Colección
Didácticas de las Ciencias

Los fraccionarios en primaria

Retos, experiencias didácticas y alianzas para aprender matemáticas con sentido

Judith Arteta Vargas
Editora

UN
UNIVERSIDAD DEL NORTE
Editorial

Colección
Didácticas de las ciencias

Los fraccionarios en primaria

Retos, experiencias didácticas y alianzas para aprender matemáticas con sentido

Judith Arteta Vargas
Editora

Investigadores/ autores
Judith Arteta Vargas
Rafael Escudero Trujillo
Carlos Rojas Álvarez
Rafael Martínez Solano
Myrna Irene Jiménez
Liliana Garrido Hernández
Sonia Álvarez Morales
Hember Jesús Llanos Booz
Navis Londoño

Maestros Innovadores
Marlene Sofía Rodríguez
Mariela Acosta de la Hoz
Modesta Solano Navarro
Javier Jiménez Jiménez
Mery del Rosario Bula
Alicia Ramos Cera
Mónica Patricia Loaiza Muñoz
Osmiro Cantillo Ramos
Luis Páez Cajamarca
Alicia Salgado Osorio

Investigadores invitados
Carlos Eduardo Vasco Uribe
Edelmira Badillo Jiménez

Secretaría de Educación
Alcaldía de Barranquilla

Fundación ANDI Barranquilla

Fundación Promigas

CEC Centro de Educación Continuada

Universidad del Norte

Los fraccionarios en primaria : retos, experiencias didácticas y alianzas para aprender matemáticas con sentido / ed., Judith Arteta Vargas ; Rafael Escudero Trujillo ... [et al.]. – Barranquilla : Editorial Universidad del Norte, 2012.

172 p. : il. col. ; 24 cm.
(Colección didácticas de la ciencias y las matemáticas)
Incluye referencias bibliográficas en cada capítulo.
ISBN 978-958-741-260-4 (impreso) ; ISBN 978-958-741-238-3 (PDF)

1. Fracciones--Enseñanza elemental. I. Escudero Trujillo, Rafael. II. Tít.
(372.72 F798 23 ed.) (CO-BrUNB)

www.uninorte.edu.co
Km 5 vía a Puerto Colombia
A. A. 1569, Barranquilla (Colombia)

Coordinación editorial
Zoila Sotomayor O.

Diseño y diagramación
Luis Gabriel Vásquez M.

Diseño de portada
Agencia DuNord Graphique

Corrección de textos
Mabel López

Procesos técnicos
Munir Kharfan de los Reyes

Hecho en Colombia
Made in Colombia

Contenido

Agradecimientos

Los autores agradecen a las personas e instituciones que asumieron el reto, se integraron a la alianza intersectorial y apoyaron y participaron en las experiencias didácticas, a partir de las cuales se decantaron las reflexiones y sistematizaciones recogidas en esta obra, principalmente a:

- Todos y cada uno de los maestros y maestras que participaron a lo largo del proceso con compromiso y dedicación.

- Los niños y niñas de quinto grado, motor de nuestros desafíos y propuestas.

- Las instituciones educativas participantes, por sus aportes al Programa de Mejoramiento de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas en la Escuela Primaria en Barranquilla, por ceder sus espacios dentro y fuera del aula, y por generar las condiciones que hicieron posible la realización de las innovaciones.

- La Fundación ANDI por el interés y apoyo al mejoramiento de la educación en las escuelas de Barranquilla y por la financiación de la fase piloto del programa.

- A la Secretaría de Educación del Distrito de Barranquilla, por el acompañamiento al desarrollo de esta intervención educativa.

- A la Fundación Promigas, por la financiación de esta edición con destino a los maestros.

- A la Universidad del Norte, especialmente a la dirección de la División de Ciencias Básicas y a los departamentos que la constituyen, por el apoyo académico. Al Centro de Educación Continuada, CEC-Uninorte, por el apoyo en la gestión de procesos y recursos que optimizaron la logística del programa.

- A los expertos en didáctica de las matemáticas, nacionales e internacionales, que aportaron sus conferencias y talleres y retroalimentaron el desarrollo del proceso adelantado en las escuelas.

Prólogo

“Seño... ¡qué clase bacana!... ¡no queremos salir al recreo!”. Esta expresión entrecortada, dicha con emoción sincera en una escuela por una alumna de 5º grado, es mucho más que una anécdota contundente: es la más feliz y rotunda evidencia del éxito de su maestra por despertar el interés de los niños para aprender. Si a ello se le agregan otras condiciones, como que es una clase de matemáticas, por ejemplo, ofrecida por una docente sin formación académica en esta disciplina, de una institución pública con un registro muy deficiente en los logros de sus alumnos, en un entorno caracterizado por las complicadas y difíciles circunstancias socioeconómicas del Distrito de Barranquilla, entonces hay que reconocer que *algo* debe estar sucediendo en esa aula. Algo especial, algo muy positivo y muy esperanzador.

Los niños y niñas, motor de nuestros desafíos y propuestas.

Esta publicación recoge varias de las facetas de estos *algos* que sucedieron en un grupo de escuelas de la ciudad durante la realización de la fase piloto (2010) del *Programa de Mejoramiento de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas en Barranquilla*, cofinanciado por la Fundación ANDI y la Universidad del Norte, con el aval y acompañamiento de la Secretaría Distrital de Educación. Estos aportes, escritos por los maestros y maestras participantes, por el equipo de colegas de la División de Ciencias Básicas de la Universidad, y por académicos de reconocida trayectoria, constituyen la valiosa documentación de un esfuerzo mancomunado y loable, como fue acompañar y apoyar el trabajo de educación en matemáticas en una fase particularmente compleja y descuidada de nuestro sistema escolar.

Ello amerita presentar el texto, respondiendo brevemente a tres preguntas iniciales, a manera de invitaciones abiertas y permanentes a los lectores, tanto para el análisis de los contenidos de esta publicación como para continuar y profundizar esta experiencia.

Primer interrogante: ¿por qué habrían de preocuparse unos académicos universitarios de las ciencias básicas, por la enseñanza y el aprendizaje de los fraccionarios en alumnos de quinto grado de unos colegios públicos?

De los varios elementos que conforman la respuesta a esta pregunta, permítaseme destacar dos: ante todo el profundo sentimiento de responsabilidad y compromiso con nuestra nación, en particular con la juventud que se está preparando para su futuro, que ansiamos sea prometedor y digno también para ellos, sin distingos ni discriminaciones; este esfuerzo representa, pues, nuestra contribución sincera y desinteresada a su porvenir. Además, quiero enfatizar en una certeza complementaria, tan elemental como ignorada: son los conocedores de una disciplina los que deben hacer los mayores aportes para dilucidar el enigma de su enseñanza y aprendizaje, en este caso especial, son los matemáticos mismos quienes deben contribuir a consolidar la didáctica de su propia ciencia en todos los niveles. Ello es de particular importancia para el específico contexto educativo y social en que se desarrolla este proyecto.

Segundo: ¿por qué los fraccionarios y por qué en quinto de primaria?

Pocos conceptos matemáticos son tan fundamentales como el de los números fraccionarios y, al tiempo, tan complejos de enseñar y de aprender, por ser tan susceptibles de confusión. El niño o niña que no los haya comprendido e interiorizado en esta etapa de su formación (que es el punto de inflexión para su ingreso a la secundaria) tendrá mucha dificultad para aprehender luego conceptos y aplicaciones posteriores de uso universal como, por mencionar unos ejemplos sencillos, porcentaje, proporción, velocidad, aceleración, densidad, escalas y un largo etcétera. Desdichada e inocultablemente, el sistema escolar colombiano entrega esta enorme responsabilidad a maestros que, en la mayoría de los casos, no cuentan con suficiente formación matemática y didáctica.

Tercero: ¿quiénes son los principales responsables del proyecto?

Esta iniciativa en particular se originó a partir del explícito compromiso del presidente de la Asociación Nacional de Industriales, ANDI, seccional Atlántico, y de su Fundación, para aportar a la educación matemática de los colegios públicos de la ciudad de Barranquilla. Ello coincidió felizmente con los intereses y esfuerzos que un grupo de profesores de la División de Ciencias Básicas de la Universidad del Norte, venimos realizando desde hace varios años para fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta área del conocimiento en nuestro entorno educativo. El irrestricto apoyo y el monitoreo constante del proyecto por parte de la Secretaría Distrital de Educación, permitió la identificación y activa vinculación del cuarto responsable institucional, aliado incondicional en esta experiencia: las escuelas y sus docentes.

Son, pues, cuatro los grupos de personas y entidades a quienes reconozco y agradezco esta invaluable ocasión de poder contribuir a la formación matemática de nuestros jóvenes: las maestras y maestros de los colegios participantes; los empresarios e industriales representados en la ANDI y su Fundación; los funcionarios de la Secretaría de Educación y, con sentimientos de orgullo y admiración, los compañeros funcionarios del Centro de Educación Continuada y, muy en especial, a mis colegas de la División de Ciencias Básicas de la Universidad del Norte, liderados en este proyecto por la profesora Judith Arteta Vargas.

Así, para terminar esta corta presentación, quiero repetir la sabia lección que nos impartiera a todos el Dr. Carlos E. Vasco en la sesión de inicio del proyecto: el término competencia, tan de moda hoy en día en educación, poco tiene que ver con competir los unos contra los otros, o con dominar una habilidad o conocimiento en particular, pero sí debería guardar mucha relación con la expresión original en latín *cum-petere* que significa *dirigirse-con*, en el sentido de acompañarse y apoyarse conjuntamente hacia el logro de un propósito común.

Este proyecto quiere honrar en todas sus manifestaciones ese fundamental y sublime principio.

Joachim Hahn von Hessberg
Biólogo. Decano de la División de Ciencias Básicas
Universidad del Norte, Barranquilla (Colombia).
jhahn@uninorte.edu.co

Barranquilla, noviembre de 2011.

Las matemáticas en la escuela primaria de Barranquilla

Hacia un modelo de intervención educativa

1

Judith Arteta Vargas[1]
Rafael Escudero Trujillo[2]
Carlos Rojas Álvarez[3]
Sonia Álvarez Morales[4]

UN PROPÓSITO COMPARTIDO

El tema de la calidad de la educación aparece recientemente en nuestro país incluido entre las metas educativas propuestas en los planes de acción de entidades gubernamentales y en recomendaciones de documentos nacionales e internacionales. Son muchas las visiones acerca de la concepción de educación de calidad y se describen muchos factores que la afectan, asociados a ella o que la potencian o limitan. Hoy sabemos que la práctica pedagógica de maestros y maestras en servicio es uno de los factores que influyen en la calidad educativa y por eso los actuales planes de gobierno incluyen la formación docente como una de las áreas estratégicas para su mejoramiento continuo.

Con el ánimo de contribuir a mejorar la educación de niños y jóvenes mediante procesos de cualificación docente, un equipo de investigadores de la División de Ciencias Básicas de la Universidad del Norte, constituido por los profesores del Departamento de Matemáticas: Rafael Escudero, Carlos Rojas, Rafael Martínez, Myrna JIménez y Liliana Garrido, apoyados por Hember Llanos Booz, Navis Londoño y Sonia Álvarez, coordinados por Judith Arteta Vargas, con el apoyo de la Asociación de Empresarios de la ciudad de Barranquilla (ANDI) y la Secretaría de Educación, emprendió la tarea de adelantar la fase piloto del *Programa de Mejoramiento de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas en Barranquilla*, fase desarrollada durante el año 2010. El grado escogido fue 5° de primaria y el concepto matemático, números fraccionarios, por ser uno de los temas en que los maestros reconocen tener dificultades para la enseñanza y para lograr verdaderos aprendizajes en los estudiantes. Adicionalmente, a través de la revisión de la enseñanza de este concepto, se buscó propiciar el desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes, lo cual se expresa en la aplicación de los procesos matemáticos al poner en acción sus conocimientos básicos y su pensamiento matemático, en favor de su óptimo desempeño para resolver problemas cotidianos que involucran contenidos matemáticos.

---

[1] Coordinadora del *Programa de Mejoramiento de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas en Barranquilla*. Profesora-investigadora, División de Ciencias Básicas de la Universidad del Norte. Barranquilla, Colombia. *vjudith@uninorte.edu.co*

[2] Ph.D. en Educación con Énfasis en Educación Matemática. Profesor-investigador de tiempo completo, Departamento de Matemáticas y Estadística, División de Ciencias Básicas de la Universidad del Norte. Barranquilla, Colombia. *rescuder@uninorte.edu.co*

[3] Ms.C. en Educación. Licenciado en Matemáticas. Profesor-investigador de tiempo completo, Departamento de Matemáticas y Estadística, División de Ciencias Básicas de la Universidad del Norte. Barranquilla, Colombia. *crojas@uninorte.edu.co*

[4] Asistente de investigación del *Programa de Mejoramiento de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas en Barranquilla*, División de Ciencias Básicas. Universidad del Norte. Barranquilla, Colombia. *asonia@uninorte.edu.co*

Equipo de profesores investigadores de la Universidad del Norte, acompañados por el Doctor Carlos Eduardo Vasco. Arriba: Hember Llanos, Rafael Martínez Solano, Judith Arteta Vargas, Doctor Carlos Eduardo Vasco, Guillermo Cervantes, Joachim Hahn, Carlos Rojas Álvarez. Sentados: Rafael Escudero Trujillo, Liliana Garrido y Myrna Jiménez

El programa de intervención educativa desarrollado recoge la preocupación de la Universidad del Norte, compartida con los empresarios y las instituciones educativas, respecto a la condición académica de los niños y jóvenes de la ciudad. Este esfuerzo conjunto y multisectorial se constituye en una estrategia a seguir para impulsar el mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a nivel de primaria.

Si bien el propósito fue apoyar y propiciar el desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes y no se desconocen los múltiples factores exógenos y endógenos a la institución escolar que afectan los desempeños de los estudiantes en un área de estudio como las matemáticas, en este programa de formación continuada de maestros se priorizan las acciones de actualización e innovación docente, pues se reconoce el papel protagónico de los maestros en la generación y el mantenimiento de cambios educativos, y el efecto multiplicador y potenciador de una intervención que involucre a los docentes, puesto que se impactará a un mayor número de grupos de estudiantes en el corto, mediano y largo plazo. Así, el proceso adelantado enfatizó en el acompañamiento y formación de maestros de 5° de primaria que enseñaban matemáticas en quince escuelas de Barranquilla. Interesó particularmente este nivel educativo por constituirse el grado 5° en el punto de culminación de la educación básica primaria.

CIFRAS QUE NOS DESAFÍAN

Uno de los objetivos de la educación es desarrollar en los niños y jóvenes las competencias necesarias para solucionar eficazmente las situaciones que les plantea el entorno, con apoyo de su pensamiento matemático, ya que la solución de problemas es uno de los cinco procedimientos generales que involucra dicho pensamiento, además de la modelación de fenómenos de la realidad, de la comunicación, del razonamiento y de la ejercitación de algoritmos (Ministerio de Educación Nacional, 2006). Esto implica reconocer que hay distintos tipos de pensamiento lógico y matemático que se utilizan para tomar decisiones informadas, para proporcionar justificaciones razonables o refutar las aparentes y para ejercer la ciudadanía crítica, es decir, para participar en la preparación, discusión y toma de decisiones y para desarrollar acciones que colectivamente puedan transformar la sociedad.

Colombia ha participado en distintas pruebas para medir los desempeños de los estudiantes en diferentes áreas de estudio. La prueba internacional PISA (Programme for International Student Assesment) discrimina el nivel de competencia de los alumnos en seis niveles, el más bajo es el 1 y el 6 es el más alto. Cualitativamente, en el nivel 6 un alumno puede, entre otras cosas, de manera consistente, identificar, explicar y aplicar conocimientos científicos y conocimientos sobre las ciencias en una variedad de situaciones complejas de la vida; puede relacionar diferentes fuentes de información y de explicaciones, y además usar evidencia proveniente de esas fuentes para justificar decisiones. En el nivel 1 un alumno tiene un conocimiento científico tan limitado que lo puede aplicar solamente a unas pocas situaciones que le sean familiares; puede dar explicaciones científicas que son obvias y hacer seguimientos explícitos de situaciones dadas (Eduteka, 2010). Los resultados de la PISA aplicada en el 2009 muestran que:

> El 38,8% de los estudiantes colombianos se ubicó por debajo del nivel 1, lo que indica que tienen dificultades para usar la matemática con el fin de aprovechar oportunidades de aprendizaje y educación posteriores, pues no pueden identificar información ni llevar a cabo procedimientos que surgen de preguntas explícitas y claramente definidas. El 31,6% se clasificó en el nivel 1. Al sumar esta proporción con la de quienes están por debajo de ese nivel se encuentra que el 70,6% de los alumnos no logra el desempeño mínimo establecido por PISA (nivel 2), en el cual las personas están en capacidad de participar activamente en la sociedad. (Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación, 2010, p. 32)

En el contexto nacional se aplican las Pruebas Saber 5°, 9° y PRO y aunque no debe ser el único aspecto a tener en cuenta a la hora de considerar y evaluar sus competencias, los resultados nos permiten establecer puntos de referencia para orientar procesos de mejoramiento en las instituciones educativas y en todo el sistema educativo. En el 2009 Colombia realizó la tercera aplicación censal de las Pruebas Saber 5°y 9°, en la cual participaron 774 mil estudiantes de 5° y 595 mil de 9° de más de 17 mil estableci-

Tabla 1.
Resultados de las Pruebas Saber 5° en matemáticas para el Distrito de Barranquilla (2009)

Nivel	Porcentaje (%)
Avanzado	13
Satisfactorio	23
Básico	33
Insuficiente	31

Tabla 2.
Resultados de las Pruebas Saber 5° en matemáticas para el Distrito de Barranquilla por establecimientos educativos oficiales y no oficiales

Nivel	Oficiales	No oficiales
Avanzado	7%	27%
Satisfactorio	20%	31%
Básico	35%	28%
Insuficiente	38%	15%

Tabla 3.
Resultados de las Pruebas Saber 5° en matemáticas. Porcentaje para cada nivel de desempeño en Barranquilla y Colombia

Nivel	Barranquilla	Colombia
Avanzado	13%	12%
Satisfactorio	23%	21%
Básico	33%	32%
Insuficiente	31%	35%

mientos educativos oficiales y privados de todo el país. En esta oportunidad se evaluaron competencias en lenguaje, matemáticas y ciencias naturales. Adicionalmente, se recogieron datos acerca de la situación sociodemográfica de los estudiantes, se hicieron observaciones sobre las condiciones de los establecimientos educativos y de las aulas, y se aplicaron cuestionarios a muestras de rectores, docentes y alumnos con el fin de conocer cuáles son los principales factores que inciden en los resultados (Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación, 2010).

Respecto a las Pruebas Saber 5°, los desempeños de los estudiantes se evalúan en cuatro niveles: avanzado, satisfactorio básico e insuficiente. En el año 2009 se encontró que en Barranquilla en 5°, en el área de Matemáticas, solo el 13% alcanzó el nivel avanzado y un 64% está por debajo del nivel satisfactorio (ver tabla 1). La tabla 2 compara los resultados de instituciones oficiales y no oficiales. Los resultados dejar ver que existen diferencias marcadas entre las instituciones privadas y públicas de Barranquilla, pero aún así, hay aún alto porcentaje de estudiantes en el nivel de insuficiencia (Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación, 2010).

Llama la atención el alto porcentaje (31%) de estudiantes en el nivel insuficiente y que el 33% apenas alcanza el nivel básico, es decir, un 64% no alcanza el nivel satisfactorio o avanzado.

La tabla 3 recoge los datos comparativos del porcentaje de estudiantes en cada nivel de competencia en Barranquilla y en Colombia, y muestra resultados similares. Sin embargo, este hecho no debería generar tranquilidad; cabe anotar que en el caso de Barranquilla, por ser la ciudad que ejerce un liderazgo en el desarrollo de la región Caribe, estos resultados nos alejan de los importantes retos que queremos superar en el mediano plazo y que nos desafían a mejorar estos indicadores. Los datos son similares en niños y niñas tanto en Barranquilla como en Colombia (ver la tabla 4).

Tabla 4.
Resultados de las Pruebas Saber 5° en matemáticas para Barranquilla y Colombia en niños y niñas

Nivel	Barranquilla Niños	Colombia Niños	Barranquilla Niñas	Colombia Niñas
Avanzado	12%	10%	13%	12%
Satisfactorio	23%	20%	23%	21%
Básico	33%	34%	33%	32%
Insuficiente	31%	36%	31%	36%

Si usted desea conocer los resultados de su institución puede consultar el link http://www.icfes.gov.co/saber59/index.php?option=com_content&view=article&id=11, buscar la prueba que quiere observar, seleccionar la institución y hacer la lectura y análisis de los resultados.

