definido en (4.1) y empezando en  $x_0$ , converge a  $x^*$ .*

*Demostración.* Tenemos que  $\{t_n\}$  mayoriza a  $\{x_n\}$ ,  $t_n \rightarrow r_1$ , además  $X$  es un espacio de Banach, de aquí se deduce la existencia de  $x^*$  tal que  $(x_n) \rightarrow x^*$ . Además, por la continuidad de  $F$  y tomando límites en la condición i. de la demostración del Teorema 4.17:

$$\|\Gamma_0 F(x^*)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Gamma_0 F(x_n)\| \leq -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi(t_n)}{\phi'(t_0)} = 0,$$

así que  $F(x^*) = 0$  y  $x^*$  es una solución de  $F(x) = 0$  que está localizada en la bola cerrada  $\bar{B}(x_0, r_1)$ .

Para obtener la región de unicidad, supongamos que  $\hat{x}$  es otra solución en la bola abierta  $B(x_0, r_2)$ . Entonces

$$0 = \Gamma_0 [F(\hat{x}) - F(x^*)] = M(\hat{x} - x^*), \quad (4.33)$$

donde  $M : X \rightarrow X$  denota a un operador lineal definido por

$$M(x) = \int_0^1 \Gamma_0 F'(x^* + t(\hat{x} - x^*))x \, dt, \quad x \in X.$$

Como  $\|\hat{x} - x_0\| < r_2$  y  $\|x^* - x_0\| \leq r_1$  se tiene que

$$\begin{aligned} \|I - M\| &\leq \left\| \int_0^1 \Gamma_0 [F'(x^* + t(\hat{x} - x^*)) - F'(x_0)] \, dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 b \|x^* + t(\hat{x} - x^*) - x_0\| \, dt \leq \int_0^1 b ((1-t)\|x^* - x_0\| + t\|\hat{x} - x_0\|) \, dt \\ &< \frac{b}{2}(r_1 + r_2) = 1. \end{aligned}$$

Por el lema de Banach, se sabe que  $M$  tiene inverso y, teniendo en cuenta (4.33), se concluye que  $\hat{x} = x^*$ . En definitiva,  $x^*$  es la única solución de  $F(x) = 0$  en la bola  $B(x_0, r_2)$ .  $\square$

Los siguientes resultados están encaminados a obtener estimaciones del error para la sucesión definida en (4.32). En concreto, estudiamos las cotas del error del método de Chebyshev, aplicando la  $\alpha$ -teoría de Smale, y siguiendo la técnica implementada por Ostrowski [96] y [134]. El primer autor consiguió calcular el error del método de Newton, mientras que el segundo calculó el error para el método de Halley.

Para simplificar los cálculos y, siguiendo la idea y notación desarrollada en [134] hacemos el siguiente cambio de variable

$$\tau = \gamma t, \quad g(\tau) = \gamma \phi(t) = \alpha - \tau + \frac{\tau^2}{1 - \tau}.$$

Sea  $\{\tau_n\}$  la secuencia de Chebyshev para resolver  $g(\tau) = 0$ , con  $\tau_0 = 0$ :

$$\tau_{n+1} = \tau_n - (1 + L_g(\tau_n)) \frac{g(\tau_n)}{g'(\tau_n)}. \quad (4.34)$$

Notemos que para todo  $n \geq 0$ ,  $g(\tau_n) = \gamma \phi(t_n)$ ,  $g'(\tau_n) = \phi'(t_n)$  y  $g''(\tau_n) = \frac{1}{\gamma} \phi''(t_n)$ . Por lo tanto,  $L_g(\tau_n) = L_\phi(t_n)$  y  $\tau_n = \gamma t_n$ .

**Lema 4.19.** Sea  $\{\tau_n\}$  la sucesión definida en (4.34) para  $0 < \alpha \leq 3 - 2\sqrt{2}$ . Denotamos  $\tau^* = \gamma r_1$   $\tau^{**} = \gamma r_2$  a las raíces de  $g(\tau)$ . Entonces se tienen las siguientes acotaciones del error.

Si  $\alpha < 0.169364$ , entonces<sup>3</sup>

$$(\tau^{**} - \tau^*) \frac{(\sqrt{L}\tau^*/\tau^{**})^{3^n}}{\sqrt{L} - (\sqrt{L}\tau^*/\tau^{**})^{3^n}} \leq \tau^* - \tau_n \leq (\tau^{**} - \tau^*) \frac{(\sqrt{M}\tau^*/\tau^{**})^{3^n}}{\sqrt{M} - (\sqrt{M}\tau^*/\tau^{**})^{3^n}}$$

donde

$$L = \left( \frac{1 - \tau^{**}}{1 - \tau^*} \right) \frac{(1 - \tau^*)(1 - \tau^{**})^2 - 1}{(1 - \tau^*)^2(1 - \tau^{**}) - 1}$$

y

$$M = \left( \frac{1 - \tau^{**}}{1 - \tau^*} \right) \left( 1 + \frac{1 - \tau^{**}}{1 - \tau^*} \right).$$

Si  $\alpha = 3 - 2\sqrt{2}$ , entonces

$$(8\sqrt{2} - 11)^n \tau^* \leq \tau^* - \tau_n \leq \frac{3^n}{8^n} \tau^*.$$

*Demostración.* Definimos

$$a_n = \tau^* - \tau_n, \quad b_n = \tau^{**} - \tau_n \quad y \quad c_n = 1 - \tau_n.$$

Entonces

$$\begin{aligned} g(\tau) &= \frac{2(\tau^* - \tau)(\tau^{**} - \tau)}{1 - \tau}, \\ g(\tau_n) &= \frac{2a_n b_n}{c_n}, \\ g'(\tau_n) &= \frac{2}{c_n^2} [-c_n(2a_n + b_n) + a_n b_n], \\ g''(\tau_n) &= 2 \left( \frac{2c_n^2 + 2[-c_n(a_n + b_n) + a_n b_n]}{c_n^3} \right). \end{aligned}$$

Partiendo de las derivadas sucesivas  $g'(\tau)$ ,  $g''(\tau)$ , además de las respectivas sustituciones de los valores  $a_n$  y  $b_n$ , obtenemos

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n^3(b_n - c_n)(a_n b_n^2 - 2a_n b_n c_n - b_n^2 c + a_n c_n^2 + 2b_n c_n^2)}{(a_n b_n - a_n c_n - b_n c_n)^3}, \\ b_{n+1} &= \frac{b_n^3(a_n - c_n)(a_n^2 b_n - 2a_n b_n c_n - a_n^2 c + b_n c_n^2 + 2b_n c_n)}{(a_n b_n - a_n c_n - b_n c_n)^3}. \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>La cota inferior del error es cierta para  $\alpha < 3 - 2\sqrt{2}$ .

