TESIS DOCTORAL

Teoremas de Inversión

Francisco Javier Pérez Lázaro

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TESIS DOCTORAL

Teoremas de Inversión

Francisco Javier Pérez Lázaro

Universidad de La Rioja
Servicio de Publicaciones
2007

Esta tesis doctoral, dirigida por el doctor D. Viktor Kolyada, fue leída el 25 de noviembre de 2004, y obtuvo la calificación de Sobresaliente Cum Laude Unanimidad

Edita: Universidad de La Rioja
Servicio de Publicaciones

ISBN 978-84-690-8624-7

Departamento de Matemáticas y Computación.
Universidad de La Rioja.

TEOREMAS DE INMERSIÓN

Memoria para optar al título de doctor.

Francisco Javier Pérez Lázaro

Director:
Viktor Kolyada

Logroño
2004

Índice general

Introducción.

Esta tesis está dedicada a una de las direcciones fundamentales en la teoría general de espacios de funciones – teoremas de inmersión para espacios de funciones diferenciables en varias variables.

En la teoría de espacios de funciones, se estudian clases de funciones definidas por ciertas condiciones de suavidad. Estas condiciones han sido introducidas históricamente, en primer lugar, en relación con problemas en la teoría de ecuaciones diferenciales, la teoría de aproximación, la teoría de series de Fourier. De esta manera aparecieron las condiciones de Lipschitz (en preguntas relativas a la unicidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales de primer orden, en 1876), las condiciones más generales tipo Hölder (en el estudio de la ecuación de Poisson, 1882), la condición de Zygmund (en los teoremas inversos de teoría de aproximación, 1945). Luego, estas condiciones subyacieron en la base de las definiciones de las correspondientes clases de funciones. El artículo de Sobolev (1938), donde en conexión con los problemas de la física matemática se habían introducido los espacios W_p^r, fue de valor fundamental en el desarrollo de la teoría de espacios de funciones. Junto con los espacios clásicos $C^{(r)}$ de funciones con derivada r-ésima continua, y las clases de Hölder, los espacios de Sobolev están entre los espacios de funciones más conocidos e importantes. En los cincuenta, en conexión con problemas en teoría de aproximación, se desarrolló la teoría de los espacios H de Nikol'skiĭ. Más tarde, una teoría similar fue construida por Besov para una escala de los así llamados B-espacios, que él introdujo. En los sesenta, Aronszajn y Smith, A. Calderón, Lizorkin desarrollaron en sus trabajos la teoría de los espacios de Sobolev de orden fraccional – los espacios de Liouville.

Hoy en día la teoría de inmersiones representa un extenso dominio del análisis matemático y tiene muchas aplicaciones en varias áreas de las matemáticas. Las aplicaciones más importantes están relacionadas con la teoría de ecuaciones en derivadas parciales, la teoría de aproximación y el análisis de Fourier.

Los métodos más extendidos de la teoría de inmersiones son los de análisis armónico, aproximaciones y representaciones integrales de funciones. Sin embargo, en esta tesis se emplean otros métodos. Están basados en el uso de reordenamientos no crecientes de funciones y desigualdades geométricas de tipo isoperimétrico.

La simetrización de conjuntos y los reordenamientos simétricos de funciones han sido estudiados por primera vez en los artículos de J.Steiner y G. Schwartz en el final del siglo XIX. No obstante, el estudio sistemático de los reordenamientos de funciones y series empezó mucho más tarde, en 1928 – 1930, en los artículos de Hardy – Littlewood dedicados a las integrales fraccionarias y operadores maximales.

Los primeros resultados en la teoría de inmersiones – el teorema de Hardy – Littlewood sobre integrales fraccionarias (1928) y el teorema de Sobolev sobre los potenciales (1938) – han sido obtenidos con ayuda de reordenamientos simétricos. A su vez, utilizando las estimaciones para potenciales, Sobolev demostró su teorema clásico

$$\|f\|_{q^*} \leq c \sum_{|\alpha|=r} \|D^\alpha f\|_p, \qquad 1 \leq p < \frac{n}{r}, \quad q^* = \frac{np}{n-rp}. \tag{1}$$

En realidad, sus métodos no funcionaban para $p = 1$. Sólo a finales de los cincuenta, Gagliardo y Nirenberg probaron la desigualdad (1) para $p \geq 1$.

En 1951 el siguiente teorema notable fue probado en el monográfico [41] por Pólya y Szegő: La norma L^p del gradiente de un reordenamiento simétrico de una función dada no excede a la norma L^p del gradiente de dicha función ($1 \leq p < \infty$). Este teorema, llamado *el principio de Pólya y Szegő*, tuvo varias aplicaciones en física matemática. De él se deriva fácilmente el teorema de inmersión de Sobolev, pero esto no fue observado al principio. Más tarde, en 1960, Federer y Fleming, e independientemente Maz'ya, clarificaron la cercana relación entre la desigualdad de Sobolev y las desigualdades isoperimétricas. Después, una serie de importantes resultados relativos a la inmersión de los espacios de Sobolev han sido obtenidos por métodos de teoría de la medida geométrica (ver [32]).

Los primeros trabajos en la teoría de inmersiones de clases de funciones donde el método de los reordenamientos no crecientes ha sido sistemáticamente aplicado y desarrollado fueron los trabajos de Ul'yanov desde el fin de los sesenta. En estos artículos fueron estudiadas clases de funciones en una variable con una mayorante dada del módulo de continuidad en L^p. Ul'yanov formuló una serie de problemas extremales sobre la determinación de condiciones necesarias y suficientes para la inmersión de clases de funciones y desigualdades para reordenamientos. El estudio de estos problemas llevó a un desarrollo posterior de los métodos que él propuso. En particular, una serie de trabajos de Kolyada fue dedicada a este estudio. De estos trabajos quedó claro que las estimaciones de reordenamientos de funciones de varias variables están directamente relacionadas con las medidas de proyecciones e intersecciones de los conjuntos de nivel y las desigualdades isoperimétricas.

Nótese que se dedica una especial atención a los espacios definidos en norma L^1. A menudo este caso es mucho más difícil que el de $p > 1$. Es bien conocido que en la norma de L^1 los métodos de análisis armónico, representaciones integrales, teoría de interpolación, no siempre pueden ser aplicados. Sin embargo, muchos problemas llevan a estimaciones en términos de derivadas en L^1 o L^∞. Algunos efectos interesantes que ocurren en el caso $p = 1$, están relacionados con el hecho de que este caso es una frontera entre las teorías L^p y H^p. En los últimos veinte años muchos autores han dedicado sus trabajos al estudio de las desigualdades de tipo de Sobolev para $p = 1$ (Cianchi, Hajlasz, Fournier, Kolyada, Pelczyński, Poornima, Wojciechowski).

Los objetivos principales de la tesis son los siguientes:

En primer lugar, queremos estudiar estimaciones de módulos de continuidad para funciones de espacios anisótropos de Sobolev, de Besov-Nikol'skiĭ y de Lipschitz.

Además nos proponemos demostrar teoremas de inmersión en algunos casos límite.

Para ello nuestro objetivo es desarrollar métodos basados en el uso de reordenamientos decrecientes y lemas de equilibrio.

Destacaremos ahora los resultados que consideramos como los principales de la tesis:

-teorema de inmersión de espacios anisótropos de Sobolev $W^{r_1,\dots,r_n}_{p_1,\dots,p_n}$ en espacios de Besov con parámetros óptimos, además el caso en el que algunos p_i son mayores que 1 y otros son iguales a 1 está incluido;

-inmersión de espacio de Lipschitz anisótropo en espacios de Besov para el caso límite de $p = 1$;

-teorema de inmersión entre los espacios de Besov anisótropos;

- un lema especial (que llamamos "lema de equilibrio") que representa una estimación para las magnitudes definidas como mínimo entre unas funciones dadas.

Como ya hemos mencionado antes, el núcleo de los métodos que utilizamos en este trabajo lo forman las estimaciones de reordenamientos decrecientes. Recordemos definiciones básicas.

Sea $S_0(\mathbb{R}^n)$ la clase de todas las funciones f de $\mathbb{R}^n$ medibles, finitas c.t.p. tales que para todo $y > 0$,

$$\lambda_f(y) \equiv |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > y\}| < \infty.$$

Se llama *reordenamiento no creciente* de una función $f \in S_0(\mathbb{R}^n)$ a una función f^* en $\mathbb{R}_+ \equiv (0, +\infty)$ no creciente y que es equimedible con $|f|$. Es decir,

$$\lambda_f(y) = \lambda_{f^*}(y) \qquad y > 0.$$

Como ya se comentó anteriormente, en los sesenta, Ul'yanov [50] estudió distintas inmersiones basándose en las estimaciones de reordenamientos no crecientes. Estos métodos fueron desarrollados por Kolyada en varios trabajos en los que obtuvo estimaciones de reordenamientos de funciones de varias variables. En particular, él demostró las siguientes estimaciones en términos de derivadas de orden superior [24].

Sea $t > 0$. Elegimos un subconjunto E_t en el conjunto

$$\{x : |f(x)| \geq f^*(t)\}$$

de tipo F_σ y medida t. Sea $\mu_i(t)$ la medida $(n-1)$-dimensional de la proyección de E_t en el hiperplano $x_i = 0$. Entonces, para cada $i = 1, \ldots, n$ y todo $s > t$ se tiene

$$f^*(t) \leq c \left[f^*(s) + \left(\frac{s}{\mu_i(t)} \right)^{r_i - 1/p} \psi_i^* \left(\frac{1}{2} \mu_i(t) \right) \right], \tag{2}$$

donde

$$\psi_i(\hat{x}_i) = \left(\int_{\mathbb{R}} |D_i^{r_i} f(x)|^p dx_i \right)^{1/p} \qquad (\hat{x}_i \in \mathbb{R}^{n-1}).$$

También demostró [26] estimaciones en términos del módulo de continuidad: sean $\delta_i(t)$ funciones positivas cualesquiera tales que $\prod_{i=1}^n \delta_i(t) = t$ para $t > 0$. Entonces, para todo $0 < t < s < \infty$

$$f^*(t) \leq (2^{\text{máx}_i k_i} - 1) f^*(s) + c t^{-1/p} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{s}{t} \right)^{k_i} \omega_i^{k_i}(f; \delta_i(t))_p. \tag{3}$$

Basándose en estas estimaciones, Kolyada probó una serie de teoremas de inmersión de tipo Sobolev. Utilizó también desigualdades geométricas del tipo de Loomis-Whitney:

$$(\text{mes}_n E)^{n-1} \leq \prod_{i=1}^{n} \text{mes}_{n-1} E_i, \tag{4}$$

donde $E \subset \mathbb{R}^n$ de tipo F_σ y E_i denota la proyección ortogonal de E en el hiperplano $x_i = 0$.

Notemos que la desigualdad (4) puede considerarse como una versión débil de la desigualdad isoperimétrica

$$(\operatorname{mes}_n(E))^{1-1/n} \le \varkappa_n \mathcal{H}_{n-1}(\partial E),$$

donde ∂E denota la frontera de E, $\mathcal{H}_{n-1}$ la medida de Haussdorff $(n-1)$-dimensional y $\varkappa_n$ es la constante isoperimétrica. En efecto, $\operatorname{mes}_{n-1} E_i \le \mathcal{H}_{n-1}(\partial E)$.

Además de los métodos ya reseñados utilizamos también estimaciones basadas en reordenamientos iterados. De forma poco rigurosa, consisten en reordenar una función f en $\mathbb{R}^n$ primero respecto a una variable, después con respecto a otra y así. Aparentemente Oswald [38] utilizó por primera vez los reordenamientos iterados para demostrar teoremas de inmersión. En [27] se demuestran unas estimaciones de reordenamientos iterados con el uso de las cuales se obtienen inmersiones para espacios anisótropos de Sobolev fraccionarios.

La forma de las estimaciones (2) y (3) deja claro que para aplicarlas hay que buscar una especie de equilibrio entre ellas. La situación se complica esencialmente cuando utilizamos simultáneamente (2) y (3) que son de carácter diferente (por ejemplo en el estudio de espacios de Lipschitz).

En la tesis hallamos un método general para lograr este equilibrio en situaciones similares. Más exactamente, demostramos que para la función

$$\rho(t) = \min_{1\le i\le n}\{t_i^{r_i}\phi_i(t_{l_i})\}, \quad t \in \mathbb{R}^n_+,\ \phi_i \in L^{\theta_i}(\mathbb{R}_+, dx/x),\ l_i \in \{1,\dots,n\},$$

se tiene

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \rho(t)^s \pi(t)^{-rs/n} \frac{dt}{\pi(t)}\right)^{1/s} \le c\sum_{j=1}^n \|\phi_i\|_{L^{\theta_i}(\mathbb{R}_+,dx/x)}.$$

Este método nos permitirá estimar varias normas de un modo unificado, así, obtenemos resultados nuevos y demostramos de modo más simple algunos de los resultados anteriores.

A continuación daremos una breve descripción de la estructura de la tesis y de los resultados más importantes que obtenemos en ella.

La tesis consta de la introducción y 5 capítulos.

En **Capítulo 1** damos las definiciones básicas de los espacios funcionales que consideraremos, así como algunos resultados auxiliares.

En **Capítulo 2** estudiamos las funciones f en $\mathbb{R}^n$ que poseen derivadas parciales generalizadas $D_k^{r_k} f$ $(r_k \in \mathbb{N})$. Nuestro objetivo principal es obtener estimaciones óptimas de las diferencias del orden r_k-ésimo en la dirección del eje x_k:

$$\Delta_k^{r_k}(h)f(x) \equiv \sum_{j=0}^{r_k}(-1)^{r_k-j}\binom{r_k}{j}f(x+jhe_k) \quad (h \in \mathbb{R})$$

(e_k es un vector coordenada unitario). Especificaremos este problema más adelante; aquí sólo destacamos que estaba completamente resuelto para el caso en que todas las derivadas pertenecen al mismo espacio L^p. Sin embargo, es razonable suponer que las derivadas $D_k^{r_k}f$ pertenecen a *distintos* espacios L^{p_k}. Las correspondientes clases de funciones aparecen de modo natural en la teoría de inmersiones así como en algunas aplicaciones. Además, muchos autores han estudiado los espacios de Sobolev y Nikol'skiĭ en cuya construcción aparecen, en vez de normas L^p, normas en espacios más generales. En este capítulo suponemos que las derivadas pertenecen a espacios de Lorentz (se definirán en Capítulo 1) diferentes $L^{p_k,s_k}(\mathbb{R}^n)$. Nótese que en [47] se pueden encontrar resultados y comentarios interesantes acerca de este tipo de espacios, a los cuales nos llevan varios problemas importantes en Análisis. Por ejemplo, fue probado por Stein [44] que la condición límite para la diferenciabilidad c.t.p. para una función $f \in W_1^1$ es que ∇f pertenezca a $L^{n,1}$. El uso de limitaciones tipo Lorentz en las derivadas puede ser crucial en las estimaciones de transformadas de Fourier (como puede deducirse de [25, 27, 40]). Esto es, si buscamos condiciones límite sobre las derivadas para garantizar una propiedad de integrabilidad dada para la transformada de Fourier, entonces estas condiciones generalmente vendrán expresadas en términos de normas de Lorentz.

Vayamos ahora con nuestro objetivo principal del capítulo: obtener estimaciones para normas de diferencias. Los primeros resultados exactos en esta dirección fueron obtenidos por Il'in en los años sesenta. Ellos fueron expresados en los términos de inmersión de espacios de Sobolev en espacios de Besov. Los métodos de demostración fueron válidos sólo para $p > 1$.

En realidad el resultado es falso para $p = n = 1$. Sin embargo, fue probado en [21, 24] ($p_1 = \cdots = p_n$) que dicha inmersión es cierta para $p = 1$, $n \geq 2$.

Nuestro objetivo fue investigar similares inmersiones en el caso cuando las derivadas pertenecen a espacios de Lorentz *diferentes*. El resultado principal de Capítulo 2 es el siguiente teorema.

Teorema 1. *Sea* $n \geq 2$, $r_k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p_k, s_k < \infty$ *para* $k = 1, \ldots, n$ *y* $s_k = 1$

si $p_k = 1$. *Sean*

$$r = n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{r_k}\right)^{-1}, \quad p = \frac{n}{r}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k r_k}\right)^{-1} \quad y \quad s = \frac{n}{r}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s_k r_k}\right)^{-1}.$$

Para cada p_j $(1 \leq j \leq n)$ *que cumpla la condición*

$$\rho_j \equiv \frac{r}{n} + \frac{1}{p_j} - \frac{1}{p} > 0\,,$$

cogemos cualquier $q_j > p_j$ *tal que*

$$\frac{1}{q_j} > \frac{1}{p} - \frac{r}{n}$$

y denotamos

$$\varkappa_j = 1 - \frac{1}{\rho_j}\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}\right),$$

$$\alpha_j = \varkappa_j r_j \quad , \qquad \frac{1}{\theta_j} = \frac{1-\varkappa_j}{s} + \frac{\varkappa_j}{s_j}\,.$$

Entonces para toda función $f \in S_0(\mathbb{R}^n)$ *que tenga derivadas débiles* $D_k^{r_k} f \in L^{p_k,s_k}(\mathbb{R}^n)$ $(k = 1, \ldots, n)$ *se cumple la desigualdad*

$$\left(\int_0^\infty \left[h^{-\alpha_j}\|\Delta_j^{r_j}(h)f\|_{q_j,1}\right]^{\theta_j}\frac{dh}{h}\right)^{1/\theta_j} \leq c\sum_{k=1}^{n}\|D_k^{r_k} f\|_{p_k,s_k}\,.$$

Técnicamente, el caso más complicado es aquel en el que algunos de los p_k's son iguales a 1 y otros son mayores que 1. La dificultad fundamental es encontrar valores *óptimos* para los parámetros θ_j; nos permitimos remarcar que éste es exactamente el resultado principal del capítulo. En este sentido, observar que la desigualdad probada por Il'in [5, Vol. 2, p.72] en el caso $p_k = s_k > 1$ $(k = 1, \ldots, n)$ asignaba al valor del parámetro $\theta = \max_{1\leq k\leq n} p_k$, que no es óptimo cuando los p_k's son distintos.

En este capítulo también demostramos, para los espacios tipo Sobolev considerados, inmersiones a los espacios de Lorentz con y sin exponente límite.

En **Capítulo 3** nos ocuparemos de las inmersiones entre espacios de Besov. Uno de los resultados principales de la teoría de inmersiones es el siguiente teorema de Nikol'skiĭ-Besov [5, vol.2, pg.62] (que es un análogo del teorema de Hardy-Littlewood).

Sean $r_j > 0$ $(j = 1,\dots,n)$, $r = n(\sum_{j=1}^n 1/r_j)^{-1}$, $1 \le p < q < \infty$ *y* $1 \le \theta \le \infty$. *Si* $\varkappa \equiv 1 - \frac{n}{r}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) > 0$ *y* $\alpha_j = \varkappa r_j$ $(j = 1,\dots,n)$, *entonces*

$$\sum_{j=1}^n \left(\int_0^\infty [h^{-\alpha_j}\|\Delta_j^{k_j}(h)f\|_q]^\theta \frac{dh}{h}\right)^{1/\theta} \le$$

$$\le c\sum_{j=1}^n \left(\int_0^\infty [h^{-r_j}\|\Delta_j^{k_j}(h)f\|_p]^\theta \frac{dh}{h}\right)^{1/\theta} \tag{5}$$

donde k_j *son los menores enteros tales que* $k_j > r_j$.

Observemos que en [26] se demuestra que esta inmersión se puede probar mediante estimaciones de reordenamientos no crecientes.

Además fue probada una generalización natural de este teorema, en el caso cuando, para cada variable x_j distinta, la norma de las diferencias se toma en las métricas L^{p_j} distintas [5, vol.2, pg.62]. Al mismo tiempo es una continuación lógica considerar, para cada variable x_j, valores θ_j que también son diferentes.

No obstante, el caso en que la definición de espacio de Besov incluye valores diferentes de parámetros θ_j para cada variable, no había sido abordado. Nuestro objetivo es encontrar los índices óptimos de la inmersión en este caso. Así, el resultado principal de Capítulo 3 es el siguiente.

Teorema 2. *Sean* $n \in \mathbb{N}$, $0 < r_j < \infty$, $1 \le p_j < \infty$, $1 \le \theta_j \le \infty$ $j \in \{1,\dots,n\}$. *Sean*

$$r = n\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{r_j}\right)^{-1}, \quad p = \frac{n}{r}\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{p_j r_j}\right)^{-1} \quad \text{y} \quad \theta = \frac{n}{r}\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{\theta_j r_j}\right)^{-1}.$$

Supongamos que para todo $1 \le j \le n$

$$\beta_j = \frac{1}{r_j}\left(\frac{r}{n} + \frac{1}{p_j} - \frac{1}{p}\right) > 0.$$

Elegimos $p_j < q_j < \infty$ *arbitrarios tales que*

$$\frac{1}{q_j} > \frac{1}{p} - \frac{r}{n}$$

y llamamos

$$\varkappa_j = 1 - \frac{1}{\beta_j r_j}\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}\right),$$

$$\alpha_j = \varkappa_j r_j \quad \text{y} \quad \frac{1}{\theta'_j} = \frac{1-\varkappa_j}{\theta} + \frac{\varkappa_j}{\theta_j}.$$

Entonces para toda función $f \in S_0(\mathbb{R}^n)$ *se cumple la desigualdad*

$$\left(\int_0^\infty [h^{-\alpha_j}\|\Delta_j^{k_j}(h)f\|_{q_j,1}]^{\theta'_j}\frac{dh}{h}\right)^{1/\theta'_j} \le c\sum_{i=1}^n\left(\int_0^\infty [h^{-r_i}w_i^{k_i}(f;h)_{p_i}]^{\theta_i}\frac{dh}{h}\right)^{1/\theta_i},$$

donde k_i *son enteros tales que* $k_i > r_i$.

Subrayemos que la *novedad* de este teorema está en obtener los valores *óptimos* θ'_j, para el caso en que los θ_j son *diferentes*.

Además, en Capítulo 3 damos las inmersiones de los espacios de Besov anisótropos en todos sus índices en los espacios de Lorentz con y sin exponente límite.

En **Capítulo 4** demostramos teoremas de inmersión para espacios de Lipschitz anisótropos. Para ser más precisos, estudiamos su integrabilidad y propiedades de suavidad bajo ciertas condiciones en su módulo de continuidad.

Hablando de modo general, en el estudio de los espacios anisótropos, tenemos diferentes estimaciones respecto a diferentes variables. El resultado final será óptimo si encontramos un equilibrio entre estas estimaciones, esto es, una estimación promedio óptima. Por lo tanto, es un problema importante determinar una contribución correcta para cada variable en este promedio. Para ilustrar este problema consideraremos como ejemplo el caso de los espacios de Sobolev en los que la suavidad de la variable x_k viene determinada por el índice r_k. Es bien conocido que una característica importante de dichos espacios es la media armónica

$$r = n\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{r_j}\right)^{-1}$$

(ver [24, 26]). En particular, sus propiedades de integrabilidad están completamente determinadas por r y la contribución de cada variable es proporcional a $1/r_k$ en algún sentido. Una situación similar ocurre para los espacios de Nikol'skiĭ.

Sin embargo, el comportamiento de los espacios de Lipschitz anisótropos es completamente diferente. Así, los espacios de Lipschitz tienen parcialmente el carácter de espacios de Sobolev y parcialmente el carácter de espacios de Nikol'skiĭ. Este comportamiento mixto crea una dificultad fundamental en su estudio.

Las propiedades de integrabilidad de funciones en los espacios de Lipschitz y en los espacios de Nikol'skiĭ con los mismos índices pueden ser completamente diferentes. Fue probado en [20] (para $r_k \leq 1$) que la inmersión a L^q no está únicamente determinada por el valor de la media armónica r. De un modo informal, esto significa que la contribución de la variable x_k no es proporcional a $1/r_k$.

La demostración de [20] (así como otras pruebas alternativas dadas en [22, 23]) estaba basada en estimaciones de reordenamientos y razonamientos especiales que nos conducen a una especie de equilibrio entre estas estimaciones.

Uno de los objetivos principales de este capítulo es dar una expresión cuantitativa óptima para este tipo de equilibrio. Obtenemos los siguientes resultados. Primero, basándonos en estimaciones de reordenamientos conocidas, las modificamos a una forma especial en la que intervienen funciones de los espacios $L^\theta(\mathbb{R}_+, dx/x)$. La invarianza de estos espacios con respecto a cambios de variable de tipo potencial juega un papel relevante. Entonces, usando las estimaciones modificadas, consideramos la "función-mínimo"

$$\rho(t) = \min_{1\leq i\leq n}\{t_i^{r_i}\phi_i(t_{l_i})\}, \quad t \in \mathbb{R}^n_+,\ \phi_i \in L^{\theta_i}(\mathbb{R}_+, dx/x),\ l_i \in \{1,\dots,n\}. \tag{6}$$

Probamos una estimación especial con peso para esta función:

Lema 1 (lema básico). *Sean* $n \in \mathbb{N}, 0 < r_i < \infty, 1 \leq \theta_i \leq \infty$ $(i = 1,\dots,n)$. *Definimos* $r = n\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i}\right)^{-1}$, $s = \frac{n}{r}\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i\theta_i}\right)^{-1}$. *Entonces*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \rho(t)^s \pi(t)^{-rs/n} \frac{dt}{\pi(t)}\right)^{\frac{1}{s}} \leq c\sum_{i=1}^n \|\phi_i\|_{L^{\theta_i}(\mathbb{R}_+, dx/x)}.$$

Este resultado nos da un método para estimar varias normas de modo unificado. Usando este método, demostramos estimaciones óptimas de normas de Lorentz así como de normas de Besov para funciones en espacios de Lipschitz.

Con respecto a la estimación de normas de Besov, como ya se nombró antes, Il'in [5, §18.12] demostró estimaciones óptimas para funciones en espacios de Sobolev. Más tarde, Netrusov [34] probó estimaciones de normas de Besov para funciones en espacios de Lipschitz. Sus métodos no eran válidos para el caso $p = 1$. En este capítulo demostramos inmersiones de este tipo, (es decir, de Lipschitz en Besov) para $p \geq 1$, como aplicación de nuestras estimaciones relativas a la integrabilidad de funciones del tipo (6). Es más, probamos estimaciones para normas más fuertes definidas en términos de reordenamientos iterados.

Dada una función f en $\mathbb{R}^n$, obtenemos su reordenamiento iterado, reordenando esta función primero con respecto a una variable, después respecto a otra, y así sucesivamente. Como resultado, el reordenamiento iterado está definido en $\mathbb{R}^n_+$, es no creciente en cada variable y equimedible con $|f|$. Se define una norma tipo Lorentz $\|.\|_{q,p;\mathcal{R}}$ en términos de reordenamientos iterados. Es importante resaltar que en el caso $q > p$ esta norma es más fuerte que la norma de Lorentz usual $\|.\|_{q,p}$. Observar también que los reordenamientos iterados fueron usados en teoremas de inmersión en los trabajos [20, 21, 23, 27, 38].

Obtenemos la siguiente inmersión.

Teorema 3. *Sea* $2 \leq n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < q < \infty$. *Sea* $0 < r_i < \infty$ $(i = 1, \ldots, n)$. *Definimos*

$$r = n\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}\right)^{-1}; \quad r' = n\left(\sum_{i:r_i\in\mathbb{N}} \frac{1}{r_i}\right)^{-1}; \quad s = \frac{r'p}{r}.$$

Supongamos que

$$\varkappa = 1 - \frac{n}{r}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) > 0$$

y definimos

$$\alpha_i = \varkappa r_i, \quad \frac{1}{\gamma_i} = \begin{cases} \frac{1-\varkappa}{s} + \frac{\varkappa}{p}, & \text{si } r_i \in \mathbb{N}, \\ \frac{1-\varkappa}{s}, & \text{si } r_i \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

Entonces, para todo $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^\infty \left[h^{-\alpha_i} \|\Delta_i^{\bar{r}_i}(h) f\|_{q,1;\mathcal{R}}\right]^{\gamma_i} \frac{dh}{h}\right)^{1/\gamma_i} \leq c \sum_{i=1}^{n} \sup_{u>0} u^{-r_i} \omega_i^{\bar{r}_i}(f;u)_p\,,$$

donde $\bar{r}_i$ *son los menores enteros tales que* $\bar{r}_i \geq r_i$.

Esta desigualdad implica inmediatamente la inmersión del espacio de Lipschitz en el espacio de Besov para todo $p \geq 1$. Es más, en la parte izquierda aparece la norma más fuerte tipo Lorentz $\|.\|_{q,1;\mathcal{R}}$ en vez de la $\|.\|_q$.

Además, en este capítulo también se prueban inmersiones de espacios de Lipschitz en espacios tipo Lorentz (definidos en términos de reordenamientos iterados) con y sin exponente límite.

En **Capítulo 5** estudiamos un problema más general que las inmersiones consideradas en capítulos anteriores. Se trata de las relaciones entre módulos de continuidad en métricas diferentes. Este problema es mucho más difícil que el problema de inmersiones óptimas de espacios definidos mediante parámetros numéricos. Por lo tanto lo estudiamos solamente en el caso isótropo.

La relación entre los módulos de continuidad en espacios L^p y L^q puede ser expresada mediante la siguiente estimación. Si $1 \leq p < q < \infty$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\omega(f;\delta)_q \leq c \left(\int_0^\delta (t^{-\theta}\omega(f;t)_p)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, \quad \theta = n(1/p - 1/q) < 1. \tag{7}$$

Esta desigualdad, esencialmente, fue demostrada por Ul'yanov [51], [50], Peetre [39], Grisvard [13], Brudnyi [8] y otros.

Ul'yanov planteó la cuestión de cuando la desigualdad (7) es óptima. En este sentido, los primeros resultados fueron debidos a Andrienko [1]. Se puede ver [21] que para cada valor de δ fijo, la estimación (7) es óptima. Es decir, para cada módulo de continuidad arbitrario, existe una función $f \equiv f_\delta$ con módulo mayorado por el módulo dado y que cumple la desigualdad opuesta a (7).

Sin embargo, la desigualdad (7) se puede fortalecer en un cierto sentido. En [21] se probó: sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < q \leq \infty$ y $\theta = n(1/p - 1/q) < 1$, entonces para todo $\delta > 0$

$$\left(\int_\delta^\infty (t^{\theta-1}\omega(f;t)_q)^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \leq c\delta^{\theta-1} \left(\int_0^\delta (t^{-\theta}\omega(f;t)_p)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}. \tag{8}$$

Esta estimación falla para $p = n = 1$. No obstante, para $n \geq 2$ se mantiene incluso cuando $p = 1$. Los métodos utilizados fueron estimaciones de reordenamientos y aproximaciones mediante las medias de Steklov.

Ahora, la desigualdad (8) implica (7). Además, para cada módulo de continuidad arbitrario, existe una función f (con módulo mayorado por el dado) que no depende de δ y que cumple la desigualdad opuesta a (8).

La desigualdad (8) se aplica a la investigación de ciertas funciones maximales que miden la suavidad local. También puede ser aplicada para estudiar las constantes óptimas en desigualdades de varias normas.

En este capítulo nos proponemos generalizar la desigualdad (8) a módulos de continuidad de orden arbitrario. Además consideraremos el caso en que los módulos vengan expresados en métricas de Lorentz diferentes. Este problema, esencialmente, ya había sido abordado por Netrusov [35], para el caso $p > 1$, utilizando unas representaciones integrales especiales. Nosotros probamos:

Teorema 4. *Sean* $n, r \in \mathbb{N}$, $1 \le p < q < \infty$ *tal que* $\theta \equiv n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) < r$. *Sean* $1 \le s, \xi \le \infty$. *Entonces, si* $f \in L^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ *y* $p > 1$ *ó* $p = s = 1$ *y* $n \ge 2$ *se cumple:*

$$\left(\int_\delta^\infty (t^{\theta-r}\omega^r(f;t)_{q,\xi})^s \frac{dt}{t}\right)^{1/s} \le c\delta^{\theta-r}\left(\int_0^\delta (t^{-\theta}\omega^r(f;t)_{p,s})^\xi \frac{dt}{t}\right)^{1/\xi} \qquad \delta > 0.$$

Los métodos que empleamos se basan en una combinación de teoremas de inmersión con el uso de la media de Steklov. Gracias a ellos podemos conseguir una demostración realmente sencilla e incluir el caso límite $p = 1$, lo cual es el logro principal de este capítulo.

A continuación exponemos la divulgación que han tenido hasta el momento los contenidos de esta tesis.

En relación con el tema de la tesis se publicó el artículo conjunto [28], que está basado en Capítulo 2. Está enviado para publicación: "Embedding theorems for anisotropic Lipschitz spaces" a la revista Studia Mathematica. El contenido de este artículo está en Capítulo 4.

También se impartieron las siguientes charlas en congresos:

VIII EARCO (Encuentros de Análisis Real y Complejo). Gandía, Mayo de 2003. "Estimaciones para normas de diferencias de funciones en espacios anisótropos de Sobolev".

EITA-2003 (Encuentro de Investigación sobre Teoría de Aproximación) Albarracín, Septiembre de 2003. "Teoremas de inmersión para espacios de Lipschitz".

Bajo el título : "Estimates of difference norms for functions in anisotropic Sobolev spaces" impartí un seminario de Análisis Funcional del Instituto de Matemáticas de la Academia de las Ciencias de Polonia. Diciembre de 2003.

Capítulo 1

Definiciones y proposiciones auxiliares

De aquí en adelante, denotaremos por c, c' o similar a constantes (que pueden cambiar de valor de una aparición a otra) tales que dependen de los parámetros de los espacios considerados, pero no de las funciones.