LA ESCUELA COMO EJE CENTRAL Y BASE PARA LA ORIENTACIÓN DEL PROGRAMA DESARROLLADO

Los resultados de las Pruebas Saber 5° en el área de matemáticas de Barranquilla nos muestran que no se están logrando los aprendizajes y competencias esperados en los estudiantes. Aunque no se desconocen los múltiples factores asociados al rendimiento escolar en el área de matemáticas, tales como la condición socioeconómica de los estudiantes y la situación familiar, entre otros, es necesario precisar los factores asociados a la institución escolar y que le compete asumir a esta con la participación de los actores involucrados (maestros, estudiantes y directivos). Con lo anterior se trata de plantear alternativas para el mejoramiento de los aprendizajes de los estudiantes y, en asocio con ellos, se espera lograr mejores resultados en las pruebas, adelantando las acciones necesarias que desde la escuela se puedan afrontar para alcanzar elevar la calidad de la enseñanza de las distintas áreas curriculares, en especial las matemáticas en primaria, y en las cuales los maestros y directivos escolares deben ejercer un liderazgo.

Así mismo, para el programa fue importante conocer qué aspectos del trabajo del profesor, como profesional de la educación reconocido en la ley, y de las condiciones institucionales aportan positivamente a los resultados que se están logrando y que sería necesario mantener y fortalecer, y cuáles, por el contrario, deben ser transformadas para impactar en el mejoramiento del nivel de las competencias matemáticas de los estudiantes. De igual manera se indagó sobre las dificultades de los estudiantes con el fin de orientar de manera conveniente a los maestros y lograr la transformación de las metodologías de enseñanza y las formas de evaluación, así como mejorar el diseño y uso de materiales didácticos apropiados al contexto cotidiano y al nivel educativo de educación básica primaria.

Con las anteriores consideraciones se acompañó el trabajo de las instituciones educativas y sus maestros con el fin de apoyarlos en sus esfuerzos de cualificación y construcción colectiva y desde ahí incidir en el mejoramiento de los resultados en matemáticas de los estudiantes para en un mediano plazo impactar la educación secundaria y universitaria, así como los desempeños en el futuro campo laboral.

La pregunta que orientó el proceso adelantado con las instituciones educativas fue ¿qué estrategias de intervención educativa dirigidas a los docentes de quinto de primaria pueden incidir en la transformación y el mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, de modo que se mejore el nivel de competencias de sus estudiantes?

De esta pregunta se derivaron las siguientes:

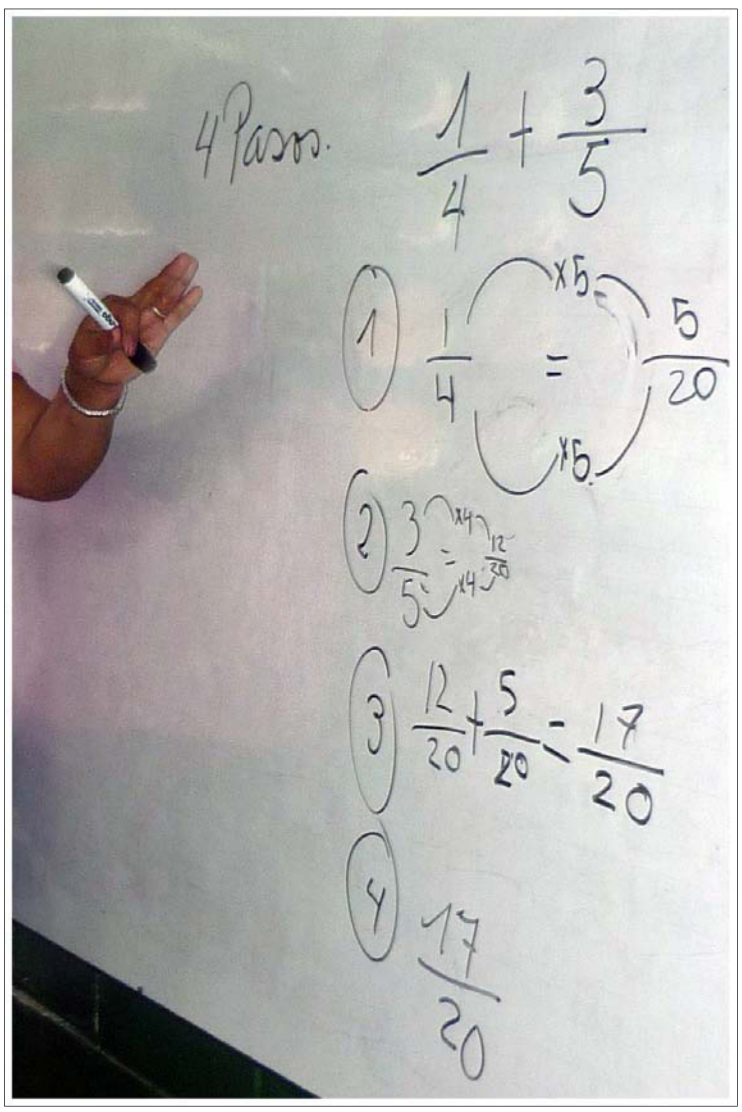
- ¿Cuáles son, en particular, los resultados en el área de las matemáticas (Pruebas Saber 5°) de los estudiantes de las instituciones educativas seleccionadas?
- Según los directivos y maestros, ¿qué factores influyen en estos resultados?
- ¿Cuáles son las características relevantes del pensamiento matemático en profesores y estudiantes de grado quinto de primaria en las instituciones barranquilleras seleccionadas?
- ¿Qué procesos metodológicos se aplican en estas instituciones para la enseñanza del concepto de fracción?
- ¿Qué procesos matemáticos se desarrollan en los estudiantes de 5º de primaria de estas instituciones con este tema?
- ¿Cómo incidir en el nivel de conceptualización matemática y didáctica de los maestros y su impacto en los aprendizajes de las fracciones en los estudiantes?

El programa desarrollado tuvo como objetivo contribuir al mejoramiento del conocimiento matemático y a la formación didáctica de los maestros participantes que les permita estar en la capacidad de diseñar, aplicar y evaluar actividades significativas en el tema de fraccionarios, que propicien el desarrollo del pensamiento matemático en sus estudiantes.

Como objetivos específicos se establecieron:

- Determinar la línea de base para cada institución participante.
- Indagar por las características de los procesos didácticos que aplican los profesores de 5º de primaria de las instituciones participantes al abordar sus clases de matemáticas.
- Caracterizar el pensamiento numérico (respecto a las fracciones) de los profesores y estudiantes de 5° grado de las instituciones.
- Establecer los principales procesos matemáticos que se desarrollan en los estudiantes de quinto de primaria de las instituciones con el tema de las fracciones

- Profundizar el pensamiento numérico (respecto a fracciones) de estudiantes y profesores de 5° grado de matemáticas, mediante la realización de talleres de actualización conceptual y metodológica a los profesores.
- Sistematizar y documentar la práctica pedagógica de los profesores de 5° grado de primaria a partir del programa de acompañamiento y formación.



Pasos desarrollados en la solución del ejercicio de suma de números fraccionarios en una de las clases observadas.

La pregunta y los objetivos de la intervención realizada se centraron en el maestro como actor orientador de lo que ocurre en la clase, aunque el alumno se continúa visualizando como el centro y sujeto de los aprendizajes.

Mourshed, Chijioke & Barber (2010) plantean que

> mejorar el desempeño de un sistema educativo requiere, en definitiva, mejorar la experiencia de aprendizaje de los estudiantes en las aulas [...] Los sistemas educativos hacen tres tipos de cosas para lograr este objetivo: cambian su estructura estableciendo nuevos tipos de colegios, modificando los años escolares y ciclos, o descentralizando la responsabilidad del sistema; cambian sus recursos, añadiendo más personal a los colegios o incrementando el gasto por alumno; y cambian sus procesos, modificando el curriculum y mejorando la forma en que los profesores enseñan y los directores dirigen. (Mourshed, Chijioke & Barber, 2010, pp. 2-3)

Respecto a este último aspecto, una intervención educativa que logre la apropiación del cambio en el maestro seguramente impactará más clases y más niños que una que atienda solo a los estudiantes, por el papel multiplicador de la acción docente. Ahora bien, el maestro tiene unas competencias y desempeños acordes no solo con el conocimiento de la disciplina que enseña, sino además con el conocimiento del contexto escolar, de las condiciones de los niños, de las orientaciones curriculares y de las condiciones socioculturales en que se ve inmersa su acción educadora. "Se pueden lograr mejoras sustanciales en periodos de tiempo relativamente cortos, como es el caso de Long Beach, donde tras seis años de intervenciones educativas se mejoró el desempeño del nivel cuarto y quinto de primaria en matemáticas en un 50% y 75%, respectivamente" (Mourshed, Chijioke & Barber, 2010, p. 2).

ALGUNOS REFERENTES TEÓRICOS QUE ORIENTARON LA INTERVENCIÓN

Los distintos profesionales se caracterizan por tener competencias específicas basadas en conocimientos y destrezas adecuadas para el desarrollo de su actividad. El profesor de matemáticas tiene competencias profesionales con las que afronta los problemas de enseñanza, pero además tiene que reconocerlas para actuar de manera racional ante las situaciones de aula y lograr el aprendizaje de sus estudiantes (Moreno & Flores, 2000)

En este programa de intervención educativa, que se caracterizó por tener una base investigativa que orientó las acciones desarrolladas para el mejoramiento de los aprendizajes, revisamos el marco referencial acerca de las habilidades profesionales de maestros de matemáticas describiendo elementos del conocimiento del profesor con relación a los números racionales.

Porlan y sus colaboradores presentan un marco teórico sobre el conocimiento profesional de los profesores, particularmente de sus concepciones y obstáculos epistemológicos (Porlan, Riviero, & Martín, 1997). Marcelo (1987) ya había señalado que los procesos de pensamiento que ocurren en la mente del profesor durante su actividad profesional incluyen dos aspectos: uno, el profesor es un sujeto reflexivo y racional que toma decisiones, emite juicios, tiene creencias y genera rutinas propias de su desarrollo profesional, y dos, los pensamientos del profesor guían y orientan su conducta.

Los trabajos de Lee Shulman (1986, 1987), que surgen a partir de los desarrollos de su investigación *Desarrollo del conocimiento en una profesión: desarrollo del conocimiento en la enseñanza*, se ocupan de describir la forma en que el conocimiento es activamente adquirido y utilizado por los profesores, así como las circunstancias que afectan su adquisición y uso. Shulman distingue tres tipos de conocimiento profesional del profesor: conocimiento del contenido, conocimiento curricular y conocimiento didáctico del contenido.

Según Ponte (2008), para ser profesor no basta con estar en posesión de un conjunto de conocimientos que permitan ejercer la actividad profesional. Es necesario asumir un punto de vista de profesor, interiorizar el correspondiente papel y sentirse bien en él. Es preciso sentirse como un miembro de la clase docente y ser capaz de usar los recursos propios de la profesión.

Con relación al conocimiento profesional del profesor, Marcelo (2002), muestra la preocupación por conocer qué y cómo piensan, cómo construyen su conocimiento y cómo aprenden a enseñar los profesores.

Pinto y González (2008) revisan el surgimiento y desarrollo del conocimiento didáctico del contenido (CDC) como referente teórico para las investigaciones sobre profesores y sus formas de enseñanza. Según los autores, la noción de conocimiento didáctico del contenido surge de:

1. La imperante necesidad de profesionalizar la enseñanza.

2. Los resultados desfavorables en el desarrollo de habilidades cognitivas de los estudiantes de nivel secundaria (principalmente) en los exámenes nacionales e internacionales.

3. Las críticas recibidas a las corrientes imperantes sobre la didáctica del profesor, denominadas proceso-producto y pensamiento del profesor, que favorecieron un mayor énfasis en los procesos de evaluación y acreditación y selección de profesores basado en lo pedagógico (casi exclusivamente), asumiendo que el contenido está cubierto por el hecho de tener una licenciatura en la disciplina correspondiente.

4. La ineludible necesidad de recuperar y asignarle el justo valor al conocimiento del contenido como elemento igualmente importante en el perfil del profesor y crear un modelo que integrara el conocimiento del contenido con el conocimiento pedagógico.

5. La reforma de la enseñanza en Estados Unidos, en la que se manifestó de manera recurrente (en sus diferentes textos y estudios) la necesidad de elevar la enseñanza a la categoría de una ocupación más respetada, partiendo de un supuesto básico y esencial: que existe una base de conocimiento para enseñar (Pinto & González, 2008).

Se pretende explicar y describir los componentes del conocimiento base de la enseñanza; por lo que se está interesado en investigar el desarrollo del conocimiento profesional durante la formación del profesorado, cómo se transforma el contenido en representaciones didácticas y cómo lo utilizan en la enseñanza (Bolívar, 2005).

Las investigaciones sobre el conocimiento didáctico del contenido "son importantes puesto que se analiza específicamente el conocimiento que los profesores poseen respecto al contenido que enseñan, así como —y esto es muy importante—, la forma como los profesores trasladan ese conocimiento a un tipo de enseñanza que produzca comprensión en los alumnos" (Marcelo 1992, p. 4)

Marks (1990), conceptualiza los componentes del Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) en el área de Matemáticas basándose en las entrevistas a ocho profesores, en las que los sujetos realizaban tareas (planificar una lección, criticar un video de una clase, y diagnosticar y resolver errores de los estudiantes). Encuentra que los componentes del CDC en matemáticas son básicamente cuatro:

1. El conocimiento de la materia, que hace referencia a propósitos para enseñar un tema en concreto, las ideas más importantes de ese tema, los conocimientos previos que se requieren para aprender ese tema, etc.

2. El conocimiento que los profesores tienen sobre los alumnos, incluyendo sus procesos de aprendizaje, sus errores conceptuales, lo que a los alumnos les resulta más fácil o más difícil.

3. El conocimiento sobre los medios de enseñanza, incluyendo el tratamiento que los libros de texto dan a los contenidos, la organización de los temas en los textos, así como las actividades y problemas.

4. El proceso de enseñanza que incluye la atención a los estudiantes (preguntas, actividades, tareas para la casa, evaluación, motivación, etc.); atención a la presentación del contenido (organización, estrategias de enseñanza, explicaciones), y atención a los medios, tanto textos como materiales (Marks, 1990).

Sáenz (2007) dice que la mayoría de los estudios en esta línea se centran en las dificultades o deficiencias que tienen los profesores con determinados conceptos o procesos matemáticos, por ejemplo, en geometría, funciones, aritmética, teoría de números y resolución de problemas.

Las principales conclusiones a las que llegan las investigaciones en el campo del CDC están relacionadas con la falta de conocimiento del contenido a enseñar, las deficiencias en su organización, la falta de manejo del contenido curricular y la falta de integración de estos tipos de contenidos. Así, por ejemplo, Marcelo (1992) muestra cómo Stein, Baxter y Leinhardt después de investigar en profundidad (entrevistas, observaciones, técnica de tarjetas) a un profesor con dieciocho años de experiencia, estos investigadores concluyen que "un conocimiento por parte del profesor limitado y pobremente organizado a menudo conduce a una enseñanza caracterizada por escasas conexiones conceptuales, pocas representaciones significativas, y exceso de rutinas en las respuestas a los estudiantes"(p. 14). Cuando los sujetos no son experimentados, sino principiantes, también ocurre que aquellos profesores que poseen un mayor dominio del contenido enseñan de manera que facilita el aprendizaje de los estudiantes (Marcelo,1992).

Algunas de las investigaciones realizadas señalan implicaciones para la formación de maestros. Por ejemplo, Sánchez y Llinares (1992), en su estudio de fracciones, concluyen que la comprensión de los conceptos implicados influye en la estrategia instruccional que el profesor utiliza y sugieren que la formación inicial del profesorado debería concentrarse en desarrollar el conocimiento acerca de la relación entre los procesos matemáticos y la modelización de dichos procesos.

Respecto al manejo de algoritmos, Moreno y Flores (2000) señalan que la introducción temprana del cálculo algorítmico en los estudiantes puede provocar confusiones en los estudiantes. Esto se produce también por las similitudes entre las notaciones de los números naturales y las fracciones. En este sentido se puede considerar que las operaciones aprendidas con los números naturales son un obstáculo para las operaciones realizadas con números racionales, ya que, por ejemplo, la multiplicación no significa siempre aumento de la cantidad.

Adicionalmente, la investigación educativa y pedagógica, que busca mejorar los resultados obtenidos en los estudiantes, demanda la participación de los maestros como actores analíticos reflexivos y críticos de sus propias prácticas de aula (Acuña & Zea, 2009), adecuadamente acompañados de grupos de investigación de la universidad, lo cual nos lleva a definir la orientación particular de la metodología implementada en nuestra intervención en las escuelas de Barranquilla participantes de este estudio.

METODOLOGÍA SEGUIDA EN LA INTERVENCIÓN

La fase piloto del *Programa de Mejoramiento de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas en Barranquilla* se adelantó como un proceso de investigación-acción, con una orientación de análisis cualitativo.

En los estudios de educación matemática se identifican tendencias sobre aspectos metodológicos definidos en el estudio del conocimiento del profesor, con una base fundamentalmente cualitativa, en la modalidad de estudios de caso, en la que se emplean como instrumentos de recogida cuestionarios de situaciones-problema (o casos), con el uso habitual de entrevistas (semiestructuradas y clínicas) y la recogida de materiales elaborados por el profesor, como documentos escritos, notas, diarios, reflexiones, historias, cuadernos tareas (Pinto & González, 2008). Estos autores muestran que existe una estrecha relación entre el conocimiento profesional, las creencias y la práctica en el salón a partir de la observación en clases, grabada en video, que permite ser utilizada para discutir y analizar con el profesor en repetidas ocasiones los significados que tiene el conocimiento matemático para la enseñanza.

Tomando el anterior marco de referencia, para el programa de investigación-acción adelantado se contemplaron las siguientes fases, que se resumen en la figura 1 de la siguiente pagina.

Establecimiento de la línea de base para la intervención o fase diagnóstica: orientada al conocimiento de la institución educativa y la práctica pedagógica de los profesores participantes para indagar qué y cómo hacen sus clases, identificar fortalezas y debilidades del pensamiento matemático de los profesores y cómo lo promueven en sus estudiantes. Se desarrollaron encuestas, entrevistas a los profesores, filmación y análisis de clases de matemáticas que aportaron a la construcción de la línea de base para la intervención (ver el capítulo 4).

Fase de actualización: se desarrolló bajo la modalidad de seminario-taller, que consistió en la entrega de materiales de trabajo a los participantes para la discusión, análisis, reflexión y problematización de sus clases.

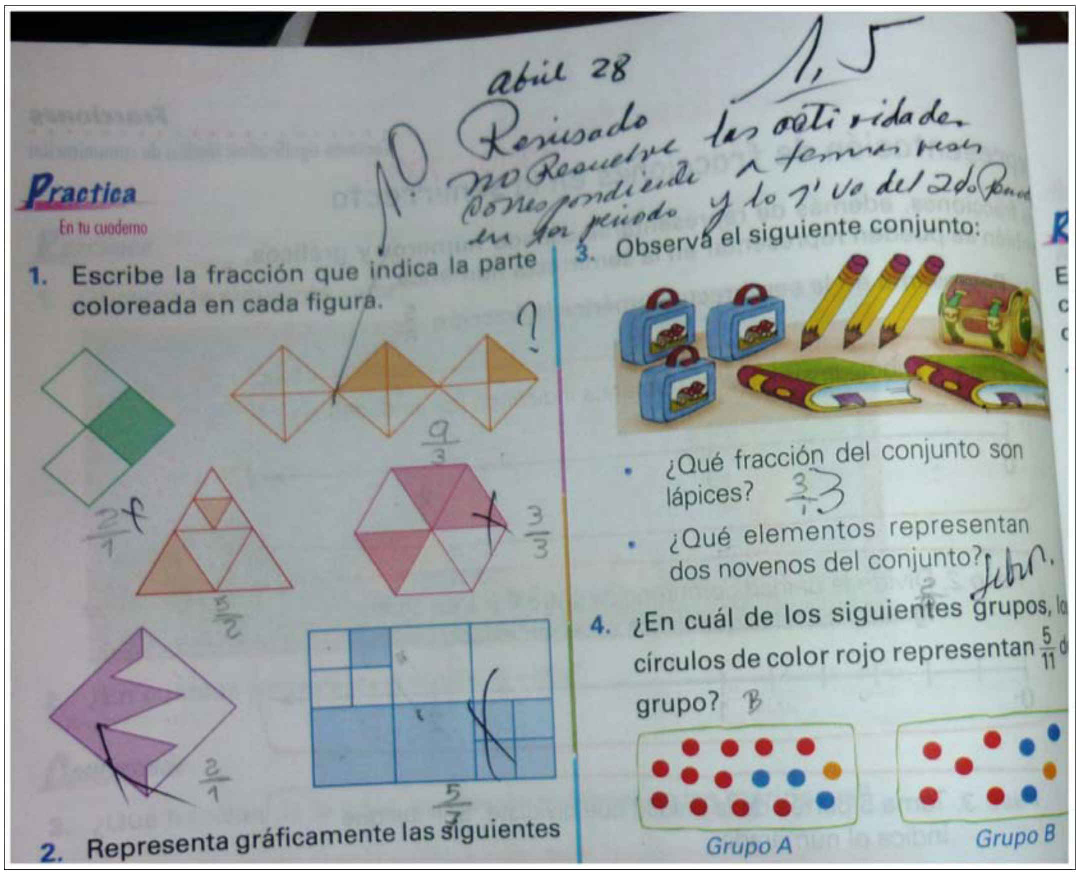
Instalación de los talleres a cargo del Doctor Joachim Hahn, Decano de la División de Ciencias Básicas.