Entonces,

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^3 \left(\frac{b_n - c_n}{a_n - c_n}\right) \frac{a_n b_n^2 - 2a_n b_n c_n - b_n^2 c + a_n c_n^2 + 2b_n c_n^2}{a_n^2 b_n - 2a_n b_n c_n - a_n^2 c + b_n c_n^2 + 2b_n c_n}.$$

Denotando  $\Theta_n = \frac{a_n}{b_n}$ , y deshaciendo los cambios, respecto a  $\tau_n$ ,  $\tau^*$  y  $\tau^{**}$ , tenemos

$$\Theta_{n+1} = \Theta_n^3 \left(\frac{1 - \tau^{**}}{1 - \tau^*}\right) \frac{(\tau_n - 1)^3 + (1 - \tau^*)(1 - \tau^{**})^2}{(\tau_n - 1)^3 + (1 - \tau^{**})(1 - \tau^*)^2}. \quad (4.35)$$

Notemos que la expresión

$$\Theta_{n+1} = \Theta_n^3 \left(\frac{1 - \tau^{**}}{1 - \tau^*}\right),$$

es la misma obtenida para el error del método de Halley en [134]. En nuestro caso, denotamos el factor restante como

$$H(\tau_n) = \frac{(\tau_n - 1)^3 + (1 - \tau^*)(1 - \tau^{**})^2}{(\tau_n - 1)^3 + (1 - \tau^{**})(1 - \tau^*)^2},$$

luego

$$H'(\tau_n) = \frac{3(\tau_n - 1)^2(\tau^{**} - \tau^*)(1 - \tau^*)(1 - \tau^{**})}{[(\tau_n - 1)^3 + (1 - \tau^{**})(1 - \tau^*)]^2}.$$

Notemos que

$$\tau^* \leq \tau^{**} \leq \frac{1}{2} < 1, \forall \alpha \in [0, 3 - 2\sqrt{2}].$$

Por tanto  $H'(\tau_n) > 0$  y  $H(\tau_n)$  es creciente para  $\tau \in (0, \tau^*)$ , es decir que en definitiva

$$H(0) = \frac{(1 - \tau^*)(1 - \tau^{**})^2 - 1}{(1 - \tau^*)^2(1 - \tau^{**}) - 1} < H(\tau_n) < H(\tau^*) = \frac{1 - \tau^* + 1 - \tau^{**}}{1 - \tau^*}.$$

Con este resultado, volvamos sobre la expresión (4.35), ahora podemos escribir la secuencia

$$\Theta_n^3 \left(\frac{1 - \tau^{**}}{1 - \tau^*}\right) \frac{(1 - \tau^*)(1 - \tau^{**})^2 - 1}{(1 - \tau^*)^2(1 - \tau^{**}) - 1} \leq \Theta_{n+1} \leq \Theta_n^3 \left(\frac{1 - \tau^{**}}{1 - \tau^*}\right) \left(1 + \frac{1 - \tau^{**}}{1 - \tau^*}\right).$$

Para simplificar la escritura, y teniendo en cuenta los valores  $L$  y  $M$  introducidos en el enunciado,

$$L\Theta_n^3 \leq \Theta_{n+1} \leq M\Theta_n^3.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \Theta_{n+1} \leq M\Theta_n^3 &\leq M(M\Theta_{n-1}^3)^3 = M^{1+3}\Theta_{n-1}^{3^2} \leq \dots \\ &\leq M^{1+3+\dots+3^n}\Theta_0^{3^{n+1}} \\ &= M^{\frac{3^{n+1}-1}{2}}\Theta_0^{3^{n+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{M}} \left(\sqrt{M}\Theta_0\right)^{3^{n+1}}. \end{aligned}$$

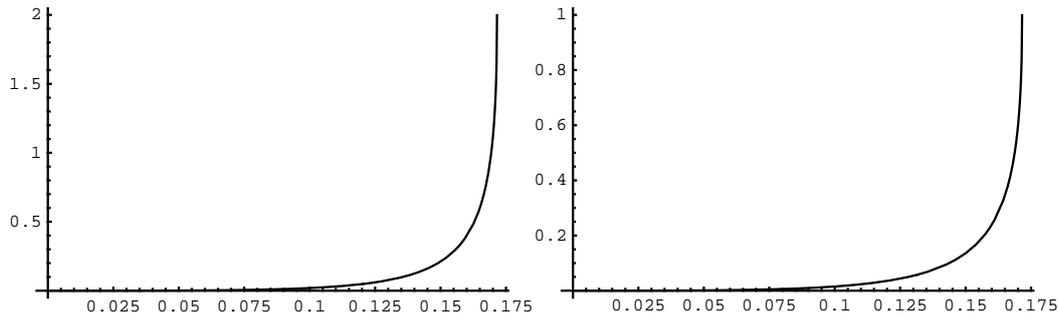


Figura 4.2: Gráficas de  $\sqrt{M}\Theta_0$  y  $\sqrt{L}\Theta_0$  correspondientes a  $M$  y  $L$ , respectivamente, definidos en el Teorema 4.19.

Es decir,

$$\Theta_n \leq \frac{1}{\sqrt{M}} \left( \sqrt{M}\Theta_0 \right)^{3^n}.$$

De aquí se deduce que

$$\tau^* - \tau_n \leq \frac{1}{\sqrt{M}} \left( \sqrt{M}\Theta_0 \right)^{3^n} (\tau^{**} - \tau_n),$$

de donde se sigue la cota superior del enunciado.

La cota inferior se obtiene sin más que tener en cuenta

$$\Theta_n \geq \frac{1}{\sqrt{L}} \left( \sqrt{L}\Theta_0 \right)^{3^n}.$$

Como observación importante, nótese que para poder obtener la cota superior es necesario exigir que

$$\sqrt{M}\Theta_0 = \sqrt{\Theta_0^3 \left( \frac{1 - \tau^{**}}{1 - \tau^*} \right) \left( 1 + \frac{1 - \tau^{**}}{1 - \tau^*} \right) \frac{\tau^*}{\tau^{**}}} < 1,$$

lo cual no es siempre cierto para  $\alpha < 3 - 2\sqrt{2}$ . En este caso, es necesario exigir una limitación ligeramente más fuerte para el parámetro  $\alpha$ , donde

$$\alpha \leq 0.169364 < 3 - 2\sqrt{2} \approx 0.17157,$$

véase la Figura 4.2.