1.1. Reordenamientos no crecientes

Sea $S_0(\mathbb{R}^n)$ la clase de todas las funciones f de $\mathbb{R}^n$ medibles, finitas c.t.p. tal que para todo $y > 0$,

$$\lambda_f(y) \equiv |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > y\}| < \infty. \tag{1.1}$$

Definición 1.1. Se llama *reordenamiento no creciente* de una función $f \in S_0(\mathbb{R}^n)$ a una función f^* en $\mathbb{R}_+ \equiv (0, +\infty)$ no creciente y que es equimedible con $|f|$. Es decir,

$$\lambda_f(y) = \lambda_{f^*}(y) \quad \text{para todo } y > 0.$$

El reordenamiento f^* puede ser definido mediante la igualdad

$$f^*(t) = \sup_{|E|=t} \inf_{x \in E} |f(x)| \quad , \quad 0 < t < \infty\,,$$

(ver [9]). Además es una función continua por la izquierda.

Se verifican las siguientes propiedades:
(i) Si $0 < t < t + s$, entonces

$$(f+g)^*(t+s) \leq f^*(t) + g^*(s).$$

(ii) Si $0 < p < \infty$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx = \int_0^\infty (f^*(t))^p dt. \tag{1.2}$$

(iii) Si la sucesión $\{f_k\} \subset S_0$ converge en medida a la función $f \in S_0$, entonces $f_k^*(t) \to f^*(t)$ en cada punto de continuidad de f^*.
(iv) Para todo $t > 0$

$$\sup_{|E|=t} \int_E |f(x)| dx = \int_0^t f^*(u) du\,. \tag{1.3}$$

La demostración de estas propiedades puede verse en [4].
Así, definimos el promedio

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(u) du\,. \tag{1.4}$$

Debido a (1.3), el operador $f \to f^{**}$ es subaditivo; es decir

$$(f+g)^{**}(t) \leq f^{**}(t) + g^{**}(t), \quad t > 0.$$

Además, por la desigualdad de Hardy ([4], p.124),

$$\|f^{**}(t)\|_p \leq c_p \|f\|_p, \qquad 1 < p \leq \infty. \tag{1.5}$$

También definimos el promedio

$$\bar{f}^*(t) = \frac{1}{t} \int_t^\infty f^*(u) du, \quad t > 0. \tag{1.6}$$

Definición 1.2 (Espacios de Lorentz). Supongamos que $0 < q < \infty$, $0 < p \leq \infty$. Una función $f \in S_0(\mathbb{R}^n)$ pertenece al espacio de Lorentz $L^{q,p}(\mathbb{R}^n)$ si

$$\|f\|_{q,p} \equiv \left(\int_0^\infty \left(t^{1/q} f^*(t) \right)^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} < \infty\,.$$

Notemos que, debido a (1.2), $L^{q,q}(\mathbb{R}^n) = L^q(\mathbb{R}^n)$. Por otra parte, se cumple la desigualdad [4, p.217]

$$\|f\|_{q,s} \le c\|f\|_{q,p} \quad (0 < p < s \le \infty), \tag{1.7}$$

de donde se deduce $L^{q,p} \subset L^{q,s}$ para $p < s$. En particular, para $0 < p \le q$

$$L^{q,p} \subset L^{q,q} \equiv L^q\,.$$

Por otro lado, debido a la desigualdad de Hardy ([4], p.124), para $1 < q < \infty$, $1 \le p \le \infty$,

$$\|f\|_{q,p} \le \left(\int_0^\infty (t^{1/q} f^{**}(t))^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p} \le \frac{q}{q-1}\|f\|_{q,p}.$$

1.2. Reordenamientos iterados

Esta sección contiene hechos básicos relacionados con los reordenamientos iterados. Para referencias ver ([27], §2).

Sea $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Eliminando la variable x_k de la n-tupla x obtenemos un vector $(n-1)$-dimensional denotado por $\hat{x}_k$.

Denotemos con $(\tau, \hat{x}_k)$ $(\tau \in \mathbb{R})$ el vector con primera componente τ y las componentes restantes iguales al vector $(n-1)$-dimensional $\hat{x}_k$.

Sea $k \in \{1, \dots, n\}$ y $f \in S_0(\mathbb{R}^n)$. Obtenemos $\mathcal{R}_k f(t_1, \hat{x}_k)$ c.t.p. en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$ fijando $\hat{x}_k$ y "reordenando" f de modo no creciente como una función de la variable x_k sólo.

Sea $\mathcal{P}_n$ la colección de todas las permutaciones $\sigma = \{k_1, \dots, k_n\}$ del conjunto $\{1, \dots, n\}$. Para cada $\sigma \in \mathcal{P}_n$ pongamos $\mathcal{R}_\sigma f \equiv \mathcal{R}_{k_n} \cdots \mathcal{R}_{k_1} f$. Es fácil ver que $\mathcal{R}_\sigma f$ decrece monótonamente con respecto a cada variable y es equimedible con $|f|$ (para más detalles, ver ([27], §2)).

Es fácil verificar que

$$\mathcal{R}_\sigma f(t) \le f^*(t_1 \cdots t_n), \tag{1.8}$$

$$\mathcal{R}_\sigma (f+g)(t+s) \le \mathcal{R}_\sigma f(t) + \mathcal{R}_\sigma g(s) \quad (t, s \in \mathbb{R}^n_+).$$

Además se cumple el siguiente lema [27].

Lema 1.1. *Sean $f_k \in S_0(\mathbb{R}^n)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ y supongamos que la sucesión $\{f_k\}$ converge en $\mathbb{R}^n$ en medida a $f \in S_0(\mathbb{R}^n)$. Entonces para cada permutación $\sigma \in \mathcal{P}_n$,*

$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{R}_\sigma f_k(t) = \mathcal{R}_\sigma f(t) \quad \textit{para casi todo } t \in \mathbb{R}^n_+.$$

De aquí en adelante escribiremos

$$\pi(t) = \prod_{k=1}^{n} t_k, \qquad t \in \mathbb{R}^n_+.$$

Definición 1.3. Supongamos que $0 < q < \infty$, $0 < p \leq \infty$ y sea $\sigma \in \mathcal{P}_n$ $(n \geq 2)$. Denotamos por $L^{q,p}_{\mathcal{R}_\sigma}(\mathbb{R}^n)$ la clase de las funciones $f \in S_0(\mathbb{R}^n)$ tales que

$$\|f\|_{q,p;\mathcal{R}_\sigma} \equiv \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} [\pi(t)^{1/q} \mathcal{R}_\sigma f(t)]^p \frac{dt}{\pi(t)} \right)^{1/p} < \infty$$

(ver [6]). Definamos también

$$L^{q,p}_{\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{\sigma\in\mathcal{P}_n} L^{q,p}_{\mathcal{R}_\sigma}(\mathbb{R}^n), \quad \|f\|_{q,p;\mathcal{R}} = \sum_{\sigma\in\mathcal{P}_n} \|f\|_{q,p;\mathcal{R}_\sigma}.$$

Es fácil ver que

$$\|f\|_{q,s;\mathcal{R}} \leq c\|f\|_{q,p;\mathcal{R}} \quad (0 < p < s \leq \infty). \tag{1.9}$$

Si $q > p$, entonces para cada $\sigma \in \mathcal{P}_n$ y cada $f \in S_0(\mathbb{R}^n)$,

$$\|f\|_{q,p} \leq c\|f\|_{q,p;\mathcal{R}_\sigma} \tag{1.10}$$

(ver [52]). Así,

$$L^{q,p}_{\mathcal{R}_\sigma} \subset L^{q,p} \quad (q > p).$$

Es más, es una inmersión propia [52].

1.3. Espacios funcionales básicos

Para más información sobre los espacios que definiremos ver [26].

De aquí en adelante diremos que $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ si f es una función indefinidamente diferenciable en $\mathbb{R}^n$ y con soporte compacto.

1.3.1. Espacios de Sobolev

Como ya se dijo antes, los espacios de Sobolev aparecieron en conexión con problemas de física matemática.

Sea f una función en $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $D_j^r f \equiv \frac{\partial^r f}{\partial x_j^r}$ $(j = 1, \ldots, n;\ r \in \mathbb{N})$. $D_j^1 f \equiv D_j f$.

Para un multiíndice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ con componentes enteros $\alpha_i \geq 0$ escribimos

$$D^\alpha f \equiv D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} f.$$

Se le llama orden de la derivada $D^\alpha f$ al orden del multiíndice α, es decir, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Denotaremos por $L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ el espacio de las funciones localmente integrables.

Definición 1.4. Sea $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y sea α un multiíndice. A la función $g \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ se le llama derivada generalizada (o débil) de orden α de la función f, si para toda función $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) D^\alpha \phi(x)dx.$$

En este caso denotaremos también $g \equiv D^\alpha f$. Se sigue de un Lema del cálculo variacional [19, §1] que, si existe la derivada generalizada, es única, salvo conjuntos de medida nula.

Definición 1.5 (Espacio de Sobolev isótropo). Sea $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$. El espacio de Sobolev $W_p^r(\mathbb{R}^n)$ es la clase de todas las funciones $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tales que poseen todas las derivadas generalizadas $D^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ del orden $|\alpha| \leq r$.

La norma en W_p^r se define como

$$\|f\|_{W_p^r} \equiv \sum_{|\alpha| \leq r} \|D^\alpha f\|_p$$

y, por desigualdades multiplicativas entre derivadas [12] (que también son ciertas para derivadas generalizadas), es equivalente a

$$\|f\|_p + \sum_{|\alpha| = r} \|D^\alpha f\|_p.$$

Definición 1.6. Sean $n, r \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. El *espacio de Sobolev con respecto a la j-ésima variable*, $W^r_{p;j}(\mathbb{R}^n)$, es la clase de funciones f en $L^p(\mathbb{R}^n)$ con derivada parcial generalizada $D^r_j f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Así, su norma es

$$\|f\|_{W^r_{p;j}} = \|f\|_p + \|D^r_j f\|_p.$$

Definición 1.7. Sea $n \in \mathbb{N}$. Sean $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$. El espacio de Sobolev anisótropo $W^{r_1,\ldots,r_n}_p(\mathbb{R}^n)$ es la clase de las funciones con la siguiente norma finita

$$\|f\|_{W^{r_1,\ldots,r_n}_p} \equiv \|f\|_p + \sum_{j=1}^{n} \|D^{r_j}_j f\|_p \ .$$

Es decir, $W^{r_1,\ldots,r_n}_p(\mathbb{R}^n)$ es la intersección $\cap_{j=1}^n W^{r_j}_{p;j}(\mathbb{R}^n)$.

Nótese que en la definición de espacio anisótropo no es necesaria la existencia de las derivadas mixtas.

Analicemos ahora las relaciones existentes entre el espacio isótropo $W^r_p(\mathbb{R}^n)$ y el anisótropo $W^{r,\ldots,r}_p(\mathbb{R}^n)$. Es claro que el primero está contenido en el segundo. No obstante, si $1 < p < \infty$ (ver, por ejemplo, [26, Theorem 2.4]),

$$W^r_p(\mathbb{R}^n) = W^{r,\ldots,r}_p(\mathbb{R}^n),$$

y sus normas son equivalentes. Sin embargo, para $p = 1, r \geq 2$, no es cierto (ver [5]).

1.3.2. Espacios de Nikol'skiĭ

La aparición de estos espacios estuvo ligada a la Teoría de Aproximación.

Definición 1.8 (Diferencias). Sea f una función en $\mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}$ y $1 \leq k \leq n$. Se define su diferencia de orden r y paso h respecto a la variable x_k como

$$\Delta^r_k(h) f(x) \equiv \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} f(x + jhe_k) \tag{1.11}$$

(e_k es el vector coordenado unidad).

Definición 1.9. Sea $1 \leq p < \infty$. A la función

$$w^r_k(f; \delta)_p \equiv \sup_{0 \leq h \leq \delta} \|\Delta^r_k(h) f\|_p \quad (0 \leq \delta < \infty, r \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n)$$

se le llama *módulo* parcial *de continuidad* de orden r para la función f respecto a la variable x_k en la métrica L^p.

Definición 1.10 (Espacios de Nikol'skiĭ). Sea $r > 0$, y sea k un entero arbitrario tal que $k > r$. Denotamos por $H^r_{p;j}(\mathbb{R}^n)$ al espacio de Nikol'skiĭ de funciones f de $L^p(\mathbb{R}^n)$ para las cuales

$$\omega^k_j(f;\delta)_p = O(\delta^r).$$

Aunque parezca que la definición depende de la elección del entero $k > r$, en realidad no es así debido a las desigualdades de Marchaud [4, pg. 332].

Definición 1.11. Supongamos que $r_j > 0$, $(j = 1, \dots, n)$ y que k_j son enteros arbitrarios tales que $k_j > r_j$. Entonces, el espacio $H_p^{r_1,\dots,r_n}(\mathbb{R}^n)$ se define como $\cap_{j=1}^n H^{r_j}_{p;j}(\mathbb{R}^n)$, con la norma

$$\|f\|_{H_p^{r_1,\dots,r_n}} = \|f\|_p + \sum_{j=1}^n \|f\|_{h^{r_j}_{p;j}},$$

donde

$$\|f\|_{h^{r_j}_{p;j}} = \sup_{u>0} u^{-r_j}\omega_j^{k_j}(f;u)_p.$$

1.3.3. Espacios de Besov

Los espacios de Besov aparecieron como generalización de los espacios de Nikol'skiĭ para tratar problemas de Teoría de Aproximación y sobre las trazas de espacios de Sobolev.

Ahora, al igual que en [37, §4], definimos el espacio de Besov en la dirección del eje coordenado x_j.

Definición 1.12. Sea $r > 0$, $1 \leq p, \theta < \infty$ y $1 \leq j \leq n$. Definimos el espacio $B^r_{p,\theta;j}(\mathbb{R}^n)$ como la clase de funciones $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para las cuales

$$\|f\|_{B^r_{p,\theta;j}} \equiv \|f\|_p + \|f\|_{b^r_{p,\theta;j}} < \infty, \tag{1.12}$$

donde

$$\|f\|_{b^r_{p,\theta;j}} \equiv \left(\int_0^\infty \left[h^{-r}\|\Delta^k_j(h)f\|_p\right]^\theta \frac{dh}{h}\right)^{1/\theta}.$$

Cada elección de $k > r$ de tipo entero da lugar a seminormas equivalentes. Además, el resultado de sustituir la expresión $\|\Delta^k_j(h)f\|_p$ por el módulo de continuidad $\omega^k_j(f;h)_p$ también nos lleva a normas equivalentes ([5, §4] y [37, §4]).

Definición 1.13 (Espacio de Besov anisótropo). Sean $r_1, \ldots, r_n > 0$, $1 \leq p, \theta < \infty$. Llamaremos Espacio de Besov anisótropo, $B^{r_1,\ldots,r_n}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$, a la intersección $\cap_{j=1}^n B^{r_j}_{p,\theta;j}$. Así,

$$\|f\|_{B^{r_1,\ldots,r_n}_{p,\theta}} \equiv \|f\|_p + \sum_{j=1}^n \left[\int_0^\infty (t^{-r_j} w_j^{k_j}(f;t)_p)^\theta \frac{dt}{t} \right]^{1/\theta} < \infty \,,$$

donde k_j son enteros tales que $k_j > r_j$.

Por simplicidad, para $r > 0$, denotaremos $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n) \equiv B^{r,\ldots,r}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$.

Es importante que si $1 \leq \theta < \eta < \infty$,

$$B^{r_1,\ldots,r_n}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{r_1,\ldots,r_n}_{p,\eta}(\mathbb{R}^n) \tag{1.13}$$

(ver, por ejemplo, [43]). Así, los espacios $B^{r_1,\ldots,r_n}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ se hacen más grandes al aumentar θ.

En relación con los espacios de Nikol'skiĭ, es fácil ver que

$$B^{r_1,\ldots,r_n}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{r_1,\ldots,r_n}_{p}(\mathbb{R}^n).$$

Además, si $f \in B^{r_1,\ldots,r_n}_{p,\theta_0}(\mathbb{R}^n)$ para algún $1 \leq \theta_0 < \infty$, entonces

$$\|f\|_{H^{r_1,\ldots,r_n}_p} = \lim_{\theta \to \infty} \|f\|_{B^{r_1,\ldots,r_n}_{p,\theta}}.$$

Es por esto y por (1.13) que se define $B^{r_1,\ldots,r_n}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n) \equiv H^{r_1,\ldots,r_n}_{p}(\mathbb{R}^n)$.

Por otra parte, las relaciones entre los espacios de Besov y los de Sobolev son las siguientes: sean $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq n$, entonces (ver [26, Theorem 4.5])

$$B^r_{p,p;j}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^r_{p;j}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^r_{p,2;j}(\mathbb{R}^n) \quad (1 < p \leq 2),$$

$$B^r_{p,2;j}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^r_{p;j}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^r_{p,p;j}(\mathbb{R}^n) \quad (2 \leq p < \infty).$$

Y las inmersiones son estrictas si $p \neq 2$.

1.3.4. Espacios de Lipschitz

Algunos de los problemas importantes que nos llevan a los espacios de Lipschitz son problemas de teoría de las series trigonométricas de Fourier.

Definición 1.14. Sea $1 \leq p < \infty$, $r > 0$ y sea $\bar{r}$ el menor entero tal que $\bar{r} \geq r$. Decimos que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pertenece al *espacio de Lipschitz* con respecto a la variable j-ésima $\Lambda^r_{p;j}(\mathbb{R}^n)$ si

$$\omega_j^{\bar{r}}(f;\delta)_p = O(\delta^r).$$

Subrayamos que la diferencia con la Definición 1.10 existe sólo en el caso $r \in \mathbb{N}$. Y es que aquí tomamos el módulo de continuidad de orden r y en el espacio de Nikol'skiĭ el más débil de orden $r+1$.

Es claro que

$$\Lambda^r_{p;j}(\mathbb{R}^n) \subset H^r_{p;j}(\mathbb{R}^n),$$

y además la igualdad se cumple si y sólo si $r \notin \mathbb{N}$. Por otro lado, por el teorema de Hardy-Littlewood [37], si $r \in \mathbb{N}$,

$$\Lambda^r_{p;j}(\mathbb{R}^n) = W^r_{p;j}(\mathbb{R}^n) \quad (p > 1).$$

Para $p = 1$ se tiene (ver [26, §4])

$$\{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : D_j^r f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)\} \cap \Lambda^r_{1;j}(\mathbb{R}^n) = W^r_{1;j}(\mathbb{R}^n).$$

Denotaremos por

$$\|f\|_{\Lambda^r_{p;j}} \equiv \|f\|_p + \|f\|_{\lambda^r_{p;j}} \qquad \text{donde } \|f\|_{\lambda^r_{p;j}} \equiv \sup_{\delta>0} \delta^{-r}\omega_j^{\bar{r}}(f;\delta)_p.$$

Definición 1.15. Sean $r_j > 0$ $(j = 1,\ldots,n)$ y denotemos por $\bar{r}_j$ los menores enteros tal que $r_j \leq \bar{r}_j$. El *espacio de Lipschitz anisótropo* $\Lambda_p^{r_1,\ldots,r_n}(\mathbb{R}^n)$ se define como $\cap_{j=1}^n \Lambda^{r_j}_{p;j}(\mathbb{R}^n)$. Así,

$$\|f\|_{\Lambda_p^{r_1,\ldots,r_n}} \equiv \|f\|_p + \|f\|_{\lambda_p^{r_1,\ldots,r_n}},$$

donde la seminorma es

$$\|f\|_{\lambda_p^{r_1,\ldots,r_n}} = \sum_{j=1}^n \sup_{\delta>0} \delta^{-r_j}\omega_j^{\bar{r}_j}(f;\delta)_p\,.$$

1.4. Resultados auxiliares

Denotaremos por $\text{mes}_k\, A$ la medida de Lebesgue de un conjunto medible $A \subset \mathbb{R}^k$.

Para cualquier conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ de tipo F_σ denotaremos por E^j la proyección ortogonal de E sobre el hiperplano coordenado $x_j = 0$.

Con la notación anterior enunciamos el siguiente lema (ver [15, 4.4.2]).

Lema 1.2 (Desigualdad de Loomis-Whitney).

$$(\mathrm{mes}_n\, E)^{n-1} \le \prod_{j=1}^{n} \mathrm{mes}_{n-1}\, E^j\,. \tag{1.14}$$

Como siempre, para cada $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ denotamos por $\hat{x}_k$ el vector $(n-1)$-dimensional obtenido de eliminar la k-ésima coordenada de x.

Sea $f \in S_0(\mathbb{R}^n)$, $t > 0$ y sea E_t un conjunto de tipo F_σ y medida t tal que

$$|f(x)| \ge f^*(t) \quad \text{para todo } x \in E_t\,.$$

Denotamos por $\lambda_j(t)$ la medida $(n-1)$-dimensional de la proyección E_t^j $(j = 1, \ldots, n)$. Por (1.14), tenemos que

$$\prod_{j=1}^{n} \lambda_j(t) \ge t^{n-1}. \tag{1.15}$$

El siguiente lema fue probado en [24] (ver también [26]). No obstante, como es un resultado relevante para la tesis, reproduciremos aquí su demostración. Usaremos la notación que acabamos de introducir.

Lema 1.3. *Sea $n \ge 2$, $r_k \in \mathbb{N}$ $\quad(k = 1, \ldots, n)$. Supongamos que una función localmente integrable $f \in S_0(\mathbb{R}^n)$ tiene derivadas débiles $D_k^{r_k} f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ $(k = 1, \ldots, n)$. Entonces para todo $0 < t < \tau < \infty$ y $k = 1, \ldots, n$ tenemos*

$$f^*(t) \le K \left[f^*(\tau) + \left(\frac{\tau}{\lambda_k(t)} \right)^{r_k} (D_k^{r_k} f)^{**}(\tau) \right] \tag{1.16}$$

y

$$f^*(t) \le K \left[f^*(\tau) + \left(\frac{\tau}{\lambda_k(t)} \right)^{r_k - 1} \psi_k^* \left(\frac{\lambda_k(t)}{2} \right) \right], \tag{1.17}$$

donde K es una constante que depende sólo de $r_1, \ldots, r_n$ y

$$\psi_k(\hat{x}_k) = \int_{\mathbb{R}} |D_k^{r_k} f(x)|\, dx_k\,, \quad \hat{x}_k \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{1.18}$$

Demostración. Podemos suponer que para casi todo $\hat{x}_k \in \mathbb{R}^{n-1}$ la función f tiene todas las derivadas parciales con respecto a x_k de orden $r_k - 1$ y son absolutamente continuas en x_k en cualquier segmento (ver, por ejemplo, [26, Teorema 2.5]). El conjunto de todos los $\hat{x}_k \in \mathbb{R}^{n-1}$ que tienen esta propiedad lo denotamos por P_k.

Sea $0 < t < \tau < \infty$, donde $f^*(t) > f^*(\tau)$. La medida del conjunto

$$\{x : |f(x)| \geq f^*(t)\}$$

es al menos t. Elegimos un subconjunto E_t de tipo F_σ y de la misma medida.

La recta que pasa por $(0, \hat{x}_k)$ y es perpendicular al hiperplano $x_k = 0$ se denota por $L_{\hat{x}_k}$. Pongamos

$$Q = \{x : |f(x)| > f^*(\tau)\};$$

entonces $|Q| \leq \tau$. Sea A_k el conjunto de todos los $\hat{x}_k \in E_t^k \cap P_k$ para los que $Q \cap L_{\hat{x}_k}$ es medible en $\mathbb{R}$ y

$$\mathrm{mes}_1(Q \cap L_{\hat{x}_k}) \leq \frac{2\tau}{\lambda_k(t)}.$$

Como

$$|Q| \geq \frac{2\tau}{\lambda_k(t)} \, \mathrm{mes}_{n-1}(E_t^k - A_k),$$

en consecuencia $\mathrm{mes}_{n-1} A_k \geq \lambda_k(t)/2$. Denotamos

$$\alpha(\hat{x}_k) = \sup\{x_k : (x_k, \hat{x}_k) \in E_t\}, \quad \hat{x}_k \in A_k.$$

Entonces $|f(\alpha(\hat{x}_k), \hat{x}_k)| \geq f^*(t)$ (f es continua con respecto a x_k para $\hat{x}_k \in P_k$). Usando el Lema 6 de [24], para cada $\hat{x}_k \in A_k$ obtenemos

$$f^*(t) \leq (2^{r_k} - 1) \sup_{y \notin Q \cap L_{\hat{x}_k}} |f(y, \hat{x}_k)| + c \left(\frac{\tau}{\lambda_k(t)}\right)^{r_k - 1} \int_{I(\hat{x}_k)} |D_k^{r_k} f(x)| dx_k \leq$$

$$\leq (2^{r_k} - 1) f^*(\tau) + c \left(\frac{\tau}{\lambda_k(t)}\right)^{r_k - 1} \int_{I(\hat{x}_k)} |D_k^{r_k} f(x)| dx_k, \tag{1.19}$$

donde

$$I(\hat{x}_k) = \left[\alpha(\hat{x}_k), \alpha(\hat{x}_k) + 2r_k(r_k + 1)\frac{\tau}{\lambda_k(t)}\right].$$

Debido a la definición de ψ_k, (1.19) implica que

$$f^*(t) \leq (2^{r_k} - 1) f^*(\tau) + c \left(\frac{\tau}{\lambda_k(t)}\right)^{r_k - 1} \psi_k(\hat{x}_k).$$

Pero como $\operatorname{mes}_{n-1} A_k \geq \lambda_k(t)/2$, tomamos el ínfimo sobre $\hat{x}_k \in A_k$ y obtenemos

$$f^*(t) \leq (2^{r_k} - 1) f^*(\tau) + c \left(\frac{\tau}{\lambda_k(t)} \right)^{r_k - 1} \psi_k^* \left(\frac{\lambda_k(t)}{2} \right),$$

que es precisamente la estimación (1.17).

Ahora consideremos el conjunto

$$T_k = \{ x : \hat{x}_k \in A_k, x_k \in I(\hat{x}_k) \}.$$

Nótese que T_k es medible porque la función α lo es. Además,

$$|T_k| \leq 2 r_k (r_k + 1) \tau.$$

Integramos la desigualdad (1.19) con respecto a A_k y teniendo en cuenta que $\operatorname{mes}_{n-1} A_k \geq \lambda_k(t)/2$, obtenemos

$$f^*(t) \leq (2^{r_k} - 1) f^*(\tau) + c \tau^{r_k - 1} \lambda_k(t)^{-r_k} \int_{T_k} |D_k^{r_k} f(x)| dx \leq$$

$$\leq (2^{r_k} - 1) f^*(\tau) + c \left(\frac{\tau}{\lambda_k(t)} \right)^{r_k} (D_k^{r_k} f)^{**}(\tau),$$

con lo que (1.16) queda probado. $\square$

En los siguientes capítulos utilizaremos en varias ocasiones la siguiente desigualdad tipo Hardy.

Lema 1.4. *Sea φ una función medible no negativa en $\mathbb{R}_+$. Sean δ, $\alpha > 0$ y sea $1 \leq \gamma < \infty$. Supongamos que β es una función medible y positiva en $\mathbb{R}_+$ tal que $\beta(u) u^{-\delta}$ crece. Entonces*

$$\int_0^\infty h^{-\alpha - 1} dh \left(\int_{\{h \geq \beta(u)\}} \varphi(u) \frac{du}{u} \right)^\gamma \leq c \int_0^\infty \beta(u)^{-\alpha} \varphi(u)^\gamma \frac{du}{u} \tag{1.20}$$

y

$$\int_0^\infty h^{\alpha - 1} dh \left(\int_{\{h \leq \beta(u)\}} \varphi(u) \frac{du}{u} \right)^\gamma \leq c \int_0^\infty \beta(u)^{\alpha} \varphi(u)^\gamma \frac{du}{u}. \tag{1.21}$$

donde c es una constante que sólo depende de α, δ y γ.

Demostración. Como $\beta(u)u^{-\delta}\uparrow$, esto implica que la función inversa β^{-1} existe en $\mathbb{R}_+$ y satisface la condición

$$\beta^{-1}(2u) \leq 2^{1/\delta}\beta^{-1}(u). \tag{1.22}$$

Denotemos por I la parte izquierda de (1.20). Tenemos

$$I \equiv \int_0^\infty h^{-\alpha-1}dh \left(\int_0^{\beta^{-1}(h)} \varphi(u)\frac{du}{u}\right)^\gamma =$$

$$= \int_0^\infty h^{-\alpha-1}dh \left(\sum_{k=0}^\infty \int_{\beta^{-1}(2^{-k-1}h)}^{\beta^{-1}(2^{-k}h)} \varphi(u)\frac{du}{u}\right)^\gamma .$$

A continuación, por la desigualdad de Minkowski

$$I^{1/\gamma} \leq \sum_{k=0}^\infty \left(\int_0^\infty h^{-\alpha-1}dh \left(\int_{\beta^{-1}(2^{-k-1}h)}^{\beta^{-1}(2^{-k}h)} \varphi(u)\frac{du}{u}\right)^\gamma\right)^{1/\gamma} =$$

$$= \sum_{k=0}^\infty 2^{-k\alpha/\gamma} \left(\int_0^\infty z^{-\alpha-1}dz \left(\int_{\beta^{-1}(z/2)}^{\beta^{-1}(z)} \varphi(u)\frac{du}{u}\right)^\gamma\right)^{1/\gamma} .$$

Por otro lado, usando la desigualdad de Hölder y (1.22)

$$\int_{\beta^{-1}(z/2)}^{\beta^{-1}(z)} \varphi(u)\frac{du}{u} \leq c\left(\int_0^{\beta^{-1}(z)} \varphi(u)^\gamma\frac{du}{u}\right)^{1/\gamma} .$$

En consecuencia, por el teorema de Fubini

$$I \leq c\int_0^\infty z^{-\alpha-1}dz \int_0^{\beta^{-1}(z)} \varphi(u)^\gamma\frac{du}{u} = c\int_0^\infty \beta(u)^{-\alpha}\varphi(u)^\gamma\frac{du}{u}.$$

Los mismos razonamientos prueban (1.21). $\square$

Capítulo 2

Estimaciones para normas de diferencias de funciones en espacios anisótropos de Sobolev

Este capítulo es el resultado de un trabajo conjunto entre el autor y su director de tesis, V.I. Kolyada, [28].

Como ya dijimos en la introducción de la tesis, consideramos funciones en $\mathbb{R}^n$ para las cuales, las derivadas parciales generalizadas, $D_k^{r_k} f$, pertenecen a espacios de Lorentz diferentes L^{p_k,s_k}. Para este tipo de funciones encontramos estimaciones óptimas para normas tipo Besov.

2.1. Introducción

En primer lugar, recordemos el teorema clásico de Sobolev ya mencionado en la Introducción.

Teorema 2.1 (Sobolev). *Sean $n, r \in \mathbb{N}$. Sea $1 \le p < n/r$. Entonces, para toda $f \in W_p^r(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|f\|_{q^*} \le c \sum_{|\alpha|=r} \|D^\alpha f\|_p, \qquad q^* = \frac{np}{n - rp}. \tag{2.1}$$

Sobolev probó esta desigualdad en 1938 para $p > 1$. Usaba un método de representaciones integrales que no funcionaba en el caso $p = 1$. A finales de los cincuenta, Gagliardo y Nirenberg probaron (2.1) para todo $1 \le p < n/r$.

La desigualdad (2.1) ha sido generalizada y mejorada en varias direcciones. En [5, 26, 30, 37, 48, 49] se pueden encontrar más detalles sobre el tema y referencias a los trabajos originales y a las mejoras.

Para los espacios anisótropos de Sobolev se tiene el siguiente resultado: sean $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N}$. Definamos $r = (\sum_{j=1}^n r_j^{-1})^{-1}$. Sea $1 \le p < \frac{n}{r}$. Entonces, para toda $f \in W_p^{r_1,\dots,r_n}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|f\|_{q^*} \le c \sum_{j=1}^n \|D_j^{r_j} f\|_p, \qquad q^* = \frac{np}{n-rp}. \tag{2.2}$$

Lo que implica inmediatamente la inmersión

$$W_p^{r_1,\dots,r_n}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{q^*}(\mathbb{R}^n).$$

En el caso $p > 1$ la inmersión anterior fue probada con el método de representaciones integrales de Il'in (ver [5, §3]). En el caso $p = 1$ fue probada por Solonnikov [46] con otros métodos.

La desigualdad (2.2) se puede fortalecer poniendo en su parte izquierda la norma de Lorentz $\|.\|_{q^*,p}$, que (por (1.7)) es más fuerte que $\|.\|_{q^*}$. Esto es,

$$\|f\|_{q^*,p} \le c \sum_{j=1}^n \|D_j^{r_j} f\|_p. \tag{2.3}$$

Para $p > 1$ este resultado se obtiene por interpolación (ver [39, 45]). Para $p = 1$ se usan estimaciones de reordenamientos no crecientes [24]. Este método se ha simplificado bastante en [27], donde se usan reordenamientos iterados.

Además, puede verse en [26] que los métodos de reordenamientos no crecientes dan un resultado análogo en el caso en que las derivadas $D_k^r f$ puedan pertenecer a diferentes espacios L^{p_k}. En este capítulo suponemos que las derivadas pertenecen a espacios de Lorentz L^{p_k,s_k} diferentes (donde $s_k = 1$ si $p_k = 1$) y obtenemos un resultado análogo al de [26] en el Corolario 2.2.