Discusión en talleres con todos los participantes: esta fase incluyó la realización de conferencias e intercambio de experiencias de aula. Se realizaron ocho encuentros en los que se desarrollaron conferencias, intercambios y talleres de formación para los maestros participantes (ver los capítulos 5 y 6).

Fase de innovación: al finalizar el programa de formación, los participantes diseñaron situaciones de aprendizaje para los estudiantes de 5° en las que se involucraron los elementos conceptuales de los números fraccionarios que promueven el desarrollo del pensamiento matemático en sus estudiantes (ver el capítulo 7) y, en particular, procesos matemáticos específicos (ver el capítulo 3).

Un aspecto central del proceso de formación de los maestros consistió en la continua reflexión acerca de la práctica pedagógica de los maestros participantes, lo cual se propició a partir de la grabación de una de sus clases y del análisis conjunto del video por parte del tutor y de cada maestro, además de ello se revisaron algunos trabajos y cuadernos de estudiantes, a partir de cuyo análisis se proyectaban acciones de mejoramiento didáctico a favor del desarrollo de procesos matemáticos asociados a la competencia matemática de los niños de 5° de primaria.

Este proceso se dio de manera ininterrumpida a lo largo del programa y se espera que continúe hacia la fase 2



Anotaciones del maestro frente a algunos errores en los ejercicios.

del proceso de intervención y siguientes, como se muestra en la figura 1.

El desarrollo de este programa permitió conjugar las preocupaciones y propósitos del grupo de maestros de las instituciones participantes con los desarrollos teóricos e investigativos del grupo de investigación, lo que condujo a un trabajo conjunto que dinamizó la institución desde una propuesta de mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas a través de procesos de actualización y profundización matemática por parte de los profesores, de innovación didáctica y de investigación pedagógica realizados por todo el equipo participante para beneficio del aprendizaje de los estudiantes.

En este sentido es importante señalar en este tipo de proyectos, donde se establecen relaciones académicas interinstitucionales entre los maestros de educación básica primaria y los grupos de investigación de la Universidad del Norte, y en tanto que las preocupaciones de los unos y otros se complementan, es posible generar propuestas que tomen en cuenta la condición de la escuela, de los maestros y sus estudiantes, y que aporten en la trasformación pedagógica para mejorar la calidad educativa (Acuña & Zea, 2009).

Respecto a la introducción de los tópicos del tema fraccionarios en el rediseño de las clases de los maestros con el programa de mejoramiento docente, se tomaron en consideración las orientaciones y pautas señaladas por Carlos Eduardo Vasco (2010), cuyo texto completo aparece en el capítulo 2. Dentro de las múltiples reflexiones y recomendaciones nos sugiere partir de la planeación de actividades de enseñanza y de evaluación cuyo contenido esté en relación con alguna competencia para la vida real y su aplicación en ella; motivar a los estudiantes para desarrollar las competencias o habilidades y luego enseñar los conocimientos declarativos y procedimentales, sin perder de vista las oportunidades de utilizar lo que se sabe y, finalmente, evaluar todo lo aprendido.

Es importante señalar que los significativos avances obtenidos a través de esta metodología y que se muestran en el capítulo 7, en especial el desarrollo de las innovaciones aplicadas en el aula de matemáticas, esperamos consolidarlas en las fases II y subsiguientes del programa.

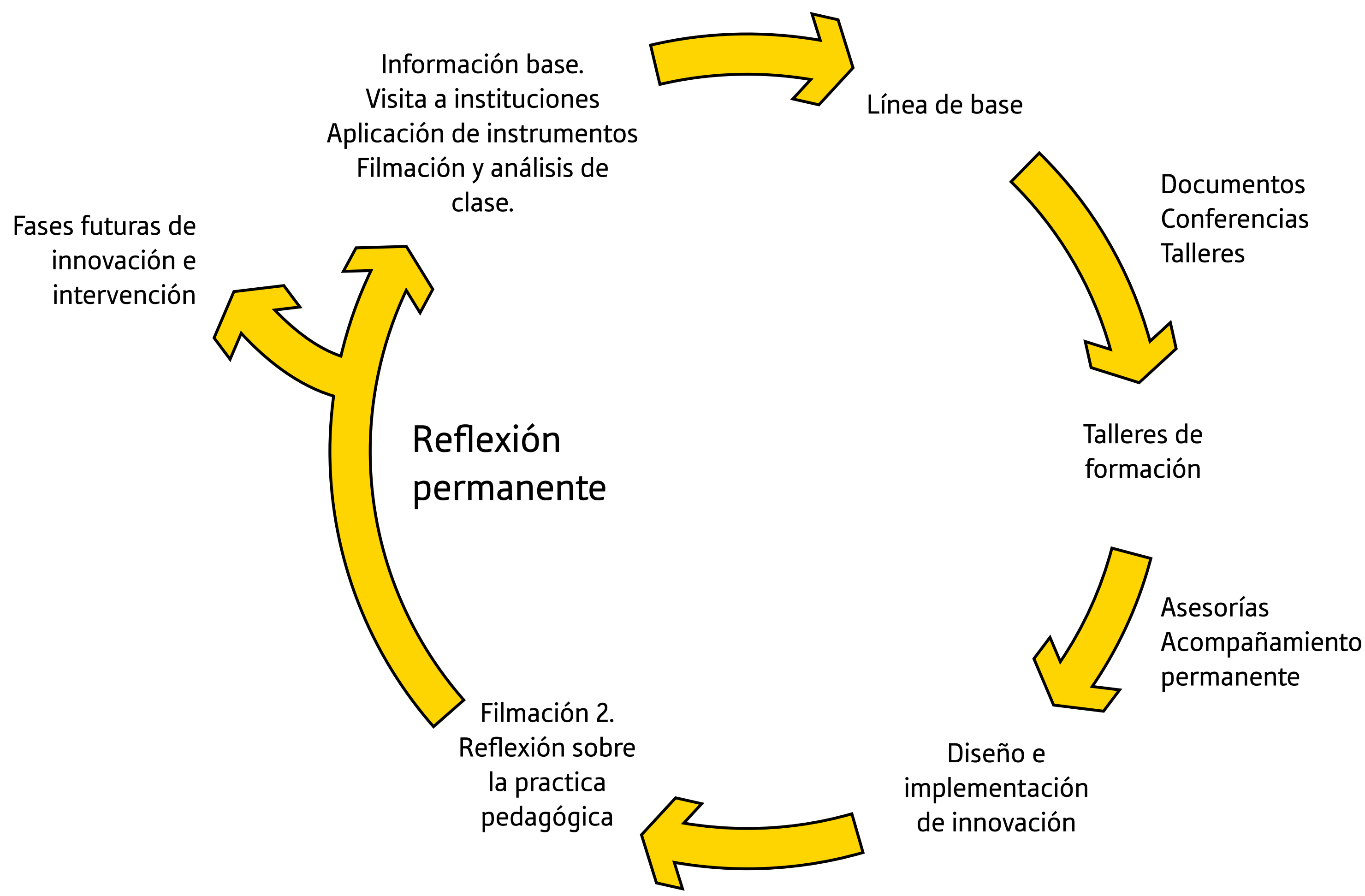


Figura 1
Ruta metodológica para la formación de maestros en el *Programa de Mejoramiento de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas en Barranquilla.* Fase piloto Los fraccionarios en 5º, 2010.

REFERENCIAS

Acuña, L. & Zea, L. (2009). Relación universidad escuela: una experiencia de investigación colaborativa. En: Autores varios. 2009. *Universidad-escuela y producción de conocimiento pedagógico* (resultados de la investigación IDEP-Colciencias). Bogotá: IDEP. Colección Investigación e Innovación.

Bolívar, A. (2005). Conocimiento didáctico de contenido y didácticas específicas. *Revista de currículum y formación del profesorado, 9*(2), http://www.urg.es/local/recfpro/Rev92ART6.pdf

Eduteka. (2010). Informe PISA 2006. Hallazgos fundamentales. Recuperado el 12 de febrero de 2010, de *Tecnologías de la Información y Comunicaciones para la Enseñanza Básica y Media*: http://www.eduteka.org/imprimible.php?num=870

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación. (2010). *Resultados Censales SABER 5° y 9° 2009.* Recuperado el 15 de abril de 2010, de http://www2.icfessaber.edu.co/graficar/ente/id/11/grado/5/tipo/2

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (diciembre de 2010). *Colombia en PISA 2009. Síntesis de resultados.* Recuperado el 12 de febrero de 2011, de http://www.icfes.gov.co/pisa/phocadownload/pisa2009/infome_pisa_2009.pdf

Marcelo, C. (2002). La investigación sobre el conocimiento de los profesores y el proceso de aprender a enseñar. Una revisión personal. En: Perafán G. & Adúriz-Bravo A. (Comps.), *Pensamiento y conocimiento de los profesores. Debate y perspectivas internacionales.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional. Colciencias.

Marcelo, C. (1987). *El pensamiento del profesor.* Madrid: CEAC.

Marcelo, C. (1992). Cómo conocen los profesores la materia que enseñan. Algunas contribuciones de la investigación sobre conocimiento didáctico del contenido. Ponencia presentada al Congreso *Las didácticas específicas en la formación del profesorado*, Santiago, 6-10 de julio, 1992. Recuperado el 17 de noviembre de 2010 de http://www.inet.edu.ar/programas/formacion_docente/biblioteca/formacion_docente/marcelo_garcia_como_conocen_docentes.pdf

Marks, R. (1990). Pedagogical content knowledge: From a mathematical case to a modified conception. En: Marcelo, C. (1992). Cómo conocen los profesores la materia que enseñan. Algunas contribuciones de la investigación sobre conocimiento didáctico del contenido. Ponencia presentada al Congreso *Las didácticas específicas en la formación del profesorado*, Santiago, 6-10 de julio, 1992. Recuperado el 10 de febrero de 2010 de http://prometeo.us.es/idea/miembros/01-carlos-marcelo-garcia/archivos/Como%20conocen.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Moreno, A., & Flores, P. (2000). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Un acercamiento desde los números racionales. En Gámez, & otros, *IX Congreso sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas* (pp.. 211-214). España: "Thales". Universidad de Cádiz.

Mourshed, M., Chijioke, C., & Barber, M. (2010). ¿Cómo se convierte un sistema educativo de bajo desempeño en uno bueno? Recuperado el 10 de marzo de 2010, de http://www.mckinsey.com/locations/madrid/recentreports/pdf/Informe_World_Improved.pdf

Pinto, J. & González M. (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿una cuestión ignorada? *Educación Matemática, 20,* pp. 83-100. México: Santillana.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of reaserch on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense.

Ponte J. P. (2008). Investigar a nossa própria prática: uma estratégia de formação e de construção do conhecimento profissional, Revista PNA - *Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 4*, http://www.concepcionabraira.info/wp/2008/08/01/mejorar-la-practica-docente-la-reflexion-sobre-la-practica-parte-iv/

Porlan, R., Riviero, A. & Martín, R. (1997). Conocimiento profesional y epistemología de los profesores I. Teoría, métodos e instrumentos. *Enseñanza de las ciencias 15*(2), pp. 155-171.

Sáenz, C. (2007). La competencia matemática (en el sentido de PISA) de los futuros maestros, Instituto Universitario de Ciencias de la Educación (IUCE). Universidad Autónoma de Madrid (UAM). *Enseñanza de las Ciencias, 2007, 25*(3), pp. 355-366. Recuperado el 21 de noviembre de 2010 de http://ddd.uab.cat/pub/edlc/02124521v25n3p355.pdf

Sánchez, V. & Llinares, S. (1992). *Prospective Elementary Teachers' Pedagogical Content Knowledge About Equivalent Fractions,* en Ggeeslin, W. & Graham, K. (eds.). Proceeding of the 16th PME International Conference, 2, pp. 274-275.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching, *Educational Research 15*(2), pp. 4-1.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of New Reform. En: Pinto, S.J. & M.T. González (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿una cuestión ignorada? *Educación Matemática, 20*(3), diciembre, 2008, pp. 83-100. Recuperado el día 5 de febrero de 2010 de http://redalyc.uaemex.mx/pdf/405/40512064005.pdf

Vasco Uribe, C. (2010, 22 de junio). *Problemas y retos de la educación por competencias en las matemáticas de quinto grado.* [Conferencia]. Universidad del Norte, Barranquilla.

Problemas y retos de la educación por competencias en las matemáticas de 5º grado*

2

Carlos Eduardo Vasco Uribe[1]

Me agrada mucho volver a Barranquilla, adonde he venido frecuentemente desde los tiempos remotos en que enseñé filosofía, física y cálculo en el Colegio San José, en el año 1962, recién graduado de licenciado. Recibí de los organizadores del programa la honrosa invitación de inaugurar este magno proyecto sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con una conferencia sobre las competencias, la enseñanza de las matemáticas en general y la de los fraccionarios en particular.

Cada uno de esos temas daría no solo para una conferencia sino para un curso universitario de un semestre, y, por lo tanto, me veo obligado a reducir la temática de nuestra conversación del día de hoy a algunos aspectos relacionados con la enseñanza de los números racionales, "fraccionarios", o "quebrados", como cada uno prefiera llamarlos. Yo prefiero hablar de los números racionales en general, que los matemáticos denominan "Q", incluyendo el cero y los negativos, y hablar de los fraccionarios cuando se trata de los racionales que no son negativos. Los fraccionarios son pues los racionales con los que trabajamos en 3º o 4º, hasta 7º u 8º.

Tal vez se llaman "quebrados" porque nos han quebrado la cabeza a todos los niños y niñas del país durante muchos años. Ciertamente debe ser un tema muy difícil porque hasta hace algunos años se empezaba a enseñar el manejo de los fraccionarios en 3°, se repasaba incesantemente el mismo tema cada año hasta el 9°, y se utilizaba y revisaba constantemente durante 10º y 11º. Sin embargo, diez años más tarde, cuando llegan los estudiantes al primer año de universidad, vemos que aún no son competentes para el manejo de los fraccionarios. ¡Diez años es mucho tiempo! Creo, pues, muy apropiada la decisión de comenzar el proyecto por la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en 5°, que es cuando aparece ya la síntesis de toda la primaria, y es una muy buena elección tomar como tema central el manejo de los números fraccionarios, quebrados o racionales, por supuesto los no negativos.

La preocupación por los fraccionarios ha sido una de las constantes en mi interés por la investigación de la enseñanza de las matemáticas desde los años setenta, cuando empezó a constituirse la disciplina que solemos

* Conferencia en el acto de lanzamiento de la fase piloto del Programa de Mejoramiento de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas en la Escuela Primaria en Barranquilla. Universidad del Norte, Barranquilla, junio 22 de 2010.

[1] Profesor del Programa de Doctorado Interinstitucional en Educación, DIE. Universidad Distrital-Universidad del Valle.

llamar ahora “didáctica de las matemáticas” o “educación matemática”. Cuando yo llegué con mi doctorado en matemáticas en 1971 a enseñar en la Universidad Nacional acababa de terminar mi tesis sobre los lazos algebraicos no asociativos, en el área de las matemáticas que yo llamo “álgebra abstracta e inútil”, que es la que más me gusta. Me atreví a ofrecer a los estudiantes de último año de la carrera de matemáticas de la Universidad Nacional en Bogotá un curso opcional sobre el tema de mi tesis, pensando que en ese nivel tan avanzado podría interesarles qué era eso de los lazos algebraicos no asociativos. Ya se imaginarán lo que pasó: no se apuntó ni uno solo de los estudiantes. Desde ahí, con ese “shock cultural” de reentrada a Colombia (que se complementó con el hecho de que en la biblioteca del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Nacional, que era la mejor biblioteca de matemáticas del país, no encontré ni un solo libro de los que yo había utilizado para mi tesis) comenzó mi interés por la investigación en didáctica de las matemáticas.

Desde entonces me convencí de que había que empezar desde mucho más atrás, y pedí que me permitieran enseñar los cursos de Fundamentos de las Matemáticas I y II a los recién llegados a la Carrera de Matemáticas de la Universidad Nacional. También había en ese tiempo una Carrera de Matemáticas Puras en la Universidad Javeriana. Así, en el año 1972 empecé en la Nacional y en la Javeriana a dar los cursos de Fundamentos de Matemáticas, a trabajar la lógica y la teoría de conjuntos, y a estudiar con algunos colegas la filosofía y la historia de las matemáticas. Sin embargo, vi que los estudiantes que llegaban a los primeros cursos de Fundamentos de Matemáticas, los que llamamos “los primíparos”, a pesar de ser los mejores en sus respectivos colegios, también estaban ya acostumbrados a unas matemáticas de rutina, en las que se trataba de saber resolver ejercicios de aritmética y álgebra, ojalá muy rápido y sin pensar mucho. El mejor estudiante era el que sabía resolver todos los ejercicios del Baldor y no solo los impares. No había duda: aún en primer semestre de la universidad ya era demasiado tarde. Había que empezar desde mucho antes.

Le pedí a los jesuitas del Colegio Mayor de San Bartolomé en Bogotá, que recibe a los mejores estudiantes de 5° de la escuelas públicas de la ciudad y que tiene un nivel académico superior al del Colegio de San Bartolomé “La Merced” –que es pago para las élites– que me prestaran un 6° y un 7° grado para desarrollar una experiencia de enseñanza con profesores y alumnos. Empezábamos a escribir un libro en donde trabajábamos los números naturales, los enteros y los fraccionarios en esos grados.

Ya desde entonces me convencí de que era una labor sumamente difícil, empezando por los mismos profesores. Yo veía que algunos de ellos, por ejemplo, sentían que era mejor que se enseñaran primero los decimales, pero luego veían que era un problema enseñar los quebrados con esa rayita atravesada; otros pensaban que era mejor que se enseñaran primero los quebrados, pero luego veían que el paso a los decimales era un problema complicado, y que sin los decimales los niños tampoco entendían los porcentajes en sexto grado. Y todo seguía así, en 7º, 8º, 9º, 10º y 11º; es más, todavía seguían los mismos problemas en la universidad.

Una vez les dibujé en el tablero a los estudiantes de Cálculo I en primer semestre de Ingeniería una raya vertical y una horizontal, y empecé a escribir en la vertical de abajo para arriba así: el cero abajo en la esquina, luego .1, .2, .3, .4, .5, .6, .7, .8, .9, .10, .11, .12, etc. A ningún estudiante se le hizo raro que hubiera escrito .10, después de .9. ¡Qué tal!, pensé, llevan nueve años trabajando todo esto y les parece normal que después de .9, siga .10. ¡Perdimos el tiempo durante diez años! Tenemos que hacer algo para cambiar esta situación.

LAS COMPETENCIAS MATEMÁTICAS PARA LA VIDA

Si vamos a hablar de competencias matemáticas para la vida fuera de la escuela, el colegio y la universidad, pensemos un poco en la siguiente anécdota. Una vez iba yo en una buseta por la carrera décima en Bogotá; nos movíamos muy despacio porque había mucho trancón. Delante de mí estaba sentado un señor ya mayor, con cara de mecánico, y al lado, un muchacho con cara de aprendiz, que llevaba un motor eléctrico en la rodillas. El muchacho limpió un poco la placa que tenía el motor eléctrico y vio que ahí decía “0.3 HP”. Le preguntó entonces el más joven al mayor: “¿qué es eso de 0.3 HP?”