Por último, si  $\alpha = 3 - 2\sqrt{2}$ , se tiene que  $g(\tau)$  tiene una única raíz real de multiplicidad 2

$$\tau^* = \tau^{**} = \frac{1}{2} (2 - \sqrt{2}).$$

Con la notación anterior, se tiene que

$$a_{n+1} = a_n \frac{(a_n - c_n)(a_n^2 - 3a_n c_n + 3c_n^2)}{(a_n - 2c_n)^3}.$$

Notemos que

$$8\sqrt{2}-11 \leq \frac{(a_n - c_n)(a_n^2 - 3a_n c_n + 3c_n^2)}{(a_n - 2c_n)^3} = \frac{2(2\sqrt{2}t^2 - 4\sqrt{2}t - 2t + 3\sqrt{2} + 2)}{(-2t + \sqrt{2} + 2)^3} \leq \frac{3}{8},$$

y así, la segunda parte del resultado se sigue inmediatamente. □

En el resultado anterior ha sido necesario exigir que

$$\alpha \leq 0.169364 < 3 - 2\sqrt{2} \approx 0.17157$$

para poder asegurar la convergencia cúbica del método de Chebyshev. Queda pendiente de estudio lo que ocurre para

$$0.169364 < \alpha \leq 3 - 2\sqrt{2} \approx 0.17157.$$

## 4.4. Aplicaciones

A continuación presentamos unos resultados teóricos referentes a los operadores lineales, que nos han sido de mucha utilidad para poder realizar el segundo de los ejemplos que siguen en este apartado.

Si  $F : X \rightarrow Y$  es un operador dos veces diferenciable en un punto  $x_0 \in X$ , entonces  $F''(x_0) \in \mathcal{B}(X^2, Y)$ , donde  $\mathcal{B}(X^2, Y)$  es el conjunto de los operadores bilineales acotados de  $X^2 = X \times X$  en  $Y$ , con la norma

$$\|B\| = \sup_{\|x_1\|, \|x_2\| \leq 1} \|B(x_1, x_2)\|, \quad B \in \mathcal{B}(X^2, Y).$$

Es conocido, [30], que existe una isometría entre el espacio  $\mathcal{B}(X^2, Y)$  y  $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$ . A partir de ahora, y teniendo en cuenta esta isometría, identificaremos los elementos de ambos espacios. También se sabe (véase [106]), que  $F''(x_0)$  es un operador bilineal simétrico, es decir,

$$F''(x_0)x_1x_2 = F''(x_0)x_2x_1 \quad \text{para todo } x_1, x_2 \in X.$$

Para un operador bilineal de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$  empleamos la notación dada por una matriz de bloques [12]

$$B = \begin{pmatrix} b_1^{11} & b_1^{12} \\ b_1^{21} & b_1^{22} \\ b_2^{11} & b_2^{12} \\ b_2^{21} & b_2^{22} \end{pmatrix}. \quad (4.36)$$

Entonces, si  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$ , se tiene que

$$\begin{aligned} B(x, y) &= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} b_1^{11} & b_1^{12} \\ b_1^{21} & b_1^{22} \\ b_2^{11} & b_2^{12} \\ b_2^{21} & b_2^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_1^{11}x_1 + b_1^{21}x_2 & b_1^{12}x_1 + b_1^{22}x_2 \\ b_2^{11}x_1 + b_2^{21}x_2 & b_2^{12}x_1 + b_2^{22}x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_1^{11}x_1y_1 + b_1^{21}x_2y_1 + b_1^{12}x_1y_2 + b_1^{22}x_2y_2 \\ b_2^{11}x_1y_1 + b_2^{21}x_2y_1 + b_2^{12}x_1y_2 + b_2^{22}x_2y_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En  $\mathbb{R}^2$  consideramos la norma del máximo

$$\|(x_1, x_2)\| = \max\{|x_1|, |x_2|\},$$

y en  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  la norma dada por

$$\|L\| = \max\{|a_{11}| + |a_{12}|, |a_{21}| + |a_{22}|\},$$

con

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Entonces se comprueba fácilmente [107] que la norma del operador bilineal  $B$  definido por (4.36) viene dada por

$$\|B\| = \sup_{\|x\|=1} \max_i \sum_{j=1}^2 \left| \sum_{k=1}^2 b_i^{jk} x_k \right|.$$

Además se tiene la siguiente estimación de la norma anterior

$$\|B\| \leq \max\{|b_1^{11}| + |b_1^{12}| + |b_1^{21}| + |b_1^{22}|, |b_2^{11}| + |b_2^{12}| + |b_2^{21}| + |b_2^{22}|\}.$$

El resultado de componer una aplicación bilineal  $B$  y una lineal  $L$  es una aplicación bilineal  $LB$ . Con la notación anterior, tenemos que la matriz asociada a  $LB$  es

$$LB = \begin{pmatrix} a_{11}b_1^{11} + a_{12}b_2^{11} & a_{11}b_1^{12} + a_{12}b_2^{12} \\ a_{11}b_1^{21} + a_{12}b_2^{21} & a_{11}b_1^{22} + a_{12}b_2^{22} \\ a_{21}b_1^{11} + a_{22}b_2^{11} & a_{21}b_1^{12} + a_{22}b_2^{12} \\ a_{21}b_1^{21} + a_{22}b_2^{21} & a_{21}b_1^{22} + a_{22}b_2^{22} \end{pmatrix}.$$

Si  $F$  es un operador de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$  que a un par  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  le hace corresponder  $(f(x, y), g(x, y)) \in \mathbb{R}^2$ , tenemos que la derivada segunda de  $F$  en un punto  $(x_0, y_0)$  es el operador de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$  dado por la matriz de la forma (4.36)

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \\ g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{yy} \end{pmatrix},$$

donde las derivadas parciales anteriores están evaluadas en el punto  $(x_0, y_0)$ .

En este punto, estamos en condiciones de mostrar varios ejemplos en los que aplicamos los resultados que hemos presentado en el desarrollo del presente capítulo.

**Ejemplo 4.4.** Consideremos la ecuación  $p(t) = 0$  con

$$p(t) = t^2 - 30t + 200 = (t - 10)(t - 20). \quad (4.37)$$

Denotamos  $\{t_n\}$  la sucesión de Chebyshev dada por la expresión

$$t_{n+1} = t_n - \left(1 + \frac{L_p(t_n)}{2}\right) \frac{p(t_n)}{p'(t_n)}.$$

Apliquemos ahora la teoría local de Kantorovich, con los datos siguientes:

$$\begin{aligned} r_1 &= 10 \\ p'(t) &= 2t - 30 \\ p''(t) &= 2 \\ p'(r_1) &= -10. \end{aligned}$$

Luego tenemos que

$$\begin{aligned} \Gamma_n &= \frac{1}{p'(r_1)} = -\frac{1}{10} \\ b &= \left| \frac{p''(t)}{p'(r_1)} \right| = \frac{1}{5}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Con lo cual

$$\frac{u^*}{b} = 5u^* = 5(0.331241) \approx 1.656205.$$

Por lo tanto, si

$$x_0 \in (8.343795, 11.656205),$$

entonces hay convergencia (teórica) para la sucesión  $\{t_n\}$  de Chebyshev. Con la  $\gamma$ -teoría se obtiene el mismo resultado, debido a que

$$p^{(k)}(r_1) = 0, \quad \forall k \geq 3.$$

Notemos que este radio de convergencia es teórico. En la práctica se obtiene convergencia para puntos de partida más alejados [65].