Al exponente $q^* = np/(n - rp)$ que aparece en las inmersiones anteriores se le llama exponente límite. Un problema que también tratamos en este capítulo es la inmersión en L^q con exponente no límite. Es bien conocido el siguiente resultado.
Sean $r, n \in \mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$ tales que $1/q > 1/p - r/n$ y $0 < \theta < \infty$. Entonces, para cada función $f \in W_p^r(\mathbb{R}^n)$

$$\|f\|_{q,\theta} \le c\|f\|_{W_p^r}.$$

Como se ve, al contrario que en el teorema clásico de Sobolev, el exponente de inmersión no es límite. En [24] se demuestra una versión análoga para los espacios $W_p^{r_1,\dots,r_n}$. En el Corolario 2.1 obtenemos el resultado correspondiente para el caso general en que las derivadas pertenecen a espacios de Lorentz L^{p_k,s_k} diferentes ($s_k = 1$ si $p_k = 1$).

Sin embargo, como ya se dijo en la Introducción, nuestro logro principal es obtener estimaciones óptimas para normas de diferencias (ver (1.11)) de funciones en $\mathbb{R}^n$ con derivadas parciales generalizadas $D_k^{r_k} f$ en diferentes espacios de Lorentz.

Las primeras estimaciones óptimas para normas de diferencias de funciones en espacios de Sobolev fueron probadas por V.P. Il'in [5, vol.2, p.72]: si $n \in \mathbb{N}$, $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N}$, $r \equiv n\left(\sum_{i=1}^n r_i^{-1}\right)^{-1}$, $1 < p < q < \infty$ y $\alpha_k = r_k \left[1 - \frac{n}{r}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\right] > 0$, entonces

$$\sum_{k=1}^n \left(\int_0^\infty \left[h^{-\alpha_k} \|\Delta_k^{r_k}(h) f\|_q \right]^p \frac{dh}{h} \right)^{1/p} \leq c \sum_{k=1}^n \|D_k^{r_k} f\|_p \,. \tag{2.4}$$

Lo que implica la inmersión

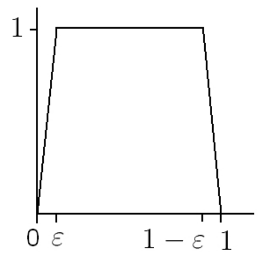
$$W_p^{r_1,\dots,r_n}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{q,p}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(\mathbb{R}^n) \,. \tag{2.5}$$

Es fácil ver que la desigualdad (2.4) falla si $p = n = 1$. En este caso, la desigualdad (2.4) queda:

$$\int_0^\infty h^{-1/q} \|\Delta(h) f\|_q \frac{dh}{h} \leq c\|Df\|_1.$$

Por ejemplo, sea la familia de funciones definidas en $[0, 1]$

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} x/\varepsilon & \text{si } x \in [0, \varepsilon], \\ 1 & \text{si } x \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon], \\ (1 - x)/\varepsilon & \text{si } x \in [1 - \varepsilon, 1]. \end{cases}$$



Se tiene que $\|Df_\varepsilon\|_1 = c$ y $\|\Delta(h)f_\varepsilon\|_q \geq ch^{1/q}$ si $2\varepsilon \leq h \leq 1-\varepsilon$.

Sin embargo, fue probado en [21] que (2.4) es cierta en el caso $p = 1$, $n \geq 2$.

La desigualdad (2.4) para $p = 1$, $n \geq 2$ se utilizó para demostrar algunas estimaciones de transformadas de Fourier en espacios de Sobolev (ver [40], [25]). De este modo, mediante estos resultados, podemos comparar las desigualdades (2.1) y (2.4). Consideremos el caso $p = 1$, $n = 2$. La desigualdad (2.1) significa que para cada función $f \in W_1^1(\mathbb{R}^2)$ su transformada de Fourier $\widehat{f}$ pertenece a $L^2(\mathbb{R}^2)$. A la vez, como se muestra en [25], se puede deducir fácilmente de (2.4) un resultado más fuerte; esto es, si $f \in W_1^1(\mathbb{R}^2)$, entonces $\widehat{f} \in L^{2,1}(\mathbb{R}^2)$. Nótese que esta afirmación no se sigue de (2.3). En este sentido, la desigualdad (2.4) mejora a la (2.3).

Ahora podemos especificar nuestro problema principal: encontrar las estimaciones óptimas de tipo (2.4) para el caso en el que las derivadas $D_k^{r_k} f$ pertenecen a espacios de Lorentz *distintos* L^{p_k,s_k}. El resultado principal de este capítulo es la siguiente desigualdad (ver Teorema 2.2 más adelante)

$$\left(\int_0^\infty \left[h^{-\alpha_j}\|\Delta_j^{r_j}(h)f\|_{q_j,1}\right]^{\theta_j} \frac{dh}{h}\right)^{1/\theta_j} \leq c\sum_{k=1}^n \|D_k^{r_k} f\|_{p_k,s_k}. \tag{2.6}$$

No explicaremos aquí las condiciones sobre los parámetros. Como ya se dijo antes, técnicamente, el caso más complicado es en el que algunos de los p_k's son iguales a 1 y otros de ellos son mayores que 1. La dificultad principal es encontrar los valores *óptimos* de los parámetros θ_j; queremos enfatizar que éste es el resultado principal del capítulo. En relación a esto, notar que la desigualdad de Il'in [5, Vol.2, p.72] es similar a (2.6) en el caso $p_k = s_k > 1$

($k = 1, \ldots, n$), pero con el valor del parámetro $\theta = \max_{1\le k\le n} p_k$, que no es óptimo cuando los p_k son diferentes.

La base general de nuestro método está contenida en los lemas 2.2, 1.3 y 2.4 que se enunciarán más adelante. Estos lemas fueron probados anteriormente por Kolyada. En este trabajo, aparece demostrado el Lema 2.2 por primera vez. Los lemas 1.3 y 2.4 dan estimaciones de reordenamientos no crecientes de una función en términos de sus derivadas. También usamos el esquema de la prueba de la desigualdad (2.4) desarrollada en [24]. Nótese que en nuestro caso se precisa realizar modificaciones esenciales de dicho esquema.

2.2. Resultados auxiliares

Lema 2.1. *Sea $\psi \in L^{p,s}(\mathbb{R}_+)$ $(1 \le p, s < \infty)$ una función no negativa no creciente en $\mathbb{R}_+$. Entonces para cada $\delta > 0$ existe una función $\varphi \in C^1(\mathbb{R}_+)$ tal que:*
(i) $\psi(t) \le \varphi(t), \quad t \in \mathbb{R}_+$;
(ii) $\varphi(t)\, t^{1/p-\delta}$ *decrece y* $\varphi(t)\, t^{1/p+\delta}$ *crece en* $\mathbb{R}_+$;
(iii) $\|\varphi\|_{p,s} \le c\|\psi\|_{p,s}$,
donde c es una constante que sólo depende de p y δ.

Demostración. Podemos suponer que $\delta < 1/p$. Definimos

$$\varphi_1(t) = 2\, t^{\delta-1/p} \int_{t/2}^{\infty} u^{1/p-\delta}\psi(u)\, \frac{du}{u}\, .$$

Es claro que $\varphi_1(t)\, t^{1/p-\delta}$ decrece y

$$\varphi_1(t) \ge 2\, t^{\delta-1/p}\psi(t) \int_{t/2}^{t} u^{1/p-\delta-1}\, du \ge \psi(t)\, .$$

Además, aplicando la desigualdad de Hardy [4, p.124] obtenemos fácilmente que

$$\|\varphi_1(t)\|_{p,s} \le c\, \|\psi\|_{p,s}\, . \tag{2.7}$$

Definimos ahora

$$\varphi(t) = (\delta + 1/p)\, t^{-1/p-\delta} \int_0^t \varphi_1(u) u^{\delta+1/p}\, \frac{du}{u}\, . \tag{2.8}$$

Entonces $\varphi(t)t^{1/p+\delta}$ crece en $\mathbb{R}_+$ y

$$\varphi(t) \geq \varphi_1(t) \geq \psi(t) \quad t \in \mathbb{R}_+ .$$

Además, el cambio de variable $v = u^{2\delta}$ en la parte derecha de (2.8) nos da que

$$t^{1/p-\delta}\varphi(t) = c\, t^{-2\delta} \int_0^{t^{2\delta}} \eta(v^{1/(2\delta)})\, dv\,,$$

donde $\eta(u) = \varphi_1(u)\, u^{1/p-\delta}$ es una función decreciente en $\mathbb{R}_+$. Por tanto, $t^{1/p-\delta}\varphi(t)$ decrece. Finalmente, usando la desigualdad de Hardy y (2.7), llegamos a (iii). El lema está probado. □

Comentario 2.1. Gracias a este lema podemos, para una función en $L^{p,s}(\mathbb{R}_+)$, hallar una mayorante derivable, cuya norma $L^{p,s}$ es comparable con la de la primera y además cuyo crecimiento y decrecimiento está controlado. Notemos también que, debido a las propiedades de φ, si $\varphi \not\approx 0$, entonces φ es positiva.

Por otra parte, sean $r_k \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p_k < \infty$ para $k = 1, \ldots, n \quad (n \geq 2)$. Llamaremos

$$r = n \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j} \right)^{-1}, \qquad p = \frac{n}{r} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{p_j r_j} \right)^{-1} \tag{2.9}$$

y

$$\gamma_k = 1 - \frac{1}{r_k} \left(\frac{r}{n} + \frac{1}{p_k} - \frac{1}{p} \right). \tag{2.10}$$

Entonces $\gamma_k > 0$ y

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k = n - 1. \tag{2.11}$$

Veámoslo:

$$\left(\frac{r}{n} + \frac{1}{p_k} - \frac{1}{p} \right) \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j} = 1 + \sum_{j \neq k} \left(\frac{1}{p_k} - \frac{1}{p_j} \right) \frac{1}{r_j} < 1 + \sum_{j \neq k} \frac{1}{r_j} \leq r_k \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j}\,.$$

De aquí, $\gamma_k > 0$. La igualdad (2.11) se sigue inmediatamente de (2.9).

Para probar nuestros resultados principales usaremos estimaciones del reordenamiento de una función dada, en términos de sus derivadas $D_k^{r_k} f \quad (k =$

$1, ..., n)$ (ver Lema 1.3). Por tanto aplicamos simultáneamente n estimaciones cuyas cotas superiores contienen funciones que pertenecen a espacios de Lorentz distintos entre sí. El siguiente lema nos permite obtener una estimación promedio o "estimación conjunta" que envuelve dichas n estimaciones de modo afilado.

Utilizaremos las notaciones (2.9) y (2.10).

Lema 2.2. *Sean $r_k \in \mathbb{N}$, $1 \le p_k, s_k < \infty$ para $k = 1, \dots, n \quad (n \ge 2)$ y $s_k = 1$ si $p_k = 1$. Definimos*

$$s = \frac{n}{r}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{s_j r_j}\right)^{-1}.$$

Sea

$$0 < \delta \le \frac{1}{4} \min_{\gamma_j < 1} \min(\gamma_j, 1 - \gamma_j). \tag{2.12}$$

Supongamos que $\varphi_k \in L^{p_k,s_k}(\mathbb{R}_+)\,(k = 1, \dots, n)$ son funciones positivas continuamente diferenciables con $\varphi_k'(t) < 0$ en $\mathbb{R}_+$ tales que $\varphi_k(t)t^{1/p_k - \delta}$ decrecen y $\varphi_k(t)t^{1/p_k + \delta}$ crecen en $\mathbb{R}_+$. Definamos para $u, t > 0$

$$\eta_k(u,t) = \begin{cases} (t/u)^{r_k - 1}\varphi_k(u), & \text{if } p_k = 1, \\ (t/u)^{r_k}\,\varphi_k(t), & \text{if } p_k > 1, \end{cases}$$

y

$$\sigma(t) = \sup\left\{\min_{1\le k\le n} \eta_k(u_k,t) : \prod_{k=1}^{n} u_k = t^{n-1}\,,\, u_k > 0\right\}. \tag{2.13}$$

Entonces:
(i) se cumple la desigualdad

$$\left(\int_0^\infty t^{s(1/p - r/n) - 1}\sigma(t)^s dt\right)^{1/s} \le c' \prod_{k=1}^{n} \|\varphi_k\|_{p_k,s_k}^{r/(nr_k)}; \tag{2.14}$$

(ii) existen funciones positivas $u_k(t)$ en $C^1(\mathbb{R}_+)$ tales que

$$\prod_{k=1}^{n} u_k(t) = t^{n-1} \tag{2.15}$$

y

$$\sigma(t) = \eta_k(u_k(t), t) \quad (t \in \mathbb{R}_+\,,\, k = 1, \dots, n); \tag{2.16}$$

(iii) para todo k tal que

$$\frac{1}{p_k} > \frac{1}{p} - \frac{r}{n} \tag{2.17}$$

la función $u_k(t)t^{\delta-1}$ decrece en $\mathbb{R}_+$;
(iv) si $p_k = 1$, entonces

$$\int_0^\infty \frac{u_k(t)}{t}\varphi_k(u_k(t))\,dt \le c\,\|\varphi_k\|_1. \tag{2.18}$$

Demostración. Fijamos $t > 0$ y denotamos

$$\mu_t(u) = \min_{1\le k\le n} \eta_k(u_k,t), \quad u = (u_1,\dots,u_n) \in \mathbb{R}^n_+.$$

Es una función continua en $\mathbb{R}^n_+$. Notemos que cada función $\eta_k(s,t)$ es estrictamente decreciente y continua con respecto a s en $\mathbb{R}_+$. Además, $\eta_k(s,t) \to 0$ cuando $s \to +\infty$. En consecuencia,

$$\mu_t(u) \to 0 \quad \text{cuando} \quad \max u_k \to +\infty.$$

Esto implica la existencia de un punto $u^* \in \mathbb{R}^n_+$ tal que

$$\mu_t(u^*) = \sigma(t) \quad \text{y} \quad \prod_{k=1}^n u_k^* = t^{n-1}.$$

Por otro lado, para cada $k = 1,\dots,n$ existe un único punto $u_k(t) > 0$ tal que $\eta_k(u_k(t),t) = \sigma(t)$. Es claro que $u_k^* \le u_k(t)$ para todo k (si no tendríamos que $\mu_t(u^*) < \sigma(t)$). Supongamos que $u_j^* < u_j(t)$ para algún j. Escogemos $u_j' \in (u_j^*, u_j(t))$ y elegimos $u_k' \in (0,u_k^*)$ $(\forall k \ne j)$ tal que $\prod_{k=1}^n u_k' = t^{n-1}$. Entonces obtenemos que $\mu_t(u') > \sigma(t)$, en contradicción con la definición de $\sigma(t)$. Así, $u_k^* = u_k(t)$ $(k = 1,\dots,n)$, y tenemos que las funciones $u_k(t)$ satisfacen a la vez las igualdades (2.15) y (2.16).

Además, para cada $j = 1,\dots,n$

$$\eta_j(u_j(t),t) = \eta_n(u_n(t),t). \tag{2.19}$$

De donde se sigue que existen funciones $\psi_j(s,t) \in C^1(\mathbb{R}^2_+)$ $(j = 1,\dots,n-1)$ tales que

$$\frac{\partial\psi_j}{\partial s}(s,t) > 0, \quad (s,t) \in \mathbb{R}^2_+, \tag{2.20}$$

y

$$u_j(t) = \psi_j(u_n(t), t) \quad (j = 1, ..., n-1). \tag{2.21}$$

En efecto, si $p_j = 1$, entonces (2.19) implica que

$$\lambda_j(u_j(t)) = t^{1-r_j}\eta_n(u_n(t), t),$$

donde $\lambda_j(s) \equiv s^{1-r_j}\varphi_j(s)$ es una función continuamente diferenciable con $\lambda_j'(s) < 0 \quad (s > 0)$. Así, (2.21) se cumple con

$$\psi_j(s, t) = \lambda_j^{-1}(t^{1-r_j}\eta_n(s, t));$$

claramente, $\psi_j \in C^1(\mathbb{R}_+^2)$ y satisface (2.20). Si $p_j > 1$, entonces (2.21) se cumple con la función

$$\psi_j(s, t) = t[\varphi_j(t)/\eta_n(s, t)]^{1/r_j},$$

que también está en $C^1(\mathbb{R}_+^2)$ y satisface (2.20).

Debido a (2.15) y (2.21) se sigue que para cualquier $t > 0$

$$\Phi(u_n(t), t) = t^{n-1},$$

donde

$$\Phi(s, t) = s\prod_{j=1}^{n-1}\psi_j(s, t).$$

Como $\Phi_s'(s, t) > 0$, obtenemos que $u_n \in C^1(\mathbb{R}_+)$ y por tanto, por (2.21), $u_j \in C^1(\mathbb{R}_+)$ para todo $j = 1, ..., n$. La afirmación (ii) está probada. Notemos también que por (2.16) la función σ es continuamente diferenciable para $\mathbb{R}_+$.

Ahora probaremos que para todo $t > 0$

$$\frac{r/n - 1/p - \delta}{t} \leq \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \leq \frac{r/n - 1/p + \delta}{t}. \tag{2.22}$$

Nuestras hipótesis sobre φ_k implican que para cada $k = 1, \ldots, n$

$$\left(\frac{1}{p_k} - \delta\right)\frac{1}{t} \leq -\frac{\varphi_k'(t)}{\varphi_k(t)} \leq \left(\frac{1}{p_k} + \delta\right)\frac{1}{t}. \tag{2.23}$$

Además, si $p_k > 1$, entonces por (2.16)

$$\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} = \frac{r_k}{t} - r_k\frac{u_k'(t)}{u_k(t)} + \frac{\varphi_k'(t)}{\varphi_k(t)} \tag{2.24}$$

y por (2.23)

$$\frac{r_k - 1/p_k - \delta}{t} - r_k \frac{u_k'(t)}{u_k(t)} \leq \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \leq \frac{r_k - 1/p_k + \delta}{t} - r_k \frac{u_k'(t)}{u_k(t)}. \tag{2.25}$$

Si $p_k = 1$, entonces tenemos por (2.16)

$$\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} = \frac{r_k - 1}{t} - (r_k + \alpha_j(t)) \frac{u_k'(t)}{u_k(t)}, \tag{2.26}$$

donde

$$\alpha_k(t) = -\left[1 + u_k(t) \frac{\varphi_k'(u_k(t))}{\varphi_k(u_j(t))}\right].$$

Debido a (2.23) ($p_k = 1$),

$$-\delta \leq \alpha_k(t) \leq \delta. \tag{2.27}$$

Derivando (2.15), se sigue de (2.11) que para cada $t > 0$ existe $m \equiv m(t)$ tal que

$$\frac{u_m'(t)}{u_m(t)} \leq \frac{\gamma_m}{t}.$$

Si $p_m > 1$, entonces por la primera de las desigualdades (2.25),

$$\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \geq \frac{r_m - 1/p_m - r_m \gamma_m - \delta}{t} = \frac{r/n - 1/p - \delta}{t}.$$

Si $p_m = 1$ (en este caso $\gamma_m < 1$), entonces por (2.26) y (2.27)

$$\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \geq \frac{r_m - 1 - \gamma_m(r_m + \delta)}{t} = \frac{r/n - 1/p - \delta}{t}.$$

Y ya tenemos la primera desigualdad en (2.22). Para probar la segunda desigualdad hay que notar que por (2.11) y (2.15) para cada $t > 0$ existe $l \equiv l(t)$ tal que

$$\frac{u_l'(t)}{u_l(t)} \geq \frac{\gamma_l}{t}.$$

Sólo queda aplicar la desigualdad derecha de (2.25) en el caso $p_l > 1$ o (2.26) y (2.27) en el caso $p_l = 1$.

Para probar (iii) asumimos que k satisface la condición (2.17) (esto es, $\gamma_k < 1$). Sea $p_k > 1$. Por (2.24), (2.23) y (2.22),

$$r_k \frac{u_k'(t)}{u_k(t)} = \frac{r_k}{t} - \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} + \frac{\varphi_k'(t)}{\varphi_k(t)} \leq$$

$$\leq \frac{r_k + 1/p - r/n - 1/p_k + 2\delta}{t} = \frac{r_k \gamma_k + 2\delta}{t}.$$

Entonces, por (2.12),

$$\frac{u_k'(t)}{u_k(t)} \leq \frac{1-\delta}{t},$$

lo que implica (iii) (en el caso $p_k > 1$). Si $p_k = 1$, entonces por (2.26) y (2.22)

$$(r_k + \alpha_k(t)) \frac{u_k'(t)}{u_k(t)} \leq \frac{r_k - 1 + 1/p - r/n + \delta}{t} =$$

$$= \frac{r_k \gamma_k + \delta}{t}.$$

Y de aquí (ver (2.12)),

$$\frac{u_k'(t)}{u_k(t)} \leq \frac{r_k \gamma_k + \delta}{(r_k + \alpha_k(t))t} \leq \frac{r_k \gamma_k + \delta}{(r_k - \delta)t} \leq \frac{1-\delta}{t},$$

que implica (iii).

En (iv) suponemos que $p_k = 1$. Por (2.26) y (2.22)

$$(r_k + \alpha_k(t)) \frac{u_k'(t)}{u_k(t)} \geq \frac{r_k - 1 + 1/p - r/n - \delta}{t} =$$

$$= \frac{r_k \gamma_k - \delta}{t}.$$

Y de aquí (ver (2.12)),

$$\frac{u_k'(t)}{u_k(t)} \geq \frac{r_k \gamma_k - \delta}{(r_k + \alpha_k(t))t} \geq \frac{r_k \gamma_k - \delta}{(r_k + \delta)t} > \frac{\delta}{t}.$$

Tenemos que

$$\int_0^\infty \frac{u_j(t)}{t} \varphi_j(u_j(t)) dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{\delta} \int_0^\infty u_j'(t) \varphi_j(u_j(t)) dt = \frac{1}{\delta} \|\varphi_j\|_1.$$

Por tanto, obtenemos (2.18).

Sólo resta probar la desigualdad (2.14). Por (2.16), tenemos

$$\sigma(t)^{r/(nr_k)} = \left(\frac{t}{u_k(t)} \right)^{r/n} \left[\varphi_k(u_k(t)) \frac{u_k(t)}{t} \right]^{r/(nr_k)}, \quad \text{si} \quad p_k = 1,$$

y

$$\sigma(t)^{r/(nr_k)} = \left(\frac{t}{u_k(t)}\right)^{r/n} \varphi_k(t)^{r/(nr_k)}, \quad \text{si} \quad p_k > 1.$$

Multiplicando estas igualdades y usando (2.15), conseguimos

$$\sigma(t) = t^{r/n} \prod_{p_k=1} \left[\frac{u_k(t)}{t}\varphi_k(u_k(t))\right]^{r/(nr_k)} \prod_{p_k>1} (\varphi_k(t))^{r/(nr_k)}. \tag{2.28}$$

Ahora denotamos

$$q_k = \frac{nr_k s_k}{rs}.$$

Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q_k} = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{p_k q_k} = \frac{s}{p}.$$

Por último, aplicando la desigualdad de Hölder con exponentes q_k y usando (2.18), se obtiene de (2.28)

$$\int_0^\infty t^{s(1/p-r/n)-1}\sigma(t)^s dt \leq$$

$$\leq c \prod_{p_k=1} \|\varphi_k\|_1^{rs/(nr_k)} \prod_{p_k>1} \|\varphi_k\|_{p_k,s_k}^{rs/(nr_k)}.$$

Y la prueba está terminada. □

Lema 2.3. *Sea f una función no negativa y medible en $\mathbb{R}^n$, y sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible con $|E| = \mu > 0$. Entonces, para cada $0 < \tau < \mu$, el conjunto E puede descomponerse en dos subconjuntos medibles disjuntos P y S tales que $|S| = \tau$ y*

$$\sup_{x\in P} f(x) \leq \inf_{x\in S} f(x),$$

$$\int_P f(x)dx \leq \int_\tau^\mu f^*(t)dt.$$

La demostración del Lema 2.3 se encuentra en [24].

Lema 2.4. *Sea $n \geq 2$, $r_k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p_k, s_k < \infty$ para $k = 1, \ldots, n$ y $s_k = 1$ si $p_k = 1$. Definimos*

$$r = n\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r_k}\right)^{-1}, \qquad p = \frac{n}{r}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k r_k}\right)^{-1}, \tag{2.29}$$

y

$$s = \frac{n}{r}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{s_k r_k}\right)^{-1}. \tag{2.30}$$

Supongamos que una función localmente integrable $f \in S_0(\mathbb{R}^n)$ tiene derivadas débiles $D_k^{r_k} f \in L^{p_k,s_k}(\mathbb{R}^n)$ $(k = 1, \ldots, n)$. Entonces para cada $\xi > 1$

$$f^*(t) \le K\ \left[f^*(\xi t) + \xi^{\bar r}\sigma(t)\right], \tag{2.31}$$

donde $\bar r = \max r_k$, la constante K depende sólo de $r_1, \ldots, r_n$ y

$$\left(\int_0^\infty t^{s(1/p - r/n)-1}\sigma(t)^s\, dt\right)^{1/s} \le c\prod_{k=1}^{n} \|D_k^{r_k} f\|_{p_k,s_k}^{r/(nr_k)}. \tag{2.32}$$

Demostración. Para cada $k = 1, \ldots, n$ fijo, tomamos (ver (1.18))

$$\psi(t) \equiv \psi_k(t) = \begin{cases} \psi_k^*(t/2), & \text{si } p_k = 1, \\ \left(D_k^{r_k} f\right)^{**}(t), & \text{si } p_k > 1. \end{cases}$$

Entonces $\|\psi_k\|_1 = 2\|D_k^{r_k}\|_1$, si $p_1 = 1$, y por la desigualdad de Hardy [4, p.124]

$$\|\psi_k\|_{p_k,s_k} \le c\|D_k^{r_k} f\|_{p_k,s_k},$$

si $p_k > 1$. A continuación aplicamos el Lema 2.1 con δ definida como en el Lema 2.2. De esta forma obtenemos las funciones que denotamos como $\varphi_k(t)$ $(k = 1, \ldots, n)$. Además, con estas funciones φ_k definimos la función $\sigma(t)$ mediante la fórmula (2.13). Por Lema 2.2, obtenemos la desigualdad (2.32). Usando el Lema 1.3 con $\tau = \xi t$, obtenemos

$$f^*(t) \le K\left[f^*(\xi t) + \xi^{\bar r}\left(\frac{t}{\lambda_k(t)}\right)^{r_k}\varphi_k(t)\right],$$

si $p_k > 1$, y

$$f^*(t) \le K\left[f^*(\xi t) + \xi^{\bar r}\left(\frac{t}{\lambda_k(t)}\right)^{r_k - 1}\varphi_k(\lambda_k(t))\right],$$

si $p_k = 1$. Teniendo en cuenta (2.13) y (1.15), obtenemos de forma inmediata (2.31). □

Nótese que en el caso $p_1 = \ldots = p_n,\quad s_1 = \ldots = s_n$ el Lema 2.4 está en realidad contenido en [26] (ver los Lemas 7 y 8 en [24]).

2.3. Corolarios de los lemas. Inmersiones a espacios de Lorentz

Corolario 2.1 (Inmersión sin exponente límite). *Sea f una función que satisface las condiciones del Lema 2.4 y $f \in L^1(\mathbb{R}^n) + L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ para algún $p_0 > 0$ tal que*

$$\frac{1}{p_0} > \frac{1}{p} - \frac{r}{n}.$$

Sea $\max(1, p_0) < q < \infty$ *y*

$$\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{r}{n}. \tag{2.33}$$

Entonces para cada $\theta > 0$, $f \in L^{q,\theta}(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|f\|_{q,\theta} \leq c \left[\|f\|_{L^1+L^{p_0}} + \prod_{k=1}^{n} \|D_k^{r_k} f\|_{p_k,s_k}^{r/(nr_k)} \right]. \tag{2.34}$$

Demostración. Podemos suponer que $\theta < \min(1, p_0, s)$. Sea $f = g + h$, con $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $h \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$. Aplicando la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$J_1 \equiv \int_1^\infty \left[t^{1/q} f^*(t)\right]^\theta \frac{dt}{t} \leq$$

$$\leq 2^\theta \left[\int_1^\infty \left[t^{1/q} g^*(t/2)\right]^\theta \frac{dt}{t} + \int_1^\infty \left[t^{1/q} h^*(t/2)\right]^\theta \frac{dt}{t} \right] \leq$$

$$\leq c \left[\left(\int_0^\infty g^*(t) dt \right)^\theta + \left(\int_0^\infty h^*(t)^{p_0} dt \right)^{\theta/p_0} \right].$$

De donde se deduce que

$$J_1 \leq c' \|f\|_{L^1+L^{p_0}}^\theta. \tag{2.35}$$

Sea $0 < \delta < 1$. Aplicando (2.31) con $\xi = (2^{1/\theta} K)^q$, obtenemos gracias a la desigualdad de Hölder y a (2.33):

$$J_\delta \equiv \int_\delta^\infty \left[t^{1/q} f^*(t)\right]^\theta \frac{dt}{t} \leq J_1 + K^\theta \int_\delta^1 \left[t^{1/q} f^*(\xi t)\right]^\theta \frac{dt}{t} +$$

$$+ c \int_0^1 t^{\theta/q - 1} \sigma(t)^\theta dt \leq J_1 + \frac{1}{2} J_\delta +$$

$$+c' \left(\int_0^1 t^{s(1/p - r/n)-1} \sigma(t)^s dt \right)^{\theta/s}.$$

Por (2.35), $J_\delta < \infty$. Ahora la desigualdad (2.34) se sigue de (2.32) y (2.35). $\square$

El siguiente corolario nos da una generalización del clásico teorema de inmersión de Sobolev con exponente límite.

Corolario 2.2. *Sea $r_k \in \mathbb{N}$, $1 \le p_k, s_k < \infty$ para $k = 1, \ldots, n$ $(n \ge 2)$ y $s_k = 1$, si $p_k = 1$. Sean r, p y s los números definidos por (2.29) y (2.30). Supongamos que $p < n/r$ y se define $q^* = np/(n - rp)$. Entonces, para toda función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ de soporte compacto tenemos*

$$\|f\|_{q^*,s} \le c \prod_{k=1}^n \|D_k^{r_k} f\|_{p_k,s_k}^{r/(nr_k)}. \tag{2.36}$$

Este resultado se sigue inmediatamente del Lema 2.4. En [26, Theorem 13.1] se da un esquema diferente de la demostración de (2.36). En el caso $p_k = s_k > 1$ $(k = 1, \ldots, n)$ la desigualdad (2.36) está contenida en [5, Ch.4]. Para $r_1 = \cdots = r_n = 1$ (2.36) está demostrado en [47]. En [26] (ver también [47]) podemos encontrar una descripción detallada de los resultados anteriores partiendo desde la desigualdad clásica de Sobolev.

2.4. El Teorema principal

Teorema 2.2. *Sea $n \ge 2$, $r_k \in \mathbb{N}$, $1 \le p_k, s_k < \infty$ para $k = 1, \ldots, n$ y $s_k = 1$ si $p_k = 1$. Sean r, p y s los números definidos por (2.29) y (2.30). Para cada p_j $(1 \le j \le n)$ que cumpla la condición*

$$\rho_j \equiv \frac{r}{n} + \frac{1}{p_j} - \frac{1}{p} > 0\,,$$

cogemos cualquier $q_j > p_j$ tal que

$$\frac{1}{q_j} > \frac{1}{p} - \frac{r}{n}$$

y denotamos

$$\varkappa_j = 1 - \frac{1}{\rho_j}\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}\right),$$

$$\alpha_j = \varkappa_j r_j \quad , \qquad \frac{1}{\theta_j} = \frac{1-\varkappa_j}{s} + \frac{\varkappa_j}{s_j}\,.$$

Entonces para toda función $f \in S_0(\mathbb{R}^n)$ que tenga derivadas débiles $D_k^{r_k} f \in L^{p_k,s_k}(\mathbb{R}^n)$ $(k = 1,\ldots,n)$ se cumple la desigualdad

$$\left(\int_0^\infty \left[h^{-\alpha_j}\|\Delta_j^{r_j}(h)f\|_{q_j,1}\right]^{\theta_j}\frac{dh}{h}\right)^{1/\theta_j} \le c\sum_{k=1}^n \|D_k^{r_k}f\|_{p_k,s_k}\,, \tag{2.37}$$

donde c es una constante que no depende de f.

Demostración. En primer lugar hay que notar que las condiciones impuestas hacen que $0 < \varkappa_j < 1$. Llamaremos

$$g_k(x) = |D_k^{r_k} f(x)|.$$

Además, sin pérdida de generalidad, supondremos que $j = 1$ y definimos para $h > 0$

$$f_h(x) = |\Delta_1^{r_1}(h)f(x)|\,.$$

Para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos (ver [5, Vol.1, p.101])

$$f_h(x) \le \int_0^h \cdots \int_0^h g_1(x + (u_1 + \cdots + u_{r_1})e_1)\,du_1\cdots du_{r_1}\,. \tag{2.38}$$

Y de aquí,

$$f_h^*(t) \le h^{r_1} g_1^{**}(t). \tag{2.39}$$

Veámoslo: para cualquier subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ con $|A| = t$

$$\int_A f_h(x)\,dx \le h^{r_1}\sup_{B\subset\mathbb{R}^n,|B|=t}\int_B g_1(y)\,dy = h^{r_1} t g_1^{**}(t).$$

Y de esto, se sigue (2.39).

Si $p_1 = 1$ (en este caso $s_1 = 1$), entonces se deduce de (2.38) que $f_h \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Si $p_1 > 1$, entonces (2.39) implica que $f_h \in L^{p_1,s_1}(\mathbb{R}^n)$. Ahora podemos aplicar el Corolario 2.1 y tenemos que $f_h \in L^{q_1,1}(\mathbb{R}^n)$.