Desarrollo de la conferencia del Doctor Carlos Eduardo Vasco.

Y le dice el mecánico: "eso de cero punto tres, pues es un tercio de caballo. Si dijera 0.4, eso sería un cuarto de caballo, y si dijera 0.5, eso sería un quinto de caballo, y así. Por ejemplo, si dijera 0.10, eso sería un décimo de caballo." Fíjense que sí es verdad que 0.10 es un décimo de caballo y que también es verdad que 0.3 es una buena aproximación a un tercio de caballo. Por eso, un estudiante que me diga a mí que 0.10 es un décimo y que 0.3 es más o menos un tercio, a primera vista sí me parece competente para manejar los fraccionarios fuera de la escuela. Pero si luego me dice que 0.4 es como un cuarto y 0.5 es como un quinto, ahí ya se me cae al piso la conjetura de que el muchacho era competente. Ni siquiera su maestro.

Por eso a mí me gustó mucho ver que en este programa de la Universidad del Norte y la Secretaría de Educación se había escogido como tema inicial el manejo de los maravillosos números fraccionarios. En el año 1976 cuando se inició el cambio curricular, la Universidad Nacional nombró al doctor Carlo Federici como asesor del Ministerio de Educación, cuando empezó la Dirección Nacional de Capacitación y Perfeccionamiento Docente, Currículo y Medios Educativos. Federici, mi maestro de matemáticas y física desde 1960 y mi director de tesis de licenciatura, comenzó a asesorar a los equipos encargados de elaborar los futuros programas curriculares de matemáticas y de ciencias naturales. Cuando él se jubiló a fines de 1977, le sugirió a la Universidad Nacional la pésima idea de que me nombraran para remplazarlo en la asesoría a la renovación curricular. De marzo de 1978 a junio de 1993, durante quince años, estuve trabajando con el ministerio de Educación en ese sentido. Los programas para los primeros cinco grados se experimentaron y se comenzaron a implementar en la primaria en 1984, con el Decreto 1002 de ese año. Sin embargo, cuando ya estaban listos los programas de 6° a 9° en 1994, llegó la Ley General de Educación y se acabó la renovación curricular de un día para otro.

En ese tiempo, hasta 1984, se seguían en las escuelas unos programas expedidos por el Decreto 1710 del año 1963. Eran por objetivos específicos, elaborados con la ayuda de los Cuerpos de Paz del Presidente Kennedy. En ese tiempo se hizo el cambio de "programas por contenidos" a "programas por objetivos específicos e indicadores de evaluación". Los programas por contenidos venían al menos desde 1903. Parece que con el cambio de contenidos a objetivos no cambiaron gran cosa.

En el periódico *Palabra Maestra*, del Premio Compartir al Maestro, escribí un cuento de una maestra, que les recomiendo leer. La señorita Adelita, recién salida de la normal cuando llegaron los programas para secundaria del año 1974, daba álgebra en 8° y 9°. El supervisor le dijo: "usted tiene que cambiar los programas de contenidos a objetivos específicos". Ella estaba dando las ecuaciones cuadráticas y pensó: "bueno, cambiemos el contenido de las ecuaciones cuadráticas al objetivo que diga: El alumno resolverá ecuaciones cuadráticas". Hizo lo mismo con los demás contenidos del programa, con la ayuda de la lista de verbos observables que le habían entregado, y así le quedó ya cambiado el programa de contenidos a objetivos, bastaba agregarle a cada contenido un verbo de la lista, poniéndolo en futuro. Pero, por supuesto, la señorita Adelita siguió sin cambiar nada en sus clases, dando lo mismo en su noveno grado, "boleando Baldor", como decimos los profesores de álgebra.

Luego, veinte años más tarde, cuando ya era la señora Adela, con su flamante licenciatura, salió la Ley General de Educación, que no proponía programas sino solo lineamientos generales y una lista de logros e indicadores de logro. Llega el nuevo supervisor y le dice: "profesora Adela, hágame el favor de cambiar los programas de objetivos específicos a logros e indicadores de logro". La señora Adela leyó todo ese enredo de logros e indicadores de logros y dijo: "ah, eso es fácil: no es sino cambiar el verbo que hay en el objetivo y pasarlo del futuro al presente de indicativo, y el logro me va a quedar así: "el alumno resuelve ecuaciones cuadráticas".

Efectivamente, cambió todos sus programas con solo transformar el tiempo de todos los verbos de sus antiguos objetivos, y entregó muy rápido su tarea. Pero, por supuesto, siguió tranquila, "boleando Baldor" en noveno grado sin cambiar sus clases. Pues resulta que ahora, cuando ella ya es la doctora Adela, con su flamante maestría en educación, con los nuevos vientos de las competencias le llega el supervisor con que tiene que cambiar los programas de logros e indicadores de logro a programas por competencias. Así va el cuento; pero no termina ahí. Ustedes deben pensar un poco cómo va a terminar. Si es otra vez lo mismo o no. ¿Será que ahora también basta con cambiar el verbo por otra expresión como "El alumno es competente para resolver ecuaciones cuadráticas"?

Ese es el problema que tenemos en este momento. Parece que en el Ministerio de Educación se les olvida que los maestros nos sabemos defender, y que si yo he dado bien mi curso de álgebra en 8º y 9º, o de aritmética en 5º, 6º o 7º, yo tal vez me anime a escoger un texto mejor, que tenga ilustraciones y ejercicios más interesantes, pero no voy a cambiar nada porque el Ministerio me diga que hay que enseñar contenidos, objetivos, logros o competencias. ¿Qué hay entonces en el discurso de las competencias que nos sirva para algo a nosotros los profesores de matemáticas?

UNA PRIMERA APROXIMACIÓN A LA RESPUESTA

El tema de las competencias laborales es muy importante; la propuesta de competencias comunicativas es clave, y estas dos que ahora aparecen en los exámenes del Icfes o "Saber-Once": la interpretativa y la argumentativa, nos pueden ayudar mucho a planear y a enseñar mejor nuestras clases en todas las áreas. Pero en las clases diarias de matemáticas, ¿qué nos ganamos con cambiar los programas de logros a competencias? ¿Qué vamos a hacer de distinto? ¿Cuál sería una competencia matemática interesante que hasta ahora no hubiéramos considerado? ¿Será que hay competencias matemáticas importantes para todos los ciudadanos y ciudadanas del país, o será que lo de las competencias es una moda más como las otras? La respuesta no es fácil, y la reflexión sobre el tema mucho menos.

Desde hace más de diez años comenzó en Colombia el debate a favor y en contra de las competencias. Desafortunadamente, como pasó con la Ley General de Educación, nos hicieron cambiar de objetivos a logros sin saberse por qué y sin aclararnos qué era un logro. Por ejemplo, para mí un logro es alcanzar un objetivo. No veo la diferencia entre logros y objetivos. Pero en 1994 nos dijeron que los programas ya no debían ser por objetivos sino por logros. Así mismo, también ahora, sin aclararnos qué se entiende por competencias, de un día para otro nos cambiaron los exámenes del ICFES de logros a competencias, y luego sacaron los estándares básicos de competencia y cambiaron las Pruebas Saber a competencias sin decirnos qué era eso ni cómo se enseñaba por competencias, ni cómo se evaluaba el avance en las competencias.

Cuando Noam Chomsky desarrolló su teoría del lenguaje, distinguió la competencia del desempeño y dijo que —a menos que alguien tuviera algún daño cerebral— todos teníamos la competencia lingüística necesaria para aprender rápidamente la lengua materna, cualquiera que ella fuera. La distinción entre competencia y desempeño es muy fina e importante, pero queda claro para mí que esa noción chomskiana de competencia no les sirve de gran cosa a los docentes, y mucho menos en matemáticas, porque si todo el mundo es competente, lo único que hay que hacer es mejorar el nivel de desempeño. No haría falta pensar cómo podemos desarrollar la competencia matemática; tenemos que mejorar el desempeño y punto. Entonces, esa noción de competencia que parece que toda persona ya tiene —a menos que tenga un daño cerebral— no nos sirve para nada.

Efectivamente todos los hablantes nativos normales tenemos que tener un dispositivo de adquisición del lenguaje materno, porque si no, un niño entre uno y dos años, ¿cómo aprendería a hablar? En cambio, para una segunda lengua ya no tendríamos esa competencia innata. Si la mayoría de nosotros, a pesar de los seis años de inglés que nos enseñaron en el bachillerato, no aprendimos nada, y ahora los que estudian once años de inglés en los colegios no aprenden tampoco casi nada, de poco nos sirve la noción chomskiana de competencia ni para la enseñanza del castellano ni para la del inglés. Menos para la enseñanza de las matemáticas.

Aceptemos pues, que el niño o la niña tienen que tener un dispositivo de adquisición del lenguaje que es innato. ¿Será que también tienen un dispositivo de adquisición de las matemáticas? En ese caso, los neurólogos dicen que no, porque ha pasado muy poco tiempo en la evolución desde que aparecieron los símbolos para los números en la aritmética y menos todavía las letras para el álgebra. No ha habido pues suficiente tiempo para que el cerebro tenga una competencia matemática que se base en un dispositivo tipo Chomsky para el lenguaje, porque la evolución no nos ha ayudado a construirlo con tan poco tiempo de aparición de los numerales y los símbolos algebraicos en las distintas culturas. No son suficientes tres o cuatro mil años para que se den los cambios genéticos necesarios para conformar ese dispositivo. En cambio, el lenguaje oral lleva por lo menos doscientos o trescientos mil años. Por eso la neurología trabaja ahora distintos aspectos de las matemáticas en forma muy diferente de la adquisición del lenguaje oral. Les recomiendo un libro que estoy leyendo actualmente, escrito por Stanislas Dehaene, el neurólogo francés que más ha trabajado este tema de los números. También ha abordado en otro libro las diferencias entre la adquisición del lenguaje oral y el escrito, diferencia muy pertinente para nuestra reflexión sobre las competencias matemáticas.

Alguien podría pensar que la adquisición de las matemáticas no puede ser tan distinta de la adquisición del leguaje oral, pues las matemáticas no son sino un lenguaje. Pero hay que tener mucho cuidado con esa formulación. Una cosa es decir que en las matemáticas hay muchos lenguajes, y otra cosa es decir que las matemáticas son solo un lenguaje. Las matemáticas son mucho más que un lenguaje, y en ellas hay que aprender muchos lenguajes, todos ellos escritos: el de la aritmética, el de la geometría, el del álgebra, el de la medición, el de la estadística, el de la probabilidad, el del análisis, etc. Sobre esos lenguajes tan nuevos en la evolución no podemos esperar mucha ayuda de los dispositivos innatos en el cerebro. Más bien, lo que tenemos que aprender es a adaptar esos dispositivos cerebrales de las funciones que tenían en otras épocas a las funciones más importantes para las matemáticas actuales.

¿POR QUÉ LLEGÓ A COLOMBIA EL DISCURSO DE LAS COMPETENCIAS?

El discurso de las competencias se ha ido extendiendo en toda la educación latinoamericana por dos razones principales: por la necesidad de incrementar las competencias laborales y porque lo que se enseña en muchas áreas curriculares o no se aprende, o se aprende para contestar exámenes, pero no para utilizarlo en la vida real. Primero está el problema de las competencias laborales. Por algo tenemos la colaboración de la ANDI y de Promigas en este proyecto.

Uno ve que los empleadores tienen toda la razón en interesarse en que los estudiantes que salen de los colegios, de los institutos técnicos, del SENA y de las universidades sean muy competentes, en particular en el uso de las matemáticas fuera de las instituciones educativas. El uso de ellas para la tecnología, para la computación, para la contaduría, para la administración, para la estimación de las cantidades en los maestros de obras, de los electricistas, de las personas que manejan los motores eléctricos o de combustión interna, todo esto es importantísimo para tener una fuerza laboral eficaz, eficiente y bien preparada. Por ejemplo, es clave que nuestros mecánicos, electricistas y constructores no confundan 0.4 con 1/4. Así no sale bien ni una receta de cocina ni la reparación de un aparato; menos aún vamos a poder tener industrias de alto valor agregado. En eso estoy plenamente de acuerdo con la ANDI, con Promigas y con el SENA.

La necesidad de aumentar la competitividad de nuestra industria, nuestras empresas comerciales, financieras y de servicios en la economía de mercado del siglo XXI no se puede rechazar de plano por una toma de posición utópica contra el capitalismo y contra la globalización. Es muy positivo tener utopías y trabajar por su realización, pero si son realistas y tenemos un plan para apoyar esa realización. Después de la caída del sistema socialista de la Unión Soviética no podemos predicar un suicidio colectivo en el que los que van a sufrir más son las personas que pretendidamente queremos apoyar. Hay que pensar a muy largo plazo, y a corto y mediano plazo tenemos que buscar cómo podemos aumentar desde la educación el potencial productivo del país. Por eso me gusta mucho que insistamos en el discurso de las competencias, así sea por el lado de las competencias laborales y de la competitividad del país.

Por otro lado, tenemos que reconocer que ese punto de vista tiene un problema, pues nos puede llevar a confundir el discurso de las competencias con el discurso de la competitividad. Una cosa es relacionar la palabra "competencia" con la expresión "ser competente" y otra cosa es relacionarla con la expresión "competir" o "ser competitivo". Yo prefiero lo primero. Considero que el problema principal de la educación colombiana es que lo poco que aprendemos en las instituciones educativas en todas las áreas, y especialmente en matemáticas, se nos olvida por no volver a utilizarlo, o si lo recordamos, no nos sirve en la vida real. El conocimiento matemático o no se adquiere, o se pierde, o si se conserva, se queda inerte e inactivo en la memoria de los y las jóvenes. En este segundo sentido también estoy muy de acuerdo con el discurso de las competencias, pues nos está recordando que el conocimiento que enseñamos debe pasar a ser potente y actuante para la vida real fuera de las instituciones educativas. Por eso, después de analizar otras posibles competencias matemáticas, considero que de todas las que podríamos desarrollar durante la educación básica, la más importante como competencia matemática para la vida real es el manejo apropiado, flexible y eficaz, en una palabra, el manejo competente de los números racionales en los cinco tipos de pensamiento: numérico, espacial, métrico, aleatorio y algebraico-analítico, y los cinco tipos de procesos: planteamiento y resolución de problemas, razonamiento, comunicación, modelación y manejo de algoritmos, lo que incluye no sólo ejecutarlos bien, sino formularlos y evaluarlos, que aparecen en los lineamientos curriculares de matemáticas.

Sin embargo, también tenemos que reconocer que en la Universidad Pedagógica hace unos años se hizo un seminario muy serio y crítico, dirigido por el profesor Guillermo Bustamante. Les recomiendo que se lean los tres tomos que él ha publicado para criticar el concepto de competencia en Chomsky, en Dell Hymes y en el mundo laboral de la certificación para los oficios, para mostrar las dificultades y peligros de trasladarlo sin más a las competencias académicas. Lo mismo podría decirse del traslado de las competencias laborales a las competencias artísticas y a las competencias ciudadanas.

Una cosa son las competencias laborales y otra las artísticas; una cosa son las competencias laborales y otra las ciudadanas, y una cosa son las competencias laborales y otra las competencias académicas, sobre todo en matemáticas. No son las mismas ni se les puede aplicar la misma teoría, ni se enseñan lo mismo, ni se evalúan lo mismo; por lo tanto, hay razones de peso en la resistencia fuerte que se ha dado en muchos profesores y profesoras de matemáticas, de ciencias naturales, de ciencias sociales, de arte y de ética, moral y ciudadanía en contra del discurso de las competencias. Esto ha llegado hasta el punto de que en Bogotá la Asociación Distrital de Educadores, ADE y la misma Secretaría de Educación Distrital no han aceptado el discurso de las competencias: dicen que es neoliberal. Se decía que había sido impuesto por el Banco Mundial, por la OEA y por las multinacionales. Debemos conocer también ese discurso que rechaza las competencias, leerlo y estudiarlo con cuidado, porque es muy crítico y muy serio.

Esto lo deja a uno en una posición difícil; uno tiene que aceptar una de dos alternativas. La primera es esta: voy a hacer como los profesores de la Asociación Distrital de Educadores y voy a insistir en que sigamos utilizando los logros, que bastante tiempo y esfuerzo nos costaron, y en hacer toda la resistencia posible para no cambiar los programas de logros a competencias y para no aceptar la evaluación de competencias. La otra alternativa se basa en que los problemas teóricos como los que nos propone el discurso de las competencias no se deben resolver como los problemas políticos, con una aceptación total y acrítica, o con un rechazo cerrado e igualmente acrítico. Para mí, la alternativa válida es aceptar el desafío que nos proponen las críticas serias al discurso de competencias, y más bien apropiarnos de la tarea de construir un concepto potente de competencia y de configurar nuevamente ese discurso; no simplemente aceptarlo o rechazarlo.

En otros países en donde toman las cosas en serio, como en Suiza, Alemania, Francia e Inglaterra, se trabajó durante diez años en un proyecto dirigido por dos profesoras: Dominique Simone Rychen y Laura Hersh Salganik. En los primeros cinco años estuvieron elaborando documentos, haciendo reuniones y desarrollando reflexiones para ver si se adoptaba el concepto de competencias claves para la vida en la educación para todos los países de la Unión Europea. Eso sí es una cosa seria. No simplemente decir que uno ni siquiera va a mirar de qué se trata el discurso de las competencias porque lo trajo el Banco Mundial o porque lo dicen el BID, la OEA o la ANDI. ¡Estudiemos! ¡Pensemos! ¡Escribamos! ¡Discutamos sobre propuestas escritas! No nos limitemos a una resistencia activa o pasiva, porque podemos estar perdiendo una oportunidad muy valiosa para transformar la pedagogía y la didáctica.

Las profesoras Rychen y Salganik de la OECD de Suiza invitaron a varios personajes de Oxford y Cambridge, en Inglaterra; de Francia, de Alemania, de Estados Unidos, de Sudáfrica, para reflexionar sobre qué es una competencia, sobre si ese concepto sirve o no para la educación y la formación integral, más allá de lo laboral, y sobre las que podrían ser competencias claves para la vida. Sobre esos temas publicaron dos volúmenes, que les recomiendo leer. No se trata de que nosotros hagamos lo mismo, sino que desde ahora trabajemos en la configuración de un discurso serio y potente sobre las competencias, para el cual, afortunadamente, hay ya mucho trabajo previo. En la Universidad Nacional y en el ICFES se trabajó en la evaluación por competencias; en el Ministerio se avanzó con seriedad en la elaboración de los lineamientos curriculares, bajo la coordinación de Celia Castiblanco, y de los estándares básicos de competencias.

Recordemos que la primera edición de los estándares, que se llamaron "de excelencia", recibió críticas muy fuertes de distintos grupos, en particular de la Asociación Colombiana de Matemática Educativa, Asocolme, y la Ministra de Educación accedió a reformarlos. En la segunda edición trabajamos muchas personas en la redacción de los estándares básicos de competencias para los distintos grupos de grados. Gloria García, Gilberto Obando, Cecilia Casasbuenas y yo, con la ayuda de Mariana Schmidt, escribimos la actual introducción de los estándares. Se estudió en otros grupos el problema de qué es lo común entre las ciencias naturales y las ciencias sociales y en otros más se trabajó en competencias laborales, tecnológicas y también en competencias ciudadanas. Ahí tenemos una gran cantidad de insumos para que elaboremos un discurso fuerte y potente sobre las competencias.

Lo primero que tenemos que hacer para formular cuidadosamente ese discurso es repasar un poco de latín para no decir que la palabra "competencia" viene sólo de "competir". Es claro que si hablamos de una competencia ciclística o futbolística, esa palabra sí viene de competir; la palabra "competencia" puede pues tener la misma raíz de "competir" en el sentido de luchar, de pelear, etc. Pero si estudiamos con cuidado la etimología, *"petere"* es "dirigirse a" y "*cum*" es lo mismo que el "co-" de comunidad, de cooperativa, de comunión: se trata de trabajar en grupo con un fin común, de dirigirse juntos hacia alguna meta. Por lo tanto, uno puede acentuar la competencia como competición o acentuar la competencia como cooperación. En el segundo caso no se trata de *competir*, sino que se trata de *ser competentes* para el trabajo conjunto, cooperativo, comunitario, para el bien común. Por supuesto, yo prefiero lo segundo, y espero que ustedes también.