Cuadro 4.3: Comparación de la velocidad de convergencia entre los métodos de Chebyshev, Halley y la aceleración convexa del método de Newton.

$n$	$t_n$	$u_n$	$v_n$
0	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
1	8.148148148148148	8.571428571428571	9.333333333333333
2	9.936934743362793	9.980430528375734	9.999847409781033
3	9.999995122930333	9.999999925494193	10.000000000000000
4	10.000000000000000	10.000000000000000	10.000000000000000

**Ejemplo 4.5.** Volvamos a retomar la ecuación (4.37), y comparemos la velocidad de convergencia de las sucesiones  $\{t_n\}$ ,  $\{u_n\}$  y  $\{v_n\}$  que generan los métodos de Chebyshev, Halley y la aceleración convexa del método de Newton, respectivamente. Estas sucesiones vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= t_n - \frac{(t_n^2 - 30t_n + 200)(5t_n^2 - 150t_n + 1100)}{8(t_n - 15)^3}, \\ u_{n+1} &= t_n - \frac{2(t_n^2 - 30t_n + 200)(t_n - 15)}{(3t_n^2 - 90t_n + 700)}, \\ v_{n+1} &= t_n - \frac{(3t_n^2 - 90t_n + 700)(t_n^2 - 30t_n + 200)}{4(t_n^2 - 30t_n + 250)(t_n - 15)}. \end{aligned}$$

Si empezamos en el mismo punto  $t_0 = u_0 = v_0 = 0$ . Obtenemos las sucesiones registradas en el Cuadro 4.3. Como vemos, en este caso, el método de Chebyshev es más lento que los otros dos.

**Ejemplo 4.6.** (Aplicación de la teoría local de Kantorovich aplicada al método de Chebyshev). Ahora nos ocupamos de resolver el sistema de ecuaciones  $F(x, y) = 0$ , siendo

$$F(x, y) = (x^2 - y - 2, y^3 - x^2 + y + 1).$$

Este sistema tiene solución exacta  $x^* = (\sqrt{3}, 1)$ . La sucesión de Chebyshev para resolver dicho sistema viene dada por

$$x_{n+1} = x_n - \left( I + \frac{1}{2} L_F(x_n) \right) \Gamma_n n F(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Utilizaremos la teoría sobre operadores lineales que presentamos al inicio de este apartado. Así, llamamos  $X = (x, y)$ , luego

$$F'(X) = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ -2x & 3y^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora se tiene que

$$F'(x^*) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & -1 \\ -2\sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}.$$

Así,  $\det(F'(x^*)) = 6\sqrt{3} \neq 0$ , por lo tanto, existe  $\Gamma = F'(x^*)^{-1}$ ,

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{6\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Además,

$$F''(X) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}.$$

Como puede observarse, necesitamos definir el dominio. Tenemos que  $\|x - x^*\| \leq 1$  si y solo si  $|x - \sqrt{3}| < 1$  y  $|y - 1| < 1$ , lo cual implica necesariamente  $y \in (0, 2)$ . Luego se tiene

$$\Gamma F''(X) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{y}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}.$$

Tomando norma tenemos

$$\|\Gamma F''(X)\| \leq \max \left\{ \frac{1+y}{3}, 2y \right\}.$$

Como  $y \in (0, 2)$ , entonces

$$b = \|\Gamma F''(X)\| = 4.$$

Aplicando el teorema 4.6

$$\|x_0 - x^*\| \leq \frac{0.331241}{4} = 0.08281025.$$

Por lo tanto, la secuencia de Chebyshev converge.

Notemos que esta bola de accesibilidad obtenida de forma teórica es muy restrictiva. En la práctica, podemos alcanzar la solución empezando desde puntos más alejados de la raíz, ejemplo el punto  $(6, 3)$ , como se muestra en el Cuadro 4.4.

**Ejemplo 4.7.** (Aplicación de la  $\gamma$ -teoría de Smale aplicada al método de Chebyshev) Ahora vamos a resolver el mismo sistema de ecuaciones del ejemplo anterior, aplicando la  $\gamma$ -teoría de Smale. Recordemos la solución exacta  $x^* = (\sqrt{3}, 1)$ .

$$\Gamma F''(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cuadro 4.4: Regiones de accesibilidad a las raíces del método de Chebyshev.

$n$	$x_n$	$y_n$
0	6.000000000000000000	3.000000000000000000
1	2.719439840217446527	1.727937814357567444
2	1.830721648025601499	1.138820258896789643
3	1.733249320860063453	1.003038870277247239
4	1.732050823057711034	1.000000046348271498
5	1.732050807568877294	1.000000000000000000
6	1.732050807568877294	1.000000000000000000

Tomando norma se tiene

$$\|\Gamma F''(x^*)\| \leq \|\Gamma\| \|F''(x^*)\| \leq 6 \max \left\{ \frac{5}{6\sqrt{3}}, \frac{2}{3} \right\} = 4.$$

Notemos que  $\Gamma F^{(k)}(x^*) = 0$ ,  $\forall k > 3$ . Por otro lado, de (4.14) obtenemos

$$\gamma = \max \left\{ 1, \sqrt{\frac{2}{3}} \right\} = 1.$$

Por el teorema 4.7 concluimos que como

$$\|x_0 - x^*\| \leq \frac{u^*}{\gamma} = 0.126511.$$

Por lo tanto, el método de Chebyshev converge.