Denotamos para $h > 0$

$$J(h) \equiv \|f_h\|_{q_1,1} = \int_0^\infty t^{1/q_1 - 1} f_h^*(t)dt < \infty\,.$$

Sea $\xi_0 = (4K)^{q_1}$ y

$$Q(h) = \{t > 0 \,:\, f_h^*(t) \geq 2K f_h^*(\xi_0 t)\}\,, \tag{2.40}$$

donde K es la constante del Lema 1.3. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}_+ \setminus Q(h)} t^{1/q_1 - 1} f_h^*(t)dt \leq 2K \int_0^\infty t^{1/q_1 - 1} f_h^*(\xi_0 t)dt =$$

$$= 2K\xi_0^{-1/q_1} \int_0^\infty t^{1/q_1 - 1} f_h^*(t)dt = \frac{1}{2} J(h).$$

Por tanto,

$$J(h) \leq 2 \int_{Q(h)} t^{1/q_1 - 1} f_h^*(t)dt \equiv 2J'(h)\,. \tag{2.41}$$

Ahora conseguiremos estimaciones para $f_h^*(t)$. Denotamos

$$\psi_k(\hat{x}_k) = \int_{\mathbb{R}} g_k(x)dx_k\,, \quad \text{si } p_k = 1.$$

Sea $\varepsilon = (1 - \varkappa_1)/2$ y

$$0 < \delta < \varepsilon \,\text{mín}\left(\left(\frac{r_1 n}{r} - 1\right)^{-1}, \frac{1}{2} \min_{\gamma_j < 1} \text{mín}(\gamma_j, 1 - \gamma_j)\right). \tag{2.42}$$

Ahora para cada $k = 1, \ldots, n$ aplicamos el Lema 2.1 con $\psi(t) = \psi_k^*(t/2)$ en el caso $p_k = 1$ y $\psi(t) = g^{**}(t)$ en el caso $p_k > 1$. Obtenemos que existen funciones $\varphi_k(t)$ $(k = 1, \ldots, n)$ en $\mathbb{R}_+$ tal que

$$\varphi_k(t)\, t^{1/p_k - \delta} \ \downarrow, \quad \varphi_k(t)\, t^{1/p_k + \delta} \ \uparrow, \tag{2.43}$$

$$\psi_k^*(t/2) \leq \varphi_k(t)\,, \text{ si } p_k = 1\,, \tag{2.44}$$

$$g_k^{**}(t) \leq \varphi_k(t)\,, \text{ si } p_k > 1\,, \tag{2.45}$$

y

$$\|\varphi_k\|_{p_k, s_k} \leq c\, \|D_k^{r_k} f\|_{p_k, s_k}. \tag{2.46}$$

Ahora, para estimar $f_h^*(t)$ para $h > 0$ fijo y $t \in Q(h)$. Sea $E(t, h)$ un conjunto de tipo F_σ y medida t tal que

$$f_h(x) \geq f_h^*(t) \quad \text{para todo } x \in E(t, h). \tag{2.47}$$

Denotamos por $\lambda_k(t,h)$ la medida $(n-1)$-dimensional de la proyección ortogonal de $E(t,h)$ en el hiperplano coordenado $x_k = 0$. Por Lema 1.3, (2.44) y (2.45), tenemos que para cada $t \in Q(h)$

$$f_h^*(t) \leq c \left(\frac{t}{\lambda_k(t,h)}\right)^{r_k-1} \varphi_k(\lambda_k(t,h))\,, \quad \text{si } p_k = 1\,, \tag{2.48}$$

y

$$f_h^*(t) \leq c \left(\frac{t}{\lambda_k(t,h)}\right)^{r_k} \varphi_k(t)\,, \quad \text{si } p_k > 1\,. \tag{2.49}$$

A continuación aplicamos la desigualdad (1.14) y el Lema 2.2 y obtenemos que existe una función $\sigma(t)$ no negativa y funciones positivas $u_k(t)$ $(k = 1, \ldots, n)$ continuamente diferenciables en $\mathbb{R}_+$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

$$f_h^*(t) \leq c\,\sigma(t)\,, \quad t \in Q(h)\,, \tag{2.50}$$

$$\left(\int_0^\infty t^{s(1/p-r/n)-1}\sigma(t)^s dt\right)^{1/s} \leq c \prod_{k=1}^n \|D_k^{r_k} f\|_{p_k,s_k}^{r/(nr_k)}\,, \tag{2.51}$$

$$\sigma(t) = \begin{cases} (t/u_k(t))^{r_k-1}\,\varphi_k(u_k(t))\,, & \text{si } p_k = 1, \\ (t/u_k(t))^{r_k}\,\varphi_k(t)\,, & \text{si } p_k > 1, \end{cases} \tag{2.52}$$

$$\prod_{k=1}^n u_k(t) = t^{n-1}, \tag{2.53}$$

$$u_1(t)t^{\delta-1} \text{ decrece}, \tag{2.54}$$

$$\int_0^\infty \frac{u_k(t)}{t}\varphi_k(u_k(t))\,dt \leq c\,\|D_k^{r_k} f\|_1\,, \text{ si } p_k = 1. \tag{2.55}$$

La estimación (2.50) la usaremos para t "suficientemente pequeño". Para t "grande" necesitamos una estimación diferente, que incluya h.

En primer lugar, tenemos la estimación (2.39). Sin embargo, esta estimación no funciona en el caso $p_1 = 1$ (el operador $g \to g^{**}$ no es acotado en L^1).

Probaremos una estimación que pueda ser aplicada para todos los valores de $p_1 \geq 1$. Denotamos

$$\beta(t) = t/u_1(t)\,. \tag{2.56}$$

Probaremos que para cada $h > 0$ y cada $t \in Q(h)$

$$f_h^*(t) \leq c\,h^{r_1-\varepsilon}\beta(t)^\varepsilon\chi(t), \tag{2.57}$$

donde $\varepsilon = (1 - \varkappa_1)/2$ y

$$\chi(t) \equiv \sigma(t)\beta(t)^{-r_1} = \begin{cases} u_1(t)\varphi_1(u_1(t))/t\,, & \text{si } p_1 = 1, \\ \varphi_1(t)\,, & \text{si } p_1 > 1 \end{cases} \tag{2.58}$$

(ver (2.52)). Por (2.46) y (2.55),

$$\|\chi\|_{p_1,s_1} \le c\,\|D_1^{r_1} f\|_{p_1,s_1}\,. \tag{2.59}$$

Para $h \ge \beta(t)$ ($t \in Q(h)$) la desigualdad (2.57) se sigue directamente de (2.50) y (2.58). Supongamos que $0 < h \le \beta(t)$, $t \in Q(h)$. Si $p_1 > 1$, entonces (2.57) es la consecuencia inmediata de (2.39), (2.45) y (2.58).

Sea $p_1 = 1$. Primero supondremos que existe $1 \le j \le n$ tal que

$$\lambda_j(t,h) \ge \frac{1}{2} u_j(t) \left(\frac{\beta(t)}{h}\right)^{r_1/r_j}.$$

Si $p_j > 1$, entonces por (2.49) y (2.52)

$$f_h^*(t) \le c \left(\frac{t}{u_j(t)}\right)^{r_j} \varphi_j(t) \left(\frac{h}{\beta(t)}\right)^{r_1} = c\,\sigma(t) \left(\frac{h}{\beta(t)}\right)^{r_1}.$$

Si $p_j = 1$, entonces aplicamos (2.48). Notemos que

$$\lambda_j(t,h) \ge \frac{1}{2} u_j(t).$$

Teniendo en cuenta que para $\delta_j = \varepsilon r_j / r_1$ la función $\varphi_j(u)\,u^{1-\delta_j}$ decrece y la función $\varphi_j(u)\,u^{1+\delta_j}$ crece (ver (2.42) y (2.43)), obtenemos que

$$(\lambda_j(t,h))^{1-\delta_j} \varphi_j(\lambda_j(t,h)) \le \left(\frac{1}{2} u_j(t)\right)^{1-\delta_j} \varphi_j(\frac{u_j(t)}{2}) \le$$

$$\le c(u_j(t))^{1-\delta_j} \varphi_j(u_j(t)).$$

Por tanto, por (2.48)

$$f_h^*(t) \le c\,h^{r_1-\varepsilon} \beta(t)^{\varepsilon - r_1} \left(\frac{t}{u_j(t)}\right)^{r_j - 1} \varphi_j(u_j(t)).$$

De estas estimaciones y (2.52) se sigue la desigualdad (2.57), donde $\chi(t)$ está definida como en (2.58).

Ahora supongamos que para todo $j = 1, \dots, n$.

$$\lambda_j(t,h) < \frac{1}{2} u_j(t) \left(\beta(t)/h\right)^{r_1/r_j} . \tag{2.60}$$

Lo primero de todo, se tiene que

$$\lambda_1(t,h) < \frac{t}{2h}. \tag{2.61}$$

Además, para cualquier subconjunto de tipo F_σ: $A \subset E \equiv E(t,h)$ denotamos por A_j la proyección ortogonal de A sobre el hiperplano $x_j = 0$. Si

$$\operatorname{mes}_{n-1} A_1 \leq \frac{1}{2} u_1(t) \left(\frac{h}{\beta(t)}\right)^{\frac{r_1 n}{r} - 1} \equiv \frac{1}{2}\gamma(t,h)\,, \tag{2.62}$$

entonces

$$\operatorname{mes}_n A \leq \frac{t}{2}\,.$$

Esto es, si no tendríamos por (2.62) y (1.14)

$$\prod_{j=2}^{n} \operatorname{mes}_{n-1} A_j \geq \frac{t^{n-1}}{2^{n-2}\gamma(t,h)} =$$

$$= \frac{1}{2^{n-2}} \left(\frac{\beta(t)}{h}\right)^{r_1 \sum_{j=2}^{n} r_j^{-1}} \prod_{j=2}^{n} u_j(t)\,,$$

que contradice la hipótesis (2.60).

Usando el Lema 2.3, descomponemos la proyección $E_1(t,h)$ en subconjuntos medibles disjuntos P y S tales que

$$\operatorname{mes}_{n-1} S = \frac{1}{2}\gamma(t,h)$$

y

$$\int_P \psi_1(\hat{x}_1) d\hat{x}_1 \leq \int_{\gamma(t,h)/2}^{t/(2h)} \psi_1^*(u) du\,. \tag{2.63}$$

Se sigue de la observación de arriba que la medida del conjunto

$$E' = \{x \in E(t,h) \; : \quad \hat{x}_1 \in P\}$$

es al menos $t/2$. Para $\hat{x}_1 \in E_1(t,h)$ denotamos por $T(\hat{x}_1)$ la sección del conjunto $E(t,h)$ por la recta que pasa por $\hat{x}_1$ y es perpendicular al hiperplano $x_1 = 0$ (nótese que $T(\hat{x}_1)$ es un conjunto de tipo F_σ). Para casi todo $\hat{x}_1 \in E_1(t,h)$ tenemos (ver (2.38))

$$f_h^*(t) \operatorname{mes}_1 T(\hat{x}_1) \le \int_{T(\hat{x}_1)} f_h(x)dx_1 \le$$

$$\le h^{r_1} \int_{\mathbb{R}} |D_1^{r_1} f(x)| dx_1 = h^{r_1} \psi_1(\hat{x}_1).$$

Integrando esta desigualdad con respecto a $\hat{x}_1$ sobre P y teniendo en cuenta (2.63) y la desigualdad

$$\int_P \operatorname{mes}_1 T(\hat{x}_1) d\hat{x}_1 = |E'| \ge \frac{t}{2},$$

conseguimos (ver también (2.44))

$$f_h^*(t) \le \frac{h^{r_1}}{t} \int_{\gamma(t,h)}^{t/h} \varphi_1(u)du. \tag{2.64}$$

Para $0 < h \le \beta(t)$ tenemos

$$\gamma(t,h) \le u_1(t) \le t/h.$$

Es más, sea $\eta = \varepsilon / \left(\frac{r_1 n}{r} - 1\right)$. Por (2.43), $\varphi_1(u)\, u^{1+\eta}$ crece y $\varphi_1(u)\, u^{1-\varepsilon}$ decrece en $(0,\infty)$. Así, tenemos

$$\int_{\gamma(t,h)}^{t/h} \varphi_1(u)du = \int_{\gamma(t,h)}^{u_1(t)} \varphi_1(u)du + \int_{u_1(t)}^{t/h} \varphi_1(u)du \le$$

$$\le \varphi_1(u_1(t)) u_1(t)^{1+\eta} \gamma(t,h)^{-\eta}/\eta \ + \ \varphi_1(u_1(t)) u_1(t)^{1-\varepsilon} (t/h)^\varepsilon / \varepsilon =$$
$$= c\, h^{-\varepsilon} \beta(t)^\varepsilon u_1(t) \varphi_1(u_1(t)).$$

Y de aquí y (2.64) se sigue (2.57).

Finalmente, considerando (2.50) y (2.57), obtenemos que para cada $h > 0$ y cada $t \in Q(h)$

$$f_h^*(t) \le c\, \Phi(t,h), \tag{2.65}$$

donde

$$\Phi(t,h) = \min(\sigma(t), h^{r_1 - \varepsilon} \beta(t)^\varepsilon \chi(t)) \tag{2.66}$$

y $\chi(t)$ está definida en (2.58).

Y de ahí, tenemos (ver (2.41))

$$J'(h) \le c \int_0^\infty t^{1/q_1 - 1} \Phi(t,h) dt$$

y

$$J \equiv \int_0^\infty h^{-\alpha_1\theta_1 - 1} J(h)^{\theta_1} dh \le$$

$$\le c \int_0^\infty h^{-\alpha_1\theta_1-1} dh \left(\int_0^\infty t^{1/q_1 - 1} \Phi(t,h) dt \right)^{\theta_1}.$$

Entonces, tenemos (por (2.66))

$$J \le c \left[\int_0^\infty h^{-\alpha_1\theta_1-1} dh \left(\int_{\{h \ge \beta(t)\}} t^{1/q_1 - 1} \sigma(t) dt \right)^{\theta_1} + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty h^{(r_1 - \alpha_1 - \varepsilon)\theta_1 - 1} dh \left(\int_{\{h \le \beta(t)\}} t^{1/q_1 - 1} \beta(t)^{\varepsilon} \chi(t) dt \right)^{\theta_1} \right] \equiv c\,(J_1 + J_2)\,.$$

Por (2.54), la función $\beta(t)t^{-\delta}$ crece en $\mathbb{R}_+$. Como J_1 tiene la forma de la integral de la parte izquierda de (1.20), aplicamos el Lema 1.4 y obtenemos

$$J_1 \le c \int_0^\infty \beta(t)^{-\alpha_1\theta_1} t^{\theta_1/q_1} \sigma(t)^{\theta_1} \frac{dt}{t}.$$

Y de esta última desigualdad y (2.58) llegamos a

$$J_1 \le c \int_0^\infty t^{\theta_1/q_1 - 1} \chi(t)^{\varkappa_1\theta_1} \sigma(t)^{(1-\varkappa_1)\theta_1} dt. \tag{2.67}$$

Ahora notemos que J_2 tiene la forma de la integral de la parte izquierda de (1.21). Así, el resultado de aplicar Lema 1.4 sobre J_2 da que

$$J_2 \le c \int_0^\infty t^{\theta_1/q_1 - 1} \chi(t)^{\theta_1} \beta(t)^{r_1(1-\varkappa_1)\theta_1} dt\,.$$

Por (2.58) la última integral es la misma que la de la parte derecha de (2.67). Por tanto, tenemos que

$$J \le c \int_0^\infty t^{\theta_1/q_1 - 1} \chi(t)^{\varkappa_1\theta_1} \sigma(t)^{(1-\varkappa_1)\theta_1} dt.$$

Ahora aplicamos la desigualdad de Hölder con exponentes $u = s_1/(\varkappa_1\theta_1)$ y $u' = s_1/(s_1 - \varkappa_1\theta_1)$. Notemos que

$$(1-\varkappa_1)\theta_1 u' = s\,, \quad \left(\frac{\theta_1}{q_1} - \frac{s_1}{p_1 u}\right) u' = s\left(\frac{1}{p} - \frac{r}{n}\right).$$

Así conseguimos, utilizando (2.51) y (2.59):

$$J^{1/\theta_1} \leq c\left(\int_0^\infty t^{s(1/p\,-r/n)-1}\sigma(t)^s dt\right)^{(1-\varkappa_1)/s} \|D_1^{r_1}f\|_{p_1,s_1}^{\varkappa_1} \leq$$

$$\leq c\left(\prod_{j=1}^n \|D_j^{r_j}f\|_{p_j,s_j}^{r/(nr_j)}\right)^{1-\varkappa_1} \|D_1^{r_1}f\|_{p_1,s_1}^{\varkappa_1}.$$

Como

$$\sum_{j=1}^n \frac{r}{nr_j} = 1,$$

obtenemos (usando la relación entre medias aritmética y geométrica) la desigualdad (2.37). El teorema está probado. $\square$

Comentario 2.2. Primero recordaremos la definición de espacio de Besov en la dirección de los ejes coordenados x_j (ver Definición 1.12).

Ahora nótese que las hipótesis del Teorema 2.2 no implican la pertenencia de la función f a ningún $L^\nu(\mathbb{R}^n)$. Sin embargo, si añadimos la hipótesis de que $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ para algún $p_0 \geq 1$ y que $q_j > p_0$, entonces por el Corolario 2.1 tenemos $f \in L^{q_j,1}(\mathbb{R}^n)$. Así, con estas condiciones adicionales el Teorema 2.2 implica que $f \in B^{\alpha_j}_{q_j,\theta_j;j}(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|f\|_{B^{\alpha_j}_{q_j,\theta_j;j}} \leq c\left[\|f\|_{p_0} + \sum_{k=1}^n \|D_k^{r_k}f\|_{p_k,s_k}\right].$$

Comentario 2.3. Es importante subrayar que los valores de los parámetros θ_k encontrados en el Teorema 2.2 son óptimos. Para verificar esta afirmación consideraremos el siguiente ejemplo.

Supongamos que $n=2$, $r_1 = r_2 = 1$, $1 \leq p_1, p_2 < \infty$ y $s_1 = p_1$, $s_2 = p_2$. Además, asumamos que

$$p \equiv 2\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}\right)^{-1} < 2. \quad \text{Entonces } \frac{1}{p_i} > \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \quad (i=1,2).$$

Sea $q_1 > p_1$ tal que
$$\frac{1}{q_1} > \frac{1}{p} - \frac{1}{2}\,.$$
Como en Teorema 2.2, definimos
$$\varkappa_1 = 1 - \frac{1/p_1 - 1/q_1}{1/p_1 - 1/p + 1/2}\,,$$
$$\alpha_1 = \varkappa_1 \quad , \quad \frac{1}{\theta_1} = \frac{1-\varkappa_1}{p} + \frac{\varkappa_1}{p_1}\,.$$
Para $0 < \varepsilon < \theta_1$, definimos los siguientes números
$$\alpha = \frac{2/p - 1}{1 + 2(1/p_1 - 1/p)} \quad , \quad \beta = \frac{2/p - 1}{1 + 2(1/p_2 - 1/p)}\,,$$
$$\delta = \frac{1}{p_1[1 + 2(1/p_1 - 1/p)]}\frac{\theta_1}{\theta_1 - \varepsilon} \quad , \quad \gamma = \frac{1}{p_2[1 + 2(1/p_2 - 1/p)]}\frac{\theta_1}{\theta_1 - \varepsilon}\,.$$
Supongamos además que $\alpha > 1 - 1/p_1$ y $\beta > 1 - 1/p_2$ (lo cual se cumple si p_1, p_2 son "pequeños"). Entonces, llamaremos para $(x, y) \in [-1, 1]^2$
$$\varphi_0(x, y) = |x|^\alpha \left(\log \frac{e}{|x|}\right)^\delta + |y|^\beta \left(\log \frac{e}{|y|}\right)^\gamma\,.$$
Sea
$$D = \left\{(x, y) \in [-1, 1]^2 : \varphi_0(x, y) \le 1\right\}$$
y
$$f(x, y) \equiv f_\varepsilon(x, y) = \begin{cases} [\varphi_0(x, y)]^{-1} - 1, & \text{if } (x, y) \in D, \\ 0, & \text{if } (x, y) \notin D. \end{cases}$$
Realizando cálculos rutinarios, se puede ver que la función f cumple las siguientes propiedades:

(i) para todo $1 \le \nu \le 2p/(2-p) \quad f \in L^\nu(\mathbb{R}^2)$;

(ii) $\dfrac{\partial f}{\partial x} \in L^{p_1}(\mathbb{R}^2), \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} \in L^{p_2}(\mathbb{R}^2)\,;$

(iii) $\displaystyle\int_0^\infty \left[h^{-\alpha_1}\|\Delta_1^1(h)f\|_{q_1}\right]^{\theta_1 - \varepsilon}\frac{dh}{h} = +\infty\,.$

Esto implica que los valores de θ_k en el Teorema 2.2 no se pueden hacer más pequeños.

Realizaremos a continuación los cálculos con los que se obtiene (i), (ii) y (iii).

Demostración. En primer lugar probaremos (i).

Sea $0 < \eta < 1/2$ tal que $t^{\alpha}(\log \frac{e}{t})^{\delta}$ y $t^{\beta}(\log \frac{e}{t})^{\gamma}$ sean crecientes en $(0, \eta)$.

Sea $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq k_0$

$$2^{-k/\alpha}k^{-\delta/\alpha} \leq \eta \quad \text{y} \quad 2^{-k/\beta}k^{-\gamma/\beta} \leq \eta.$$

Para cada $k \geq k_0$ definimos el rectángulo

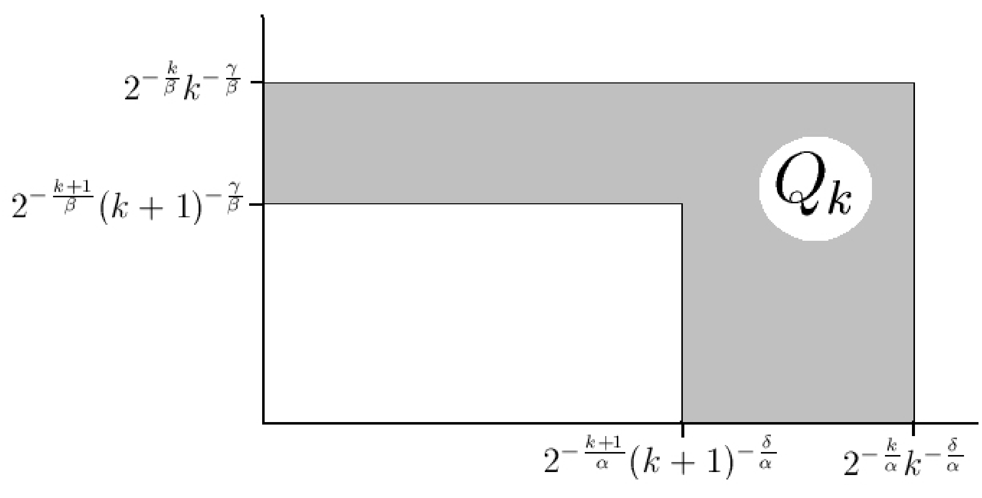
$$P_k = [0, 2^{-k/\alpha}k^{-\delta/\alpha}] \times [0, 2^{-k/\beta}k^{-\gamma/\beta}].$$

Notemos que $P_{k+1} \subset P_k \subset [0, \eta]^2$ para cada $k \geq k_0$.

Por la manera de definir f, es obvio que la afirmación (i) es equivalente a que para cada $1 \leq \nu \leq 2p/(2-p)$

$$\int_{P_{k_0}} \frac{1}{\varphi_0(x,y)^{\nu}} dxdy < \infty.$$

Definamos $Q_k = P_k - P_{k+1}$, $(k \geq k_0)$.



Es fácil ver que si $(x, y) \in Q_k$, entonces

$$c_1 2^{-k} \leq \varphi_0(x, y), \tag{2.68}$$

donde c_1 es una constante positiva que sólo depende de α, β, γ y δ. Entonces

$$\int_{P_{k_0}} \frac{1}{\varphi_0(x,y)^\nu} dxdy = \sum_{k=k_0}^{\infty} \int_{Q_k} \frac{1}{\varphi_0(x,y)^\nu} dxdy \leq c \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{k\nu} |Q_k|. \qquad (2.69)$$

Además

$$|Q_k| \leq |P_k| = 2^{-ka} k^{-b}, \qquad (2.70)$$

donde $a = 1/\alpha + 1/\beta$, $b = \delta/\alpha + \gamma/\beta$. Teniendo en cuenta las definiciones de α, β, γ, δ tenemos

$$a = \frac{2p}{2-p}, \quad b = \frac{2}{2-p} \frac{\theta_1}{\theta_1 - \varepsilon}. \qquad (2.71)$$

Entonces, por (2.69), (2.70) y (2.71), si $1 \leq \nu \leq 2p/(2-p)$ (recordemos $1 \leq p < 2$)

$$\int_{P_{k_0}} \frac{1}{\varphi_0(x,y)^\nu} dxdy \leq c \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{k(\nu - a)} k^{-b} < +\infty,$$

y queda probado (i).

Ahora demostraremos que $\frac{\partial f}{\partial x} \in L^{p_1}(\mathbb{R}^2)$. Esto es equivalente a

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \int_{Q_k} \left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi_0(x,y)^{-1} \right) \right|^{p_1} dxdy < \infty.$$

Derivando obtenemos, para $(x,y) \in P_{k_0}$,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi_0(x,y)^{-1} \right) = -\varphi_0(x,y)^{-2} [\alpha x^{\alpha-1} \left(\log \frac{e}{x} \right)^\delta - x^{\alpha-1} \delta \left(\log \frac{e}{x} \right)^{\delta-1}].$$

Entonces,

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi_0(x,y)^{-1} \right) \right| = \varphi_0(x,y)^{-2} x^{\alpha-1} \left(\log \frac{e}{x} \right)^\delta \left| \alpha - \delta \left(\log \frac{e}{x} \right)^{-1} \right| \leq$$

$$\leq \varphi_0(x,y)^{-2} x^{\alpha-1} \left(\log \frac{e}{x} \right)^\delta (\alpha + \delta).$$

De esta estimación y (2.68) se obtiene

$$\int_{Q_k} \left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi_0(x,y)^{-1} \right) \right|^{p_1} dxdy \leq c 2^{2kp_1} \int_{Q_k} x^{(\alpha-1)p_1} \left(\log \frac{e}{x} \right)^{\delta p_1} dxdy \leq$$

$$\leq c 2^{2kp_1 - k/\beta} k^{-\gamma/\beta} \int_0^{2^{-\frac{k}{\alpha}} k^{-\frac{\delta}{\alpha}}} x^{(\alpha-1)p_1} \left(\log \frac{e}{x}\right)^{\delta p_1} dx.$$

Como $(\alpha - 1)p_1 > -1$, es fácil ver que existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_1$

$$\int_0^{2^{-\frac{k}{\alpha}} k^{-\frac{\delta}{\alpha}}} x^{(\alpha-1)p_1} \left(\log \frac{e}{x}\right)^{\delta p_1} dx \leq c 2^{-kp_1} [2^{-\frac{k}{\alpha}} k^{-\frac{\delta}{\alpha}}]^{1-p_1}.$$

Y de estas dos últimas desigualdades, si $k \geq k_1$, tenemos

$$\int_{Q_k} \left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi_0(x,y)^{-1}\right) \right|^{p_1} dxdy \leq c 2^{k[p_1(1+\frac{1}{\alpha})-a]} k^{-b+\frac{\delta}{\alpha}p_1}, \tag{2.72}$$

donde a y b fueron definidos en (2.71). Debido a las definiciones de α, δ y (2.71) se cumple

$$a = p_1(1 + \frac{1}{\alpha}) \quad \text{y} \quad -b + \frac{\delta}{\alpha}p_1 = \frac{\theta_1}{\varepsilon - \theta_1} < -1.$$

A partir de aquí y de (2.72) es inmediato que

$$\sum_{k=k_1}^{\infty} \int_{Q_k} \left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi_0(x,y)^{-1}\right) \right|^{p_1} dxdy < \infty.$$

De modo análogo se ve que $\frac{\partial f}{\partial y} \in L^{p_2}(\mathbb{R}^2)$, con lo que (ii) queda demostrado.

Definimos $\lambda(x) = x^{\alpha/\beta}(\log \frac{e}{x})^{(\delta-\gamma)/\beta}$. Sea

$$R(h) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < h, 0 < y < \lambda(x)\}.$$

Es claro que, eligiendo $0 < \mu$ suficientemente pequeño, podemos tener que para cada $0 < h < \mu$,

$$R(h) \subset (0,\eta)^2, \qquad 2h \in (0,\eta), \tag{2.73}$$

$$\left(\frac{x}{e}\right)^{2\alpha/\beta} \leq \frac{\lambda(x)}{e} \quad \text{si } 0 < x < h. \tag{2.74}$$

Ahora, si $0 < h < \mu$

$$\|\Delta_1(h)f\|_{q_1}^{q_1} \geq \int_{R(h)} |f(x,y) - f(x+h,y)|^{q_1} dxdy =$$

$$= \int_{R(h)} \left(\frac{1}{\varphi_0(x,y)} - \frac{1}{\varphi_0(x+h,y)} \right)^{q_1} dxdy.$$

Si $(x,y) \in R(h)$

$$\frac{1}{\varphi_0(x,y)} - \frac{1}{\varphi_0(x+h,y)} \geq \frac{1}{\varphi_0(x,y)} - \frac{1}{\varphi_0(2x,y)} =$$

$$= \frac{\varphi_0(2x,y) - \varphi_0(x,y)}{\varphi_0(x,y)\varphi_0(2x,y)}. \tag{2.75}$$

Definamos $u(x) = x^\alpha \left(\log \frac{e}{x}\right)^\delta$. Notemos que, debido a la definición de η, $u(x)$ es estrictamente creciente en $(0,\eta)$. De aquí se sigue fácilmente que

$$\zeta \leq \frac{u(2x)}{u(x)} \leq 2^\alpha \qquad 0 < x < \eta/2, \tag{2.76}$$

donde $\zeta = u(\eta)/u(\eta/2) > 1$ es una constante. Por otro lado sea $v(y) = y^\beta \left(\log \frac{e}{y}\right)^\gamma$. Se cumple (usar (2.74)) que

$$v(\lambda(x)) \leq cu(x) \qquad 0 < x < h < \mu. \tag{2.77}$$

Como $\varphi_0(x,y) = u(x) + v(y)$, juntando (2.75), (2.76) y (2.77), se llega a

$$\frac{1}{\varphi_0(x,y)} - \frac{1}{\varphi_0(x+h,y)} \geq \frac{c(\zeta-1)}{u(x)} \qquad (x,y) \in R(h),\ 0 < h < \mu.$$

Así, si $0 < h < \mu$

$$\|\Delta_1(h)f\|_{q_1}^{q_1} \geq c \int_0^h \lambda(x) u(x)^{-q_1} dx = c \int_0^h x^d \left(\log \frac{e}{x}\right)^l dx,$$

donde $d = \frac{\alpha}{\beta} - \alpha q_1$ y $l = \frac{\delta - \gamma}{\beta} - \delta q_1$. Como (por las definiciones de α, β, γ, δ, α_1) $d = \alpha_1 q_1 - 1$ y $l = \frac{-q_1}{\theta_1 - \varepsilon}$ es fácil ver que

$$\|\Delta_1(h)f\|_{q_1}^{q_1} \geq ch^{d+1} \left(\log \frac{e}{h}\right)^l \qquad 0 < h < \mu,$$

y en consecuencia

$$\int_0^\infty \left[h^{-\alpha_1} \|\Delta_1(h)f\|_{q_1}\right]^{\theta_1 - \varepsilon} \frac{dh}{h} \geq \int_0^\mu \left(\log \frac{e}{h}\right)^{-1} \frac{dh}{h} = \infty,$$

que es la afirmación (iii). $\square$

Capítulo 3

Inmersiones para espacios de Besov anisótropos

3.1. Definiciones y resultados conocidos

Recordemos las definiciones 1.12 y 1.13 de espacios de Besov dadas en Capítulo 1. Ahora presentaremos un espacio de Besov anisótropo en todos sus parámetros.

Definición 3.1. Sea $n \in \mathbb{N}$; $r_j > 0$, $1 \le p_j < \infty$, $1 \le \theta_j \le \infty$ $(j = 1, \ldots, n)$. Diremos que $f \in b^{r_1,\ldots,r_n}_{p_1,\ldots,p_n;\theta_1,\ldots,\theta_n}(\mathbb{R}^n)$ si $f \in S_0(\mathbb{R}^n)$ y la siguiente seminorma es finita

$$\sum_{j=1}^{n} \|f\|_{b^{r_j}_{p_j,\theta_j;j}} = \sum_{j=1}^{n} \left[\int_0^\infty (t^{-r_j} w_j^{k_j}(f;t)_{p_j})^{\theta_j} \frac{dt}{t} \right]^{1/\theta_j}$$

$(r_j < k_j \in \mathbb{N})$.

Como ya se dijo en la Introducción, una parte fundamental de la teoría de inmersiones fue desarrollada en los cincuenta por Nikol'skiĭ, que construyó la teoría de inmersión para los espacios $H^{r_1,\ldots,r_n}_p$ que llevan su nombre. Más tarde fue construida por Besov una teoría similar para los espacios $B^{r_1,\ldots,r_n}_{p,\theta}$.

Uno de los resultados centrales de la teoría de inmersiones de los espacios de Nikol'skiĭ-Besov es el siguiente análogo del Teorema de Hardy-Littlewood [5, vol.2, pg.62], ya nombrado en la Introducción. La desigualdad (5) puede interpretarse como un teorema de inmersión de varias métricas para los espacios de Besov. Es decir, es el siguiente teorema.