Esto significa que cuando estamos hablando de competencia en el ámbito educativo, no es que queramos atizar la competencia internacional, económica y política, ni que pensemos en querer ganar la competencia por los mercados a los japoneses, o a los coreanos, o a los irlandeses que se han tratado de especializar en la línea de la electrónica; eso no es lo importante. Más bien, lo que nosotros queremos es asegurarnos de que la mayoría de nuestros estudiantes sean competentes en el manejo del conocimiento que adquieren. Que ese conocimiento no se les quede sólo en la cabeza, inerte e inactivo; que no se les olvide por falta de uso, sino que se vuelva actuante y potente en su vida fuera de las instituciones educativas.

UN MODELO PARA PENSAR LAS COMPETENCIAS

Como las competencias están relacionadas con el uso del conocimiento, algunas personas creen que orientar la enseñanza a las competencias es desvalorizar el conocimiento. Creen que enseñar para desarrollar mayores niveles de competencia es como un regreso al conductismo, y que se trata otra vez de insistir en las habilidades o destrezas en vez del pensamiento o el conocimiento. En un discurso fino sobre las competencias debe quedar claro que en ellas interviene centralmente el conocimiento en todas sus formas: los contenidos y las habilidades o destrezas, porque estamos hablando de competencias académicas. Estas se refieren directamente a los conocimientos matemáticos, físicos, químicos, biológicos y de todas las ciencias sociales y de las demás áreas del currículo. Otra cosa es que, además de este conocimiento con todos sus contenidos y sus habilidades o destrezas, las competencias agreguen una segunda dimensión de tipo actitudinal, afectivo, emotivo. Una persona competente se siente segura, tiene un autoconcepto positivo, le gusta atreverse a resolver problemas difíciles y superar retos relacionados con su competencia. Este segundo aspecto de la inclinación a trabajar en resolver problemas relacionados con el primer aspecto de los conocimientos es esencial para un discurso fino sobre las competencias académicas, en especial en las matemáticas, en donde la actitud suele ser de inseguridad, de miedo y hasta de odio a las matemáticas.

Hay un tercer aspecto del discurso de las competencias que quiero compartir, es el producto del trabajo con un grupo de colegas y estudiantes de posgrado en el Proyecto Cero de Harvard, dirigido por el profesor David Perkins, cuando ese grupo en el 1999 estaba elaborando unas teorías sobre lo que llamaban "disposiciones cognitivas". En el 2000 publicaron en inglés un artículo, del cual hice una adaptación al castellano en la revista *Horizontes Pedagógicos* de la Universidad Iberoamericana de Bogotá. Este tercer aspecto de las disposiciones cognitivas, que ellos llaman la "sensitividad", completa muy bien un modelo potente y fácil de recordar para lo que podemos entender por competencia académica.

Este modelo de las competencias, que yo llamo "la mesa de tres patas", se apoya en los tres aspectos mencionados: en el de los conocimientos, con sus contenidos conceptuales y sus correspondientes habilidades o destrezas, en donde podemos decir que está la pata de la aptitud o de los conocimientos; en el aspecto de las actitudes, emociones y sentimientos, en los que podemos decir que está la pata de la actitud o de la inclinación, y en una tercera pata de la sensitividad. Repasemos estos tres componentes que forman las tres patas de la mesa de las competencias, que creo que nos pueden servir más para explicar lo que entendemos por "competencia" que lo que el grupo de Harvard llama "disposición". En castellano, la disposición suena cercana al aspecto de actitud o de inclinación, de las emociones, los sentimientos, de lo socioafectivo. Esa sería la segunda pata de la competencia: la aptitud o inclinación. El tercer aspecto es la detección de oportunidades para el uso flexible y eficaz de los dos primeros aspectos: la sensitividad, y ese el aspecto nuevo en el que quiero profundizar.

Volvamos a la primera pata, que la constituyen los aspectos de la aptitud: los conocimientos en el sentido de los contenidos conceptuales y de las habilidades o destrezas. A los primeros se les llama "declarativos" porque los podemos declarar verbalmente; por ejemplo, en aritmética, saberse la tabla de multiplicar es un conocimiento declarativo; pero saber multiplicar dos números de varias cifras con el algoritmo usual: saber cómo se escriben los resultados intermedios como en una escalerita; saber dónde poner la raya y cómo sumar aunque falten números; eso es más un conocimiento procedimental. En el álgebra pasa lo mismo; algunas fórmulas se las aprenden de memoria los estudiantes, como los productos notables o la fórmula de las soluciones de ecuación cuadrática. Eso es conocimiento declarativo. Pero muchas veces los estudiantes no pueden decir en palabras lo que dice una fórmula, pero sí pueden transformarla: agrupar los términos semejantes, simplificarlos y obtener un resultado correcto. Eso es conocimiento procedimental. Ambas caras del conocimiento son importantes y ambas se incluyen en la pata de la aptitud; en cambio, la parte actitudinal, los aspectos afectivos y emocionales que queremos introducir en este discurso de competencias, se combinan en lo que nosotros llamamos "una buena disposición" para las matemáticas; este aspecto de la actitud o de la inclinación, en el sentido de que a uno le gusten las matemáticas, que a uno le llame la atención enfrentar el desafío de un problema difícil, que uno se sienta confiado en que lo puede resolver, y hasta lo haga por entretenimiento, es el aspecto que configura la segunda pata de la mesa de las competencias.

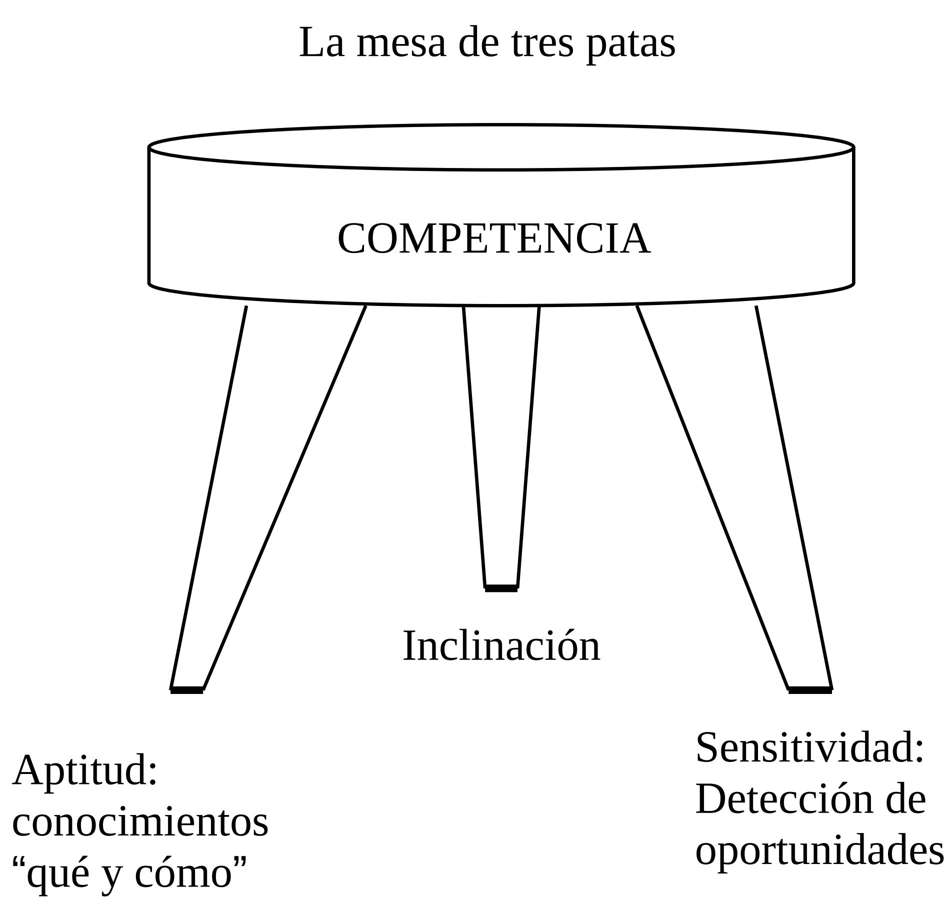
A veces he visto a un estudiante de esos a quien sus profesores consideran que no le gustan las matemáticas, que es "malo para las matemáticas"; se sube al bus del colegio y, ¿qué hace? Sudokus. Yo pienso: "Algo pasa aquí, ¿no?" Es verdad que haciendo sudokus ese estudiante no aprende gran cosa de matemáticas, pero muestra que sus problemas en la clase no se deben a que él no tenga una actitud positiva hacia las matemáticas. Se tienen que deber a otra cosa, porque para completar el sudoku uno ve que ensaya, conjetura, verifica, cambia los números, combina distintas informaciones matemáticas y eso muestra una inclinación, una actitud positiva hacia las matemáticas que podríamos aprovechar. Algo parecido le podríamos decir a los profesores de español y literatura, o de lengua castellana o lengua materna, como la llamen en cada colegio: usted no me puede decir que una niña no sirve para esta asignatura de lenguaje si yo la veo hacer crucigramas, si a ella le gusta hacer las "sopas de letras", si llena folletos completos de juegos de palabras. ¿Cómo me va a decir usted que no tiene una actitud positiva hacia el lenguaje? Ahora vemos a los jóvenes chateando en el computador, o por el blackberry, o enviando mensajes de texto con el celular a altas velocidades y con unos mensajes rapidísimos con palabras y abreviaturas que no entendemos, y después nos quejamos de que no leen ni escriben. Quejémonos de otras cosas, pero es obvio que sí leen y escriben, y muy rápido, y que muestran una inclinación o actitud positiva hacia la lectura y la escritura, al menos de ese tipo de textos.

Como vimos, el grupo de David Perkins propone una tercera idea clave para conceptualizar la competencia, y es que si esta consisteen pasar del conocimiento acumulado en el cerebro, en la mente, el que ellos llaman "conocimiento inerte", a que ese conocimiento se use en la vida real, en la vida cotidiana, y se aplique a problemas nuevos, aunque se tengan la aptitud o los conocimientos y la actitud o la inclinación, todavía no es suficiente. Para que un estudiante pueda pasar del conocimiento puramente escolar —o más bien "escuelero"— que se queda inerte en su cabeza, al conocimiento vital, potente y actuante, hace falta una tercera pata que llamamos "la sensitividad". Se trata de una sensitividad para detectar las oportunidades de utilizar flexible y eficazmente el conocimiento. Yo la comparo con un radar para saber que aquí, en este momento, para enfrentarme a esta situación o a este problema de la vida real, me sirve algo de lo que aprendí en el colegio.

En resumen, si se tiene el conocimiento, la inclinación y la sensitividad, ya tenemos la competencia. Si falta alguno de los tres aspectos, todavía no. Porque no solamente se trata de tener la aptitud o el conocimiento, sea de contenidos o de habilidades; no solo se trata de tener la actitud positiva, la inclinación, sino que también se necesita utilizar rápida y exitosamente el radar de la detección de oportunidades. Eso es la sensitividad a la ocasión de utilizar en este momento los conocimientos que tengo y que me gusta utilizar.

El modelo de la mesa de tres patas es sencillo y fácil de recordar y queda muy completo con solo tres componentes. Por eso el modelo me gusta mucho. En la primera pata está lo de siempre: aptitud, conocimientos, conceptos, contenidos, objetivos, logros, habilidades, destrezas, llamémoslos como queramos. De todas maneras, esa primera pata de la mesa no se puede olvidar; en ella hemos estado trabajando siempre en la educación y algo sabemos sobre cómo reforzarla. Pero ahora le añadimos la segunda pata, la de la actitud o inclinación, que tiene que ver con un cierto entusiasmo, con un gusto, con un autoconcepto positivo respecto al uso de esos conocimientos. Este punto es delicado. Muchas veces hay diferencias de género entre los mejores estudiantes de matemáticas en los cursos superiores: casi siempre hay más muchachos que niñas entre los mejores alumnos de cálculo, y eso se ha visto en muchos países. Se ha comprobado que hasta el mismo profesor de matemáticas les hace las preguntas difíciles a los muchachos, y a las niñas les pregunta cosas que se pueden responder de memoria. Está transmitiéndoles a las niñas una especie de actitud de que ellas no son muy buenas para pensar en matemáticas, que eso no es para ellas. Lo peor es que llega la niña a la casa un poco frustrada con las matemáticas, y la mamá le dice: "tranquila mijita que yo también era bruta para las matemáticas, y mire lo bien que me ha ido; así que no se preocupe." O le dice: "cuidado mijita, que si usted es muy buena para las matemáticas, ojo que no consigue novio." Sin una actitud e inclinación positiva hacia las matemáticas puede que la niña sepa mucho y saque buenas notas, pero no va a ser competente.

Por no atender a esta segunda pata de la actitud o inclinación, la cultura escolar y la cultura doméstica van acumulando en la mayoría de las niñas, y en los muchachos que inicialmente aprenden más despacio que el promedio, una actitud que en psicología se conoce como el sentimiento de incapacidad aprendido (*"learned helplessness"*). Para ponerla en una sola frase, es la actitud que toman muchas niñas en álgebra y en cálculo: pedirle al novio que les haga los problemas. Es muy



Modelo de la mesa de tres patas que explica el concepto de competencia.

difícil quitar ese sesgo cultural, pero si los docentes, mamás y novios logran evitar ese sesgo, muchas niñas entrarían a las carreras de matemáticas y resultarían tan buenas o mejores que los muchachos. Hay que trabajar intencionalmente este problema de la segunda pata de la mesa también como un problema de género en la educación matemática.

EL CUENTO DEL "AVERAGE"

Me falta explicar un poco más la tercera pata de la mesa, la de la sensitividad. Yo puedo saber todos los conocimientos que necesito, y me pueden gustar mucho las matemáticas; pero si no me doy cuenta de que algo que aprendí en clase es lo que me sirve en este momento, no soy competente en matemáticas. Lo grave es que no sabemos cómo se desarrolla ese radar para detectar la oportunidad de utilizar lo que aprendimos. Eso lo veo muy claro con las fracciones. Voy a poner un ejemplo que es fácil de seguir aquí en Barranquilla, aunque en Bogotá pocos profesores me lo entienden. Supongamos que un muchacho de 5° haya aprendido bien a sumar fracciones de distinto denominador. También se sabe la fórmula del promedio de dos números: (p+q)/2. El domingo va a ver un partido de béisbol, el tercero de una serie, y quiere calcular el promedio de bateo, que llamamos el *"average"* de su bateador favorito. En el primer juego bateó tres hits en cinco entradas y en el segundo juego bateó dos hits en cuatro entradas. El muchacho escribe "3/5 + 2/4".

¿Cómo calcula nuestro joven aficionado cómo va el *average* de su bateador favorito? Pues suma los numeradores y suma los denominadores y le da 5/9. Divide en la calculadora o en el celular y le da el average 0.555. Perdón, profesores de fracciones de 5°, pero así es también la manera como yo calculo el *average*: sumando numeradores y denominadores; eso me da cuántos hits lleva el bateador en cuántas entradas, y aquí me da cinco en nueve, ¿o no? Luego uso las tres primeras cifras del resultado que me da al dividir con la calculadora. Pensemos en nuestro joven aficionado. Si su radar mental le hubiera dicho que utilizara la suma de fracciones que aprendió en clase, le hubiera dado 22/20, o sea once en diez. ¡Imposible! ¿Cómo va a haber bateado once hits en diez turnos al bate?

Ahora supongamos que su radar mental le hubiera dicho que utilizara la fórmula del promedio de dos números, (p+q)/2. Entonces le hubiera dado once en veinte, que también está mal. No sé si alguien piensa que la fracción 5/9 es equivalente a 11/20, pero ciertamente el bateador lleva cinco en nueve turnos, lo que da 0.555, que es más que 0.550. Afortunadamente, lo que nuestro joven aficionado aprendió en clase sobre sumar fracciones, o lo que aprendió sobre promedios, no se lo detectó el radar, y por eso utilizó lo que yo llamo "la suma a la brava". Para lo que él tiene inclinación, al menos en la parte que a él le gusta del tema de las fracciones en la vida real, que es seguirle los *averages* a sus bateadores favoritos, no tiene ninguna importancia la suma de fracciones que le enseñamos en clase, sino la suma a la brava. Más aún, nosotros los docentes les prohibimos a los estudiantes sumar numeradores y denominadores y en la clase del lunes siguiente le recalcamos a nuestro joven aficionado que tiene que multiplicar numeradores y denominadores y luego los denominadores entre sí, o les enseñamos una fórmula para calcular el promedio. Yo me imagino que los alumnos aficionados al béisbol dirán: "Aquí no se trata de aprender matemáticas; se trata de darle gusto al profesor." Eso acaba con la actitud positiva hacia las matemáticas. Así tampoco se va a desarrollar nunca en el estudiante la detección de cuándo se usa la suma de numeradores y denominadores a la brava, cuándo se usa la calculadora, cuándo se usa la fórmula del promedio, y cuándo se usa esa suma tan rara que enseñamos los profesores con el máximo común denominador o con el mínimo común denominador; nunca me acuerdo; creo que ya hasta se me olvidó, y estoy seguro de que ahora con las calculadoras y las hojas de cálculo eso ya no sirve para nada.

Lo mejor del cuento es que ese mismo profesor de matemáticas de quinto grado acostumbraba al final de algunas clases ponerles a sus alumnos esos exámenes cortos que llamamos *"quices"*. Este profesor estaba corrigiendo los *quices* a toda la carrera, y para poner la nota del bimestre miró el primer *quiz* de nuestro alumno, y vio que tenía tres preguntas buenas de cinco, y en el siguiente, que era un *quiz* con diez preguntas de verdadero y falso, y vio que tenía siete buenas de diez. Entonces, ¿cómo calculaba la nota? Sumaba los numeradores y los denominadores a la brava y le daba diez

de quince. Le ponía 3.3 sobre 5; y nunca le confesó eso a los alumnos, porque ni siquiera se daba cuenta de que estaba utilizando exactamente la misma suma a la brava que les prohibía a sus alumnos de 5°.

La moraleja del cuento del *average* es pues que si no enseñamos muchos conocimientos relacionados con el tema, no uno solo, ni siquiera varios pero aislados; si no le ponemos mucho cuidado a las actitudes e inclinaciones de los alumnos, y si no les ayudamos a desarrollar la sensitividad de su radar para detectar qué, cómo y cuándo utilizar lo que saben, no estamos enseñando por competencias. El cuento de las competencias no es pues un cuento. No es asunto de cambiar las palabras o de cambiar los verbos. Es un tema pedagógico de fondo que nos exige reflexión, estudio, investigación y muchos cambios en la manera de planear nuestras clases, de enseñar y de evaluar.

UNA SEGUNDA APROXIMACIÓN A LA RESPUESTA

Por lo tanto, la competencia se puede describir más precisamente como un conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, afectivas y metacognitivas con tres aspectos que van mucho más allá de los objetivos específicos y de los logros e indicadores de logro. La competencia con sus tres aspectos nos señala tres tareas pedagógicas: el primer aspecto, la aptitud, nos recuerda muy precisamente que en cada tema general de las matemáticas hay un acervo muy rico de conocimientos y habilidades. El segundo aspecto, la actitud o inclinación, nos recuerda que debemos aprender a comunicar actitudes positivas hacia el tema, sentimientos de que a uno le gusta el tema, lo admira, lo quisiera ensayar, se siente retado por resolver problemas con lo que aprende y va elaborando un autoconcepto positivo y realista de su propia competencia en cada rama de las matemáticas.

Además, el tercer aspecto de la sensitividad nos recuerda que puede haber muchos conocimientos relevantes a muchas situaciones y a muchos problemas de la vida cotidiana, pero que no todo va con todo y que hay que trabajar explícitamente en relacionar temas y situaciones, métodos, algoritmos, formas de expresión, distintas tecnologías y tener el radar bien afinado para detectar la oportunidad de utilizar eficazmente lo aprendido en clase.

Si recordamos la anécdota del joven que hace sudokus pero sus profesores dicen que no le gustan las matemáticas, podemos pensar también en que una apropiada combinación de conocimiento, actitud y sensitividad logra que los estudiantes se interesen genuinamente por temas de matemáticas que no parecen muy relacionados con la vida cotidiana.

Les cuento una experiencia personal que me ocurre con frecuencia. De pronto se me ocurre algo de matemáticas a propósito de los bordes y rayas en el techo, de la perspectiva en los cuadros y las propagandas, y me pregunto: ¿cómo es aquello de que las paralelas se juntan en el infinito? ¿Se juntan, o no se juntan? ¿Por qué funciona el punto de fuga en la composición de un cuadro? Ensayemos a poner un punto en el infinito a ver qué pasa. Me pongo a hacer modelos mentales de la geometría proyectiva, o de las geometrías no euclidianas, o a ensayar geometrías finitas. Es una de mis maneras favoritas de divertirme cuando voy en un bus de Transmilenio, o en un bus intermunicipal, o en el avión, o estoy esperando en el aeropuerto o donde el médico. Veo que estoy combinando los conocimientos, la memoria, lo cognitivo y la psicología cognitiva con lo socioafectivo, lo emocional, lo psicomotor y con la reflexión metacognitiva de estar detectando continuamente oportunidades de utilizar las matemáticas que sé, o de aprender o inventar las que no sé.