**Ejemplo 4.8.** En el espacio  $X = C[0, 1]$  para toda función continua en el intervalo  $[0, 1]$  con la norma

$$\|x\| = \max_{s \in [0, 1]} |x(s)|,$$

consideramos la ecuación  $F(x) = 0$ , siendo

$$F(x)(s) = x(s) - s + \frac{1}{2} \int_0^1 s \cos(x(t)) dt, \quad x \in C[0, 1], \quad s \in [0, 1].$$

Con la notación del teorema 4.15 y por  $x_0 = x_0(s) = s$ , usamos la definición de la primera y la segunda derivada Fréchet del operador  $F$  obtenemos

$$a = b = \frac{\text{sen } 1}{2 - \text{sen } 1 + \cos 1}, \quad k = \frac{1}{2 - \text{sen } 1 + \cos 1}.$$

Del polinomio

$$p(t) = \frac{k}{6}t^3 + \frac{b}{2}t^2 - t + a = 0.$$

llegamos a

$$p(t) = \frac{1}{6(2 - \operatorname{sen} 1 + \operatorname{cos} 1)} [t^3 + 3(\operatorname{sen} 1)t^2 - 6(2 - \operatorname{sen} 1 + \operatorname{cos} 1)t + 6 \operatorname{sen} 1].$$

Las dos raíces positivas de  $p$  son

$$r_1 = 0.6095694860276291, \quad r_2 = 1.70990829134757.$$

Entonces, tenemos que  $F(x) = 0$  tiene una raíz en  $\overline{B}(x_0, r_1)$ . Además, esta es la única raíz en  $B(x_0, r_2)$ . Mostramos ahora algunos límites de error del método de Chebyshev

$$\|x^* - x_n\| \leq r_1 - t_n.$$

Para  $n = 0$ , el error es 0.6095694860276291, para  $n = 1$ , 0.0534834955243040, para  $n = 2$ , el error cometido es 0.0001520166774545, para  $n = 3$ , el error correspondiente es 0.00000000000042804 y, por último, para  $n \geq 4$  el error es menor que  $10^{-15}$ .

# Bibliografía

- [1] C. ALTMAN: Iterative methods of higher order. *Bull. Acad. Poll. Sci. (Sér. Sci. Math; Astr. Phys.)* **IX** (1961), 62–68.
- [2] S. AMAT, C. BERMÚDEZ, S. BUSQUIER AND S. PLAZA: On the dynamics of the Euler iterative function. *Appl. Math. Comput.* **197** (2008), 725–732.
- [3] S. AMAT, S. BUSQUIER AND J. M. GUTIÉRREZ: Gometric constructions of iterative functions to solve nonlinear equations. *J. Comput. Appl. Math.* **157** (2003), 197–205.
- [4] S. AMAT, S. BUSQUIER, J. M. GUTIÉRREZ AND M. A. HERNÁNDEZ: On the global convergence of Chebyshev’s iterative method. *J. Comput. Appl. Math.* **220** 2 (2008), 17–21.
- [5] S. AMAT, S. BUSQUIER AND Á. A. MAGREÑÁN: Reducing chaos and bifurcations in Newton-type methods (Accepted in Abstract And Applied Analysis).
- [6] S. AMAT, S. BUSQUIER AND Á. A. MAGREÑÁN: Reducing the bad zones of convergence of a two-step Newton-type method (Submitted 2013).
- [7] S. AMAT, S. BUSQUIER AND S. PLAZA: Dynamics of a family of third-order iterative methods that do not require using second derivatives. *Appl. Math. Comput.* **154** 3 (2004), 735–746.
- [8] S. AMAT, S. BUSQUIER AND S. PLAZA: Dynamics of the King and Jarratt iterations. *Aequationes Math.* **69** 3 (2005), 212–223.
- [9] S. AMAT, S. BUSQUIER AND S. PLAZA: On the dynamics of a family of third-order iterative functions. *ANZIAM J.* **48** 3 (2007), 343–359.
- [10] S. AMAT, S. BUSQUIER AND S. PLAZA: Review of some iterative root-finding methods from a dynamical point of view. *SCIENTIA, Series A: Math. Sciences*, **10** (2004), 3–35.

- [11] E. APARICIO: Chebyshev y los números primos. Acta de la IV jornadas matemáticas Luso-Españolas. *Jaca*, (1997), 157–182.
- [12] I. K. ARGYROS: A Newton-like method for solving nonlinear equations in Banach Space. *Acta. Math. Hung.* **27** (1992), 368–378.
- [13] I. K. ARGYROS: *Convergence and applications of Newton-type iterations*. Springer, New York, 2008.
- [14] I. K. ARGYROS: The convergence of a Halley-Chebysheff-type method under Newton-Kantorovich hypotheses. *Appl. Math. Lett.* **6** 5 (1993), 71–74.
- [15] I. K. ARGYROS AND D. CHEN: Results on Chebyshev method in Banach space. Universidad Católica del Norte. Antofagasta. Chile. *Proyecciones*, **12** 2 (1993), 119–128.
- [16] I. K. ARGYROS, J. A. EZQUERRO, J. M. GUTIÉRREZ, M. A. HERNÁNDEZ AND S. HILOUT: On the semilocal convergence of efficient Chebyshev-Secant-type methods. *J. Comput. Appl. Math.* **235** (2011), 3195–3206.
- [17] I. K. ARGYROS AND J. M. GUTIÉRREZ: A Unified Approach for Enlarging the Radius of Convergence for Newton’s Method and Applications. *Nonlinear Funct. Anal. and Appl.* **10** 4 (2005), 555–563.
- [18] A. F. BEARDON: *Iteration of rational functions*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [19] R. BEHL, V. KANWAR AND K. K. SHARMA, Another simple way of deriving several iterative functions to solve nonlinear equations. *Journal of Applied Mathematics*, Accepted on October 4th. (2012).
- [20] P. BLANCHARD: Complex analytic dynamics on the Riemann sphere. *Bull. of AMS* (new series) **11**, 1 (1984), 85–141.
- [21] P. BLANCHARD AND A. CHIU: Complex dynamics: an informal discussion. Fractal geometry and analysis. Eds. J. Bélair & S. Dubuc. *Kluwer Academic Publishers*, (1991), 45–98.
- [22] L. BLUM, F. CUCKER, M. SHUB AND S. SMALE: *Complexity and real computation. Mathématiques et Applications*. Springer Verlag, New York, 1997.
- [23] E. BODEWIG: Über das Eulersche Verfahren zur Auflösung numerischer Gleichungen. *Comm. Math. Helv.* **8** (1935), 1–4.