Teorema 3.1. *Sean* $r_j > 0$ $(j = 1, \ldots, n)$, $r = n(\sum_{j=1}^{n} 1/r_j)^{-1}$ *y* $1 \leq \theta \leq \infty$. *Sean* $1 \leq p < q < \infty$ *tales que*

$$\varkappa \equiv 1 - \frac{n}{r}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) > 0$$

y $\alpha_j = \varkappa r_j$ $(j_1, \ldots, n)$, *entonces*

$$B_{p,\theta}^{r_1,\ldots,r_n}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{q,\theta}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(\mathbb{R}^n). \tag{3.1}$$

Para $\theta = \infty$, la inmersión (3.1) toma la forma

$$H_p^{r_1,\ldots,r_n}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H_q^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(\mathbb{R}^n).$$

Esta última inmersión fue probada por Nikol'skiĭ [36]; junto con el Teorema de Sobolev (ver (2.1)) son clásicos dentro de la teoría de inmersiones de clases de funciones diferenciables de varias variables.

En el libro [5, vol.2, pg.62] este teorema fue generalizado para el caso en que, para cada variable distinta x_j, la norma de las diferencias se toma en las métricas L^{p_j} distintas, pero con θ el mismo para todo x_j.

Nuestro objetivo principal es estudiar los espacios totalmente anisótropos, e.d., los espacios donde no solamente p varía, sino también θ. En otras palabras, vamos a estudiar las inmersiones de varias métricas para los espacios $b_{p_1,\ldots,p_n;\theta_1,\ldots,\theta_n}^{r_1,\ldots,r_n}(\mathbb{R}^n)$. El resultado principal de este capítulo es un teorema de este tipo con los valores óptimos de los parámetros.

Además en este capítulo obtenemos las inmersiones a los espacios de Lorentz para los mismos espacios.

Por último, en el apartado 3.5, daremos algunas aplicaciones de los resultados obtenidos en este capítulo. En concreto, probaremos algunas desigualdades tipo Sobolev para espacios anisótropos en el caso límite $q^* = \infty$. Especificaremos mejor el problema en dicho apartado.

3.2. Resultados auxiliares

El siguiente lema fue probado en [26, pg.167].

Lema 3.1. *Sea* $f \in S_0(\mathbb{R}^n)$*(ver (1.1)) una función localmente integrable,* $k_i \in \mathbb{N}$ *y* $p_i \in [1, \infty)$ $(i = 1, \ldots, n)$. *Supongamos que* $\delta_i(t)$ $(1 \leq i \leq n)$ *son* *funciones positivas en* $\mathbb{R}_+ \equiv (0,\infty)$ *tales que*

$$\prod_{i=1}^{n} \delta_i(t) = t \quad (t > 0). \tag{3.2}$$

Entonces, para todo $0 < t < s < \infty$,

$$f^*(t) \leq (2^k - 1) f^*(s) + c \max_{i\in\{1,\dots,n\}} t^{-1/p_i} \left(\frac{s}{t}\right)^{k_i} w_i^{k_i}(f;\delta_i(t))_{p_i}, \tag{3.3}$$

donde $k = \max k_i$ *y* c *es una constante que sólo depende de* p_i *y* k_i.

El próximo lema es un análogo del Lema 2.1 del Capítulo 2. Dada una función con unas propiedades de monotonía y de integrabilidad podemos mayorarla por otra con propiedades de integrabilidad comparables y de la cual podemos controlar su crecimiento y decrecimiento.

Para $1 \leq p < \infty$ denotaremos $\mathcal{L}^p \equiv L^p(\mathbb{R}_+, du/u)$; pongamos también $\mathcal{L}^\infty \equiv L^\infty(\mathbb{R}_+)$(ver [18]).

Lema 3.2. *Sean* $\alpha > 0$, $\theta \geq 1$. *Sea* $\psi(t)$ *una función no negativa, no decreciente tal que* $t^{-\alpha}\psi(t) \in \mathcal{L}^\theta$. *Entonces, para cada* $\delta > 0$ *existe una función* φ *en* $\mathbb{R}_+$ *continua y derivable tal que:*
i) $\psi(t) \leq \varphi(t)$,
ii) $\varphi(t)t^{-\alpha-\delta}$ *decrece y* $\varphi(t)t^{-\alpha+\delta}$ *crece,*
iii) $\|t^{-\alpha}\varphi(t)\|_{\mathcal{L}^\theta} \leq c\|t^{-\alpha}\psi(t)\|_{\mathcal{L}^\theta}$ *donde* c *es una constante que sólo depende de* δ *y* α.

La demostración sigue el esquema de la del Lema 2.1, así que no la incluiremos.

Sean $n \in \mathbb{N}$, $0 < r_j < \infty$, $1 \leq p_j < \infty$ y $1 \leq \theta_j \leq \infty$ $\forall j \in \{1,\dots,n\}$. En este capítulo denotaremos

$$r = n\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j}\right)^{-1}; \quad p = \frac{n}{r}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{p_j r_j}\right)^{-1}; \quad \theta = \frac{n}{r}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\theta_j r_j}\right)^{-1} \tag{3.4}$$

y

$$\beta_j = \frac{1}{r_j}\left(\frac{r}{n} + \frac{1}{p_j} - \frac{1}{p}\right). \tag{3.5}$$

Entonces

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j = 1. \tag{3.6}$$

El siguiente lema emplea las notaciones (3.4) y (3.5).

Lema 3.3. *Sea* $n \in \mathbb{N}$, $0 < r_j < \infty$, $1 \leq p_j < \infty$ *y* $1 \leq \theta_j \leq \infty$ *para* $j = 1, \dots, n$. *Supongamos que* $\beta_j > 0$ *para todo* j *y sea*

$$0 < \delta \leq \frac{1}{2} \min_{1 \leq j \leq n} \{\beta_j r_j\}. \tag{3.7}$$

Sean φ_j *funciones positivas en* $\mathbb{R}_+$, *estrictamente crecientes y continuamente derivables, que satisfacen* $\varphi_j(t) t^{-r_j} \in \mathcal{L}^{\theta_j}$. *Además* $\varphi_j(t) t^{-r_j+\delta}$ *crece y* $\varphi_j(t) t^{-r_j-\delta}$ *decrece. Definimos*

$$\sigma(t) = \inf \left\{ \max_{j=1,\dots,n} \{t^{-1/p_j} \varphi_j(\delta_j)\} : \prod_{j=1}^{n} \delta_j = t, \ \delta_j > 0 \right\}. \tag{3.8}$$

Entonces:
i)Se cumple la desigualdad

$$\left(\int_0^\infty t^{\theta(1/p - r/n) - 1} \sigma(t)^\theta dt \right)^{1/\theta} \leq c \prod_{j=1}^{n} \left[\| t^{-r_j} \varphi_j(t) \|_{\mathcal{L}^{\theta_j}} \right]^{\frac{r}{n r_j}}. \tag{3.9}$$

ii)Existen funciones positivas, $\delta_j(t)$, *continuamente derivables en* $\mathbb{R}_+$ *tales que*

$$\prod_{j=1}^{n} \delta_j(t) = t \tag{3.10}$$

y

$$\sigma(t) = t^{-1/p_j} \varphi_j(\delta_j(t)) \quad (t \in \mathbb{R}_+, \ j = 1, \dots, n). \tag{3.11}$$

iii) para cada $j = 1, \dots, n$

$$\delta_j(t) t^{-\beta_j/3} \uparrow \ \text{y} \ \delta_j(t) t^{-3\beta_j} \downarrow; \tag{3.12}$$

iv) para todo $j = 1, \dots, n$

$$\left(\int_0^\infty \left[\frac{\varphi_j(\delta_j(t))}{\delta_j(t)^{r_j}} \right]^{\theta_j} \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta_j} \leq c \| t^{-r_j} \varphi_j(t) \|_{\mathcal{L}^{\theta_j}}, \tag{3.13}$$

donde c *depende de* δ, r_j, p_j, n.

Nótese que el lema que acabamos de enunciar es un análogo del Lema 2.2 y está enfocado a elegir los $\delta_j(t)$ $(j = 1, \dots, n)$ adecuados para lograr la mejor estimación posible de tipo (3.3).

Demostración. En primer lugar, debido a (3.6) y a que $\beta_j > 0$ para todo j, se tiene que $\beta_j < 1$ para todo j.

Notemos que

$$\lim_{\delta_j \to 0} \varphi_j(\delta_j) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\delta_j \to \infty} \varphi_j(\delta_j) = \infty.$$

Ahora fijemos $t \in \mathbb{R}_+$. Es claro que existe un único punto $\delta_j \equiv \delta_j(t) > 0$ tal que $\sigma(t) = t^{-1/p_j} \varphi_j(\delta_j(t))$. Sea ahora cualquier $1 < \gamma < \infty$. Nótese que $\sigma(t) < t^{-1/p_j} \varphi_j(\delta_j(t)\gamma)$. Entonces

$$\sigma(t) < \min_{1 \le j \le n} \{ t^{-1/p_j} \varphi_j(\delta_j(t)\gamma) \}.$$

Por la definición (3.8) de $\sigma(t)$ tenemos que existen $\delta_1^*, \ldots, \delta_n^*$ tales que $\prod_{j=1}^n \delta_j^* = t$ y

$$\sigma(t) \le \max_{j=1,\ldots,n} \{ t^{-1/p_j} \varphi_j(\delta_j^*) \} < \min_{1 \le j \le n} \{ t^{-1/p_j} \varphi_j(\delta_j(t)\gamma) \}.$$

Por tanto, $\delta_j^* < \delta_j(t)\gamma$ para todo j implica

$$t = \prod_{j=1}^n \delta_j^* < \gamma^n \prod_{j=1}^n \delta_j(t).$$

Tomando límites cuando γ tiende a 1 tenemos $t \le \prod_{j=1}^n \delta_j(t)$. Pero si sucediera $\prod_{j=1}^n \delta_j(t) > t$ podríamos elegir $0 < \delta_j' < \delta_j(t)$ tales que $\prod_{j=1}^n \delta_j' = t$. Por tanto $\sigma(t) = t^{-1/p_j} \varphi_j(\delta_j(t)) > t^{-1/p_j} \varphi_j(\delta_j')$. Entonces

$$\sigma(t) > \max_{j=1,\ldots,n} \{ t^{-1/p_j} \varphi_j(\delta_j') \} \text{ y } \prod_{j=1}^n \delta_j' = t,$$

lo que contradice (3.8), que es la definición de $\sigma(t)$. Así pues, las funciones $\delta_j(t)$ satisfacen (3.10) y (3.11) simultáneamente.

Además, para cada $j = 1, \ldots, n$, por (3.11)

$$\delta_j(t) = \varphi_j^{-1}(t^{1/p_j - 1/p_n} \varphi_n(\delta_n(t))). \tag{3.14}$$

Entonces por (3.10)

$$t = \Phi(\delta_n(t), t),$$

donde

$$\Phi(s,t) = s \prod_{j=1}^{n-1} \varphi_j^{-1}(t^{1/p_j - 1/p_n} \varphi_n(s))$$

que es una función de $C^1(\mathbb{R}^2_+)$ estrictamente creciente respecto a s. En consecuencia tenemos que $\delta_n \in C^1(\mathbb{R}_+)$ y por tanto, por (3.14) $\delta_j \in C^1(\mathbb{R}_+)$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Acabamos de probar (ii).

Nuestras hipótesis sobre φ_j implican que para cada $j = 1, \ldots, n$

$$\frac{-r_j - \delta}{t} \leq -\frac{\varphi_j'(t)}{\varphi_j(t)} \leq \frac{-r_j + \delta}{t}. \tag{3.15}$$

Además

$$\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} = \frac{-1/p_j}{t} + \frac{\varphi_j'(\delta_j(t))}{\varphi_j(\delta_j(t))}\delta_j'(t). \tag{3.16}$$

Ahora derivamos (3.10) y teniendo en cuenta (3.6) tenemos que para cada $t > 0$ existe $m \equiv m(t)$ y $l \equiv l(t)$ tales que

$$\frac{\delta_m'(t)}{\delta_m(t)} \leq \frac{\beta_m}{t} \text{ y } \frac{\delta_l'(t)}{\delta_l(t)} \geq \frac{\beta_l}{t}.$$

Entonces

$$\frac{-1/p_l}{t} + \frac{\varphi_l'(\delta_l(t))}{\varphi_l(\delta_l(t))}\delta_l(t)\frac{\beta_l}{t} \leq \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \leq \frac{-1/p_m}{t} + \frac{\varphi_m'(\delta_m(t))}{\varphi_m(\delta_m(t))}\delta_m(t)\frac{\beta_m}{t}.$$

Ahora, usando (3.15) obtenemos

$$\frac{-1/p_l + \beta_l(r_l - \delta)}{t} \leq \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \leq \frac{-1/p_m + \beta_m(r_m + \delta)}{t}.$$

Y debido a que $0 < \beta_l, \beta_m < 1$ y a (3.5) logramos:

$$\frac{r/n - 1/p - \delta}{t} \leq \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \leq \frac{r/n - 1/p + \delta}{t}. \tag{3.17}$$

Además, por (3.17) y (3.16)

$$\frac{\beta_j r_j - \delta}{t} \leq \frac{\varphi_j'(\delta_j(t))}{\varphi_j(\delta_j(t))}\delta_j'(t) \leq \frac{\beta_j r_j + \delta}{t}.$$

Entonces δ_j crece y usando esta última desigualdad y (3.15)

$$\frac{\beta_j r_j - \delta}{(r_j + \delta)t} \leq \frac{\delta_j'(t)}{\delta_j(t)} \leq \frac{\beta_j r_j + \delta}{(r_j - \delta)t}$$

Y de aquí, junto con (3.7), se llega a

$$\frac{\beta_j}{3t} \le \frac{\delta_j'(t)}{\delta_j(t)} \le \frac{3\beta_j}{t}; \tag{3.18}$$

y hemos probado (3.12). La afirmación (iv) es consecuencia inmediata de aplicar la desigualdad izquierda de (3.18) y el cambio de variable $u = \delta_j(t)$.

Finalmente, multiplicamos (3.11) elevado a $1/r_j$ y usamos (3.10)

$$\sigma(t)^{n/r} = t^{-n/(rp)} \prod_{j=1}^{n} \varphi_j(\delta_j(t))^{1/r_j} = t^{-n/(rp)+1} \prod_{j=1}^{n} \left[\frac{\varphi_j(\delta_j(t))}{\delta_j(t)^{r_j}}\right]^{1/r_j}.$$

Así

$$\left(\int_0^\infty t^{\theta(1/p-r/n)-1}\sigma(t)^\theta dt\right)^{1/\theta} = \left(\int_0^\infty \prod_{j=1}^{n}\left[\frac{\varphi_j(\delta_j(t))}{\delta_j(t)^{r_j}}\right]^{\frac{\theta r}{n r_j}} \frac{dt}{t}\right)^{1/\theta} \le$$

$$\le \prod_{j=1}^{n}\left(\int_0^\infty \left[\frac{\varphi_j(\delta_j(t))}{\delta_j(t)^{r_j}}\right]^{\theta_j} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\theta_j}\frac{r}{n r_j}}$$

y aplicando (3.13) llegamos a (3.9). El lema está demostrado. □

En el siguiente lema usamos las notaciones (3.4) y (3.5) también.

Lema 3.4. *Sean $n \in \mathbb{N}$, $0 < r_j < \infty$, $1 \le p_j < \infty$ y $1 \le \theta_j \le \infty$ ($j = 1, \dots, n$) tales que $\beta_j > 0$ para todo j. Entonces, para toda función $f \in S_0(\mathbb{R}^n) \cap L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tal que $f \in b^{r_1,\dots,r_n}_{p_1,\dots,p_n;\theta_1,\dots,\theta_n}(\mathbb{R}^n)$,*

$$f^*(t) \le (2^{k'}-1) f^*(\xi t) + c(\xi)\sigma(t), \quad \textit{para todo } \xi > 1 \tag{3.19}$$

y

$$\left(\int_0^\infty t^{\theta(1/p-r/n)-1}\sigma(t)^\theta dt\right)^{1/\theta} \le c \prod_{j=1}^{n}\left(\int_0^\infty [h^{-r_j} w_j^{k_j}(f;h)_{p_j}]^{\theta_j} \frac{dh}{h}\right)^{\frac{1}{\theta_j}\frac{r}{n r_j}} \tag{3.20}$$

donde $r_j < k_j \in \mathbb{N}$, $k' = \max k_j$

Demostración. Primero aplicamos el Lema 3.1 a f consiguiendo la estimación (3.3). Ahora definimos $0 < \delta = \frac{1}{2} \min_j\{\beta_j r_j\}$ y aplicamos el Lema 3.2 al módulo de continuidad obteniendo

$$w_j^{k_j}(f;u)_{p_j} \leq \varphi_j(u), \quad \varphi_j(u)u^{-r_j+\delta}\uparrow, \quad \varphi_j(u)u^{-r_j-\delta}\downarrow$$

y

$$\|\varphi_j(u)u^{-r_j}\|_{\mathcal{L}^{\theta_j}} \leq c\left(\int_0^\infty [h^{-r_j}w_j^{k_j}(f;h)_{p_j}]^{\theta_j}\frac{dh}{h}\right)^{\frac{1}{\theta_j}\frac{r}{nr_j}}. \tag{3.21}$$

Entonces logramos (3.19) con $\sigma(t)$ de la forma (3.8). Sólo queda aplicar Lema 3.3 y usar (3.21). □

3.3. Inmersiones a espacios de Lorentz

Teorema 3.2 (con exponente no límite). *Supongamos que una función f satisface las condiciones del lema 3.4 y $f \in L^1(\mathbb{R}^n) + L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ para algún $p_0 > 0$ tal que*

$$\frac{1}{p_0} > \frac{1}{p} - \frac{r}{n}.$$

Sea $\max(1, p_0) < q < \infty$ *y*

$$\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{r}{n}. \tag{3.22}$$

Entonces, para cada $\theta' > 0$, $f \in L^{q,\theta'}(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|f\|_{q,\theta'} \leq c\left[\|f\|_{L^1+L^{p_0}} + \prod_{j=1}^n (\|f\|_{b^{r_j}_{p_j,\theta_j;j}})^{\frac{r}{nr_j}}\right]. \tag{3.23}$$

La demostración sigue el mismo esquema que la del Corolario 2.1 del Capítulo 2. Lo único que cambia es en que donde usábamos (2.32), (2.34), (2.33) y (2.32) ahora ponemos (3.19), (3.22), (3.23) y (3.20).

Teorema 3.3. *Sea $n \in \mathbb{N}$, $0 < r_j < \infty$, $1 \leq p_j < \infty$, $1 \leq \theta_j \leq \infty$ $(1 \leq j \leq n)$. Definimos r, p y θ como en (3.4) y supongamos que (ver (3.5)) $\beta_j > 0$ $(1 \leq j \leq n)$ y $p < \frac{n}{r}$. Definimos $q^* = np/(n - rp)$. Entonces para toda función $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y de soporte compacto se cumple*

$$\|f\|_{q^*,\theta} \leq c\prod_{j=1}^n\left(\int_0^\infty [h^{-r_j}w_j^{k_j}(f;h)_{p_j}]^{\theta_j}\frac{dh}{h}\right)^{\frac{1}{\theta_j}\frac{r}{nr_j}}.$$

Esta afirmación se deduce inmediatamente del Lema 3.4. Nótese que la condición de que $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y sea de soporte compacto puede sustituirse por $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ para algún $0 < p_0 < q^*$. Así tendríamos la inmersión

$$L^{p_0} \cap b^{r_1,\ldots,r_n}_{p_1,\ldots,p_n;\theta_1,\ldots,\theta_n}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{q^*,\theta}(\mathbb{R}^n).$$

3.4. El Teorema principal

Teorema 3.4. *Sean $n \in \mathbb{N}$, $0 < r_j < \infty$, $1 \leq p_j < \infty$, $1 \leq \theta_j \leq \infty$ $j \in \{1, \ldots, n\}$. Sean r, p y θ los números definidos en (3.4) y supongamos que para todo $1 \leq j \leq n$*

$$\beta_j = \frac{1}{r_j}\left(\frac{r}{n} + \frac{1}{p_j} - \frac{1}{p}\right) > 0.$$

Elegimos $p_j < q_j < \infty$ arbitrarios tales que

$$\frac{1}{q_j} > \frac{1}{p} - \frac{r}{n}$$

y llamamos

$$\varkappa_j = 1 - \frac{1}{\beta_j r_j}\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}\right),$$

$$\alpha_j = \varkappa_j r_j \quad \text{y} \quad \frac{1}{\theta'_j} = \frac{1-\varkappa_j}{\theta} + \frac{\varkappa_j}{\theta_j}.$$

Entonces, para toda función $f \in S_0(\mathbb{R}^n)$ tal que $f \in b^{r_1,\ldots,r_n}_{p_1,\ldots,p_n;\theta_1,\ldots,\theta_n}(\mathbb{R}^n)$, se cumple la desigualdad

$$\left(\int_0^\infty [h^{-\alpha_j} \|\Delta_j^{k_j}(h)f\|_{q_j,1}]^{\theta'_j} \frac{dh}{h}\right)^{1/\theta'_j} \leq c \sum_{i=1}^n \|f\|_{b^{r_i}_{p_i,\theta_i;i}} \tag{3.24}$$

(donde $r_j < k_j \in \mathbb{N}$); lo cual implica la inmersión

$$b^{r_1,\ldots,r_n}_{p_1,\ldots,p_n;\theta_1,\ldots,\theta_n}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow b^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}_{q_1,\ldots,q_n;\theta'_1,\ldots,\theta'_n}(\mathbb{R}^n).$$

Demostración. Supongamos que $j = 1$. Notemos que $0 < \varkappa_1 < 1$. Fijamos ahora $r_i < k_i \in \mathbb{N}$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Denotamos para $h > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$

$$f_h(x) = |\Delta_1^{k_1}(h)f(x)|.$$

Como $\|f_h\|_{p_1} \le w_1^{k_1}(f;h)_{p_1} < +\infty$, $f_h \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ y aplicando el Teorema 3.2 tenemos que $f_h \in L^{q_1,1}(\mathbb{R}^n)$.
Denotamos para $h > 0$

$$J(h) \equiv \|f_h\|_{q_1,1} = \int_0^\infty t^{1/q_1-1} f_h^*(t)dt < \infty.$$

Sea $\xi_0 = (2^{k+2})^{q_1}$ y

$$Q(h) = \{t > 0 : f_h^*(t) \ge 2^{k+1} f_h^*(\xi_0 t)\} \tag{3.25}$$

donde $k = \max k_i$ como en Lema 3.1. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}_+\setminus Q(h)} t^{1/q_1-1} f_h^*(t)dt \le 2^{k+1} \int_0^\infty t^{1/q_1-1} f_h^*(\xi_0 t)dt =$$

$$= 2^{k+1}\xi_0^{-1/q_1} \int_0^\infty t^{1/q_1-1} f_h^*(t)dt = \frac{1}{2} J(h).$$

Por tanto

$$J(h) \le 2\int_{Q(h)} t^{1/q_1-1} f_h^*(t)dt \equiv 2J'(h).$$

Así, nos basta con acotar f_h en $Q(h)$. Ahora elegimos

$$0 < \delta = \frac{1}{2}\min_i\{\beta_i r_i\}. \tag{3.26}$$

En virtud del Lema 3.2 existen funciones $\varphi_i(t)$ en $\mathbb{R}_+$ $(i = 1, \dots, n)$ continuamente derivables tales que

$$\varphi_i(t)t^{-r_i-\delta} \downarrow \text{ y } \varphi_i(t)t^{-r_i+\delta} \uparrow; \tag{3.27}$$

$$w_i^{k_i}(f;t)_{p_i} \le \varphi_i(t); \tag{3.28}$$

$$\|t^{-r_i}\varphi_i(t)\|_{\mathcal{L}^{\theta_i}} \le c\|t^{-r_i}w_i^{k_i}(f;t)_{p_i}\|_{\mathcal{L}^{\theta_i}} = c\|f\|_{b^{r_i}_{p_i,\theta_i;i}}. \tag{3.29}$$

Ahora, aplicando Lema 3.1, (3.28) y (3.25) tenemos para todo $t \in Q(h)$

$$f_h^*(t) \le c \max_{1\le i\le n} t^{-1/p_i}\varphi_i(\delta_i(t)),$$

con δ_i funciones cualesquiera en $\mathbb{R}_+$ tales que $\prod_{i=1}^n \delta_i(t) = t$.

Debido a (3.26) y (3.27) podemos aplicar el Lema 3.3 y tenemos que existe una función no negativa $\sigma(t)$ tal que

$$f_h^*(t) \le c\sigma(t), \tag{3.30}$$

$$\left(\int_0^\infty t^{\theta(1/p-r/n)-1}\sigma(t)^\theta dt\right)^{1/\theta} \le c\prod_{i=1}^n \left[\|\varphi_i(t)t^{-r_i}\|_{\mathcal{L}^{\theta_i}}\right]^{\frac{r}{nr_i}}. \tag{3.31}$$

Existen funciones positivas, $u_i(t)$, continuamente derivables en $\mathbb{R}_+$ tales que $\prod_{i=1}^n u_i(t) = t$ y

$$\sigma(t) = t^{-1/p_i}\varphi_i(u_i(t)) \quad i = 1, \dots, n. \tag{3.32}$$

$$u_1(t)t^{-\frac{\beta_1}{3}} \uparrow \quad \text{y} \quad u_1(t)t^{-3\beta_1} \downarrow, \tag{3.33}$$

$$\left(\int_0^\infty [u_1(t)^{-r_1}\varphi_1(u_1(t))]^{\theta_1}\frac{dt}{t}\right)^{1/\theta_1} \le c\|\varphi_1(t)t^{-r_1}\|_{\mathcal{L}^{\theta_1}}. \tag{3.34}$$

La estimación (3.30) se puede usar para t "pequeño". Para t "grande", utilizaremos la siguiente estimación, que es consecuencia de una desigualdad tipo débil y (3.28).

$$f_h^*(t) \le t^{-1/p_1}\|f_h\|_{p_1} \le t^{-1/p_1}w_1^{k_1}(f;h)_{p_1} \le t^{-1/p_1}\varphi_1(h). \tag{3.35}$$

Entonces

$$J'(h) \le \int_0^\infty t^{1/q_1-1}\Phi(t,h)dt, \tag{3.36}$$

donde

$$\Phi(t,h) = \text{mín}\{\sigma(t), t^{-1/p_1}\varphi_1(h)\}. \tag{3.37}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} J \equiv \int_0^\infty h^{-\alpha_1\theta_1'-1}J(h)^{\theta_1'}dh \le \\ \le c\left[\int_0^\infty h^{-\alpha_1\theta_1'-1}dh\left(\int_{\{h\le u_1(t)\}} t^{1/q_1-1/p_1-1}\varphi_1(h)dt\right)^{\theta_1'} + \right. \\ \left. + \int_0^\infty h^{-\alpha_1\theta_1'-1}dh\left(\int_{\{h\ge u_1(t)\}} t^{1/q_1-1}\sigma(t)dt\right)^{\theta_1'}\right] \equiv [J_1 + J_2]. \end{aligned}$$

Debido a (3.33), u_1 es estrictamente creciente en $\mathbb{R}_+$ y

$$\frac{u_1'(t)}{u_1(t)} \leq \frac{c}{t}. \tag{3.38}$$

Por tanto, el cambio de variable $u_1(z) = h$ y (3.38) nos conducen a

$$J_1 \leq c \int_0^\infty u_1(z)^{-\alpha_1\theta_1'} \varphi_1(u_1(z))^{\theta_1'} \frac{dz}{z} \left(\int_z^\infty t^{1/q_1 - 1/p_1 - 1} dt \right)^{\theta_1'} =$$
$$= c \int_0^\infty u_1(z)^{-\alpha_1\theta_1'} \varphi_1(u_1(z))^{\theta_1'} z^{(1/q_1 - 1/p_1)\theta_1'} \frac{dz}{z}. \tag{3.39}$$

Ahora vamos a por J_2. Debido a (3.33), aplicamos la desigualdad (1.20) del Lema 1.4 y tenemos

$$J_2 \leq c \int_0^\infty u_1(t)^{-\alpha_1\theta_1'} t^{\theta_1'/q_1} \sigma(t)^{\theta_1'} \frac{dt}{t}.$$

Por (3.32), la última integral es la misma que la de la parte derecha de (3.39). Por tanto tenemos que

$$J \leq c \int_0^\infty \left(\frac{\varphi_1(u_1(t))}{u_1(t)^{r_1}} \right)^{\varkappa_1\theta_1'} \left(t^{1/q_1 - \varkappa_1/p_1} \sigma(t)^{1-\varkappa_1} \right)^{\theta_1'} \frac{dt}{t}.$$

Y usando la desigualdad de Hölder con exponentes $u = \theta_1/(\varkappa_1\theta_1')$ y $u' = \theta_1/(\theta_1 - \varkappa_1\theta_1')$ (nótese que $(1-\varkappa_1)\theta_1' u' = \theta$, $(\frac{\theta_1'}{q_1} - \frac{\varkappa_1\theta_1'}{p_1})u' = \theta(\frac{1}{p} - \frac{r}{n})$),

$$J^{1/\theta_1'} \leq \left(\int_0^\infty \left[\frac{\varphi_1(u_1(t))}{u_1(t)^{r_1}} \right]^{\theta_1} \frac{dt}{t} \right)^{\varkappa_1/\theta_1} \left(\int_0^\infty t^{\theta(1/p - r/n)} \sigma(t)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{(1-\varkappa_1)/\theta}.$$

Y de aquí y (3.34), (3.31) y (3.29) se sigue

$$J^{1/\theta_1'} \leq c \left(\|f\|_{b^{r_1}_{p_1,\theta_1;1}} \right)^{\varkappa_1} \prod_{i=1}^n \left(\|f\|_{b^{r_i}_{p_i,\theta_i;i}} \right)^{\frac{r(1-\varkappa_1)}{nr_i}},$$

que implica (3.24). El teorema queda demostrado. □

Comentario 3.1. Como ya hemos dicho, el Teorema 3.4 implica la inmersión

$$b^{r_1,\ldots,r_n}_{p_1,\ldots,p_n;\theta_1,\ldots,\theta_n}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow b^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}_{q_1,\ldots,q_n;\theta_1',\ldots,\theta_n'}(\mathbb{R}^n).$$

Comentario 3.2. En el caso en que $\theta_1 = \cdots = \theta_n = \infty$, obtenemos la siguiente inmersión de espacios tipo Nikol'skiĭ.

$$\sum_{j=1}^{n} \|f\|_{h^{\alpha_j}_{q_j;j}} \leq c \sum_{j=1}^{n} \|f\|_{h^{r_j}_{p_j;j}}.$$

3.5. Anexo. Inmersiones límite de Sobolev. Espacios $L(\infty, q)$.

En este apartado trataremos algunos casos límite del Teorema de Sobolev. Para ilustrar mejor el problema recordaremos los siguientes hechos. Como ya hemos dicho antes, el Teorema de Sobolev afirma que si $1 \leq p < n$ se tiene

$$W^1_p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{q^*}(\mathbb{R}^n) \quad q^* = \frac{np}{n-p}.$$

El caso en que $p = n$ (o lo que es lo mismo $q^* = \infty$) es el caso límite del que nos ocuparemos. Es bien conocido que en este caso $(n = 1)$

$$W^1_1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^{\infty}(\mathbb{R}).$$

Además, para $n > 1$, en [7, 16], de forma independiente, se prueba que si Ω es un dominio abierto de $\mathbb{R}^n$ con $|\Omega| < \infty$ se tiene

$$W^1_n(\mathbb{R}^n) \subset H_n(\Omega), \tag{3.40}$$

donde

$$H_n(\Omega) = \{f : \|f\|_{H_n(\Omega)} = \left[\int_0^{|\Omega|} \left(\frac{f^{**}(s)}{1 + \log \frac{|\Omega|}{s}}\right)^n \frac{ds}{s}\right]^{1/n} < \infty\}.$$

Es más, Hansson [16] mostró que la inmersión anterior es óptima en el sentido de espacios invariantes por reordenamientos.

Sin embargo, es posible mejorar este resultado no ya en términos de espacios invariantes por reordenamientos, sino de desigualdades. En este sentido [21, 22] se tiene

$$f^{**}(t) - f^*(t) \leq ct^{1/n}(|\nabla f|)^{**}(t). \tag{3.41}$$

En [31, 2, 3] se introdujeron y estudiaron espacios relacionados con la desigualdad (3.41). Así, se ve en [2] que el espacio de Sobolev

$$w^1_{n,\infty}(\mathbb{R}^n) = \{f : \nabla f \in L^{n,\infty}(\mathbb{R}^n)\}^1$$

verifica

$$w^1_{n,\infty}(\mathbb{R}^n) \subset \text{weak-}L^\infty(\mathbb{R}^n);$$

donde weak-L^∞ son los espacios de Bennett-De Vore-Sharpley[2]

$$\text{weak-}L^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f : \|f\|_{\text{weak-}L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \sup_{t>0}\{f^{**}(t) - f^*(t)\} < \infty\}.$$

Además, con los espacios (no lineales) definidos para $q > 0$ como

$$L(\infty,q)(\mathbb{R}^n) = \{f : \|f\|_{L(\infty,q)} = \left(\int_0^\infty [f^{**}(t) - f^*(t)]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} < \infty\}$$

se demuestra [47, 31, 3] que

$$W^1_n(\mathbb{R}^n) \subset L(\infty,n)(\mathbb{R}^n). \tag{3.42}$$

Nótese que (3.42) es también consecuencia de (3.41). En [3] se ve como (3.42) mejora a (3.40). Además se tiene que, si $1 < p < q < \infty$,

$$L^\infty = L(\infty,1) \subset L(\infty,p) \subset L(\infty,q) \subset \text{weak-}L^\infty,$$

y las inclusiones son estrictas.