COMPETENCIA Y TRANSFERENCIA

Esos tres aspectos de la competencia tienen que estar bien articulados para facilitar el desempeño, pues la sola competencia como atributo potencial de una persona, si nunca pasara al desempeño en situaciones reales, tampoco serviría gran cosa. El estudiante tiene que pasar el conocimiento que tiene en su cabeza a la orientación flexible y eficaz de sus acciones en la vida cotidiana. Tiene que transferir lo que aprendió de una tarea o situación que haya visto en clase a una nueva que no sea de las que vio en clase. Ese paso es el problema de la transferencia, como lo llamaban en psicología: por qué algunos conocimientos se pasan o transfieren a contextos nuevos y otros no.

El problema de evaluar las competencias tiene esa dificultad adicional a la que ya tiene el problema de medir los conocimientos, las habilidades o las aptitudes. Ya es difícil medir los conocimientos, sobre todo si se trata de medir la comprensión a fondo de los conceptos y las teorías y no sólo el recuerdo de definiciones y leyes o proposiciones de la teoría aprendidas de memoria. Pero aun suponiendo que podamos medir esa comprensión, para medir las competencias hay que medir además la capacidad de transferir esa comprensión a la solución flexible y eficaz de problemas nuevos en contextos nuevos. Esa es la diferencia, y es muy delicada.

Cuando el ICFES cambió el examen de estado hace diez años y anunció que había modificado las preguntas de conocimientos y aptitudes a competencias, resultó que muchos colegios que siempre estaban en los primeros puestos empezaron a bajar, y aparecieron otros colegios que apenas se conocían en su ciudad, ahora con puntajes mejores que los de los colegios de siempre. Se empezó a ver que no era lo mismo ser un buen colegio que tener un buen puntaje en el ICFES. Había que mirar examen por examen para ver qué preguntaban y cómo. Había que mirar caso por caso a ver cuántos bachilleres se presentaban, cómo se distribuían, a qué universidades entraban. A muchos colegios privados les fue peor que a algunos públicos. A muchos colegios de provincia les fue mejor que a muchos de Bogotá. Un buen colegio muy poco conocido puede desarrollar más competencias en sus alumnos que otro más famoso. Un colegio puede subir mucho sus puntajes en competencias a pesar de que durante muchos años no había podido mejorar sus puntajes en contenidos.

Por otro lado, el ICFES no pretendía medir todas las competencias, ni siquiera la mayoría; solo pretendía medir algunas en unas pocas áreas. Pretendía medir solo tres tipos de competencias: las interpretativas, las argumentativas y las propositivas. Yo creo que con preguntas cerradas no se pueden medir competencias propositivas, pero sí algunas de las interpretativas y de las argumentativas. Me gustan mucho esas dos competencias, inclusive en matemáticas, y me parece que sí se pueden medir por preguntas cerradas. Si a ustedes les ponen por escrito distintas interpretaciones bien escogidas de un mismo texto, fórmula o diagrama, les pueden preguntar cuál de estas interpretaciones es la mejor en tal sentido, y evaluar su competencia interpretativa. Lo mismo si les ponen una tesis o proposición y varios argumentos para respaldarla. Ustedes pueden escoger una u otra argumentación, ver si es válida o no, y entre las válidas, analizar cuál es más fuerte que cuál, y tratar de ordenar esas razones de mayor a menor fuerza argumentativa.

Nosotros podemos hacer todo esto en nuestras clases y exámenes de matemáticas, pues decimos que en matemáticas es dónde aprendemos a interpretar palabras raras con definiciones precisas y fórmulas oscuras con enunciados claros, y en donde aprendemos a argumentar rigurosamente cualquier afirmación, remitiéndonos a las definiciones, a los axiomas o a los teoremas ya demostrados. Si tomamos en serio nuestra labor como docentes, estamos ya contribuyendo con las matemáticas al desarrollo de las competencias interpretativa y argumentativa en nuestros estudiantes, y no solo en matemáticas.

No estoy de acuerdo con el ICFES en que en los exámenes internacionales, como TIMSS o PISA, y en las pruebas Saber o en el examen del ICFES o Saber-Once —y así se lo dije públicamente al doctor Daniel Bogoya cuando era director del ICFES— se crea que se están midiendo también las competencias propositivas. Ciertamente estas son las más importantes, pero no se pueden medir con una pregunta cerrada de escogencia múltiple. Si ya en la prueba escrita me dan las cinco interpretaciones a, b, c, d, e, para que yo raye la tarjeta, ¿dónde puede estar lo propositivo? El que escribió la pregunta fue el que propuso, pero yo no puedo ya proponer nada.

Esa prueba no me está midiendo la competencia propositiva; ni siquiera la interpretativa propositiva. Lo mismo la argumentativa. Una cosa es que la prueba evalúe mi competencia para valorar y ordenar los argumentos; eso es importantísimo y ciertamente necesitamos desarrollar y medir competencias argumentativas en todas las áreas y, sobre todo, en matemáticas. Pero ni siquiera en la argumentación se pueden medir competencias propositivas con preguntas cerradas de escogencia múltiple. En ese caso, la competencia argumentativa propositiva se pondría en juego cuando yo tenga una tesis que proponer y la trate de defender con mis argumentos. Pero tendría que inventar y formular mi tesis y luego inventar y formular mis propios argumentos para defender mi propia tesis. ¿Cómo va a medir usted eso en un examen de pregunta cerrada? No creo que se pueda. En cambio, aunque es difícil, nosotros los profesores y profesoras sí podemos medir competencias propositivas en clase, pero el ICFES y las pruebas Saber no. Por otro lado, eso no es razón para no tratar de desarrollar competencias propositivas en nuestros alumnos, aunque el ICFES no las pueda medir. Nosotros sí podemos trabajar en desarrollar competencias interpretativas, argumentativas y propositivas en nuestros alumnos y alumnas.

COMPETENCIAS MATEMÁTICAS Y COMPETENCIAS CIUDADANAS

Al comienzo de este evento me gustaron mucho las palabras del doctor Vives y las del doctor Gutiérrez de Piñeres, pues sus intervenciones mostraron claramente que ellos están preocupados porque haya un aumento del nivel de competencias ciudadanas y cívicas en los niños y niñas del Atlántico, y que tenían mucho interés en que les respondiéramos la pregunta: ¿en qué pueden contribuir las matemáticas al desarrollo de las competencias ciudadanas? Esa pregunta es fuerte y difícil de contestar.

Si nos fijamos en la manera de actuar de la mayoría de nosotros los profesores y profesoras de matemáticas, en la manera como nosotros utilizamos la argumentación y la demostración, y en la manera como respondemos a las preguntas de los estudiantes, podríamos comprobar algo muy serio e inquietante y que es muy difícil

Doctor Carlos Eduardo Vasco cuando se dirigía a los maestros, investigadores y empresarios en la Universidad del Norte.

y doloroso de aceptar. Resulta que la gran mayoría somos totalmente autoritarios y no nos damos cuenta. No estamos comunicando los valores de la democracia, la tolerancia, el respeto a la diferencia. Un estudiante pregunta: “¿por qué menos por más da menos?” Respuesta: “porque así es y punto.” Otro estudiante se atreve a preguntar: “¿por qué para dividir quebrados hay que multiplicar en cruz?” Respuesta: “porque así es y punto.” Algunos estudiantes se aprenden la regla de que para dividir quebrados hay que multiplicar en cruz, pero no saben dónde poner cada resultado. Otro estudiante pregunta: “¿y en dónde pongo el primer producto del de arriba por el de abajo?” El profesor se molesta y dice bastante bravo: “¡Obvio que es arriba!” No es tan obvio. Lo que sí es obvio es que le está diciendo “bruto” al estudiante sin darse cuenta, pero el estudiante sí se da cuenta. Un estudiante de álgebra me decía que su profesor se la pasaba todo el tiempo diciéndoles brutos a todos los estudiantes de todas las maneras posibles.

El profesor de matemáticas sin darse cuenta está contribuyendo al autoritarismo, disminuyendo en sus estudiantes el aprecio por la democracia, por el debate público, y aumentando la docilidad de los jóvenes a todo lo que digan los tecnócratas y los políticos. ¡Competencias ciudadanas en el aula de matemáticas, señoras y señores! ¿O falta de ellas?

Eso es muy triste y trágico, porque las matemáticas podrían más bien contribuir positivamente a las competencias ciudadanas; podrían ser una protección contra el autoritarismo, un ejemplo de democracia, un entrenamiento para el debate público y un baluarte de la autonomía del estudiante. Las matemáticas creativas podrían contribuir muchísimo a las competencias ciudadanas con su manera de hacer una propuesta: ármese un modelo en la cabeza; sepa que ese es apenas un modelo, pero que hay otros; no trague entero; argumente teóricamente; fíjese si su argumento es válido o no; un ejemplo no prueba, dos tampoco, pero un contraejemplo sí refuta. ¡Eso es contribuir al desarrollo de las competencias ciudadanas en el aula de matemáticas! Pero creemos que perdemos mucho tiempo si procedemos así, y preferimos el autoritarismo.

Para la relación entre la competencia argumentativa en matemáticas y las competencias ciudadanas aprovecho que hay varios ingenieros, físicos y matemáticos aquí; dicen que la diferencia entre los ingenieros, los físicos y los matemáticos es muy fácil de ver con la argumentación. Piensen en los números 3, 5 y 7. El número 3 es primo, el 5 es primo, y el 7 es primo; entonces, el ingeniero salta y dice: “todos los impares son primos”. El físico, dice: “no, un momentico; espere a ver: el 3 es primo, el 5 es primo, el 7 es primo, el 9 no estoy muy seguro, el 11 sí es primo y el 13 también. Entonces el 9 debe ser un error de observación y todos los impares son primos”. En cambio el matemático dice: “el 3 es primo, el 5 es primo, el 7 es primo, el 9... ¡Ah!, se me cayó la conjetura”.

Hay por lo menos tres maneras distintas de argumentar en cuanto a la teoría; de trabajar en torno a la práctica; de evaluar la observación y la medición; de apreciar la aproximación y la exactitud. Al menos hay aquí tres tipos de razonamiento: el deductivo formal en matemáticas, el inferencial inductivo en física y el pragmático en ingeniería. No se trata de enseñar solo uno, sino de saber que hay varios tipos de razonamiento y saberlos utilizar en las situaciones en que el uno es más apropiado que el otro. Más aún, hay otro modo de razonamiento que se llama "abductivo", que es más importante que el deductivo y que el inductivo en la etapa de invención de nuevas teorías en matemáticas, en física o en otras ciencias y hasta para leer novelas policíacas. El razonamiento abductivo es el arte de inventar conjeturas y buscar distintas maneras de confirmarlas o refutarlas. Pero no enseñamos razonamiento abductivo porque ni siquiera sabemos que existe.

Los matemáticos creemos que los otros razonamientos no sirven, y que lo que pasa es que los profesionales de otras áreas no saben razonar deductivamente, teóricamente, rigurosamente. Pero el asunto de la competencia argumentativa es distinto. Según el modelo de tres patas, ser competente en la argumentación es: primero, conocer muchos tipos de razonamiento y saberlos usar; segundo, sentirse inclinado a razonar de distintas maneras y con distintas personas, y, tercero, tener un buen radar de mucha sensitividad para detectar cuándo y cómo se debe utilizar uno u otro tipo de razonamiento.

Los colegas del Ministerio de Educación que trabajaron con el grupo de competencias ciudadanas, que dirigió durante muchos años Rosario Jaramillo Franco, definen las competencias ciudadanas y las distribuyen en cuatro tipos de competencias: cognitivas, emotivas, comunicativas e integradoras; además, sitúan los conocimientos como condición necesaria pero no suficiente para las competencias ciudadanas. En ese grupo son muy conscientes de la diferencia entre los conocimientos de cívica y las competencias ciudadanas. En un examen de cívica un estudiante universitario puede saber perfectamente qué son los concejos, las asambleas, el congreso, y distinguir entre senadores y representantes a la cámara. ¿Eso quiere decir que va a votar responsablemente? No. Ni siquiera se relacionan esos conocimientos con que vaya a votar o no, o con que aprecie el sistema democrático o no.

Por lo tanto, ese grupo sabe bien que los conocimientos de cívica no pasan tan fácilmente a ser competencias ciudadanas, pero que es muy importante tenerlos. Por eso llaman al conocimiento "condición necesaria pero no suficiente" para las competencias ciudadanas. Nosotros diríamos que la mesa de las competencias, si tiene solo esa pata de los conocimientos, se cae; pero sin ella, aunque estuvieran las otras dos, también se cae. Por ejemplo, si usted no sabe qué es la tutela, ni en qué casos sirve, ni cómo se interpone, ¿cómo va a utilizar ese mecanismo constitucional? Si uno no sabe qué son los derechos de tercera generación y no sabe que en la Constitución Política se contemplan las acciones populares y de grupo, no puede utilizar este nuevo tipo de acción ciudadana. Pero algunas personas que lo saben tampoco se sienten competentes para iniciarlas. En ese caso se ve muy clara la diferencia entre conocimiento y competencia.

Hay otros tres aspectos que es interesante analizar en la relación entre competencias matemáticas y competencias ciudadanas. El primer aspecto es la división entre competencias cognitivas, emotivas y comunicativas; el segundo es la noción de competencias integradoras, y el tercero es la propuesta de que no haya horas aparte para desarrollar competencias ciudadanas, sino que todos los docentes de todas las áreas somos responsables de formar a nuestros estudiantes en competencias ciudadanas. Empecemos por el último punto.

El grupo de competencias ciudadanas prefiere que no haya unas clases fijas dedicadas a ellas ni un profesor o profesora que los alumnos identifiquen como responsable de esa área. Por eso no hay —ni debe haber— un horario como: "de 8:00 a 9:00 a. m.: competencias ciudadanas, salón 201." Si se les asigna una hora fija a las competencias ciudadanas, están descalificándolas. El solo hecho de que a un alumno le digan que de 8:00 a 9:00 hay competencias ciudadanas hace que él ya vaya prevenido. En la universidad pasa lo mismo; en noveno o décimo semestre de muchas carreras hay ética profesional, que para los estudiantes es "una costura". No le ponen cuidado, saben que les tienen que poner 5 en esa materia, y llegan muy prevenidos a la clase de ética profesional. Además, ¿qué aprenden ahí? Yo creo que en ética profesional se aprende más bien cómo violar la ética sin que lo metan a uno la cárcel. Si hay en una universidad un decano del medio universitario, o un decano de estudiantes, o un capellán, y le asignan el curso de ética profesional, ya los estudiantes ven que ese curso les va a servir muy poco o nada para su ejercicio profesional, porque lo que aprenden ahí no se trasfiere para la vida real. Esperan oír sermones muy poco realistas de parte de personas que no conocen el mundo de las profesiones, los negocios, la salud, la justicia, la política, las licitaciones, la corrupción. Lo mismo pasa en los colegios. Esta idea de las competencias ciudadanas como transversales a toda la educación resulta muy interesante para nosotros, tanto para refinar nuestros conceptos sobre qué es competencia en matemáticas como para ver cuáles de las competencias matemáticas apoyan las competencias ciudadanas.

Las competencias ciudadanas no son pues para verlas en un área aparte; son responsabilidad de todos los profesores de todas las áreas, y los docentes de matemáticas no podemos decir que eso es responsabilidad de todos, menos de nosotros. En primaria es más fácil aceptar esta responsabilidad conjunta, porque el maestro tiene a su cargo todas o casi todas las áreas y puede integrar mejor competencias diferentes en sus actividades. Pero en secundaria es mucho más difícil, porque los docentes de matemáticas nos sentimos inseguros y poco preparados para ser profesores de competencias ciudadanas, de ética, de moral y ciudadanía. Pensamos que eso le toca a un profesor que sepa enseñar esos temas tan delicados, y si no hay ninguno responsable de hacerlo, que eso le toca al profesor de sociales. Pero si reflexionamos un poco, vemos que de todas maneras, y generalmente sin darnos cuenta, dentro y fuera de clase los docentes de matemáticas estamos transmitiendo y reforzando muchos valores, actitudes y comportamientos relacionados con las competencias ciudadanas.

En el prólogo del libro de matemáticas para 6º y 7º grados del Colegio Mayor de San Bartolomé, del que les hablé antes, expliqué en qué sentido el profesor de matemáticas enseña ética y ciudadanía sin proponérselo: por su actitud ante el conocimiento, por su actitud ante la argumentación, por su respeto a las preguntas y sobre todo por sus reacciones ante los errores del estudiante. Puse algunos ejemplos para ilustrar cómo transmite valores civiles y políticos por el solo hecho de escoger unos problemas de aritmética en vez de otros. Por ejemplo, uno escoge problemas en los que se gana mucho dinero a través de comprar y vender; problemas sobre el cobro de intereses por los préstamos, o sobre el salario mínimo de los trabajadores, en donde aparece como natural que un obrero gane $20.000 pesos diarios sin pensar que el dueño de la constructora del mismo edificio puede estar ganando $2.000.000 diarios. Según los valores que refuerza a través de los problemas que escoge, el docente de matemáticas está enseñando en un sentido o en otro ética, moral y competencias ciudadanas.

Si no estamos muy convencidos, recordemos a ese profesor que sabe muchas matemáticas, pero todo el tiempo les está diciendo brutos a los estudiantes en todas las formas posibles. Solamente con la actitud que uno tiene ante las diferencias en los ritmos de aprendizaje o ante las ideas raras que se les ocurren a los niños está transmitiendo valores ciudadanos o anticiudadanos. Sobre todo las niñas son muy hábiles en leerle a uno el más mínimo movimiento de la ceja izquierda. Veamos un ejemplo de segundo de primaria. La mayoría de los niños tienen dificultad para aprenderse las tablas de multiplicar del 7 y del 8. Usted pregunta: “¿7x8?” No es raro que le contesten “63”. Piense cómo reacciona usted. Como no nos estamos mirando en el espejo, no caemos en la cuenta de cómo torcemos la ceja izquierda. En los cursos de formación continuada les digo a los docentes que ensayen lo siguiente: cuando usted pregunte: “¿7x8?”, y una niña diga “56”, hágale la misma torcida del ojo izquierdo. Apuesto a que la niña cambia la respuesta. Ensáyenlo y verán quién gana la apuesta.

No nos estamos dando cuenta de que con nuestra actitud ante el error, ante las propuestas alternativas que se les ocurren a los estudiantes, ante la argumentación, y con nuestras preferencias inconscientes sobre la selección de problemas, estamos continuamente cruzándonos con las competencias ciudadanas, y muchas veces yendo en contra de lo que decimos que deberíamos enseñar en esta materia.

Estas ideas sobre la relación entre competencias matemáticas y competencias ciudadanas me confirman en mi propuesta de que no debemos asumir una actitud de rechazo y desconfianza acerca del discurso de competencias. No las tomemos desde el punto de vista de competir, de la lucha y de la competitividad, sino desde el punto de vista de cooperar, de ser competentes. Refinemos un discurso potente sobre las competencias, sobre la necesidad de potenciar nuestras capacidades, las de nuestros estudiantes y las del país, sean las que sean: ante todo las competencias ciudadanas, pero también las económicas, científicas, matemáticas, artísticas y literarias, para hablar de las del maestro Gabo y de las de Shakira y Juanes y, por qué no, también de las laborales.

Por eso en cada una de las áreas tenemos que formular con cuidado las competencias que queremos desarrollar, y pensar cómo vamos a impulsarlas y cómo vamos a evaluarlas. No va a ser el mismo discurso en todas las áreas; en lenguaje es más claro lo que significan las competencias interpretativas, argumentativas y propositivas, aunque el ICFES no pueda evaluar esta última, pero hay que especificar en forma diferente qué significan esas tres competencias en las demás áreas, en particular en las matemáticas. Las descripciones de las competencias y las maneras de enseñarlas y evaluarlas tienen que ser distintas en matemáticas, en ciencias sociales y en ciencias naturales, porque tienen tres epistemologías diferentes.

LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS Y EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS

Ya he mencionado tres tareas difíciles y retadoras para la pedagogía y la didáctica de cada área, en particular, la de las matemáticas: describir con cuidado cada competencia y sus niveles de desarrollo; planear formas de enseñar que fomenten el desarrollo de esa competencia, y evaluar el nivel de competencia que van alcanzando los estudiantes.