- [24] A. N. BOGOLYUBOV AND D. A. GRAVE: Autobiographical notes. *Istoriko-matematishe issledovania*, **34** (1993), 219–246.
- [25] N. BOURBAKI: *Elements of mathematics, General topology*. Hermann, 1966.
- [26] P. BUTZER AND F. JONGMANS: P. L. Chebyshev (1821–1894): A guide to his life and work. *J. Approx. Theory*, **96** (1999), 111–138.
- [27] V. CANDELA AND A. MARQUINA: Recurrence Relations for Rational Cubic Methods I: The Halley Method. *Computing*, **44** (1990), 169–184.
- [28] V. CANDELA AND A. MARQUINA: Recurrence Relations for Rational Cubic Methods II: The Chebyshev Method. *Computing* **45** (1990), 113–130.
- [29] L. CARLESON AND T. GAMELIN: *Complex Dynamics*. Springer-Verlag, Berlín-Heidelberg, 1993.
- [30] H. CARTAN: *Calcul Différentiel*. Hermann, 1971.
- [31] A. CAYLEY: The Newton-Fourier imaginary problem. *American Journal of Mathematics*, (1897), 2–97.
- [32] P. L. CHEBYSHEV: Complete Collected Works (1946–1951), Izdatel'stvo Akad. Nauk SSR, Moscow/Leningrad **Vol. I** (1946), 342 pp. **Vol. II** (1947), 520 pp. **Vol III** (1948), 414 pp. **Vol IV** (1948), 255 pp. **Vol V**, other works, biographical materials, (1951), 474 pp.
- [33] P. L. CHEBYSHEV: Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions. *Mém. Acad. St. Pétersb.* **7** 6 (1859), 199–291.
- [34] P. L. CHEBYSHEV: Théorie de mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes. *Mén. Des. Sav. Étr. Prés. Acad. de St. Pétersb.* **7** (1854), 539–568.
- [35] K. V. CHEBYSHEVA: Some information on ancestors and descendants of the Chebyshev family. *Istoriko-matematicheskie issledovania* (1990), (en Ruso) 32-33, 431–450.
- [36] D. CHEN: Standard Kantorovich theorem of the Chebyshev method on complex plane. *International Journal of Computer Mathematics*, **42** 1, 2 (1992), 67–70.
- [37] F. CHICHARRO, A. CORDERO, J. M. GUTIÉRREZ Y J. R. TORREGROSA: Complex dynamics of derivative-free methods for nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation* **219** (2013), 7023–7035.

- [38] C. CHUN: Certain improvement of Chebyshev-Halley methods with accelerated fourth-order convergence. *Appl. Math. Comput.* **189** (2005), 1559–1568.
- [39] C. CHUN: Some second-derivative-free variants of Chebyshev-Halley methods. *Appl. Math. Comput.* **191** (2007), 410–414.
- [40] C. CHUN: Some variants of Chebyshev-Halley methods free from second derivative. *Appl. Math. Comput.* **191** (2007), 193–198.
- [41] A. CORDERO, J. R. TORREGROSA AND P. VINDEL: Dynamics of a family of Chebyshev-Halley type methods. *Appl. Math. Comput.* **219** 16 (2013), 8568–8583.
- [42] J. H. CURRY, L. GARNETT AND D. SULLIVAN: On the iteration of rational functions: Computer experiments with Newton's method. *Commun. Math. Phys.* **91** (1983), 267–277.
- [43] J. P. DEDIEU: *Points fixes, zéros et la methode de Newton. Mathématiques et Applications*. Springer Verlag, Berlin, 2006.
- [44] M. A. DILONÉ-ALVARADO, M. GARCÍA-OLIVO AND J. M. GUTIÉRREZ: A note on the semilocal convergence of Chebyshev's method. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 23 (2012), 215–228.
- [45] L. EULER: *Introductio in analysin infinitorum, Serie 2 Vol X, Bosquet, Lucerne, (1748), reprinted in the Opera Omnia, Series I Vols. VIII and IX. English translation by John Blanton. Springer-Verlag, (1988) and (1990). Facsimile edition by Anastaltique, Brussels, 1967.*
- [46] L. EULER: Opera Omnia. *B. G. Teubner, Serie 1*, **10** (1913), 422–455.
- [47] J. A. EZQUERRO, J. M. GUTIÉRREZ AND M. A. HERNÁNDEZ: A Construction Procedure of Iterative Methods with Cubical Convergence. *Appl. Math. Comput.* **85** (1997), 181–199.
- [48] J. A. EZQUERRO, J. M. GUTIÉRREZ, M. A. HERNÁNDEZ, N. ROMERO Y M. J. RUBIO: El método de Newton: de Newton a Kantorovich. *La Gaceta de la RSME*, **13** 1 (2010), 53–76.
- [49] J. A. EZQUERRO, J. M. GUTIÉRREZ, M. A. HERNÁNDEZ, N. ROMERO Y M. J. RUBIO: Relaciones de recurrencia en el método de Newton-Kantorovich. *Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Rioja*. (2010), 319-333.

- [50] J. A. EZQUERRO AND M. A. HERNÁNDEZ: Chebyshev's approximations algorithms for operators with  $w$ -conditioned first derivative. *Journal of Computation Analysis and Applications*, **9** 1 (2007), 93–101.
- [51] J. A. EZQUERRO AND M. A. HERNÁNDEZ: Nonlinear equations in Banach spaces, Second-order. *Appl. Math. and Optimization*, **41** (2000), 227–236.
- [52] M. J. FEIGENBAUM: Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics*, **19** (1978), 25–52.
- [53] W. GANDER: On Halley's iteration method. *Amer. Math. Monthly* **92**, (1985), 131–134.
- [54] M. GARCÍA-OLIVO Y J. M. GUTIÉRREZ: Dinámica del método de Chebyshev para ecuaciones con raíces dobles. *Congreso Ávila RSME*, 2011.
- [55] M. GARCÍA-OLIVO Y J. M. GUTIÉRREZ: El «Cálculo de las raíces de una ecuación» de P. L. Chebyshev. *Actas XI Congreso SEHCYT*, (2012), 479–490.
- [56] M. GARCÍA-OLIVO Y J. M. GUTIÉRREZ: Estudio dinámico del método de Chebyshev aplicado a polinomios cúbicos. *Congreso Oviedo RSME*, 2009.
- [57] M. GARCÍA-OLIVO Y J. M. GUTIÉRREZ: *La obra «El cálculo de las raíces de una ecuación» de P. L. Chebyshev*. Editorial Académica Española, LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG. Alemania, 2012.
- [58] M. GARCÍA-OLIVO Y J. M. GUTIÉRREZ: *Notas históricas sobre el método de Chebyshev para resolver ecuaciones algebraicas*. *Miscelanea Matemática, Sociedad Matemática Mexicana*. **57** (2013), 63–83.
- [59] M. GARCÍA-OLIVO, J. M. GUTIÉRREZ AND L. J. HERNÁNDEZ-PARICIO: On the general convergence of Chebyshev's method. *IMAC Symposium on Dynamical Systems: Trends and perspectives*, Castellón, 2011.
- [60] W. J. GILBERT: Generalizations of Newton's method. *Fractals*, **9** 3 (2001), 251–262.
- [61] D. GONZÁLEZ-SÁNCHEZ: *Problemas de valor inicial en la construcción de sucesiones mayorizantes para el método de Newton en espacios de Banach (Tesis Doctoral)*. Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja, 2012.
- [62] M. GRAU AND J. L. DÍAZ-BARRERO: An improvement of the Euler-Chebyshev iterative method. *J. Math. Anal. Appl.* **315** (2006), 1–7.