Ahora estamos en disposición de especificar nuestro objetivo: encontrar una desigualdad del tipo (3.42) para órdenes de suavidad $r > 1$ y espacios anisótropos.

Es fácil ver que, aplicando inducción sobre el orden de suavidad e inmersiones para suavidad 1 de [47, Theorem 8], se llega a

$$\|f\|_{L(\infty,n/r)} \leq c \sum_{|\alpha|\leq r} \|D^\alpha f\|_{n/r}.$$

No obstante, este método inductivo no funciona si no asumimos la existencia de derivadas mixtas. Por tanto, no nos sirve para obtener desigualdades del tipo

$$\|f\|_{L(\infty,n/r)} \leq c \sum_{j=1}^n \|D^r_j f\|_{n/r},$$

[1] $L^{n,\infty}$ es el espacio de Marcinkiewicz weak-L^n.

[2] weak-L^∞ no es un espacio lineal y $\|.\|_{\text{weak-}L^\infty}$ no es una norma.

o inmersiones para espacios anisótropos (ver Definición 1.7). Éste es precisamente el tipo de resultados que obtenemos a continuación.

Teorema 3.5. *Sea* $2 \leq n \in \mathbb{N}$. *Sean* $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{N}$. *Definamos* $r \equiv n(\sum_{j=1}^n \frac{1}{r_j})^{-1}$. *Supongamos que* $1 \leq n/r$. *Sea* $f \in S_0(\mathbb{R}^n)$ *que tiene las derivadas débiles* $D_j^{r_j} f \in L^{n/r}(\mathbb{R}^n)$ $(j = 1, \ldots, n)$. *Entonces se cumple la desigualdad*

$$\left(\int_0^\infty [f^{**}(t) - f^*(t)]^{n/r} \frac{dt}{t}\right)^{r/n} \leq c \sum_{j=1}^n \|D_j^{r_j} f\|_{n/r}. \tag{3.43}$$

Demostración. Elegimos $q > \frac{n}{r} \max_{1 \leq j \leq n}\{r_j\}$ fijo. Pongamos $\alpha_j = r_j \frac{n}{rq} < 1$ $(j = 1, \ldots, n)$. Entonces, se cumple la desigualdad

$$\sum_{j=1}^n \|f\|_{b^{\alpha_j}_{q,\frac{n}{r};j}} \leq c \sum_{j=1}^n \|D_j^{r_j} f\|_{n/r}, \tag{3.44}$$

la cual corresponde al Teorema 2.2 en el caso particular $p_j = s_j = n/r \geq 1$ y $q_j = q$ (notemos que entonces $p = s = n/r$, $\varkappa_j = n/(rq)$, $\theta_j = n/r$) $(j = 1, \ldots, n)$.

Por otro lado, se obtiene fácilmente que

$$\left(\int_0^\infty [f^*(t) - f^*(2t)]^{n/r} \frac{dt}{t}\right)^{r/n} \leq c \left[\prod_{j=1}^n \|f\|_{b^{\alpha_j}_{q,\frac{n}{r};j}}\right]^{\frac{1}{n}}. \tag{3.45}$$

De hecho, consideramos el Lema 3.4 con $r'_j = \alpha_j$, $p_j = q$, $\theta_j = n/r$ $(j = 1, \ldots, n)$ y $\xi = 2$. Nótese que en este caso particular $\beta_j = \frac{1}{\alpha_j}\frac{\alpha}{n}$ (donde $\alpha = n(\sum_{j=1}^n \alpha_j^{-1})^{-1} = n/q$) y $k_j = 1$. Por tanto, combinando (3.19) y (3.20) se obtiene (3.45).

Por otra parte tenemos

$$\begin{aligned} f^{**}(t) - f^*(t) &\leq \frac{1}{t}\int_0^t f^*(u)du - \frac{2}{t}\int_{t/2}^t f^*(2u)du = \\ &= \frac{2}{t}\int_0^t [f^*(u) - f^*(2u)]du. \end{aligned}$$

Y de aquí y la desiguadad de Hardy [4, p.124],

$$\int_0^\infty [f^{**}(t) - f^*(t)]^{n/r} \frac{dt}{t} \leq c \int_0^\infty [f^*(t) - f^*(2t)]^{n/r} \frac{dt}{t}. \tag{3.46}$$

De (3.44), (3.45) y (3.46) se sigue inmediatamente el resultado deseado. □

Notemos que (3.43) implica la inmersión

$$W^{r_1,\ldots,r_n}_{n/r}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L(\infty, n/r)(\mathbb{R}^n).$$

Por otro lado, al igual que en Capítulo 2, podemos considerar también los espacios cuyas derivadas generalizadas $D_j^{r_j} f$ pertenezcan a diferentes espacios L^{p_j,s_j}. Es obvio que repitiendo el mismo esquema de demostración que el del Teorema 3.5, tras algunos cálculos aritméticos se tiene

Teorema 3.6. *Sea $n \geq 2$, $r_j \in \mathbb{N}$, $1 \leq p_j, s_j < \infty$ para $j = 1, \ldots, n$ y $s_j = 1$ si $p_j = 1$. Sean*

$$r = n\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j}\right)^{-1}, \quad p = \frac{n}{r}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j p_j}\right)^{-1}, \quad s = \frac{n}{r}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j s_j}\right)^{-1},$$

y supongamos que p=n/r. Entonces, para todo $f \in S_0(\mathbb{R}^n)$ que posea derivadas débiles $D_j^{r_j} f \in L^{p_j,s_j}(\mathbb{R}^n)$ $(j = 1, \ldots, n)$ se tiene

$$\left(\int_0^\infty [f^{**}(t) - f^*(t)]^s \frac{dt}{t}\right)^{1/s} \leq c \sum_{j=1}^{n} \|D_j^{r_j} f\|_{p_j,s_j}.$$

Comentario 3.3. Es trivial que, basándonos en el Lema 3.4 y en el Teorema 3.4, se prueba que, con r, p y θ definidos como en (3.4), si $p = n/r$ se tiene

$$b^{r_1,\ldots,r_n}_{p_1,\ldots,p_n;\theta_1,\ldots,\theta_n}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L(\infty, \theta)(\mathbb{R}^n).$$

Capítulo 4

Teoremas de inmersión para espacios de Lipschitz anisótropos

4.1. Introducción

En este capítulo probaremos teoremas de inmersión para espacios de Lipschitz anisótropos $\Lambda_p^{r_1,\ldots,r_n}$ (ver §1.3.4).

Como fue mencionado antes, los primeros resultados óptimos sobre inmersiones de espacios de Lipschitz en L^q fueron obtenidos en [20] (para $r_k \le 1$). La demostración estaba basada en el uso de reordenamientos no crecientes. Más tarde, Netrusov [33, 34] estudió inmersiones de espacios $\Lambda_p^{r_1,\ldots,r_n}$ $(p > 1)$ para $r_j > 0$ arbitrario. Su método estaba basado en representaciones integrales especiales. Primero, demostró resultados óptimos sobre inmersiones en espacios de Lorentz (una demostración alternativa de estos resultados incluyendo el caso $p = 1$ fue dada en [26] y estaba basada en reordenamientos no crecientes). Además, él consideró inmersiones a espacios de Besov.

Recordemos que Il'in [5, §18.12] obtuvo el siguiente refinamiento de la clásica desigualdad de Sobolev: si $1 < p < q < \infty$, $r_j \in \mathbb{N}$ y $\varkappa \equiv 1 - n/r(1/p - 1/q) > 0$, entonces

$$W_p^{r_1,\ldots,r_n}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{q,p}^{\varkappa r_1,\ldots,\varkappa r_n}(\mathbb{R}^n). \tag{4.1}$$

En el caso $p = n = 1$ esta inmersión no se cumple. Fue probado por Kolyada [21, 24] que la inmersión (4.1) es cierta en el caso $p = 1$, $n \ge 2$, también.

Para espacios de Lipschitz, Netrusov obtuvo el siguiente resultado [34]: $1 < p < q < \infty$, $r_j > 0$ $(j = 1, \ldots, n)$, tal que $\varkappa \equiv 1 - n/r(1/p - 1/q) > 0$ entonces

$$\Lambda_p^{r_1,\ldots,r_n}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}_{q,\gamma_1,\ldots,\gamma_n}(\mathbb{R}^n). \tag{4.2}$$

Aunque no especifiquemos aquí las definiciones de los parámetros, es importante apuntar que los γ_js *son distintos* dependiendo de si $r_j \in \mathbb{N}$ o no.

Queremos resaltar que los métodos de representaciones integrales empleados en [34] fallan en el caso $p = 1$. Es bastante conocido que este caso es el más complicado. En particular, la pregunta sobre la validez de la inmersión para $p = 1$ había quedado abierta.

Como ya mencionamos en la Introducción, uno de los resultados principales de este capítulo es dar una expresión cuantitativa óptima para conseguir un equilibrio entre estimaciones. Se trata de la siguiente función

$$\rho(t) = \min_{1\le i\le n}\{t_i^{r_i}\phi_i(t_{l_i})\}, \quad t \in \mathbb{R}^n_+,\ \phi_i \in L^{\theta_i}(\mathbb{R}_+, dx/x),\ l_i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Probamos una estimación general con peso para esta función. Este resultado nos da un método para estimar varias normas de modo unificado.

Luego, basándonos en estimaciones de reordenamientos conocidas, las modificamos a una forma especial en la que intervienen funciones de los espacios $L^\theta(\mathbb{R}_+, dx/x)$, $\mathbb{R}_+ \equiv (0, \infty)$. La invarianza de estos espacios con respecto a cambios de variable de tipo potencial juega un papel relevante.

Finalmente, combinando dichas estimaciones con la estimación de la "función-mínimo" obtenemos los resultados principales de este capítulo. En primer lugar, damos una demostración nueva y más simple de (4.2) incluyendo el caso abierto $p = 1$. Probamos también estimaciones óptimas de normas de Lorentz (definidas en términos de reordenamientos iterados).

Nótese también que los reordenamientos iterados fueron empleados en teoremas de inmersión en los trabajos [20, 21, 23, 27, 38]. En particular, fue probado en [27] que para espacios de Sobolev anisótropos es cierta una versión más fuerte de una desigualdad tipo Sobolev con la norma de Lorentz generalizada $\|.\|_{q,p;\mathcal{R}}$.

En este capítulo obtenemos un resultado similar para espacios de Lipschitz. Esto es, demostramos una desigualdad de tipo Sobolev

$$\|f\|_{q^*,s;\mathcal{R}} \le c\|f\|_{\lambda_p^{r_1,\ldots,r_n}}, \quad 1 \le p < n/r,$$

la cual da una extensión de los resultados de Kolyada [26] y Netrusov [33, 34].

Observemos que en realidad probamos más que en la inmersión (4.2). Más exactamente, demostramos la siguiente desigualdad

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^{\infty}\left[h^{-\alpha_i}\|\Delta_i^{\bar{r}_i}(h)f\|_{q,1;\mathcal{R}}\right]^{\gamma_i}\frac{dh}{h}\right)^{1/\gamma_i}\le c\|f\|_{\lambda_p^{r_1,\dots,r_n}}. \tag{4.3}$$

Es claro que esto implica inmediatamente la inmersión (4.2) para todo $p\ge 1$. Resaltemos que $p=1$ está incluido. Lo que es más, comparando con (4.2), la parte izquierda de (4.3) contiene la norma de Lorentz más fuerte $\|.\|_{q,1;\mathcal{R}}$ en vez de $\|.\|_q$ (ver (1.10)). Hay que notar también que incluso es posible reemplazar $\|.\|_{q,1;\mathcal{R}}$ por una norma más fuerte $\|.\|_{q,\xi;\mathcal{R}}$ para cualquier $\xi>0$.

4.2. Reordenamientos iterados

En la sección §1.2 hemos definido los reordenamientos iterados y hemos dado algunas propiedades básicas. Como en [27], definimos también unos promedios en términos de reordenamientos iterados.

Sea $k\in\{1,\dots,n\}$, $t_1\in\mathbb{R}_+$, $\hat{x}_k\in\mathbb{R}^{n-1}$. Consideraremos los siguientes promedios (recordar (1.4) y (1.6)):

$$\mathcal{R}_k^*f(t_1,\hat{x}_k)\equiv f_{\hat{x}_k}^{**}(t_1),$$

$$\overline{\mathcal{R}}_kf(t_1,\hat{x}_k)\equiv \bar{f}_{\hat{x}_k}^{*}(t_1).$$

Ahora, para cada $\sigma\in\mathcal{P}_n$, pongamos

$$\mathcal{R}_\sigma^*f(t)=\mathcal{R}_{k_n}^*\cdots\mathcal{R}_{k_1}^*f(t),\quad t\in\mathbb{R}_+^n.$$

Se cumple (ver [27, §2])

$$\|\mathcal{R}_\sigma^*f\|_p\le c_p\|f\|_p,\quad 1<p<\infty. \tag{4.4}$$

Pongamos también

$$\overline{\mathcal{R}}_\sigma f(t)=\overline{\mathcal{R}}_{k_n}\cdots\overline{\mathcal{R}}_{k_1}f(t),\quad t\in\mathbb{R}_+^n$$

y para cada $1<\nu<\infty$

$$\overline{\mathcal{R}}_\sigma^{(\nu)}f(t)\equiv(\overline{\mathcal{R}}_\sigma f^\nu(t))^{1/\nu}.$$

Este operador fue definido en [27] y usado para probar teoremas de inmersión. Su propiedad importante es que

$$\|\overline{\mathcal{R}}_\sigma^{(\nu)}f\|_1\le c\|f\|_1. \tag{4.5}$$

4.3. Estimaciones

En adelante $n \in \mathbb{N}$. Sea $0 < r_j < +\infty$ $(j = 1, \ldots, n)$. Denotamos por $\bar{r}_j$ el menor entero tal que $r_j \leq \bar{r}_j$.

Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p < +\infty)$. Para cada $j = 1, \ldots, n$ escribimos

$$f_{j,h}(x) \equiv \Delta_j^{\bar{r}_j}(h) f(x).$$

En esta sección consideramos modificaciones de estimaciones de los reordenamientos iterados $\mathcal{R}_\sigma f$ y $\mathcal{R}_\sigma f_{j,h}$ obtenidos en [27] y [26].

Para $1 \leq p < \infty$ denotaremos $\mathcal{L}^p \equiv L^p(\mathbb{R}_+, du/u)$; pongamos también $\mathcal{L}^\infty \equiv L^\infty(\mathbb{R}_+)$(ver [18]).

Lema 4.1. *Sea $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$. Supongamos que $F \in L^p(\mathbb{R}^n_+)$ es una función no negativa, no creciente en cada una de sus variables. Entonces, para cada $\delta > 0$ y cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ existe una función no negativa $\phi \equiv \phi_{\delta,j}$ en $\mathbb{R}_+$ tal que*
i) $F(t) \leq \pi(t)^{-1/p} \phi(t_j)$,
ii) $\|\phi\|_{\mathcal{L}^p} \leq c(\delta) \|F\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)}$,
iii) $\phi(u) u^\delta \uparrow$ y $\phi(u) u^{-\delta} \downarrow$.

Demostración. Como F es no creciente en cada una de sus variables, usamos una desigualdad de tipo débil

$$F(t) \leq \pi(\hat{t}_j)^{-1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}_+} F(t)^p d\hat{t}_j \right)^{1/p} \equiv \pi(\hat{t}_j)^{-1/p} g(t_j). \tag{4.6}$$

Entonces g es no negativa y no creciente en $\mathbb{R}_+$ y

$$\|g\|_{L^p(\mathbb{R}_+)} = \|F\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)}. \tag{4.7}$$

Aplicando el Lema 2.1 obtenemos una función $\bar{g}$ en $\mathbb{R}_+$ tal que

$$g \leq \bar{g}, \quad \|\bar{g}\|_p \leq c(\delta) \|g\|_p \quad \text{y} \quad \bar{g}(u) u^{1/p-\delta} \downarrow, \; \bar{g}(u) u^{1/p+\delta} \uparrow, \quad u > 0. \tag{4.8}$$

Denotando $\phi(u) \equiv \bar{g}(u) u^{1/p}$, por (4.6) y (4.8) obtenemos i). Después, ii) se sigue de (4.7) y (4.8), y iii) se sigue de (4.8). □

Lema 4.2. *Sea $n \geq 2$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $r_j \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p < \infty$. Sea $f \in W^{r_j}_{p;j}(\mathbb{R}^n)$. Elegimos $\sigma \in \mathcal{P}_n$, $1 \leq l \leq n$ $(l \neq \sigma^{-1}(j))$, y $0 < \delta < 1$. Entonces, existe una función no negativa $\phi \equiv \phi_{j,l,\sigma,\delta}$ en $\mathbb{R}_+$ tal que:*

$$\|\phi\|_{\mathcal{L}^p} \leq c \|D_j^{r_j} f\|_p; \tag{4.9}$$

$$\phi(u)u^{\delta} \uparrow \text{ y } \phi(u)u^{-\delta} \downarrow \quad u > 0; \tag{4.10}$$

para cada $K > 1$

$$\mathcal{R}_{\sigma} f(t) \leq 2^{r_j} \mathcal{R}_{\sigma'_j} f\left(K t_{m_j}, \frac{\hat{t}_{m_j}}{2}\right) + c(K)\pi(t)^{-1/p} t_{m_j}^{r_j} \phi(t_l); \tag{4.11}$$

$$\mathcal{R}_{\sigma} f_{j,h}(t) \leq c\pi(t)^{-1/p} h^{r_j - \delta} t_{m_j}^{\delta} \phi(t_l) \quad \textit{para todo } 0 < h < t_{m_j}, \tag{4.12}$$

donde σ'_j se obtiene de σ moviendo el j-ésimo índice a la primera posición, $m_j = \sigma^{-1}(j)$ y c, $c(K)$ no dependen de f.

Demostración. Caso 1. Primero supongamos que $p > 1$. Denotamos por $g_j \equiv D_j^{r_j} f$. Por [27, (3.3) y (3.7)] tenemos que

$$\mathcal{R}_{\sigma} f(t) \leq 2^{r_j} \mathcal{R}_{\sigma'_j} f\left(K t_{m_j}, \frac{\hat{t}_{m_j}}{2}\right) + c(K) t_{m_j}^{r_j} \mathcal{R}_{\sigma}^{*} g_j(\frac{t}{2}) \quad \text{para todo } K > 1, \tag{4.13}$$

donde σ'_j se obtiene de σ moviendo el índice j-ésimo a la primera posición.

Además, por [27, (4.5)],

$$\mathcal{R}_{\sigma} f_{j,h}(t) \leq c h^{r_j} \mathcal{R}_{\sigma}^{*} g_j(t). \tag{4.14}$$

Ahora (ver (4.4)) notemos que $\mathcal{R}_{\sigma}^{*} g_j(t)$ satisface las condiciones del Lema 4.1. Así, para δ y l obtenemos una función no negativa ϕ tal que se cumple (4.10),

$$\mathcal{R}_{\sigma}^{*} g_j(t) \leq \pi(t)^{-1/p} \phi(t_l), \tag{4.15}$$

y

$$\|\phi\|_{\mathcal{L}^p} \leq c \|\mathcal{R}_{\sigma}^{*} g_j\|_p.$$

Entonces (4.9) se sigue de la última estimación y (4.4). Las desigualdades (4.11) y (4.12) son consecuencias inmediatas de (4.15), (4.13) y (4.14).

Caso 2. Ahora supongamos que $p = 1$. Sea $\nu = 1/(1-\delta)$. Tenemos (ver [27, (3.3) y (3.10)])

$$\mathcal{R}_{\sigma} f(t) \leq 2^{r_j} \mathcal{R}_{\sigma'_j} f\left(K t_{m_j}, \frac{\hat{t}_{m_j}}{2}\right) + c(K) t_{m_j}^{r_j - 1} F_j(\frac{\hat{t}_{m_j}}{2}), \tag{4.16}$$

donde

$$F_j(\hat{t}_{m_j}) = \overline{\mathcal{R}}_{\hat{\sigma}_j}^{(\nu)} \psi_j(\hat{t}_{m_j}), \qquad \psi_j(\hat{x}_j) = \int_{\mathbb{R}} g_j(x) dx_j.$$

Además, por [27, (4.11)]

$$\mathcal{R}_\sigma f_{j,h}(t) \le c h^{r_j-\delta} t_{m_j}^{\delta-1} F_j(\hat{t}_{m_j}). \tag{4.17}$$

Por (4.5) tenemos

$$\|F_j\|_{1,\mathbb{R}_+^{n-1}} \le c\|\psi_j\|_{1,\mathbb{R}^{n-1}} = \|g_j\|_1. \tag{4.18}$$

Así, para cada $l \neq m_j$, $l \in \{1,\dots,n\}$ y $0 < \delta < 1$ aplicamos el Lema 4.1 a F_j y obtenemos una función $\phi(t_l)$ satisfaciendo (4.10). Además,

$$F_j(\hat{t}_{m_j}) \le c\pi(\hat{t}_{m_j})^{-1}\phi(t_l).$$

Así, con (4.16) y (4.17) conseguimos (4.11) y (4.12). Finalmente,

$$\|\phi\|_{\mathcal{L}} \le c\|F_j\|_1,$$

y (4.18) implican (4.9). □

Lema 4.3. *Sea $n \in \mathbb{N}$, $j \in \{1,\dots,n\}$, $0 < r_j < \infty$ y $1 \le p < \infty$. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Entonces, para cada $\sigma \in \mathcal{P}_n$ y cada $K > 1$*

$$\mathcal{R}_\sigma f(t) \le 2^{\bar{r}_j}\mathcal{R}_{\sigma_j'} f\left(Kt_{m_j}, \frac{\hat{t}_{m_j}}{2}\right) + c(K)\pi(t)^{-1/p}\omega_j^{\bar{r}_j}(f;t_{m_j})_p \tag{4.19}$$

y

$$\mathcal{R}_\sigma f_{j,h}(t) \le \pi(t)^{-1/p}\omega_j^{\bar{r}_j}(f;h)_p, \tag{4.20}$$

donde σ_j' se obtiene de σ moviendo el índice j-ésimo a la primera posición y $m_j = \sigma^{-1}(j)$.

Demostración. Por [27, (3.3)], tenemos que para cada $K > 1$

$$\mathcal{R}_\sigma f(t) \le 2^{\bar{r}_j}\mathcal{R}_{\sigma_j'} f\left(Kt_{m_j}, \frac{\hat{t}_{m_j}}{2}\right) + \mathcal{R}_\sigma \Phi_j\left(\frac{t}{2}\right), \tag{4.21}$$

donde

$$\Phi_j(x) = \frac{1}{t_{m_j}}\int_0^{(\bar{r}_j+1)Kt_{m_j}} |\Delta_j^{\bar{r}_j}(h) f(x)| dh.$$

Además, por (1.8),

$$\mathcal{R}_\sigma \Phi_j\left(\frac{t}{2}\right) \le \Phi_j^*\left(\frac{\pi(t)}{2^n}\right). \tag{4.22}$$

Elegimos un conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$|E| \geq \frac{\pi(t)}{2^n} \quad \text{y} \quad |\Phi_j(x)| \geq \Phi_j^*\left(\frac{\pi(t)}{2^n}\right)$$

para todo $x \in E$. Integrando sobre E, aplicando el teorema de Fubini y usando la desigualdad de Hölder, logramos

$$\Phi_j^*\left(\frac{\pi(t)}{2^n}\right) \leq \frac{1}{|E|}\int_E \Phi_j(x)dx =$$

$$= \frac{1}{|E|t_{m_j}}\int_0^{(\bar{r}_j+1)Kt_{m_j}}\left(\int_E |\Delta_j^{\bar{r}_j}(h)f(x)|dx\right)dh \leq$$

$$\leq \frac{1}{|E|^{1/p}t_{m_j}}\int_0^{(\bar{r}_j+1)Kt_{m_j}} \|\Delta_j^{\bar{r}_j}(h)f\|_p dh \leq$$

$$\leq c(K)\pi(t)^{-1/p}\omega_j^{\bar{r}_j}(f;t_{m_j})_p. \tag{4.23}$$

Ahora (4.21), (4.22) y (4.23) nos llevan a (4.19). La desigualdad (4.20) es inmediata; de hecho, tenemos

$$\mathcal{R}_\sigma f_{j,h}(t) \leq f_{j,h}^*(\pi(t)) \leq \pi(t)^{-1/p}\|f_{j,h}\|_p \leq \pi(t)^{-1/p}\omega_j^{\bar{r}_j}(f;h)_p.$$

$\square$

Comentario 4.1. Si $f \in \left[\bigcap_{j:r_j\in\mathbb{N}} W_{p;j}^{r_j}(\mathbb{R}^n)\right] \cap \left[\bigcap_{j:r_j\notin\mathbb{N}} H_{p;j}^{r_j}(\mathbb{R}^n)\right]$, entonces podemos aplicar simultáneamente las estimaciones obtenidas en los Lemas 4.2 y 4.3. Sea $\sigma \in \mathcal{P}_n$, $K > 1$, y $0 < \delta < 1$. Si $r_j \in \mathbb{N}$, elijamos $l_j \neq \sigma^{-1}(j)$ y denotemos por ϕ_j la función $\phi \equiv \phi_{j,l_j,\sigma,\delta}$ definida en Lema 4.2. Si $r_j \notin \mathbb{N}$ denotamos $\Omega_j \equiv \sup_{u>0} u^{-r_j}\omega_j^{\bar{r}_j}(f;u)_p$. Ahora, combinando (4.11) y (4.19),

$$\mathcal{R}_\sigma f(t) \leq 2^{\bar{r}'}\sum_{j=1}^n \mathcal{R}_{\sigma_j'} f\left(Kt_{m_j}, \frac{\hat{t}_{m_j}}{2}\right) + c(K)\pi(t)^{-1/p}\rho_\sigma(t), \tag{4.24}$$

donde $m_j = \sigma^{-1}(j)$, $\bar{r}' \equiv \max \bar{r}_j$ y

$$\rho_\sigma(t) = \min\{\min_{r_j\in\mathbb{N}}\{t_{m_j}^{r_j}\phi_j(t_{l_j})\}, \min_{r_j\notin\mathbb{N}}\{t_{m_j}^{r_j}\Omega_j\}\}. \tag{4.25}$$

4.4. El lema principal

En esta sección probamos los lemas principales que forman la base de nuestro método (ver Lemas 4.5, 4.6, y 4.7 debajo). Para ello será conveniente usar la siguiente proposición auxiliar.

Lema 4.4. *Sean $m \in \mathbb{N}$; $0 < \alpha_i < \infty$ $(i = 1, \ldots, m)$. Definimos $\alpha = (\sum_{i=1}^m \alpha_i^{-1})^{-1}$. Sean $a, b > 0$ tales que $a/b < \alpha$. Pongamos*

$$\rho(z) = \min\{\lambda, z_1^{\alpha_1}\lambda_1, \ldots, z_m^{\alpha_m}\lambda_m\} \quad (z \in \mathbb{R}_+^m),$$

donde $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ son constantes positivas. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}_+^m} \rho(z)^b \pi(z)^{-a} \frac{dz}{\pi(z)} \le c\lambda^{b-a/\alpha} \prod_{i=1}^m \lambda_i^{\frac{a}{\alpha_i}}, \tag{4.26}$$

donde c es una constante que sólo depende de α_i, a, b.

Demostración. Sea $\rho_i(z_i) = \min\{\lambda, z_i^{\alpha_i}\lambda_i\}$ $i = 1, \ldots, m$. Denotemos por I la parte de la izquierda de (4.26). Es claro que

$$I \le \int_{\mathbb{R}_+^m} \prod_{i=1}^m \rho_i(z_i)^{\frac{b\alpha}{\alpha_i}} z_i^{-a} \frac{dz}{\pi(z)} = \prod_{i=1}^m I_i, \tag{4.27}$$

donde

$$I_i = \int_0^\infty \rho_i(z_i)^{\frac{b\alpha}{\alpha_i}} z_i^{-a} \frac{dz_i}{z_i}.$$

Ahora,

$$I_i = \lambda_i^{\frac{b\alpha}{\alpha_i}} \int_0^{(\frac{\lambda}{\lambda_i})^{1/\alpha_i}} z_i^{b\alpha-a} \frac{dz_i}{z_i} + \lambda^{\frac{b\alpha}{\alpha_i}} \int_{(\frac{\lambda}{\lambda_i})^{1/\alpha_i}}^\infty z_i^{-a} \frac{dz_i}{z_i} = c\left[\lambda^{b\alpha-a}\lambda_i^a\right]^{1/\alpha_i}. \tag{4.28}$$

Por (4.27) y (4.28) obtenemos inmediatamente (4.26). □

En adelante, sea $n \in \mathbb{N}, 0 < r_i < \infty, 1 \le \theta_i \le \infty$. Supongamos que $\phi_i \in \mathcal{L}^{\theta_i}$ son funciones positivas $(i = 1, \ldots, n)$. Definimos

$$\rho(t) = \min\{t_1^{r_1}\phi_1(t_{l_1}), t_2^{r_2}\phi_2(t_{l_2}), \ldots, t_n^{r_n}\phi_n(t_{l_n})\}, \tag{4.29}$$

donde $l_1, \ldots, l_n \in \{1, \ldots, n\}$.

Comentario 4.2. Nótese que la función $\rho_\sigma(t)$ definida en (4.25) es un caso particular de (4.29) ($\theta_i = p$ si $r_i \in \mathbb{N}$, $\theta_i = \infty$, $\phi_i \equiv \Omega_i$ si $r_i \notin \mathbb{N}$).

El siguiente lema nos da la integrabilidad para funciones del tipo (4.29).

Lema 4.5 (Lema principal). *Sean* $n \in \mathbb{N}, 0 < r_i < \infty, 1 \leq \theta_i \leq \infty$ $(i = 1, \dots, n)$. *Sea* $\rho(t) = \text{mín}_{1 \leq i \leq n}\{t_i^{r_i}\phi_i(t_{l_i})\}$, $\phi_i \in \mathcal{L}^{\theta_i}$, $l_i \in \{1, \dots, n\}$. *Definimos*

$$r = n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i}\right)^{-1}, \quad s = \frac{n}{r}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i\theta_i}\right)^{-1}. \tag{4.30}$$

Entonces

$$\left(\int_{\mathbb{R}_+^n}\rho(t)^s\pi(t)^{-rs/n}\frac{dt}{\pi(t)}\right)^{\frac{1}{s}} \leq c\sum_{i=1}^{n}\|\phi_i\|_{\mathcal{L}^{\theta_i}}, \tag{4.31}$$

donde c *es una constante finita que sólo depende de* n, r_i, θ_i.

Demostración. Podemos asumir que

$$\sum_{i=1}^{n}\|\phi_i\|_{\mathcal{L}^{\theta_i}} = 1. \tag{4.32}$$

Además, podemos suponer que no todos los θ_i's son iguales a infinito[1]. Denotamos $\phi(u) = \sum_{i=1,\dots,n;\theta_i\neq\infty}\phi_i(u)^{\theta_i}$ $(u > 0)$. Debido a (4.32) $\|\phi\|_{\mathcal{L}^1} \leq 1$. Sea

$$B_k = \{t \in \mathbb{R}_+^n : \max_{i=1,\dots,n;\theta_i\neq\infty}\phi(t_{l_i}) \leq \phi(t_k)\}.$$

Es claro que $\bigcup_{k=1}^n B_k = \mathbb{R}_+^n$.

Sin pérdida de generalidad consideramos la integral de la parte izquierda de (4.31) sólo sobre B_1. Para casi todo $t \in B_1$ tenemos

$$\rho(t) \leq \rho_{B_1}(t) \equiv \text{mín}\{t_1^{r_1}\phi(t_1)^{1/\theta_1}, t_2^{r_2}\phi(t_1)^{1/\theta_2}, \dots, t_n^{r_n}\phi(t_1)^{1/\theta_n}\}. \tag{4.33}$$

De aquí

$$\int_{B_1}\rho(t)^s\pi(t)^{-rs/n}\frac{dt}{\pi(t)} \leq \int_{\mathbb{R}_+^n}\rho_{B_1}(t)^s\pi(t)^{-rs/n}\frac{dt}{\pi(t)} =$$

$$= \int_0^\infty t_1^{-rs/n}\frac{dt_1}{t_1}\int_{\mathbb{R}_+^{n-1}}\rho_{B_1}(t_1,\hat{t}_1)^s\pi(\hat{t}_1)^{-rs/n}\frac{d\hat{t}_1}{\pi(\hat{t}_1)}. \tag{4.34}$$

[1]si no, es equivalente a $s = \infty$ y el resultado es trivial.

Para cada $t_1 \in \mathbb{R}_+$ fijo, aplicando el Lema 4.4 y (4.30), obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} \rho_{B_1}(t_1,\hat{t}_1)^s \pi(\hat{t}_1)^{-rs/n} d\hat{t}_1 \leq$$

$$\leq c[t_1^{r_1}\phi(t_1)^{1/\theta_1}]^{s-\sum_{i=2}^{n}\frac{rs}{nr_i}} \phi(t_1)^{\sum_{i=2}^{n}\frac{rs}{n\theta_i r_i}} = c\phi(t_1)t_1^{rs/n}. \tag{4.35}$$

Usando (4.34), (4.35), y teniendo en cuenta que $\|\phi\|_{\mathcal{L}^1} \leq 1$, llegamos a

$$\int_{B_1} \rho(t)^s \pi(t)^{-rs/n} \frac{dt}{\pi(t)} \leq c.$$

□

Ahora obtendremos una generalización del Lema 4.5.