Estas tareas son muy difíciles en todas las áreas; en la "educación matemática", que a veces se llama también "didáctica de las matemáticas" o "matemática educativa", para hacer un buen trabajo en nuestra área uno tendría que saber pedagogía y didáctica; tendría que saber algo de psicología, de sociología, de antropología y de lingüística; y como si fuera poco, tendría que saber matemáticas, historia de las matemáticas y epistemología de las matemáticas. Ojalá supiera uno también algo de lógica, de informática y de neurociencias. Es imposible para una sola persona haber terminado siquiera dos o tres pregrados en estas áreas, y mucho menos tener maestrías o doctorados en más de una de ellas. Por eso no puede ser un trabajo factible para una o dos personas. Hay que tener un grupo de trabajo diversificado y entusiasta y varios asesores y asesoras de distintas especialidades, muy calificados pero capaces de trabajar en equipo con personas que saben mucho menos.

Un primer problema difícil de resolver es que las matemáticas, como ciencias formales que estudian los modelos mentales y las teorías, tienen una epistemología muy distinta de la de las ciencias que tienen una relación directa con la realidad. El dr. Carlo Federici, mi maestro, llamaba a las ciencias naturales y a las ciencias sociales y humanas "ciencias fácticas", para diferenciarlas de las ciencias formales, como las matemáticas y la lógica. Por ejemplo, si usted hace una conjetura en física, eso quiere decir que usted tiene su modelo mental, su teoría muy precisa con sus leyes y sus fórmulas; echa a andar su modelo, y con la ayuda de la teoría predice que va a pasar tal y tal cosa. Pero si lo que usted predijo no sucede en la realidad, peor para el modelo y la teoría: hay que cambiarlos o descartarlos. En cambio, en matemáticas, si usted se inventa un buen modelo y una buena teoría, y resulta que eso no sirve para nada en la realidad externa y no predice ningún resultado que pueda verificarse o refutarse en esa realidad, peor para la realidad. Yo sigo tan tranquilo jugando con mi modelo mental y mi teoría matemática.

Ya llegará el momento en que algún físico que sepa muchas matemáticas les va a encontrar aplicaciones fácticas a ese modelo y a esa teoría. Por ejemplo, hacia el año 1890, David Hilbert inventó una teoría aparentemente disparatada y claramente inútil. Comenzó con la idea de que los espacios vectoriales de tres dimensiones, tan útiles en física, se podían extender a cuatro, cinco, seis o "n" dimensiones, con "n" mayor que tres, y de pronto se le ocurrió la idea de ponerles infinitas dimensiones a sus espacios vectoriales. Todo el mundo decía: "¡qué cosa tan inútil!". Ciertamente parecía un disparate ponerse a elucubrar y especular sobre espacios vectoriales de dimensión infinita. Pero sólo treinta años más tarde ya estaban desarrollando Heisenberg y Wigner los espacios vectoriales de dimensión infinita para la mecánica cuántica; por lo tanto, es muy distinta la epistemología de las matemáticas a la epistemología de la física, y eso nos obliga a formular las competencias matemáticas de manera diferente a las de las demás áreas.

Aunque para el discurso general de las competencias sí podemos aprender mucho de lo que hagan los grupos de competencias ciudadanas, los de competencias en ciencias sociales y los de ciencias naturales, para las tres tareas mencionadas respecto a las competencias específicas en las matemáticas no vamos a poder aprender gran cosa de ellos, porque la epistemología de las matemáticas es distinta de la de las ciencias naturales y de las sociales.

Una manera de iniciar las tres tareas de formulación de competencias en matemáticas, su enseñanza y su evaluación, podría ser una propuesta que también hay en psicología para estudiar cómo se desarrolla un joven desde que es un novicio inexperto hasta que se vuelve experto. Me gusta mucho ese paralelo porque uno de los primeros debates que hubo en contra de los estándares fue que en el Ministerio los llamaron “estándares de excelencia” y yo sostuve que para la educación básica y media no se trataba de eso. En estos niveles de la educación no vamos a formar matemáticos expertos, matemáticos de excelencia; ningún estudiante normal va a ser experto en matemáticas con solo once años de estudio; tal vez algún genio, por allá del Instituto Merani en Bogotá o del Colegio Humboldt en Barranquilla, puede llegar a producir matemáticas a nivel de excelencia, pero el 99,99% de nuestros estudiantes normales van a ser apenas principiantes en las matemáticas, ojalá competentes, pero todavía no expertos. Unos pocos podrán estudiar luego la carrera de matemáticas puras y después empezar un posgrado, hacer una investigación original y sacar un Ph. D., así sea en álgebra abstracta e inútil. Ya sería un experto en esa área de las matemáticas, pero no en 11°.

Por eso no podemos poner como una meta de la educación básica y media sacar estudiantes expertos en matemáticas. Digamos que aspiramos a que lleguen a ser competentes, a que se defiendan más o menos bien con las matemáticas elementales, a que se sientan bien con ellas y a que las utilicen flexible y eficazmente en la vida cotidiana. Eso no es lo mismo que proponer estándares de excelencia para expertos, que sí los puede tener alguna universidad que se quiera acreditar voluntariamente como de excelencia o de alta calidad; pero pretender que en los colegios queramos sacar expertos, sería un error. En los colegios queremos que sean competentes matemáticamente para la vida real.

Entre el novicio y el experto podríamos establecer cinco niveles, con la persona competente en el nivel intermedio. Podríamos insertar un segundo nivel de practicante para los que van obteniendo un relativo nivel de comprensión y manejo de la información matemática; luego seguiría la persona competente y luego un cuarto nivel que podríamos llamar “la persona proficiente” y, finalmente, el nivel del experto. Llegar al nivel intermedio, a ser competente, sería el nivel apropiado para la educación media. También podríamos distinguir siete o nueve niveles entre el novicio y el experto, pero cinco niveles son suficientes.

Además, así como tenemos que desglosar al menos cinco niveles entre el novicio y el experto, en cada competencia matemática específica tenemos que ver cuáles serían los niveles intermedios a los cuales vamos a intentar llegar antes de pensar que el estudiante de once ya sea competente en ese sentido específico. Si empieza como novicio y va subiendo a practicante y a competente, todavía le quedará mucho espacio más tarde para seguir hacia adelante; ahora debemos desglosar unos cuatro o cinco niveles de competencia más finos entre el principiante y el competente.

No creo que se puedan distinguir diez u once niveles intermedios entre el novicio y el experto. Por eso logramos con Asocolme y con los grupos de las universidades que el Ministerio no fijara estándares ni pusiera Pruebas Saber para primero y segundo grado, para que los niños pudieran disfrutar con los juegos matemáticos en sus tres primeros años sin ponerles estándares ni exámenes.

Podrían quedar cinco niveles de estándares para grupos de grados, como los hay ahora, en 3º, 5º, 7º, 9º y 11º, pero es posible que en algunas competencias matemáticas no haya sino tres o cuatro niveles. Primero se diseña una escalera con esos tres, cuatro o cinco escalones, y luego intentamos ponernos de acuerdo cuál de ellos vamos a ubicar como estándar para cada grupo de grados.

La escalera de tres, cuatro o cinco niveles es necesaria, porque si no hay escalera, no veo cómo podemos escoger un escalón como estándar intermedio. Solamente podríamos decir que el estudiante entra como novicio al comenzar la primaria y que salta a ser competente allá en 11°. Tendríamos once o doce años para ese salto, pero necesitamos algunos escalones intermedios para poder decir que cada estudiante va avanzando en los niveles de la competencia respectiva, en nuestro caso, en la competencia en el uso de los números fraccionarios.

Un desglose parecido debe hacerse para las distintas competencias respecto a los distintos tipos de pensamiento matemático o grupos de ellos. Para cada competencia específica, por ejemplo en la nuestra del manejo de los fraccionarios, tenemos que desglosarla en cuatro o cinco niveles intermedios. Hay que describir cada nivel con cuidado y luego distribuirlo en los grupos de grados de tercero a undécimo. La segunda tarea, igualmente difícil, es planear las maneras de enseñar en cada grado para que ojalá todos, o por lo menos la gran mayoría de los estudiantes, vayan subiendo de nivel de competencia en esa escalera. ¿Cómo enseñar por competencias?

En esa terminología también hay discusión entre los educadores. La expresión "por" les suena mal a muchos docentes. ¿Debemos decir que vamos a enseñar por competencias, en competencias, para las competencias? A mí tampoco me gusta mucho el "por", porque no dice gran cosa. Por eso, en vez de "enseñar por competencias" o "evaluar por competencias", yo prefiero decir "enseñar para el desarrollo de competencias" y "evaluar el nivel de competencia"; pero cada grupo puede escoger una terminología que capture su propio matiz. Lo importante es llegar a acuerdos no por cansancio o por frustración, sino como resultado de discusiones, ensayos y comparaciones con otras terminologías y con los usos y tradiciones de otros grupos de docentes.

ENSEÑAR PARA EL DESARROLLO DE LAS COMPETENCIAS

La segunda tarea difícil es la de planear cómo enseñar para el desarrollo de las competencias, o para el avance en el nivel de competencia. No hay recetas para lograrlo. Necesitamos reflexión, lecturas, experimentos de enseñanza, discusiones, propuestas e investigación.

Una de las maneras en las que he visto hasta ahora que sí se puede trabajar para el avance en el nivel de competencia de nuestros estudiantes consiste en ponerles más cuidado a las preguntas que ellos y ellas nos hacen en clase, en particular cuando nos preguntan para qué sirve algo que estamos enseñando. Los profesores de matemáticas somos bastante crueles con los estudiantes que hacen estas preguntas: "profesor, ¿para qué sirve la raíz cuadrada?" Una respuesta probable que puede recibir el estudiante que se atreve a hacer esa pregunta es: "usted váyase a sembrar papas al páramo, porque no sirve para las matemáticas."

A los docentes de matemáticas nos gusta contar un cuento de Euclides, según el cual un estudiante le preguntó para qué servía la proposición de geometría que estaba enseñando, y Euclides no le respondió nada, sino que le dijo a un ayudante que le diera una moneda al estudiante, que eso sí le servía para algo, pero que no volviera más a clase. Nos molesta que nos pregunten para qué sirven las matemáticas abstractas. Eso puede ser una actitud apropiada para algún matemático puro que esté inventando grandes abstracciones, pero no me parece apropiada para un docente de matemáticas de básica y media. Creo que los profesores de matemáticas necesitamos saber muy bien para qué sirve cada tema de las matemáticas que enseñamos. Afortunadamente, los racionales sirven para todo, pero no es fácil contestar para qué sirven los números irracionales, los complejos, los cuaternios de Hamilton o los octonios de Cayley. Dicen que los complejos sirven para la electricidad, el electromagnetismo y la mecánica cuántica, pero probablemente ninguno de nosotros conoce bien esas aplicaciones; y aunque las conociéramos, ni los estudiantes de primaria ni los de secundaria ni los de media las van a entender ni las van a utilizar.

Si vamos a desarrollar una competencia matemática específica en la básica y media, la pregunta “¿para qué me sirve eso?” tiene un gran valor, pues precisamente la competencia es para llegar al uso flexible y eficaz de ese conocimiento en la vida real. Por ejemplo, si a mí me pregunta un estudiante para qué sirve el álgebra abstracta que yo estudié en mi tesis de doctorado, no podría decirle para qué, y mucho menos acabando de decir que a mí el álgebra que más me gusta es el álgebra abstracta e inútil. Pero si no puedo contestar para qué sirve, no puedo pedir que la veamos en los colegios. Tenemos que ser consecuentes: si queremos enseñar un tema de matemáticas para el desarrollo de la competencia respectiva, tenemos que tener clara la relación entre ese tema y el uso que tiene en la vida real del estudiante. Por lo tanto tenemos que tener preparada una buena respuesta para el estudiante que se atreve a preguntarnos para qué sirve eso, y no despacharlo con cajas destempladas.

Respecto al álgebra abstracta, el programa del Decreto 080 de 1974 tenía una parte en 9° sobre grupos, anillos, cuerpos y espacios vectoriales. A muchos docentes todavía les gusta mucho el programa de 1974, que pronto va a cumplir cuarenta años, pero vamos a ver: ¿cuántos de nosotros estamos enseñando esos temas? Los docentes licenciados conocemos suficientemente algunas ideas de anillos, cuerpos y espacios vectoriales que se podrían trabajar en 10°, pero también sabemos que son tan abstractas que no vale la pena trabajarlas en la educación media, y que a la gran mayoría de los estudiantes no les van a servir para nada. Por eso no las trabajamos, aunque estén en el programa del 080 del 74.

Ensayemos con otra pregunta muy propia de 8°: ¿Para qué sirven los negativos? En Barranquilla nunca tenemos temperaturas bajo cero, que yo sepa; entonces, ¿qué les respondemos a los estudiantes? ¿Qué se metan entre el congelador? No basta decirles que los negativos les van a servir para que no los “rajen” en el examen final de 8º y 9º, o para aprobar la física de 10º. Tenemos que describir mucho más precisamente en qué consistiría una competencia matemática en el manejo de los números negativos enteros y racionales para los jóvenes de educación básica y media. Si no sabemos cómo se manejan los números negativos en la vida real por fuera de las instituciones educativas, ni siquiera cómo se manejan en física y química de décimo y undécimo, no podemos hablar sinceramente de que estamos enseñándolos para que nuestros estudiantes lleguen a ser competentes para manejarlos; más bien no deberíamos enseñar los negativos. Por eso todavía no he dicho si debemos intentar desarrollar la competencia de manejo de los racionales negativos o no; por ahora me he referido más bien a los racionales no negativos que llamamos “fraccionarios”.

No es fácil de describir ni siquiera la competencia en el manejo de los números enteros negativos. Para poner un ejemplo del uso de los enteros negativos en la vida cotidiana, recuerdo que una profesora de Cali trató de escribir ella misma una serie de problemas con números negativos. Encontró algunos problemas interesantes en unos textos españoles muy populares entre los docentes. En los edificios nuevos de Cali —y aquí en Barranquilla también pueden ustedes comprobarlo— algunos ascensores indican los parqueaderos de los sótanos con números negativos, como el primer sótano con −1 y el segundo con −2, y luego indican los pisos hacia arriba con números positivos. Esta profesora les puso a sus estudiantes de séptimo grado algunos problemas con enteros negativos y edificios con sótanos. Resultó que los problemas no salían, porque si usted está en el cuarto piso, y baja al sótano −3, reste a ver cuántos pisos bajó. Si restamos (+4) − (−3), nos da +7; pero hagamos la cuenta con los dedos: si bajamos del cuarto piso al tercer sótano, solo bajamos seis pisos, no siete. Efectivamente, en España el piso bajo es el cero, y allá “el primer piso” es el que nosotros llamamos “el segundo piso”. Allá en España sí funcionan esos problemas, pero aquí no. El modelo de los enteros negativos no funciona para los edificios de Colombia. Pero como no enseñamos para desarrollar competencias sino para que nuestros estudiantes se aprendan los números negativos independientemente de su uso en la vida real, ellos tienen que aprendérselos de pura memoria y por puro autoritarismo, sirvan o no sirvan. ¿Han pensado ustedes que no hay “siglo cero” antes ni después de Cristo? El modelo de los pisos en Colombia sí sirve para los siglos antes y después de Cristo, pero no coincide con el modelo de la recta numérica con el cero en la mitad, que sí es un buen modelo para los pisos en España.

Lo que esto revela es que nosotros tampoco somos competentes para utilizar los distintos modelos de los números negativos en la vida cotidiana. ¿Cómo les vamos a enseñar a los estudiantes a ser competentes en su manejo? Lo mismo podría decirse sobre el famoso "menos por menos da más". ¿Eso para qué sirve? Será que si usted mete un congelador pequeño a diez bajo cero entre otro más grande también a diez bajo cero, ¿va a hervir el agua a cien grados? ¿Y para qué sirve el orden de los enteros? Les decimos a los estudiantes que más uno es más grande que menos mil. Supongamos que un estudiante levanta los hombros y nos pregunta: "¿más grande en qué, y eso pa' qué?" Probablemente también lo mandamos a sembrar papas al páramo. Si no contestamos esas preguntas, no digamos que estamos desarrollando la competencia de manejo de los negativos en la vida real. Parece que más bien practicamos el autoritarismo y exigimos la aceptación sumisa de lo que decimos. Eso no tiene sentido.

Yo no estoy diciendo que los negativos no sirven para nada en la vida real. Solo les estoy poniendo a ustedes el desafío de pensar para qué sirven, y cuando se sientan seguros de las respuestas, ya podrán empezar a refinar los niveles de competencia y a diseñar estrategias para que sus alumnos lleguen a ser competentes para manejarlos.

Por lo tanto, si vamos a enseñar para el desarrollo de las competencias matemáticas, los estudiantes pueden preguntarnos para qué sirven casi todos los temas de los cursos de 6° en adelante. Como lo he dicho, afortunadamente si nos preguntan para qué sirven los fraccionarios, o sea los racionales no negativos, eso sí resulta fácil contestarlo. Pero todo lo demás de las matemáticas de 6° en adelante a los estudiantes les parece que no sirve para nada, y a nosotros que sí; tratemos de explicarles por qué, y veremos que no es tan fácil.

El problema se vuelve más difícil todavía si les pedimos asesoría a los matemáticos de las universidades. Es un problema muy frecuente y muy agudo entre los profesores de matemáticas y los decanos, profesores y estudiantes de las carreras de ingeniería, economía, administración, contaduría, arquitectura, etc. ¿Para qué atormentarlos con tantas matemáticas que no sirven para nada en la vida real, en su profesión, en su trabajo futuro? ¿Estamos utilizando el cálculo en 11° y en los primeros semestres de la universidad solo para excluir injustamente a personas que podrían haberse desempeñado muy bien en sus profesiones sin necesidad de pasar un curso de cálculo? ¿Estamos aumentando la deserción en la universidad sin ninguna justificación?

Los matemáticos decimos que las matemáticas puras, además de su belleza intrínseca, sirven para razonar lógicamente y para "formar la cabeza", independientemente de su utilidad en la vida cotidiana. ¿Eso sí es así, o no? Esos argumentos se parecen a los que utilizaban los jesuitas que defendían la enseñanza del latín en el bachillerato. En mis primeros cinco años como estudiante jesuita aprendí mucho latín y pocas matemáticas. Algunos pueden pensar que me quedó "bien formada la cabeza", pero otros que me quedó más bien "deformada". ¿Deberíamos cambiar el curso de cálculo en 11° por un buen curso de latín?

Tenemos que continuar este diálogo difícil entre matemáticos y físicos, ingenieros y maestros de obra, estudiantes y padres de familia, profesores de primaria, secundaria y media, empresarios y empleados: ¿qué vamos a llamar "matemáticas para la vida"? ¿Cuáles serían las competencias matemáticas que necesita cada profesión en su trabajo futuro? ¿Cuáles de ellas podemos desarrollar en la educación básica y media y hasta dónde? ¿Cómo podemos atender al criterio de utilidad práctica de las matemáticas a corto y mediano plazo sin sacrificar los aspectos estéticos y formativos de las matemáticas puras, abstractas e inútiles que son las que a mí más me gustan?

Por otro lado, los matemáticos también tienen razón en que no se pueden reducir las matemáticas de la educación básica secundaria al manejo de los fraccionarios en la vida cotidiana. Afortunadamente, para el caso de los fraccionarios es fácil defender la selección de esta competencia, puesto que sirven para todo; además, otras competencias más importantes, como la modelación matemática de procesos de la vida real, necesitan por lo menos un buen nivel en el manejo de los números fraccionarios.

El problema que tenemos entre manos es que estamos viendo que la mayoría de los estudiantes necesitan diez años para ser medianamente competentes en su manejo. ¿Qué podemos hacer en la primaria, especialmente en 4º y 5º, y luego en 6º y 7º, para acortar ese tiempo y mejorar el manejo de los fraccionarios? Ese es el problema didáctico, el segundo de los tres difíciles que hemos venido planteando.

LA "ENTRADA EN REVERSA"

Para avanzar en esta reflexión didáctica, les recomiendo una frase que les puede ayudar, y es "entrar en reversa al diseño de las situaciones problema para la semana próxima", a la planeación de las actividades, a la preparación de la clase, sea de tipo magistral o de tipo taller. Esta frase significa en primer lugar que ya se ha tomado la decisión de no utilizar el modelo usual de exposición del tema, solución de un ejemplo, ejercicios, *"quices"* y problemas para la casa, sino el modelo de trabajar con una situación problema bien diseñada, a través de trabajo individual, en grupos, en exposiciones de los estudiantes y puesta en común del trabajo de los grupos, explicaciones del profesor, tareas e investigaciones. Esa didáctica de las situaciones problema está bien descrita en los lineamientos generales del área de matemática desde hace más de diez años, pero nos cuesta abandonar el modelo expositivo usual.