- [63] M. GRAU-SÁNCHEZ AND J. M. GUTIÉRREZ: Zero-finder methods derived from Obreshkov's techniques. *Applied Mathematics and Computation*, **215** 8 (2009), 2992–3001.
- [64] M. GRAU-SÁNCHEZ, J. M. GUTIÉRREZ AND M. PERIS: Accelerated iterative methods for finding solutions of a systems of nonlinear equations *Applied Mathematics and Computation* **190** (2007), 1815–1823.
- [65] J. M. GUTIÉRREZ: *El método de Newton en espacios de Banach (Tesis Doctoral)*. Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja, 1995.
- [66] J. M. GUTIÉRREZ AND M. A. HERNÁNDEZ: A family of Chebyshev-Halley type methods in Banach spaces. *Bull. Austral. Math. Soc.* **55** (1997), 113–130.
- [67] J. M. GUTIÉRREZ AND M. A. HERNÁNDEZ: New Recurrence Relations for Chebyshev method. *Appl. Math. Lett.* **10** 2 (1997), 63–65.
- [68] J. M. GUTIÉRREZ, Á. A. MAGREÑÁN AND J. L. VARONA: The Gauss-Seidelization of iterative methods for solving nonlinear equations in the complex plane. *Appl. Math. Comput.* **218** (2011), 2467–2479.
- [69] J. M. GUTIÉRREZ Y S. PLAZA: *Estudio dinámico del método de Newton para resolver ecuaciones no lineales*. Servicio de publicaciones de la Universidad de La Rioja (en imprenta).
- [70] H. J. HAMILTON: A type of variation on Newton's method. *Amer. Math. Mo.* **57** (1950), 517–522.
- [71] M. A. HERNÁNDEZ: Chebyshev's approximation algorithms and applications. *Computers and Mathematics with Applications*, **41** (2001), 433–445.
- [72] M. A. HERNÁNDEZ: Newton-Raphson's method and convexity. *Zb. Rad. Prirod. Mat. Fak. Ser. Mat.* **22** (1992), 159–166.
- [73] M. A. HERNÁNDEZ: Reduced recurrence relations for the Chebyshev method. *Journal of Optimizations Theory and Applications*, **98** 2 (1998), 385–739.
- [74] M. A. HERNÁNDEZ AND M. A. SALANOVA: A Family of Chebyshev Type Methods in Banach Spaces. *International Journal of Computer Mathematics*, **61** (1996), 1–2.

- [75] M. A. HERNÁNDEZ Y M. A. SALANOVA: *La convexidad en la resolución de ecuaciones escalares no lineales*. Servicio de publicaciones de la Universidad de la Rioja, Logroño, 1996.
- [76] M. A. HERNÁNDEZ AND M. A. SALANOVA: Modification of the Kantorovich assumptions for semilocal convergence of the Chebyshev method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **126** 1, 2 (2000), 131-143.
- [77] A. S. HOUSEHOLDER: *The numerical treatment of a single nonlinear equation*. McGraw-Hill, New York, 1970.
- [78] L. V. KANTOROVICH: On Newton's method for functional equations (en ruso). *Dokl Akad. Nauk SSSR*, **59** (1948), 1237–1240.
- [79] L. V. KANTOROVICH: The majorant principle and Newton's method (en ruso). *Dokl Akad. Nauk SSSR*, **76** (1951), 17–20.
- [80] L. V. KANTOROVICH AND G. P. AKILOV: *Functional Analysis*. Pergamon Press, Oxford, 1982.
- [81] V. KANWAR, S. SINGH AND S. BAKSHI, Simple geometric constructions of quadratically and cubically convergent iterative functions to solve nonlinear equations. *Numerical Algorithms*, **4** (2008), 95–107.
- [82] N. KJURKCHIEV: Initial approximations in Euler-Chebyshev's method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **58** (1995), 233–236.
- [83] K. KNEISL: *Dynamical and numerical properties of root-finding algorithms*, (working title). *Ph. D. dissertation, University of North Carolina at Chapel Hill* (in preparation).
- [84] K. KNEISL: Julia sets for the Super-Newton method, Cauchy's method and Halley's method. *Chaos*, **Vol. XI, 2** (2001), 359–370.
- [85] J. KOU: On Chebyshev-Halley with sixth-order convergence for solving nonlinear equations. *Appl. Math. Comput.* **190** (2007), 126–131.
- [86] J. L. LAGRANGE: Encyclopaedia Britannica 15th ed. *Struik, D. J.* 1995.
- [87] J. L. LAGRANGE: *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés. Oeuvres de Lagrange*, éd. **3**, Gauthier-Villars, París, 1808.
- [88] J. D. LAMBERT: *Computational methods in ordinary differential equations*. John Wiley and Sons, Chichester, 1976.

- [89] R. LAUBENBACHER, G. MCGRATH AND D. PENGELLEY: Lagrange and the solution of numerical equations. *Historia Math.* **28** 3 (2001), 220–231.
- [90] F. LUQUÍN: *Sobre dos no-descubrimientos matemáticos de P. L. Chebyshev*. *La Gaceta de la RSME*, **11** 2 (2008), 279–289.
- [91] S. MARUSTER: On the tangent parabola method for nonlinear equations in one variable. *Seminar of Computational Mathematics, Depart. of Informatics, West Univ. Timisoara*, **1** (2001), 1–9.
- [92] C. MCMULLEN: Families of rational maps and iterative root-finding algorithms. *Ann. Math.* **Vol. CXXV** (1987), 467–493.
- [93] A. MELMAN: Geometry and convergence of Euler’s and Halley’s methods. *IAM*, **39** 4 (1997), 728–735.
- [94] J. MILNOR: Dynamics in one complex variable: introductory lecture. *SIAM*, **39** 4 (1997), 728–735.
- [95] N. OBRESHKOV: Neue quadraturformeln. *Abh. Preuss. Akad. Wissenschaft. Math. Nat. Kl.* **4** (1940), 1–20.
- [96] A. M. OSTROWSKI: *Solution of equations in euclidean and Banach spaces*. Academic Press. 1966.
- [97] D. K. GUPTA AND P. K. PARIDA: Semilocal convergence of a family of third-order Chebyshev-type methods under a mild differentiability condition. *J. Comput. Appl. Math.* **87** (2010), 3330–3343.
- [98] H. O. PEITGEN, D. SAUPE Y F. VON-HAESLER, Cayley’s problem and Julia Sets, *The Mathematical Intelligencer*, **6** 2 (1984), 11–20.
- [99] M. S. PETKOVIĆ, D. D. HERCEG AND S. M. ILIĆ: *Point Estimation Theory and its Applications*. University of Novi Sad, Institute of Mathematics, Novi Sad, 1997.
- [100] M. S. PETKOVIĆ, L. D. PETKOVIĆ AND D. HERCEG: On Schröder’s families of root-finding methods. *J. Comput. Appl. Math.* **233** (2010), 1755–1762.
- [101] D. PHAM ET M. GHINEA: Sur une méthode d’iteration dans la théorie des equations. *Compt. Rend. Paris*, **249** (1959), 2262–2264.
- [102] S. PLAZA: *Conjugacy classes of some numerical methods*. *Proyecciones*, **20** 1 (2001), 1–17.