Lema 4.6. *Asumamos las hipótesis del Lema 4.5 y supongamos además que existe* $0 < \delta \leq \frac{1}{2}\min_{1\leq i,k\leq n,\theta_k\neq\infty}\{\frac{r_i}{\theta_k}\}$ *tal que*

$$\phi_i(u)u^{\delta} \uparrow \quad y \quad \phi_i(u)u^{-\delta} \downarrow \tag{4.36}$$

para cada i *tal que* $\theta_i < \infty$. *Entonces, para cada* $0 < d \leq \infty$ *y* $j \in \{1,\dots,n\}$

$$\left(\int_0^\infty \left\|\rho(t)^s\pi(t)^{-rs/n}\right\|_{L^d(\mathbb{R}_+^{n-1},\frac{d\hat{t}_j}{\pi(\hat{t}_j)})} \frac{dt_j}{t_j}\right)^{\frac{1}{s}} \leq c\sum_{i=1}^{n}\|\phi_i\|_{\mathcal{L}^{\theta_i}}, \tag{4.37}$$

donde c *es una constante que depende de* $n, r_i, \theta_i, d, \delta$.

Nótese que cuanto más grande es d, más débil es (4.37). Veámoslo. Por (4.36), $\rho(t)\pi(t)^{\delta}$ es creciente en cada una de sus variables. Así, es fácil ver que

$$\sup_{\hat{t}_j\in\mathbb{R}_+^{n-1}} \rho(t)^s\pi(t)^{-rs/n} \leq c\|\rho(t)^s\pi(t)^{-rs/n}\|_{L^d(\mathbb{R}_+^{n-1},\frac{d\hat{t}_j}{\pi(\hat{t}_j)})} \quad \text{para cada } 0 < d < \infty.$$

Y de aquí se sigue que si $q > d > 0$, entonces

$$\|\rho(t)^s\pi(t)^{-rs/n}\|_{L^q(\mathbb{R}_+^{n-1},\frac{d\hat{t}_j}{\pi(\hat{t}_j)})} \leq$$

$$\leq c[\|\rho(t)^s\pi(t)^{-rs/n}\|_{L^d(\mathbb{R}_+^{n-1},\frac{d\hat{t}_j}{\pi(\hat{t}_j)})}]^{\frac{q-d}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} [\rho(t)^s\pi(t)^{-rs/n}]^d \frac{d\hat{t}_j}{\pi(\hat{t}_j)}\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq c\|\rho(t)^s\pi(t)^{-rs/n}\|_{L^d(\mathbb{R}^{n-1}_+,\frac{d\hat{t}_j}{\pi(\hat{t}_j)})}.$$

Notemos también que para $d = 1$ se tiene la misma conclusión que en el Lema 4.5. Así, para la demostración, podemos suponer que $0 < d < 1$.

Demostración. Como antes, podemos suponer que la condición (4.32) se cumple. Sean ϕ y B_k ($k = 1, \ldots, n$) definidos como en Lema 4.5. Entonces, la parte izquierda de (4.37) no es más grande que la suma $\sum_{k=1}^n I_k$, donde

$$I_k = \left(\int_0^\infty \left\|\rho(t)^s\pi(t)^{-rs/n}\chi_{B_k}(t)\right\|_{L^d(\mathbb{R}^{n-1}_+,\frac{d\hat{t}_j}{\pi(\hat{t}_j)})} \frac{dt_j}{t_j}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Consideraremos I_1. Para casi todo $t \in B_1$ tenemos la desigualdad (4.33). Por tanto,

$$I_1^s \leq \int_0^\infty \|\rho_{B_1}(t)^s\pi(t)^{-rs/n}\|_{L^d(\mathbb{R}^{n-1}_+,\frac{d\hat{t}_j}{\pi(\hat{t}_j)})} \frac{dt_j}{t_j}.$$

Caso 1. Si $j = 1$, entonces

$$I_1^s \leq \int_0^\infty t_1^{-rs/n} G(t_1) \frac{dt_1}{t_1},$$

donde

$$G(t_1)^d \equiv \int_{\mathbb{R}^{n-1}_+} [\rho_{B_1}(t)^s\pi(\hat{t}_1)^{-rs/n}]^d \frac{d\hat{t}_1}{\pi(\hat{t}_1)}.$$

Aplicando el Lema 4.4 a las variables $t_2, \ldots, t_n$, obtenemos fácilmente

$$G(t_1)^d \leq c[t_1^{r_1}\phi(t_1)^{1/\theta_1}]^{\frac{rsd}{nr_1}} \phi(t_1)^{d\sum_{i=2}^n \frac{rs}{nr_i\theta_i}} = [t_1^{rs/n}\phi(t_1)]^d.$$

Esto implica (4.37).

Caso 2. Sea $j \neq 1$. Para $t \in \mathbb{R}^n_+$, denotamos por $\hat{t}_{1,j}$ el vector $(n-2)$-dimensional obtenido de t eliminando t_1, t_j. Entonces

$$I_1^s \leq \int_0^\infty t_j^{-rs/n} \|R(t_1, t_j)\|_{\mathcal{L}^d,(t_1)} \frac{dt_j}{t_j}, \tag{4.38}$$

donde

$$R(t_1, t_j)^d = t_1^{-rsd/n} \int_{\mathbb{R}^{n-2}_+} [\pi(\hat{t}_{1,j})^{-rs/n}\rho_{B_1}(t)^s]^d \frac{d\hat{t}_{1,j}}{\pi(\hat{t}_{1,j})}.$$

Fijamos t_1, t_j y aplicamos el Lema 4.4 a las coordenadas del vector $\hat{t}_{1,j}$. Obtenemos

$$R(t_1,t_j) \le c t_1^{-rs/n} \min\{t_1^{r_1}\phi(t_1)^{1/\theta_1}, t_j^{r_j}\phi(t_1)^{1/\theta_j}\}^{\frac{rs}{n}(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_j})}\phi(t_1)^{\sum_{i\neq 1,j}\frac{rs}{nr_i\theta_i}}.$$

Ahora, definimos $\beta(t_1) = [t_1^{r_1}\phi(t_1)^{1/\theta_1-1/\theta_j}]^{1/r_j}$. Notemos que por (4.36)

$$\beta(t_1)t_1^{-\delta/r_j} \uparrow . \tag{4.39}$$

Además ($b \equiv \frac{rs}{nr_j\theta_1} + \sum_{i\neq j}\frac{rs}{nr_i\theta_i}$, $b' \equiv \frac{rs}{nr_1\theta_j} + \sum_{i\neq 1}\frac{rs}{nr_i\theta_i}$),

$$R(t_1,t_j) \le c \begin{cases} t_1^{\frac{rs}{n}\frac{r_1}{r_j}}\phi(t_1)^b \equiv R_1(t_1) & \text{si } \beta(t_1)\le t_j, \\ t_j^{\frac{rs}{n}(1+\frac{r_j}{r_1})}t_1^{-\frac{rs}{n}}\phi(t_1)^{b'} \equiv t_j^{\frac{rs}{n}(1+\frac{r_j}{r_1})}R_2(t_1) & \text{si } \beta(t_1)\ge t_j. \end{cases} \tag{4.40}$$

Uniendo (4.38) y (4.40) tenemos

$$I_1^s \le c\int_0^\infty t_j^{-\frac{rs}{n}}\frac{dt_j}{t_j}\left(\int_{\{t_j\ge\beta(t_1)\}} R_1(t_1)^d\frac{dt_1}{t_1}\right)^{1/d} +$$
$$+ c\int_0^\infty t_j^{\frac{rs}{n}\frac{r_j}{r_1}}\frac{dt_j}{t_j}\left(\int_{\{t_j\le\beta(t_1)\}} R_2(t_1)^d\frac{dt_1}{t_1}\right)^{1/d}.$$

Teniendo en cuenta (4.39), aplicamos el Lema 1.4 con $\gamma = 1/d$ ($\gamma > 1$). Usando las definiciones de β, R_1, y R_2, y (4.30), conseguimos

$$I_1^s \le c\int_0^\infty \beta(t_1)^{-\frac{rs}{n}}R_1(t_1)\frac{dt_1}{t_1}+$$
$$+c\int_0^\infty \beta(t_1)^{\frac{rs}{n}\frac{r_j}{r_1}}R_2(t_1)\frac{dt_1}{t_1} = c'\int_0^\infty \phi(t_1)\frac{dt_1}{t_1}.$$

□

Utilizaremos también la siguiente generalización del Lema 4.6.

Lema 4.7. *Sea* $m\in\mathbb{N}$, $0<r_i<\infty$, $1\le\theta_i\le\infty$ $(i=1,\dots,m)$. *Definimos la función* $\rho(z) = \min_{1\le i\le m}\{z_i^{r_i}\phi_i(z_{l_i})\}$, $\phi_i\in\mathcal{L}^{\theta_i}$, $l_i\in\{1,\dots,m\}$. *Supongamos también que existe* $0<\delta\le\frac{1}{2}\min_{1\le i,k\le m,\theta_k\neq\infty}\{\frac{r_i}{\theta_k}\}$ *tal que*

$$\phi_i(u)u^\delta\uparrow \quad y \quad \phi_i(u)u^{-\delta}\downarrow$$

para cada i tal que $\theta_i < \infty$. Elegimos cualesquiera $0 < a_i < \infty$ verificando

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{r_i\theta_i} = 1. \tag{4.41}$$

Definimos $a \equiv \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{r_i}$. Entonces, para cada $0 < d \leq \infty$ y $j \in \{1, \ldots, m\}$

$$\left(\int_0^\infty \|\rho(z)^a \prod_{i=1}^{m} z_i^{-a_i}\|_{L^d(\mathbb{R}_+^{m-1}, \frac{d\hat{z}_j}{\pi(\hat{z}_j)})} \frac{dz_j}{z_j}\right)^{\frac{1}{a}} \leq c \sum_{i=1}^{m} \|\phi_i\|_{\mathcal{L}^{\theta_i}}, \tag{4.42}$$

donde c es una constante que depende de $m, r_i, a_i, \theta_i, d, \delta$.

Nótese que el Lema 4.6 es el caso particular $a_1 = \ldots = a_m$.

Demostración. Sea J la parte izquierda de (4.42). El cambio de variable $z_i^{a_i/b} = u_i$ ($b = \min_{1\leq k\leq m} a_k$) nos da

$$J = c\left(\int_0^\infty \|\rho(u)^a \pi(u)^{-b}\|_{L^d(\mathbb{R}_+^{m-1}, \frac{d\hat{u}_j}{\pi(\hat{u}_j)})} \frac{du_j}{u_j}\right)^{\frac{1}{a}},$$

donde $\rho(u) = \min_{1\leq i\leq m}\{u_i^{r_i'} F_i(u_{l_i})\}$, $r_i' = r_i b/a_i$, y $F_i(v) = \phi_i(v^{b/a_{l_i}})$ pertenece a $\mathcal{L}^{\theta_i}$. Notemos ahora que $F_i(v)v^\delta \uparrow$ y $F_i(v)v^{-\delta} \downarrow$. Así, sólo queda aplicar el Lema 4.6 a la última integral ($r' = m(\sum 1/r_i')^{-1} = a^{-1}bm$ y $r's'/m = (\sum 1/r_i'\theta_i)^{-1} = b$ por (4.41)) y conseguimos (4.42). □

4.5. Inmersiones de espacios de Lipschitz

Lema 4.8. *Sean $r_1, \ldots, r_n > 0$, $1 \leq p < \infty$. Sea $f \in \Lambda_p^{r_1,\ldots,r_n}(\mathbb{R}^n)$. Entonces, existe una sucesión de funciones $f_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ($k \in \mathbb{N}$) tal que:*
i)$f_k \to f$ en L^p,
ii) $\lim_{k\to\infty} \|f_k\|_{\lambda_p^{r_1,\ldots,r_n}} \leq \|f\|_{\lambda_p^{r_1,\ldots,r_n}}$.

Demostración. Usaremos ε-regularizaciones y funciones de corte.

Sea $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ una función no negativa con la propiedad

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1.$$

A la convolución

$$f_\varepsilon(x) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\varepsilon^{-n}\varphi(y/\varepsilon)dy \quad \varepsilon > 0, x \in \mathbb{R}^n,$$

se le llama ε-regularización de f. Es bien conocido [5, Cap.1] que, si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p < \infty)$, entonces $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\|f_\varepsilon\|_p \le \|f\|_p$ y

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f - f_\varepsilon\|_p = 0. \tag{4.43}$$

Notemos ahora que para cada $j = 1, \dots, n$

$$\Delta_j^{\bar{r}_j}(h)(f_\varepsilon)(x) = [\Delta_j^{\bar{r}_j}(h)f]_\varepsilon(x) \quad h \in \mathbb{R}.$$

Y así,

$$\|\Delta_j^{\bar{r}_j}(h)(f_\varepsilon)\|_p = \|\,[\Delta_j^{\bar{r}_j}(h)f]_\varepsilon\|_p \le \|\Delta_j^{\bar{r}_j}(h)f\|_p.$$

De aquí se deduce fácilmente que $\omega_j^{\bar{r}_j}(f_\varepsilon;\delta)_p \le \omega_j^{\bar{r}_j}(f;\delta)_p$ $(\delta > 0)$ y por tanto tenemos

$$\|f_\varepsilon\|_{\lambda_p^{r_1,\dots,r_n}} \le \|f\|_{\lambda_p^{r_1,\dots,r_n}}. \tag{4.44}$$

Sea ahora $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ una función positiva tal que $g \equiv 1$ en $[-1,1]^n$ y $g \equiv 0$ en $\mathbb{R}^n - [-2,2]^n$. Supongamos además que $\|g\|_\infty = 1$. Denotaremos por $M = \max_{1 \le j \le n, 0 \le i \le \bar{r}_j} \|D_j^i g\|_\infty < \infty$.

Para $m \in \mathbb{N}$ definimos las funciones de corte como $g_m(x) = g(x/m)$. Es evidente que $g_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y que $\|D_j^i g_m\|_\infty \le M/m^i$ $(j = 1, \dots, n; 0 \le i \le \bar{r}_j)$.

Sea ψ cualquier función de $\Lambda_{p;j}^{r_j}(\mathbb{R}^n)$. Es claro que

$$\psi g_m \to \psi \quad \text{en } L^p \text{ cuando } m \to \infty. \tag{4.45}$$

Para $m \in \mathbb{N}$ fijo denotemos por

$$I \equiv \sup_{0 < \delta < m} \delta^{-r_j}\omega_j^{\bar{r}_j}(\psi g_m, \delta)_p.$$

Entonces,

$$\|\psi g_m\|_{\lambda_{p;j}^{r_j}} = \sup_{\delta > 0} \delta^{-r_j}\omega_j^{\bar{r}_j}(\psi g_m, \delta)_p \le$$

$$\le I + m^{-r_j}c\|\psi g_m\|_p \le I + m^{-r_j}c\|\psi\|_p. \tag{4.46}$$

Por otra parte, es fácil probar (por ejemplo, mediante inducción) que

$$\|\Delta_j^{\bar{r}_j}(h)\psi g_m\|_p \leq \sum_{i=0}^{\bar{r}_j} \binom{\bar{r}_j}{i} \|\Delta_j^i(h)\psi\|_p \|\Delta_j^{\bar{r}_j - i}(h) g_m\|_\infty.$$

Además, se tiene (ver [26, (4.9)])

$$\|\Delta_j^{\bar{r}_j - i}(h) g_m\|_\infty \leq h^{\bar{r}_j - i} \|D_j^{\bar{r}_j - i} g_m\|_\infty.$$

Juntando las dos últimas desigualdades obtenemos

$$\|\Delta_j^{\bar{r}_j}(h)\psi g_m\|_p \leq \|\Delta_j^{\bar{r}_j}(h)\psi\|_p + c \sum_{i=0}^{\bar{r}_j - 1} \|\Delta_j^i(h)\psi\|_p \left(\frac{h}{m}\right)^{\bar{r}_j - i} M,$$

y de aquí se sigue

$$I \leq \|\psi\|_{\lambda_{p;j}^{r_j}} + cMm^{-r_j}\|\psi\|_p + cM \sum_{i=1}^{\bar{r}_j - 1} m^{i - \bar{r}_j} \|\psi\|_{\lambda_{p;j}^{i + r_j - \bar{r}_j}}. \tag{4.47}$$

Tengamos en cuenta que para $1 \leq i \leq \bar{r}_j - 1$

$$\|\psi\|_{\lambda_{p;j}^{i + r_j - \bar{r}_j}} \leq c[\|\psi\|_p + \|\psi\|_{\lambda_{p;j}^{r_j}}]$$

(se deduce, por ejemplo, de la desigualdad de Marchaud [4, pg.332]). Utilizando esta última desigualdad, (4.46) y (4.47) llegamos a que, si $\psi \in \Lambda_p^{r_1,\ldots,r_n}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|\psi g_m\|_{\lambda_p^{r_1,\ldots,r_n}} \leq \|\psi\|_{\lambda_p^{r_1,\ldots,r_n}} + \mu(m)\|\psi\|_{\Lambda_p^{r_1,\ldots,r_n}}, \tag{4.48}$$

donde $\mu(m)$ es una función positiva que no depende de ψ y que verifica $\lim_{m\to\infty} \mu(m) = 0$.

Finalmente, es trivial que $\{f_{m^{-1}} g_m\} \subset C_0^\infty(\mathbb{R})$ y que cumple (por (4.43) y (4.45)) la condición (i). Las desigualdades (4.44) y (4.48) nos indican que para una subsucesión adecuada $\{f_{m_k^{-1}} g_{m_k}\}$ se verifica (ii). $\square$

Teorema 4.1. *Sean* $2 \leq n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, $0 < r_i < \infty$ $(i = 1, \ldots, n)$. *Definimos*

$$r = n\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i}\right)^{-1}; \quad r' = n\left(\sum_{i: r_i \in \mathbb{N}} \frac{1}{r_i}\right)^{-1}; s = \frac{r'p}{r}; \quad q^* = \frac{np}{n - rp}. \tag{4.49}$$

Entonces, si $p < n/r$,

$$\|f\|_{q^*,s;\mathcal{R}} \leq c\|f\|_{\lambda_p^{r_1,\ldots,r_n}} \qquad \textit{para todo } f \in \Lambda_p^{r_1,\ldots,r_n}(\mathbb{R}^n), \tag{4.50}$$

donde c *es una constante que no depende de* f.

Demostración. Primero supongamos que $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sea $S = \|f\|_{q^*,s;\mathcal{R}}$. Así, $S < \infty$.

Es muy conocido que si $1 < p \leq \infty$

$$\|f\|_{\lambda_p^{r_1,\ldots,r_n}} \sim \sum_{j:r_j\in\mathbb{N}} \|D_j^{r_j} f\|_p + \sum_{j:r_j\notin\mathbb{N}} \sup_{u>0} u^{-r_j}\omega_j^{\bar{r}_j}(f;u)_p, \tag{4.51}$$

y la equivalencia también es cierta para $p = 1$ si nos restringimos a funciones en $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ [26].

Ahora, teniendo en cuenta (4.51) y el Comentario 4.1, integramos la desigualdad (4.24) y obtenemos para cada $\sigma \in \mathcal{P}_n$

$$\left(\int_{\mathbb{R}_+^n} \pi(t)^{s/q^*-1}\mathcal{R}_\sigma f(t)^s dt\right)^{1/s} \leq 2^{\bar{r}'+n}K^{-1/q^*}S + c(K)\left(\int_{\mathbb{R}_+^n} \pi(t)^{-\frac{rs}{n}-1}\rho_\sigma(t)^s dt\right)^{1/s}$$

con $\rho_\sigma(t)$ definido en (4.25). Consecuentemente

$$S = \sum_{\sigma\in\mathcal{P}_n} \|f\|_{q^*,s;\mathcal{R}_\sigma} \leq n!2^{\bar{r}'+n}K^{-1/q^*}S +$$

$$+c'(K)\sum_{\sigma\in\mathcal{P}_n}\left(\int_{\mathbb{R}_+^n} \pi(t)^{-\frac{rs}{n}-1}\rho_\sigma(t)^s dt\right)^{1/s}. \tag{4.52}$$

Ahora, aplicamos el Lema 4.5 con $\theta_i = p$ si $r_i \in \mathbb{N}$; $\theta_i = \infty$ y $\phi_i = \Omega_i$ si $r_i \notin \mathbb{N}$ (observar que los valores de s en (4.49) y (4.30) coinciden) y tenemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}_+^n} \pi(t)^{-\frac{rs}{n}-1}\rho_\sigma(t)^s dt\right)^{1/s} \leq c\left[\sum_{r_i\in\mathbb{N}} \|\phi_i\|_{\mathcal{L}^p} + \sum_{r_i\notin\mathbb{N}} \Omega_i\right]. \tag{4.53}$$

Por tanto, poniendo $K = (2^{\bar{r}'+n+1}n!)^{q^*}$ y por (4.52), (4.53), la definición de Ω_i, y (4.9) obtenemos inmediatamente la desigualdad (4.50).

Para $f \in \Lambda_p^{r_1,\ldots,r_n}(\mathbb{R}^n)$, existe una sucesión de funciones $f_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{k\to\infty} \|f_k\|_{\lambda_p^{r_1,\ldots,r_n}} \leq \|f\|_{\lambda_p^{r_1,\ldots,r_n}}$ y $f_k \to f$ en L^p (es el resultado del Lema 4.8). Así, aplicando el Lema 1.1 y el Lema de Fatou obtenemos (4.50) en el caso general. $\square$

Comentario 4.3. Si todos los r_i's son enteros, entonces $s = p$ y obtenemos la inmersión del espacio de Sobolev anisótropo en el espacio de Lorentz demostrada anteriormente en [24, 27]. En el caso general, supongamos que $s \leq q^*$. Entonces el Teorema 4.1 nos da una demostración alternativa de los resultados relativos a las inmersiones en L^{q^*} [20] y $L^{q^*,s}$ [34, 26].

Teorema 4.2. *Sea* $2 \leq n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < q < \infty$. *Sea* $0 < r_i < \infty$ $(i = 1, \dots, n)$. *Definimos* r, s *como en (4.49). Supongamos que*

$$\varkappa = 1 - \frac{n}{r}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) > 0$$

y definimos

$$\alpha_i = \varkappa r_i, \quad \frac{1}{\gamma_i} = \begin{cases} \frac{1-\varkappa}{s} + \frac{\varkappa}{p}, & \text{si } r_i \in \mathbb{N}, \\ \frac{1-\varkappa}{s}, & \text{si } r_i \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

Entonces, para todo $f \in \Lambda_p^{r_1,\dots,r_n}(\mathbb{R}^n)$,

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^\infty \left[h^{-\alpha_i} \|\Delta_i^{\bar{r}_i}(h) f\|_{q,1;\mathcal{R}} \right]^{\gamma_i} \frac{dh}{h} \right)^{1/\gamma_i} \leq c\|f\|_{\lambda_p^{r_1,\dots,r_n}(\mathbb{R}^n)}, \tag{4.54}$$

donde c *es una constante que no depende de* f.

Demostración. Consideremos el primer sumando de la parte izquierda de (4.54). Denotemos $f_{1,h}(x) = \Delta_1^{\bar{r}_1}(h) f(x)$. Estimaremos $J(h) = \|f_{1,h}\|_{q,1;\mathcal{R}} < \infty$. Como en el Teorema 4.1, podemos suponer que $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Definimos ahora

$$\delta \equiv \frac{1}{2} \min\{\frac{r}{n}(1 - \varkappa), \frac{1}{p} \min_j r_j\}.$$

Entonces, por (4.51), procedemos de modo similar al Comentario 4.1. Aplicando los Lemas 4.2 y 4.3 a $f_{1,h}$, obtenemos fácilmente que para cada $K > 1$

$$\mathcal{R}_\sigma f_{1,h}(t) \leq 2^{\bar{r}'} \sum_{j=1}^{n} \mathcal{R}_{\sigma'_j} f_{1,h} \left(K t_{m_j}, \frac{\hat{t}_{m_j}}{2} \right) + c(K)\pi(t)^{-1/p} \rho_\sigma(t),$$

donde $\rho_\sigma(t)$ es la definida en (4.25). Es más, de (4.12) y (4.20) se sigue que si $h < t_{m_1}$,

$$\mathcal{R}_\sigma f_{1,h}(t) \leq c\pi(t)^{-1/p} \mu(t, h),$$

donde

$$\mu(t,h) = \begin{cases} h^{r_1-\delta} t_{m_1}^{\delta} \phi_1(t_{l_1}), & \text{si } r_1 \in \mathbb{N}, \\ h^{r_1}\Omega_1, & \text{si } r_1 \notin \mathbb{N}, \end{cases} \tag{4.55}$$

y $\phi_1(t_{l_1})$ se define en Lema 4.2. Además, llamando

$$\bar{\rho}_\sigma(t,h) = \text{mín}\{\rho_\sigma(t), \mu(t,h)\}, \tag{4.56}$$

obtenemos para cada $K > 1$

$$\mathcal{R}_\sigma f_{1,h}(t) \le 2^{\bar{r}'} \sum_{j=1}^{n} \mathcal{R}_{\sigma_j'} f_{1,h}\left(K t_{m_j}, \frac{\hat{t}_{m_j}}{2}\right) + c(K)\pi(t)^{-1/p}\bar{\rho}_\sigma(t,h).$$

Multiplicando por $\pi(t)^{1/q-1}$ e integrando sobre $\mathbb{R}^n_+$, obtenemos

$$\|f_{1,h}\|_{q,1;\mathcal{R}_\sigma} \le 2^{\bar{r}'+n} K^{-1/q} J(h) + c(K) J_1(h,\sigma), \tag{4.57}$$

donde

$$J_1(h,\sigma) = \int_{\mathbb{R}^n_+} \pi(t)^{-\frac{r}{n}(1-\varkappa)} \bar{\rho}_\sigma(t,h) \frac{dt}{\pi(t)}. \tag{4.58}$$

Sumando las desigualdades (4.57) sobre todo $\sigma \in \mathcal{P}_n$ y eligiendo $K = (2^{\bar{r}'+n+1} n!)^q$, tenemos

$$J(h) \le c' \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_n} J_1(h,\sigma). \tag{4.59}$$

Por tanto, denotando por I el primer término de la parte izquierda de (4.54), tenemos (supongamos que $\gamma_1 < \infty$[2])

$$I \equiv \left(\int_0^\infty h^{-\alpha_1\gamma_1 - 1} J(h)^{\gamma_1} dh \right)^{1/\gamma_1} \le c' \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_n} \bar{I}(\sigma),$$

donde (por (4.59))

$$\bar{I}(\sigma) = \left(\int_0^\infty h^{-\alpha_1\gamma_1} J_1(h,\sigma)^{\gamma_1} \frac{dh}{h} \right)^{1/\gamma_1}. \tag{4.60}$$

[2] En caso contrario, ninguno de los r_i's pertenecería a $\mathbb{N}$, y el análogo de (4.54) se sigue de (4.59), (4.58) y Lema 4.4.

Pero ahora, es claro que (ver (4.56), (4.25) y (4.55))

$$\bar{\rho}_\sigma(t,h) \leq [1 + (\frac{t_{m_1}}{h})^\delta]\tilde{\rho}_\sigma(t,h) \tag{4.61}$$

donde

$$\tilde{\rho}_\sigma(t,h) \equiv \begin{cases} \text{mín}\{h^{r_1}\phi_1(t_{l_1}), \rho_\sigma(t)\}, & \text{si } r_1 \in \mathbb{N} \\ \text{mín}\{h^{r_1}\Omega_1, \rho_\sigma(t)\}, & \text{si } r_1 \notin \mathbb{N}. \end{cases} \tag{4.62}$$

Así, debido a (4.60), (4.58) y (4.61) tenemos

$$\bar{I}(\sigma) \leq c\tilde{I}_1(\sigma) + c\tilde{I}_2(\sigma),$$

donde

$$\tilde{I}_1(\sigma) \equiv \left(\int_0^\infty \|h^{-\alpha_1\gamma_1}\pi(t)^{-\frac{r}{n}(1-\varkappa)\gamma_1}\tilde{\rho}_\sigma(t,h)^{\gamma_1}\|_{L^{1/\gamma_1}(\mathbb{R}^n_+,\frac{dt}{\pi(t)})}\frac{dh}{h}\right)^{1/\gamma_1}$$

y

$$\tilde{I}_2(\sigma) \equiv \left(\int_0^\infty \|h^{-\alpha_1\gamma_1}\pi(t)^{-\frac{r}{n}(1-\varkappa)\gamma_1}(\frac{t_{m_1}}{h})^{\delta\gamma_1}\tilde{\rho}_\sigma(t,h)^{\gamma_1}\|_{L^{1/\gamma_1}(\mathbb{R}^n_+,\frac{dt}{\pi(t)})}\frac{dh}{h}\right)^{1/\gamma_1}.$$

Sólo queda estimar estas dos últimas integrales.

Juntando (4.62) y (4.25) obtenemos

$$\tilde{\rho}_\sigma(t,h) = \begin{cases} \text{mín}\{h^{r_1}\phi_1(t_{l_1}), \text{mín}_{r_j\in\mathbb{N}}\{t_{m_j}^{r_j}\phi_j(t_{l_j})\}, \text{mín}_{r_j\notin\mathbb{N}}\{t_{m_j}^{r_j}\Omega_j\}\}, & \text{si } r_1 \in \mathbb{N} \\ \text{mín}\{h^{r_1}\Omega_1, \text{mín}_{r_j\in\mathbb{N}}\{t_{m_j}^{r_j}\phi_j(t_{l_j})\}, \text{mín}_{r_j\notin\mathbb{N}}\{t_{m_j}^{r_j}\Omega_j\}\}, & \text{si } r_1 \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

Así, $\tilde{\rho}_\sigma(t,h)$ tiene la forma de $\rho(z)$ en el Lema 4.7 ($\rho(z) = \text{mín}_{1\leq i\leq m}\{z_i^{r_i}\phi_i(z_{l_i})\}$, $\phi_i \in \mathcal{L}^{\theta_i}$). Veámoslo. Pongamos $m = n+1$, $r_{n+1} = r_1$,

$$z_1 = t_{m_1}, \quad \cdots \quad , z_n = t_{m_n}, \quad z_{n+1} = h.$$

$$(1 \leq i \leq n+1)\begin{cases} \text{Si } r_i \in \mathbb{N},\ \theta_i = p \text{ y } \phi_i(v)v^\delta \uparrow,\ \phi_i(v)v^{-\delta} \downarrow \text{(ver (4.10))}. \\ \text{Si } r_i \notin \mathbb{N},\ \theta_i = \infty \text{ y } \phi_i = \Omega_i. \end{cases}$$

Para estimar $\tilde{I}_1(\sigma)$, notemos que tiene la forma de la parte izquierda de (4.42) con

$$a_1 = \cdots = a_n = \frac{r}{n}(1-\varkappa)\gamma_1 > 0,\ a_{n+1} = \alpha_1\gamma_1 > 0,\ d = 1/\gamma_1,\ j = n+1.$$

Entonces $a = \gamma_1$ y (4.41) se cumple. Aplicando el Lema 4.7 conseguimos

$$\tilde{I}_1(\sigma) \leq c \left[\sum_{r_i \in \mathbb{N}} \|\phi_i\|_{\mathcal{L}^p} + \sum_{r_i \notin \mathbb{N}} \Omega_i \right].$$

Y por la definición de Ω_i y (4.9)

$$\tilde{I}_1(\sigma) \leq c\|f\|_{\lambda_p^{r_1,\ldots,r_n}(\mathbb{R}^n)}.$$

Además $\tilde{I}_2(\sigma)$ es también como la parte izquierda de (4.42). De hecho,

$$a_{n+1} = (\alpha_1 + \delta)\gamma_1 > 0,\ \ a_1 = [\frac{r}{n}(1 - \varkappa) - \delta]\gamma_1 > 0,$$

$$a_i = \frac{r}{n}(1 - \varkappa)\gamma_1 > 0\ (i = 2, \ldots, n),\ \ d = 1/\gamma_1,\ \ j = n + 1.$$

Tenemos que $a = \gamma_1$ de nuevo y (4.41) también se cumple. Aplicando el Lema 4.7 obtenemos la misma estimación para $\tilde{I}_2(\sigma)$ que para $\tilde{I}_1(\sigma)$. □

Además del Teorema 4.1 (inmersión con exponente límite) tenemos también el siguiente teorema.

Teorema 4.3. *Sean* $2 \leq n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < q < \infty$, *y* $0 < r_i < \infty$ $(i = 1, \ldots, n)$. *Sea* r *como en (4.49). Supongamos que* $1 - n/r(1/p - 1/q) > 0$. *Entonces, para cada* $0 < \xi < \infty$

$$\|f\|_{q,\xi;\mathcal{R}} \leq c\|f\|_{\Lambda_p^{r_1,\ldots,r_n}(\mathbb{R}^n)}, \tag{4.63}$$

donde c *es una constante que no depende de* f.

Demostración. Lo primero podemos suponer que $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, así $S \equiv \|f\|_{q,\xi;\mathcal{R}} < \infty$. Por (1.9) podemos suponer que $0 < \xi < 1$, también.