- [103] S. PLAZA AND N. ROMERO: Attracting cycles for the relaxed Newton's method. *J. Comput. Appl. Math.* **235** 1 (2011), 3238–3244.
- [104] V. E. PRUDNIKOV: *P. L. Chebyshev, Scientist and Teacher*. Moscow, 1950.
- [105] V. E. PRUDNIKOV: *Pafnuti Lvovich Chebyshev 1821–1894*. Nauka, Leningrad, 1976.
- [106] L. B. RALL: *Computational Solution of Nonlinear Operator Equations*. Robert E. Krieger Publishing Company, Inc. New York, 1979.
- [107] L. B. RALL: Quadratic equations in Banach spaces. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **10** (1961), 314–332.
- [108] W. C. RHEINBOLDT: An adaptive continuation process for solving systems of nonlinear equations. *Polish Academy of Sciences Banach Ctr. Publ.* **3** (1961), 314–332.
- [109] H. W. RICHMOND: On certain formulae for numerical approximation. *J. London Math. Soc.* **19** (1944), 31–38.
- [110] G. E. ROBERTS AND J. H. KOBELSKI: Newton's versus Halley's methods: a dynamical systems approach. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* **14** 10 (2004), 3459–3475.
- [111] F. M. RODRÍGUEZ-VÁSQUEZ: *Desarrollo conceptual de los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones no lineales: un enfoque didáctico* (Tesis Doctoral). Universidad de Salamanca, 2010.
- [112] R. A. SAFIEV, On some iterative processes (in russian). *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.* (Translated into English by L.B. Rall as MRC Technical Summary Report, No. 649, Univ. Wisconsin-Madison, 1966). *4*, 139–143 (1964).
- [113] G. S. SALEHOV: *On the convergence of the process of tangent hyperbolas* (in Russian). *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **82** (1952), 525–528.
- [114] T. R. SCAVO AND J. B. THOO: On the geometry of Halley's method. *Amer. Math. Monthly*, **102** (1995), 417–426.
- [115] E. SCHRÖDER: *On infinitely many algorithms for solving equations*. *Mathematische annalen*, in 1870. Translated by G. W. Stewar, November 1992, revised in January of 1993.
- [116] E. SCHRÖDER: Über unendlich viele algorithmen zur auflösung der gleichungen. *Math. Annal.* **2** (1870), 317–365.

- [117] O. SHEYNIN: *Studies in the History of Statistics and Probability*. Berlin, 2009.
- [118] M. SHUB AND S. SMALE: Computation complexity: O the geometry of polynomilas and a theory of cost, I. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **18** (1985), 107–142.
- [119] H. B. SINACEUR: Deux moments dans l’histoire du théorème d’algèbre de Ch F Sturm. *Rev. Histoire Sci.* **41** 2 (1988), 99–132.
- [120] H. B. SINACEUR: L’Oeuvre algébrique de Charles François Sturm. *en Collected Works of Charles François Sturm*, Birkhäuser Verlag, Basilea, (2009), 13–24.
- [121] S. SMALE: Newton’s Method Estimates from Data at One Point. *Proc. of a conf. in Honor of Gail Young*, Laramie, New York, **2** (1977), 129–142.
- [122] P. SPEZIALI: *Biography in Dictionary of Scientific Biography*. New York, 1970–1990.
- [123] K. G. STEFFENS: *The History of Approximation theory, From euler to Bernstein*. Birkhäuser Boston. Springer Science Media Inc. 2006.
- [124] J. F. TRAUB: *Iterative methods for the solution of equations*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1964.
- [125] J. F. TRAUB: On a class of iteration formulas and some historical notes. *Comm. ACM*, **4** 3 (1961), 276–278.
- [126] J. L. VARONA: Graphic and Numerical Comparisons between iterative methods. *Math. Intelligencer*, **24** 1 (2002), 37–46.
- [127] E. VRSCAY AND W. GILBERT: Extraneous fixed points, basin boundaries and chaotic dynamics for Schröder and König rational iteration functions. *Numer. Math.* **52** (1988), 1–16.
- [128] H. S. WALL: A modification of Newton’s method. *Am. Math. Mo.* **55** (1948), 90–94.
- [129] D. R. WANG AND F. G. ZHAO: The theory of Smale’s point estimation and its applications. *J. Comput. Appl. Math.* **60** (1995), 253–269.
- [130] X. WANG AND D. HAN: On Dominating Sequence Method in the point Estimate and Smale’s Theorem. *Scientia Sinica Ser. A.* **60** (1989), 905–913.

- [131] P. WYNN: On a cubically convergent process for determining the zeros of certain functions. *MTAC*, **10** (1956), 97–100.
- [132] J. C. YAKOUBSOHN: Une Constante Universelle pour la Convergence de la Méthode de Newton. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, **320** (1995), 385–390.
- [133] T. YAMAMOTO: On the Method of Tangent Hyperbolas in Banach Spaces. *J. Comput. Appl. Math.* **21** (1988), 75–86.
- [134] S. ZHENG: Point Estimates for Halley’s Iteration. *Acta Math. Appl. Sinica*, **14** (1991), 376–383.
- [135] S. ZHENG AND D. ROBBIE: A note on the convergence of Halley’s method for solving operator equations. *J. Austral. Math. Soc. Ser. B.* **37** (1995), 16–25.
- [136] Geneva History of Science Museum, May, 2010. <http://www.ville-ge.ch/culture/mhs>
- [137] C. E. PUENTE: La esencia del caos. University of California, Davis. <http://puente.lawr.ucdavis.edu>
- [138] E. SANDIFIER: Ed Sandifier’s how Euler did it. The Mathematical Association of America. <http://www.maa.org/news/howeulerdidit.html>
- [139] G. W. STEWART: On Infinitely Many Algorithms for Solving Equations (traducción al inglés del artículo original de Schröder) *College Park, University of Maryland, Institute for Advanced Computer Studies, Department of Computer Science* (1993). <http://www.thales.cs.umd.edu> en el directorio <http://www.pub/reports>
- [140] THE EULER ARCHIVE: The works of Leonhard Euler online. <http://www.math.dartmouth.edu/~euler/>
- [141] <http://encyclopedia2.thefreedictionary.com/Dmitrii+Matveevich+Perevoshchikov>
- [142] <http://www.groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Printonly/Sturm.html>
- [143] [http://www.history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Hirst\\_comments.html](http://www.history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Hirst_comments.html)