Por el Comentario 4.1 obtenemos (4.24) y (4.25). Definimos para $\sigma = m^{-1} \in \mathcal{P}_n$ y $j = 1, \ldots, n$.

$$A = \{t \in \mathbb{R}_+^n : t_i \geq 1\,(i = 1, \ldots, n)\}, \quad A_{\sigma,j} = \{t \in \mathbb{R}_+^n : \min_{1 \leq i \leq n} t_{m_i}^{r_i} = t_{m_j}^{r_j} < 1\}.$$

Es claro que

$$A \cup \left(\bigcup_{j=1}^{n} A_{\sigma,j} \right) = \mathbb{R}_+^n.$$

Entonces, usando (4.24),

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \pi(t)^{\xi/q-1}\mathcal{R}_\sigma f(t)^\xi dt \le (2^{\bar{r}'+n}K^{-1/q}S)^\xi + I_0 + c(K)\sum_{j=1}^n I_j,$$

donde

$$I_0 = \int_A \pi(t)^{\xi/q-1}\mathcal{R}_\sigma f(t)^\xi dt \quad \text{e} \quad I_j = \int_{A_{\sigma,j}} \pi(t)^{-\frac{r}{n}(1-\varkappa)\xi-1}\rho_\sigma(t)^\xi dt.$$

Con los mismos métodos que en el Teorema 4.1 elegimos $K = (n!2^{\bar{r}'+n+1+1/\xi})^q$ y sólo queda acotar I_0 e I_j. Aplicando la desigualdad de Hölder con exponentes p/ξ y $(p/\xi)'$ tenemos (debido a $(\xi/q-1)(p/\xi)' < -1$)

$$I_0 \le c\|f\|_p^\xi.$$

Por otro lado, sea ζ tal que

$$1 > \frac{1}{\zeta} = \begin{cases} \frac{\xi}{2}\frac{1-\varkappa}{s} & \text{si } r_j \notin \mathbb{N}, \\ \frac{\xi}{2}(\frac{1-\varkappa}{s} + \frac{1+\varkappa}{p}) & \text{si } r_j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Entonces, por la desigualdad de Hölder

$$I_j \le \left(\int_{A_{\sigma,j}} \pi(t)^{-\alpha\zeta'} t_{m_j}^{\beta\zeta'} \frac{dt}{\pi(t)}\right)^{1/\zeta'} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \pi(t)^{-\alpha\zeta} t_{m_j}^{-\beta\zeta}\rho_\sigma(t)^{\zeta\xi}\frac{dt}{\pi(t)}\right)^{1/\zeta} \equiv J_1.J_2,$$

donde $\alpha = \frac{r}{2n}(1-\varkappa)\xi$ y $\beta = \frac{r_j}{2}(1+\varkappa)\xi$. El primer factor, J_1, es una constante por la definición de $A_{\sigma,j}$, ya que

$$\int_{A_{\sigma,j}} \pi(t)^{-\alpha\zeta'} t_{m_j}^{\beta\zeta'} \frac{dt}{\pi(t)} =$$

$$= \int_0^1 \frac{dt_{m_j}}{t_{m_j}} \int_{\{\hat{t}_{m_j}: t_{m_i} \ge t_{m_j}^{r_j/r_i} (i\ne j)\}} \pi(t)^{-\alpha\zeta'} t_{m_j}^{\beta\zeta'} \frac{d\hat{t}_{m_j}}{\pi(\hat{t}_{m_j})} = c.$$

Para el segundo factor, J_2, aplicamos el Lema 4.7 con

$$m = n,\ d = 1,\ z_i = t_{m_i},$$

$$a_i = \alpha\zeta \text{ si } i \ne j \text{ y } a_j = \alpha\zeta + \beta\zeta$$

(como antes $\theta_i = p$ si $r_i \in \mathbb{N}$; y $\theta_i = \infty$, $\phi_i = \Omega_i$ si $r_i \notin \mathbb{N}$). Finalmente utilizamos la definición de Ω_i y (4.9). Así,

$$J_2 \leq c(\|f\|_{\lambda_p^{r_1,\dots,r_n}(\mathbb{R}^n)})^\xi$$

y (4.63) está probado. $\square$

Comentario 4.4. Al tratarse de una inmersión con exponente q no límite, la inmersión

$$\Lambda_p^{r_1,\dots,r_n}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{q,\xi}(\mathbb{R}^n)$$

se sigue fácilmente de las inmersiones con exponente no límite por ejemplo para espacios de Besov [26] o de otros espacios que midan la suavidad. La novedad del Teorema 4.3 consiste en el empleo de la norma $\|.\|_{q,\xi;\mathcal{R}}$ (más fuerte que la usual de Lorentz si $\xi < q$).

Capítulo 5

Relaciones entre el módulo de continuidad en métricas diferentes

5.1. Introducción y definiciones

En este capítulo estudiamos las relaciones entre módulos de continuidad en métricas diferentes. Como ya comentamos en la introducción, este problema es mucho más difícil que los considerados en los capítulos anteriores sobre inmersiones óptimas de espacios definidos por parámetros numéricos. Por tanto, sólo consideraremos el caso isótropo.

Primero veamos algunas definiciones básicas.

Definición 5.1 (diferencias). Sea f una función medible en $\mathbb{R}^n$. Sea $r \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}^n$. Se define

$$\Delta^r(h)f(x) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} f(x+jh).$$

Definición 5.2. Sea $\|.\|_X$ una norma para funciones medibles en $\mathbb{R}^n$. Llamaremos módulo de continuidad de orden r para la función f a la función

$$\omega^r(f;\delta)_X = \sup_{\|h\| \le \delta} \|\Delta^r(h)f\|_X \quad \delta > 0,$$

donde $\|h\| = \|h\|_\infty$.

Por simplicidad, denotaremos con $\omega(f;\delta)_X$ a $\omega^1(f;\delta)_X$.

Nótese que en las definiciones 1.8 y 1.9 se definen las diferencias y el módulo de continuidad “parciales”, es decir, respecto a una variable. A los que acabamos de definir podemos añadirles “totales” en caso de duda, para distinguirlos de los de las definiciones 1.8 y 1.9.

Es trivial la relación

$$\omega_j^r(f;\delta)_X \leq \omega^r(f;\delta)_X \quad 1 \leq j \leq n.$$

Asimismo, si $r = 1$ y $\|.\|_X$ es invariante por traslaciones en la variable, se verifica

$$\omega(f;\delta)_X \leq \sum_{j=1}^{n} \omega_j(f;\delta)_X.$$

El problema del que nos ocupamos en este capítulo es el siguiente: dados dos espacios X e Y diferentes. ¿Cuál es la relación existente entre los módulos de continuidad $\omega^r(f;\delta)_X$ y $\omega^r(f;\delta)_Y$?

Como ya vimos en la Introducción, para el módulo de primer orden, si $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ e $Y = L^q(\mathbb{R}^n)$, la relación puede expresarse mediante la desigualdad (7). Recordemos que (7) es óptima en el sentido de espacios con módulo de continuidad mayorado por un módulo cualquiera [21, 14].

También mencionamos en la Introducción que Kolyada [21] demostró la desigualdad (8), la cual mejora a (7) en cierto sentido.

En este capítulo nos planteamos estudiar las relaciones entre el módulo de continuidad de orden arbitrario en el caso en que $X = L^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ e $Y = L^{q,\xi}(\mathbb{R}^n)$ son espacios de Lorentz. En la sección 5.3 demostramos la siguiente generalización de la desigualdad (8):
sean $1 \leq p < q < \infty$ tal que $\theta \equiv n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) < r$. Sean $1 \leq s, \xi \leq \infty$. Si $f \in L^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ y $p > 1$ ó $p = s = 1$ y $n \geq 2$ se cumple:

$$\left(\int_\delta^\infty (t^{\theta-r}\omega^r(f;t)_{q,\xi})^s \frac{dt}{t}\right)^{1/s} \leq c\delta^{\theta-r}\left(\int_0^\delta (t^{-\theta}\omega^r(f;t)_{p,s})^\xi \frac{dt}{t}\right)^{1/\xi} \quad \delta > 0. \tag{5.1}$$

Esta generalización, esencialente, fue probada por Netrusov [35], para el caso $p > 1$, utilizando unas representaciones integrales especiales. El logro de este capítulo es obtener (5.1) en los casos restantes. Los métodos que empleamos están basados en teoremas de inmersión y en el uso de las medias de Steklov (que se definen en la sección 5.2). Gracias a ellos conseguimos simplificar la demostración respecto a las anteriores de modo significativo.

5.2. La media de Steklov

Sea $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$; $r \in \mathbb{N}$, $h > 0$. Se define el operador lineal *media de Steklov* $S_h^r f$ como

$$S_h^r f(x) = h^{-rn} \int_{[0,h]^n} du_1 \cdots \int_{[0,h]^n} du_r \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \binom{r}{k} f(x + k(u_1 + \ldots + u_r)),$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$. Notemos que

$$(f - S_h^r f)(x) = h^{-rn} \int_{[0,h]^n} du_1 \cdots \int_{[0,h]^n} du_r \Delta^r(u_1 + \ldots u_r) f(x).$$

Si $f \in L^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ ($1 < p < \infty$, $1 \leq s \leq \infty$ ó $p = s = 1$) entonces:

$$\|S_h^r f\|_{p,s} \leq c(r) \|f\|_{p,s} \ , \tag{5.2}$$

$$\|f - S_h^r f\|_{p,s} \leq c(r) \omega^r(f; h)_{p,s} \ , \tag{5.3}$$

$$\|D^\alpha S_h^r f\|_{p,s} \leq c(r) h^{-r} \omega^r(f; h)_{p,s} \quad |\alpha| = r \tag{5.4}$$

(α multiíndice con componentes enteros). Estas desigualdades son bien conocidas. Su prueba se reduce a tomar reordenamiento "**", o (si $p = s = 1$) intercambiar el orden de integración. Pueden verse en [4, (4.38), (4.36) y (4.40)]. Además es fácil ver que, si $1 \leq j \leq n$, se cumple una desigualdad semejante a (5.4), esto es,

$$\|D_j^r S_h^r f\|_{p,s} \leq c(r) h^{-r} \omega_j^r(f; h)_{p,s}. \tag{5.5}$$

Por otro lado [4, (4.16)]

$$\Delta^r(t) S_h^r f(x) \leq c \int_{-\infty}^{\infty} M_r(z) \sum_{|\alpha|=r} D^\alpha S_h^r f(x + zt) |t^\alpha| dz, \tag{5.6}$$

donde $t \in \mathbb{R}^n$ y $t^\alpha = t_1^{\alpha_1} \cdots t_n^{\alpha_n}$. Además $M_r(z)$ se define por:

$$M_1 = \chi_{(0,1)}, \quad M_{r+1} = M_1 * M_r, \quad (r = 1, 2...).$$

Por tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} M_r(z) dz \leq r. \tag{5.7}$$

5.3. Estimaciones para el módulo de continuidad

Como ya dijimos antes, los teoremas de inmersión son una herramienta fundamental de este capítulo. Es conveniente formular algunos de los teoremas anteriores desde el punto de vista de este capítulo.

Lema 5.1. *Sean $n, r \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < q < \infty$ tales que $\theta = n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < r$. Sean también $1 \leq s, \xi \leq \infty$ ($s = 1$ si $p = 1$). Dada $f \in L^{p,s}(\mathbb{R}^n)$, entonces*

$$\|f\|_{q,\xi} \leq c \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^\infty [t^{-\theta} \omega_i^r(f;t)_{p,s}]^\xi \frac{dt}{t} \right)^{1/\xi}. \tag{5.8}$$

Comentario 5.1. De [26, 8, 18, 39] y del Teorema 3.3 se deduce como caso particular $B^\theta_{p;\xi} \hookrightarrow L^{q,\xi}$, que es esencialmente la desigualdad (5.8). No obstante, en la parte derecha de (5.8), aparece el módulo de continuidad en la métrica de Lorentz $L^{p,s}$, y por tanto, ya no es una norma usual de Besov. Es por esto por lo que daremos una breve prueba "ad hoc" para este caso sencillo.

Demostración. En primer lugar hay que notar que, como $f \in L^{p,s}(\mathbb{R}^n)$,

$$\left(\int_\delta^\infty t^{\xi/q} f^*(t)^\xi \frac{dt}{t} \right)^{1/\xi} < \infty, \qquad \delta > 0.$$

Por otro lado, una leve modificación del Lema 10.3 de [26] nos lleva a:

$$f^*(t) \leq (2^r - 1) f^*(At) + cA^r t^{-1/p} \sum_{i=1}^{n} \omega_i^r(f;t^{1/n})_{p,s}, \quad \text{para todo } A > 1.$$

Y de aquí se sigue

$$\|f\|_{q,\xi} \leq c \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^\infty t^{\xi/q - \xi/p} \omega_i^r(f;t^{1/n})^\xi_{p,s} \frac{dt}{t} \right)^{1/\xi},$$

e inmediatamente tenemos (5.8). □

Comentario 5.2. Nótese que el Lema 5.1 implica inmediatamente: si $1 \leq p < q < \infty$, $1 \leq s, \xi \leq \infty$, $s = 1$ si $p = 1$ y $f \in L^{p,s}(\mathbb{R}^n)$, entonces, para todo $\delta > 0$

$$\omega^r(f;\delta)_{q,\xi} \leq c \left(\int_0^\delta [t^{-\theta} \omega^r(f;t)_{p,s}]^\xi \frac{dt}{t} \right)^{1/\xi} \quad \theta \equiv n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) < r. \tag{5.9}$$

Esta desigualdad es una generalización de (7).

Lema 5.2. *Sean* $n, r \in \mathbb{N}$, $1 \le p < q < \infty$ *tal que* $\theta = n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < r$. *Sean* $1 \le s, \xi \le \infty$ *(*$n \ge 2$ *y* $s = 1$ *si* $p = 1$*). Sea* $f \in L^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $\sum_{i=1}^n \|D_i^r f\|_{p,s} < \infty$. *Entonces se cumple la siguiente inmersión*

$$\left(\int_0^\infty [t^{\theta - r}\omega_j^r(f;t)_{q,\xi}]^s \frac{dt}{t}\right)^{1/s} \le c \sum_{i=1}^n \|D_i^r f\|_{p,s}, \qquad 1 \le j \le n.$$

Demostración. Supongamos $n \ge 2$. Aplicamos el Teorema 2.2 con $r_1 = \ldots = r_n = r$, $p_1 = \ldots = p_n = p$, $s_1 = \ldots = s_n = s$ y $q_1 = \ldots = q_n = q$. Nótese que en este caso $\varkappa_j = 1 - \theta/r$, $\alpha_j = r - \theta$, $\theta_j = s$.

Sin embargo, el Teorema 2.2 no se enuncia para $n = 1$ ó $s = \infty$. Como en ambos casos tenemos que $p > 1$, daremos una demostración esquemática de este caso sencillo: se tiene la conocida estimación $(t, u > 0,\ A > 1)$

$$[\Delta_j^r(t)f]^*(u) \le 2^r [\Delta_j^r(t)f]^*(Au) + A^r \operatorname{mín}\{t, u^{1/n}\}^r \sum_{i=1}^n (D_i^r f)^{**}(u) \tag{5.10}$$

(se demuestra, por ejemplo, usando el Lema 1.3 (ó Lemma 8 de [24]) y la desigualdad (2.39)).

Mediante (5.10) y la desigualdad de Hardy se prueba fácilmente el Lema 5.2 para $p > 1$. $\square$

Lema 5.3. *Sean* $1 < q < \infty$, $1 \le \xi \le \infty$. *Sea* $f \in L^{q,\xi}(\mathbb{R}^n)$. *Entonces, para cualquier multiíndice* α *con componentes enteros y de orden* $|\alpha| = r$ *se tiene*

$$\|D^\alpha f\|_{q,\xi} \le c \sum_{i=1}^n \|D_i^r f\|_{q,\xi}.$$

Demostración. Denotaremos por $T_\lambda f$ al multiplicador de Fourier λ aplicado sobre f. Por el Teorema de multiplicadores de Fourier de Marcinkiewicz [37, pg. 54] y el teorema de interpolación de Marcinkiewicz para espacios de Lorentz [4, pg. 301] se tiene que si λ es un multiplicador de Marcinkiewicz

$$\|T_\lambda f\|_{q,\xi} \le c \|f\|_{q,\xi}. \tag{5.11}$$

Como $\lambda(u) = \operatorname{sign} u$ $(u \in \mathbb{R})$ es un multiplicador de Marcinkiewicz [37, pg.58, ejemplo 1], aplicando la desigualdad de Minkowski y (5.11) obtenemos

$$\|f + \sum_{i=1}^n T_{|x_i|^r} f\|_{q,\xi} \le c \left[\|f\|_{q,\xi} + \sum_{i=1}^n \|D_i^r f\|_{q,\xi}\right].$$

Ahora $\mu(x) = (1 + |x|^2)^{r/2} \left(1 + \sum_{i=1}^n |x_i|^r\right)^{-1}$ es también un multiplicador de Marcinkiewicz [37, pg.59, ejemplo 4]. Usando (5.11),

$$\|T_{(1+|x|^2)^{r/2}} f\|_{q,\xi} \leq c \|T_{1+\sum_{i=1}^n |x_i|^r} f\|_{q,\xi}.$$

Lo mismo sucede con $\nu(x) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} (1 + |x|^2)^{-r/2}$ [37, pg.59, ejemplo 5], por tanto

$$\|T_{x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}} f\|_{q,\xi} \leq c \|T_{(1+|x|^2)^{r/2}} f\|_{q,\xi}.$$

Y juntando las tres estimaciones obtenidas llegamos a

$$\|D^\alpha f\|_{q,\xi} \leq c \left[\|f\|_{q,\xi} + \sum_{i=1}^n \|D_i^r f\|_{q,\xi} \right].$$

Aplicando esta última desigualdad sobre $g(x) = f(\delta x)$ $(\delta > 0)$, conseguimos

$$\|D^\alpha f\|_{q,\xi} \leq c \left[\delta^{-r} \|f\|_{q,\xi} + \sum_{i=1}^n \|D_i^r f\|_{q,\xi} \right],$$

y sólo resta hacer tender δ a 0. $\square$

Comentario 5.3. A lo mejor el resultado es conocido, pero no hemos encontrado ninguna referencia. Es por ello por lo que hemos dado una demostración. Para el caso $q = \xi$ es muy conocido. Puede verse en [5, vol.1, pg.171].

A continuación, gracias a un uso original de las medias de Steklov, obtenemos un lema que nos permite estimar el módulo "total" de orden r cualquiera en función de los módulos parciales respecto a las variables.

Lema 5.4. *Sea $f \in L^{q,\xi}(\mathbb{R}^n)$. Sean $u, h > 0$, $q > 1$, $1 \leq \xi \leq \infty$.*

$$\omega^r(f; u)_{q,\xi} \leq K \omega^r(f; h)_{q,\xi} + c \left(\frac{u}{h}\right)^r \sum_{i=1}^n \omega_i^r(f; h)_{q,\xi},$$

donde K es una constante que depende de r.

Demostración. Debido a propiedades lineales se tiene que

$$\omega^r(f; u)_{q,\xi} = \sup_{\|t\| \leq u} \|\Delta^r(t) f\|_{q,\xi} \leq$$

$$\leq \sup_{\|t\| \leq u} \|\Delta^r(t)(f - S_h^r f)\|_{q,\xi} + \sup_{\|t\| \leq u} \|\Delta^r(t) S_h^r f\|_{q,\xi} \equiv \Omega_1 + \Omega_2.$$

Ahora, es trivial que (ver (5.3))

$$\Omega_1 \leq 2^r \|f - S_h^r f\|_{q,\xi} \leq K\omega^r(f;h)_{q,\xi}.$$

Usando la ecuación (5.6), la desigualdad de Minkowski, y (5.7) deducimos que

$$\Omega_2 \leq c \sup_{\|t\|\leq u} \| \int_{-\infty}^{\infty} M_r(z) \sum_{|\alpha|=r} D^\alpha S_h^r f(x+zt)|t^\alpha| dz\|_{q,\xi;x} \leq$$

$$\leq c \sup_{\|t\|\leq u} \int_{-\infty}^{\infty} M_r(z) \sum_{|\alpha|=r} \|D^\alpha S_h^r f\|_{q,\xi} |t^\alpha| dz \leq cru^r \sum_{|\alpha|=r} \|D^\alpha S_h^r f\|_{q,\xi},$$

Además, debido al Lema 5.3 y a (5.5) se tiene

$$\Omega_2 \leq cu^r \sum_{i=1}^{n} \|D_i^r S_h^r f\|_{q,\xi} \leq cu^r h^{-r} \sum_{i=1}^{n} \omega_i^r(f;h)_{q,\xi}.$$

□

Teorema 5.1. *Sean $n, r \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < q < \infty$ tal que $\theta \equiv n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) < r$. Sean $1 \leq s, \xi \leq \infty$. Entonces, si $f \in L^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ y $p > 1$ ó $p = s = 1$ y $n \geq 2$ se cumple, para todo $\delta > 0$:*

$$\left(\int_\delta^\infty (t^{\theta-r}\omega^r(f;t)_{q,\xi})^s \frac{dt}{t}\right)^{1/s} \leq c\delta^{\theta-r} \left(\int_0^\delta (t^{-\theta}\omega^r(f;t)_{p,s})^\xi \frac{dt}{t}\right)^{1/\xi}, \quad (5.12)$$

donde c es una constante que no depende de f ni de δ.

Demostración. Fijemos $\delta > 0$. Denotaremos por J la parte de la derecha de (5.12). Para la demostración podemos suponer la hipótesis adicional de que $J < \infty$. Utilizando esta hipótesis y el hecho de que $f \in L^{p,s}$, estamos bajo las condiciones del Lema 5.1 y como consecuencia de (5.8) tenemos que $f \in L^{q,\xi}$.

Denotaremos como I la parte izda. de (5.12) . Ahora aplicamos el Lema 5.4 con $h = Au$ ($A = (2K)^{-1/(r-\theta)} < 1$) y tenemos

$$I \leq K\left(\int_\delta^\infty (t^{\theta-r}\omega^r(f;At)_{q,\xi})^s \frac{dt}{t}\right)^{1/s} +$$

$$cA^{-r}\sum_{i=1}^{n}\left(\int_\delta^\infty (t^{\theta-r}\omega_i^r(f;t)_{q,\xi})^s \frac{dt}{t}\right)^{1/s} \equiv I_A + cA^{-r}\sum_{i=1}^{n} I_i. \quad (5.13)$$

El cambio de variable $At = z$ nos lleva a

$$I_A = KA^{r-\theta}I + c(A)\delta^{\theta-r}\omega^r(f;\delta)_{q,\xi}. \tag{5.14}$$

Juntando (5.13), (5.14) y la definición de A (nótese que $I < \infty$ porque $f \in L^{q,\xi}$ y $\theta < r$) obtenemos

$$I \le c'[I_0 + \sum_{i=1}^{n} I_i],$$

donde

$$I_0 = \delta^{\theta-r}\omega^r(f;\delta)_{q,\xi}.$$

Usando la estimacion (5.9) se consigue

$$I_0 \le cJ.$$

Por otra parte

$$I_i \le \left(\int_\delta^\infty [t^{\theta-r}\omega_i^r(f - S_\delta^r f;t)_{q,\xi}]^s \frac{dt}{t}\right)^{1/s} + \\ + \left(\int_\delta^\infty [t^{\theta-r}\omega_i^r(S_\delta^r f;t)_{q,\xi}]^s \frac{dt}{t}\right)^{1/s} \equiv I_{i,1} + I_{i,2}.$$

Pero es claro que por (5.3)

$$\omega_i^r(f - S_h^r f;t)_{q,\xi} \le 2^r\|f - S_\delta^r f\|_{q,\xi} \le c\omega^r(f;\delta)_{q,\xi}.$$

Entonces,

$$I_{i,1} \le cI_0.$$

Para acotar $I_{i,2}$, usando que $f \in L^{p,s}$, (5.2) y (5.4) tenemos que $S_\delta^r f$ cumple las hipótesis del Lema 5.2. Aplicándolo se llega a que

$$\left(\int_0^\infty [t^{\theta-r}\omega_i^r(S_\delta^r f;t)_{q,\xi}]^s \frac{dt}{t}\right)^{1/s} \le c\sum_{j=1}^{n} \|D_j^r S_\delta^r f\|_{p,s}. \tag{5.15}$$

Entonces, por (5.15) y (5.4) logramos

$$I_{i,2} \le c\delta^{-r}\omega^r(f;\delta)_{p,s}.$$

Y como $\omega^r(f;\delta)_{p,s} \le 2^r\omega^r(f;\delta/2)_{p,s}$ y es creciente en δ se obtiene inmediatamente que $I_{i,2} \le cJ$.

□

Bibliografía

[1] ANDRIENKO, V.A: On necessary conditions for imbedding the function classes $\mathcal{H}_p^\omega$, Mat. Sb. **78**(120) (1969), 280 – 300; English transl. in Math. USSR Sb. **7** (1969).

[2] BASTERO, J., MILMAN, M., and RUIZ, F.: On the connection between weighted norm inequalities, commutators and real interpolation, Seminario García de Galdeano 18 (1996).

[3] BASTERO, J., MILMAN, M., and RUIZ, F.: A note on $L(\infty, q)$ spaces and Sobolev embeddings, Indiana Univ. Math. J. **52**(5) (2003), 1215-1230.

[4] BENNETT, C., and SHARPLEY, R.: Interpolation of Operators, Academic Press, 1988

[5] BESOV, O.V., IL'IN, V.P., and NIKOL'SKIĬ, S.M.: Integral Representation of Functions and Imbedding Theorems, vol. 1 – 2, Winston, Washington D.C., Halsted, New York–Toronto–London, 1978

[6] BLOZINSKI, A.P.: Multivariate rearrangements and Banach function spaces with mixed norms, Trans. Amer. Math. Soc. **263**:1 (1981), 149 – 167.

[7] BRÉZIS, H. and WAINGER, S.: A note on limiting cases of Sobolev embeddings and convolution inequalities, Comm. Partial Diff. Eq. **5**, No. 7 (1980), 773-789.

[8] BRUDNYI, U.A.: On the rearrangement of a smooth function, Uspehi Mat. Nauk **27**, No. 2 (1972), 165 – 166 (in Russian).

[9] Chong, K.M., and Rice, N.M.: Equimeasurable Rearrangements of Functions, Queen's Papers in Pure and Appl. Math. 28, Queen's University, Kingston. Ont., 1971.

[10] Faris, W.J.: Weak Lebesgue spaces and quantum mechanical binding, Duke Math. J. **46**, No. 2 (1976), 365 – 373

[11] Fournier, J.: Mixed norms and rearrangements: Sobolev's inequality and Littlewood's inequality, Ann. Mat. Pura Appl. **148** No. 4 (1987), 51 – 76

[12] Gagliardo, E.: Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili, Ricerche Mat. **7** (1958), 102 – 137.

[13] Grisvard, P.: Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications. I, II, J. Math. Pures Appl. (9) **45** (1966), 143 – 206, 207 – 290.

[14] Gol'dman: Embedding of constructive and structural Lipschitz spaces in symmetric spaces, Trudy Mat. Inst. Steklov. **173** (1986), 90 – 112. English transl. in Proc. Steklov Inst. Math. **173** (1986), 93 – 118.

[15] Hadwiger, H.: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie, Springer – Verlag, Berlin – Göttingen – Heidelberg, 1957

[16] Hansson, K.: Imbedding theorems of Sobolev type in potential theory, Math. Scand. **45** (1979), 77-102.

[17] Hardy, G.H. and Littlewood, J.E.: A convergence criterion for Fourier series, Math. Z. **28** (1928), 612 – 634.

[18] Herz, C.: Lipschitz spaces and Bernstein's theorem of absolutely convergent Fourier transform, J. Math. Mech. **18** No. 18 (1968), 283 – 323.

[19] Hörmander, L.: The Analysis of Linear Partial Differential Operators I, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1983.

[20] Kolyada, V.I.: On the embedding of the classes $H_p^{\omega_1,\dots,\omega_\nu}$, Mat. Sb. **127**(169), No. 3 (1985), 352 – 383 (in Russian); English transl. in Math. USSR Sb. 55 (1986), 351–381.

[21] Kolyada, V.I.: On relations between moduli of continuity in different metrics, Trudy Mat. Inst. Steklov. **181** (1988), 117 – 136; English transl. in Proc. Steklov Inst. Math. **4** (1989), 127 – 148

[22] Kolyada, V.I.: Rearrangements of functions and embedding theorems, Uspehi matem. nauk **44** No. 5 (1989), 61 – 95; English transl. in Russian Math. Surveys **44** No. 5 (1989), 73 – 118

[23] Kolyada, V.I.: On the differential properties of the rearrangements of functions, Progress in Approximation Theory (A.A. Gonchar and E.B. Saff. Eds), Springer–Verlag, Berlin, 1992, p. 333 – 352; english transl. Russian Math. Surveys **44** No. 5 (1989), 73 – 117.

[24] Kolyada, V.I.: On embedding of Sobolev spaces, Mat. Zametki **54** No. 3 (1993), 48 – 71; English transl. in Math. Notes **54** No. 3 (1993), 908 – 922

[25] Kolyada, V.I.: Estimates of Fourier transforms in Sobolev spaces, Studia Math. **125** No. 1 (1997), 67 – 74

[26] Kolyada, V.I.: Rearrangements of functions and embedding of anisotropic spaces of the Sobolev type, East J. on Approximations **4** No. 2 (1998), 111 – 199

[27] Kolyada, V.I.: Embeddings of fractional Sobolev spaces and estimates of Fourier transforms, Mat. Sb. **192** No. 7 (2001), 51 – 72; English transl. in Sbornik: Mathematics **192** No. 7 (2001), 979 – 1000

[28] Kolyada, V.I., and Pérez, F.J.: Estimates of difference norms for functions in anisotropic Sobolev spaces, Mat. Nachr. **267**, 46–64 (2004).

[29] Kreĭn, S.G., Petunin, Yu.M., and Semenov, E.M.: Interpolation of linear operators, Nauka, Moskow 1978; English transl., Amer. Math. Soc., Providence, RI 1982.

[30] Kudryavtsev, L.D., and Nikol'skiĭ, S.M.: Spaces of Differentiable Functions of Several Variables and Imbedding Theorems, Encyclopaedia of Math. Sciences, Vol. 26, Springer – Verlag, 1991

[31] Maly, J. and Pick, L.: An elementary proof of sharp Sobolev embeddings, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 555-563.

[32] MAZ'YA, V.G.: Sobolev Spaces. Springer, Berlin, 1985.

[33] NETRUSOV YU.V.: Embedding Theorems for the Lizorkin – Triebel classes, Zap. Nauch. Seminarov LOMI **159** (1987), 103 – 112 (in Russian). English transl. in J. Soviet Math. **47**(1989) No. 6, 2896 – 2903.

[34] NETRUSOV YU.V.: Embedding Theorems for Spaces with a Given Majorant of the Modulus of Continuity, Ph. D. Thesis, Leningrad, LOMI AN SSSR, 1988 (in Russian).

[35] NETRUSOV YU.V.: Imbedding theorems for the spaces $\mathcal{H}_p^{\omega,k}$ and $\mathcal{H}_p^{s,\omega,k}$, J. Soviet Math. **47** No.6 (1989) 2871 – 2881.

[36] NIKOL'SKIĬ, S.M.: Inequalities for entire functions of finite degree and their application in the theory of differentiable functions of several variables, Trudy Mat. Inst. Steklov **38** (1951), 244 – 278 (in Russian).

[37] NIKOL'SKIĬ, S.M.: Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems, Springer – Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1975

[38] OSWALD, P.: Moduli of continuity of equimeasurable functions and approximation of functions by algebraic polynomials in L^p, Kandidad Thesis, Odessa State University, Odessa 1978. (Russian)

[39] PEETRE, J.: Espaces d'interpolation et espaces de Soboleff, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **16** (1966), 279 – 317

[40] PELCZYŃSKI, A., and WOJCIECHOWSKI, M.: Molecular decompositions and embedding theorems for vector-valued Sobolev spaces with gradient norm, Studia Math. **107** (1993), 61 – 100

[41] PÓLYA, G., and SZEGŐ, G.: Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics, Princeton Univ. Press, Princeton, New York, 1951.

[42] POORNIMA, S.: An embedding theorem for the Sobolev space $W^{1,1}$, Bull. Sci. Math. **107** No. 2 (1983), 253 – 259

[43] STEIN, E.M.: Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.

[44] Stein, E.M.: The differentiability of functions in $\mathbb{R}^n$, Annals of Mathematics **113** (1981), 383 – 385.

[45] Strichartz, R.S.: Multipliers on fractional Sobolev spaces, J. Math. Mech. **16** (1967), 1031 – 1060

[46] Solonnikov, V.A.: On some inequalities for functions from the classes $W_p(\mathbb{R}^n)$, Notes on Scientific Seminars, Leningrad Section of the Mathematics Institute, Academy of Sciences of the USSR, **27**, 194 – 210 (1972).

[47] Tartar, L.: Imbedding theorems of Sobolev spaces into Lorentz spaces, Bollettino U.M.I. **8** No. 1–B (1998), 479 – 500

[48] Triebel, H.: Theory of Function Spaces, Birkhäuser, Basel, 1983

[49] Triebel, H.: Theory of Function Spaces II, Birkhäuser, Basel, 1992

[50] Ul'yanov, P.L.: The imbedding of certain function classes H_p^w, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **3** (1968), 649–686; English transl. in Math. USSR-Izv. **2** (1968).

[51] Ul'yanov, P.L.: Imbedding theorems and relations between best approximations (moduli of continuity) in different metrics, Mat. Sb. **81**(123) (1970) 104 – 131; English transl. in Math. USSR Sb. **10** (1970).

[52] Yatsenko, A.A.: Iterative rearrangements of functions, and Lorentz spaces, Inv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. (1998) No.5, 73 – 77; English transl. in Russian Math. (Iz. VUZ) **42** (1998).