Una cosa es un problema de libro de texto, que a veces llaman "problema de palabras" o "problema de historieta"; otra cosa es un ejercicio, y otra cosa es una situación problema. Cada uno tiene su ubicación en la didáctica de las matemáticas. Está bien hablar de resolución de problemas, y ese es uno de los cinco tipos de procesos que se proponen en los lineamientos para desarrollar los cinco tipos de pensamiento matemático. Pero yo propongo con los lineamientos que trabajemos por situaciones problema que, a su vez, generen más problemas formulados por parte de los estudiantes, que les sobren datos, que les falten datos, que conecten un área con otra, que conecten el tema que se está aprendiendo con la vida cotidiana, que produzcan motivación interna o intrínseca, y que sirvan para desarrollar la sensitividad del radar de la detección de oportunidades de aplicación.

Por eso, cuando vamos a diseñar una situación problema, podemos tomar ejemplos de situaciones de orden mundial, como el calentamiento global; o arranquemos con una situación del país: ¿cómo está la situación de la pobreza en Colombia, de la guerra, del desempleo? O comencemos con los problemas de la vida real para nuestra ciudad de Barranquilla; busquemos cualquier fuente de datos estadísticos, como el DANE, y vamos a encontrar cantidades de datos expresados en números de medir.

Podemos también partir de problemas que están ocurriendo en el colegio, o en la clase, o que le han pasado a un estudiante. Para hacer el diagnóstico del problema primero hay que hacer la recolección de información; muchos datos van a ser cuantitativos y van a estar expresados con números de medir en distintas formas: verbales, fraccionales, decimales, porcentuales, con gráficos, en distintos sistemas simbólicos o registros semióticos. Luego hay que ver, dentro los distintos problemas de la situación, qué podemos hacer para resolverlos desde las matemáticas, o al menos para plantearlos mejor y ayudar a su solución. Lo mismo digamos de los problemas del colegio o la escuela, de los niños, de su barrio, de su comunidad. Todos ellos pueden sugerirnos situaciones problema que nos motiven a trabajar con los números de medir.

La frase "entrar en reversa en el diseño de las situaciones problema para la semana próxima" significa, en segundo lugar, partir de las distintas respuestas que hayamos encontrado a la pregunta: ¿para qué sirve esto en la vida cotidiana? Antes de que alguno de los presentes me lo pregunte, ¿eso de "servir para la vida" tiene que ver con las competencias ciudadanas? Por supuesto que sí. ¿Con las competencias laborales? Por supuesto que también. Pero no solo eso. Piensen, por ejemplo, en que los estudiantes traigan la factura de la energía o la del acueducto, y ahí vamos a ver cómo los fraccionarios aparecen por todas partes y sirven mucho para pensar en el ahorro de energía o de agua; para hacer un presupuesto de los pagos de servicios públicos para el año y calcular costos diarios, semanales y mensuales; para leer las noticias sobre el calentamiento global y el agujero en la capa de ozono, y para tomar posiciones y decisiones personales en temas sociales y políticos.

Un matemático me podría decir que los números irracionales también sirven en la vida real, pues en ingeniería eléctrica, en electromagnetismo, en física y en teoría de probabilidades el número π aparece por todos lados y el número *e* también. Pero eso no es la vida cotidiana del 99% de los niños y niñas de 5º ni ahora ni lo será en el futuro, y aunque algún día fueran a hacer algún cálculo con π o con *e*, tendrían que usar siempre una aproximación racional como 3.1416 o 2.71. Tenemos que tener bien pensadas las respuestas a la pregunta "¿eso para qué sirve?" para que los estudiantes se interesen en trabajar activamente en una situación problema. Si sabemos bien distintas respuestas a esa pregunta, eso nos permite "echar reversa" para armar nuestra situación problema para la próxima semana. Eso es lo que va a motivar a los estudiantes a trabajar en ella.

La frase "entrar en reversa en el diseño de las situaciones problema para la semana próxima" significa otra cosa que no nos gusta mucho a los docentes de matemáticas ni en primaria ni en secundaria: que los procedimientos o algoritmos de manejo de los fraccionarios ya no van a aparecer en primer lugar. Si entramos en reversa, se van al último lugar. Los alumnos verán cómo hacen las operaciones: con calculadora, con el celular, con el computador, con el lapicero, o preguntándole a otros. Lo importante es que sepan qué operación hay que hacer para avanzar en el análisis de la situación problema, para plantearse preguntas y problemas distintos de los que pensaba el docente, para interpretar la factura de la energía o del acueducto, para hacer el presupuesto, para planear el PRAE de ahorro de energía o de agua.

Volviendo al modelo de las competencias, en la planeación de una situación problema que desarrolle una competencia no podemos olvidar ninguna de las tres patas de la mesa: no bastan los conocimientos; ni siquiera basta preocuparse por cambiar la actitud de los estudiantes y despertar su inclinación a utilizar lo que saben. Falta la detección de la oportunidad para que lo que se va aprendiendo en esa situación de aula se aplique también en otra tarea, en otra situación de la vida real. En esa utilización está la diferencia entre un currículo de matemáticas por contenidos, objetivos o logros y un currículo para el desarrollo de competencias. Por eso, para mí el discurso de competencias remite al discurso psicológico de la transferencia del aprendizaje, que significa transferir lo que se aprendió de la situación en que se aprendió a una situación nueva. Eso es un aspecto clave en la competencia: en el diseño de cualquier situación problema hay que atender la tercera pata de la sensitividad y mejorar en los estudiantes su radar para detectar que esto es lo que les sirve aquí y ahora, y utilizarlo eficazmente.

No niego que los psicólogos también nos dicen que eso es lo más difícil de enseñar. El doctor David Perkins comentaba allá en Harvard que ya sabemos bastante sobre cómo enseñar conocimientos y habilidades, y hasta cómo cambiar la actitud y mejorar la inclinación; pero que sabemos muy poco sobre cómo aumentar la sensitividad de ese radar que detecta la oportunidad de utilizar lo que se sabe en una nueva situación. Esto tiene dos consecuencias sobre la selección de los contenidos y sobre el uso del tiempo disponible: por una parte, tenemos que cubrir muchos más contenidos sobre los fraccionarios, sus usos, sus sistemas de representación, las diferencias con los números de contar y las trampas que les ponen a los estudiantes, y dedicarle más tiempo a las situaciones problema. Pero por eso mismo, la otra consecuencia es cubrir muchos menos contenidos de otros temas que aparecen en los textos de matemáticas para 5º o para el grado que tengamos bajo nuestra responsabilidad.

Si vamos a enseñar para el desarrollo de competencias, muchas cosas que nos atraen y nos interesan a los que nos gustan las matemáticas van a tener que quedarse por fuera. Por eso, en un diseño curricular de matemáticas para el desarrollo de competencias, necesariamente, va a haber menos contenidos, y eso es un problema difícil de negociar con los colegas de matemáticas, los asesores y los profesores universitarios. Pero hay que hacerlo.

Cuando yo era el asesor del grupo de matemáticas en el Ministerio de Educación de 1978 a 1993, había un asesor de sociales que duró un mes y no volvió; otro asesor de física vino cuándo el doctor Federici dejó la asesoría del grupo ciencias naturales; pero no iba sino una vez al mes y al semestre siguiente tampoco volvió. Sólo seguía yo en matemáticas. Entonces, los profesionales técnicos de otras áreas le pidieron a la doctora Pilar Santamaría de Reyes, que era la directora general, que les nombraran un asesor en cada área. Ella les dijo: "todos los asesores que me han mandado de las universidades siempre quieren poner más y más contenidos en los programas del área. El único que se atreve a quitar contenidos es el doctor Carlos Vasco. Consíganme un asesor que esté dispuesto a quitar contenidos y se los traigo". Ya se imaginarán que los grupos de las otras áreas no consiguieron más asesores, y que también mis colegas de matemáticas en la Universidad Nacional se enteraron de que yo iba a quitar muchos contenidos del programa de matemáticas y no me querían mucho que digamos.

Pongamos un ejemplo de una competencia matemática para la vida relacionada con el álgebra de 8º y 9º. Yo creo que si entiendo algo de lo que es competencia, no puede haber una competencia de resolver ecuaciones cuadráticas. Por eso propuse disminuir contenidos de álgebra; en particular, propuse quitar el contenido de la fórmula para solucionar las ecuaciones cuadráticas de que hablábamos en el cuento de la señorita Adelita. Piensen en los estudiantes de 9°. No sé cuánto tiempo le gastan los docentes de noveno a que todos se aprendan de memoria la fórmula del "menos be más menos raíz cuadrada de be dos menos cuatro a ce sobre dos a". Yo estudié con los padres jesuitas y enseñé en el Colegio San José, y no vi ninguna diferencia entre la clase de álgebra y la clase de catecismo, ni en el tiempo que gastaban los jesuitas para que nos aprendiéramos de memoria el "Padre Nuestro" o el "Creo en Dios Padre" y la fórmula de la cuadrática. Si en clase de álgebra apenas hacemos lo mismo que hacían los padres jesuitas en la clase de catecismo, ¿es eso matemáticas?, ¿es eso comprensión?, ¿es eso desarrollo de competencias? No creo.

LOS NÚMEROS DE MEDIR

En cambio, sí es claro para mí que no podemos quitar nada de los contenidos de los números fraccionarios, sino añadir muchos contenidos relacionados con ese tema en 3º o 4º, o en el grado en que empiecen con los números fraccionarios, y luego de 5º a 9º.

Los números racionales son los más importantes para la vida después de los números de contar. A los números de contar, que yo comienzo con el uno, el dos, el tres, etc., algunos los empiezan con el cero y los llaman "números naturales", "N". El profesor Carlo Federici los llamaba "cardinales propietivos", porque nos dan la propiedad del conjunto que se llama "numerosidad" o "cardinalidad". Pero a mí me parece que el cero no tiene nada de natural. Por eso empiezo con el uno. A mis números de contar a veces los llaman "naturales positivos" y los indican con "N^+". Otras veces los llaman "enteros positivos" y los indican con "Z^+".

Para mí, el cero no entra en los números de contar, porque si uno cuenta "cero, uno, dos, tres...", le da mal la cuenta. Los colegas matemáticos dicen que como es el cardinal del conjunto vacío, tiene que ser natural. Yo les digo que si eso es así, para los niños es más antinatural todavía, porque los profesores y los textos de primaria definen un conjunto como "una colección de elementos" o "una reunión de elementos". Si usted define conjunto como una colección de elementos, sus alumnos saben suficiente español para oír muy claramente la "s" de "elementos" —aunque aquí en Barranquilla esa "s" poco se oye— y dicen con toda razón: "para que haya conjunto, ¡debe haber de dos elementos para arriba!"

Nuestros niños y niñas están de acuerdo con Pitágoras, que también pensaba que el dos era el primer número. El cero no era número: ni siquiera lo conocían en ese tiempo. El uno tampoco era número: era el origen y principio de los números, pero no era número. Pero una vez que uno arranca a contar: 1, 2, 3..., esos sí son los números de contar. Por eso, para mí, no para Pitágoras, el uno sí es un número: el primer número de contar.

Los números racionales que yo llamo "números de medir" se pueden construir con los que Federici llamaba "cardinales relativos", porque nos dan las relaciones multiplicativas entre cantidades de las distintas magnitudes, como entre longitudes, pesos, masas, etc. Los racionales nos ayudan a precisar la relación que tiene cada cantidad de cada magnitud con la unidad de medida respectiva.

Para la competencia en el manejo de los números de medir en la vida real hay que trabajarle mucho a la medición, a las magnitudes, a las cantidades de cada magnitud, a las unidades, a los instrumentos y técnicas de medir. A eso lo llamamos en los lineamientos “el pensamiento métrico”. El pensamiento matemático que llamamos “pensamiento numérico” tiene que ver con los números de contar de 1º a 7º; pero de 4º a 9º hay que trabajar conjuntamente el pensamiento numérico, el espacial y el métrico, porque esos son los que se necesitan para el uso flexible y eficaz de las matemáticas en la solución de los problemas de la vida real. Algunos datos de los problemas pueden aparecer en números de contar o en números de medir, pero los resultados van a aparecer casi siempre en números de medir.

Los números de medir van a aparecer por todas partes en la técnica, la tecnología, las facturas de la energía y los demás servicios públicos, la subida del sueldo o del arriendo, el descuento en el almacén, el producto per cápita, la reforma tributaria, las encuestas electorales, la elección de los congresistas, y hasta la corrupción y los desfalcos. Todo eso tiene que ver con el pensamiento numérico, el espacial y el métrico, con cantidades expresadas casi siempre con números de medir. Si usted cree que una inflación del 2% mensual daría una inflación anual del 24%, perdió su tiempo en los diez años de estudio de los fraccionarios, y hasta en su año de cálculo en 11°. Hagamos la cuenta: si al comienzo de este año ponemos arbitrariamente un índice de 100 —podemos pensar en el valor adquisitivo de cien pesos— y en el primer mes subió el 2%; ya vamos en un índice de 102; saquémosle el 2% a 102, acumulémoslo, y sigamos así doce veces en la calculadora o el celular. No voy a decir en cuánto termina el índice al fin del año, pero no termina en 124.

Todos los números que van resultando son números de medir; no son números irracionales, ni complejos. Por eso propongo la siguiente redacción más amplia para la competencia matemática más importante, que vamos a trabajar en el proyecto desde 3º y 4º hasta 9º, y ojalá sigamos en los dos grados de media y en los primeros cuatro semestres de la universidad: esperamos que todos nuestros estudiantes sean competentes para modelar situaciones y procesos de la vida real en los que los sistemas de números racionales sean útiles y poderosos para resolver los problemas que se presenten.

No estoy diciendo, ni mucho menos, que todos los problemas que tienen nuestros estudiantes se pueden resolver con los números racionales. Desafortunadamente no; ni siquiera la mayoría de los problemas. Los más problemáticos para los estudiantes no son solubles con ellos, ni con ningún otro sistema numérico. Por ejemplo, si un estudiante peleó con su novia, eso para él es un problema trágico, pero los números racionales poco le van a servir; probablemente ni siquiera le van a servir los argumentos racionales. Pero si la búsqueda de soluciones a un problema que uno tiene en la vida real se puede apoyar mentalmente con un modelo de magnitudes, de cantidades que cambian, de pensamiento variacional, entonces la competencia de manejo de los racionales sí le va a permitir modelar mentalmente esa situación y tratarla con números racionales a ver si se encuentran soluciones.

Esa competencia hay que empezarla a trabajar desde 4° o 5° de primaria, porque ya vimos que los estudiantes de las universidades aún tienen muchas dificultades en manejar los números racionales; por eso hablaba de esos diez años que debemos tratar de reducir un poco; por ejemplo, tratar de que al final de 9º nuestros estudiantes ya sean competentes para manejar los racionales, o por lo menos los fraccionarios. Pero siendo realistas, me temo que todavía no vamos a lograr esa competencia en 9º. Ojalá que sí, por lo menos si empezamos a cultivarla desde ahora con mucho cuidado y concentración.

LA COMPETENCIA ALGEBRAICA

Empezando en 8º y 9º podemos proponernos cultivar también la competencia algebraica, en la que nos estamos refiriendo al manejo de los sistemas simbólicos operatorios que sirven para modelar y tratar situaciones en las que los números enteros, racionales, reales o complejos son útiles y potentes. En la educación básica basta con utilizar esos sistemas simbólicos que llamamos “algebraicos” para trabajar con los números racionales. Si nuestros estudiantes no saben manejar eficientemente los sistemas simbólicos operatorios con los racionales, menos los van a poder utilizar con otros sistemas numéricos más refinados. Más aún, si no los saben manejar con los números racionales, nunca van a poder comprender ni la importancia ni la belleza de la extensión de los números racionales a los reales y a los complejos. Tendrían que aprendérselos de pura memoria y por puro autoritarismo.

Si se trata de competencias, tengo que decirles claramente a los profesores de álgebra de bachillerato que el álgebra de Baldor que enseñamos ahora en los colegios no se presta gran cosa para desarrollar las competencias para la vida. Para desarrollarlas me parece mucho mejor el álgebra del Excel, o la de cualquier hoja de cálculo. Prefiero una hoja de cálculo que no sea de Microsoft para que no haya que pagarle regalías al señor Bill Gates, pero si no tienen disponible sino el Excel, usen el álgebra del Excel.

El álgebra de las hojas de cálculo sí es muy útil y muy potente para resolver problemas de la vida real fuera del aula. Ya estoy viendo cada vez más estudiantes de 4º y 5º, y muchos de secundaria y media, que manejan la hoja de cálculo, sea la del paquete de Microsoft Office, o la del Open Office, y hasta la del Blackberry. Ya saben hacer los cálculos, preparar un presupuesto y llevar sus cuentas en su hoja de cálculo. El álgebra de la hoja de cálculo tiene todo lo que van a necesitar para ejercitar sus competencias matemáticas para la vida real.

No nos preocupemos mucho por el álgebra tradicional de 8º y 9º, que llamé "el álgebra de Baldor". Yo me comprometo a que todo estudiante que sepa manejar bien el álgebra de las hojas de cálculo puede aprender en una sola clase el álgebra de Baldor. Yo le explico rápidamente tres cosas: primero, que solo se usan variables de una sola letra; segundo, que si las variables tienen una sola letra, se pueden quitar todos los asteriscos de las multiplicaciones, y tercero, que si ve un sombrerito "^" a la izquierda de un número, quite el sombrerito y suba un poco el número para indicar la potencia. Con eso ya sabe todo lo importante del álgebra de Baldor.

Lo primero, aquello de usar únicamente variables de una sola letra, es un horror, y con razón les parece estúpido a los estudiantes que aprendieron a manejar la hoja de cálculo antes del 8º, porque en el álgebra de la hoja de cálculo uno puede poner varias letras o palabras para indicar cada variable; puede uno escribir: costo_unitario, costolibradeazucar, libras, Subtotal, PrecioTotal con la palabra entera o con una abreviatura que sea fácil de recordar. En cambio, en el álgebra de Baldor uno tiene que poner "c", "x", "a", y al rato uno ya no se acuerda qué es "c", ni "x", ni "a".

Recordemos el famoso problema de álgebra que se llama "el problema de los estudiantes por profesor", muy estudiado en didáctica de las matemáticas. Supongamos que en un posgrado de la Uninorte hay nueve estudiantes por cada cinco profesores. Utilice como variables la "E" de "Estudiantes" y la "P" de "Profesores". ¿Cómo se escribe esa ecuación? Piensen un poco y ensayen a escribirla. La mayoría de las personas, aun las que saben mucha álgebra de Baldor, oyen "nueve estudiantes por cada cinco profesores" y escriben: "9E = 5P".

Parece bien la ecuación; pero eso no puede ser, pues si E es 9 y P es 5, esa ecuación diría que 81 es igual a 25. ¿Qué pasa? ¿Por qué tantas personas creen que se debe escribir "9E = 5P"? Los problemas lingüísticos, psicológicos y matemáticos son delicados, pero una razón muy fuerte es que con las variables de una sola letra es muy fácil que uno se confunda en lo que significan. Las variables E y P no indican los estudiantes y los profesores, sino el número de estudiantes y el número de profesores. En el álgebra de la hoja de cálculo se pueden utilizar las variables Numestud y Numprof y siempre se pone el asterisco para indicar las veces; ahora es claro que la ecuación no puede ser: 9*Numestud = 5*Numprof. Eso se lee "nueve veces el número de estudiantes es igual a cinco veces el número de profesores", y eso no es lo que dice el problema, sino al revés. Pero si a uno le han enseñado a poner una sola letra para las variables, y además siempre quita el signo de multiplicación, se va a equivocar fácilmente.

Lo de poner o quitar los asteriscos tampoco es tan obvio. Si usted usa las abreviaturas "log" para el logaritmo o "cos" para el coseno, ¿está multiplicando tres variables? Si ve escrito "senx", ¿eso será "ese por e por ene por equis"?

Lo de poner o quitar el sombrerito para los exponentes tampoco es tan obvio. El estudiante ve una equis, un sombrerito y un dos (X^2) y puede leer bien: "equis elevada a la dos". Pero si el profesor escribe una equis con un dos arriba (X^2), ¿por qué ese dos significa elevar al cuadrado? ¿Por qué no hay un signo para indicar que hay que hacer una operación? Y si subir un poco el numerito indica que hay que elevar al cuadrado, entonces bajarlo un poco, como en "equis-sub-dos" (X_2), debería indicar que hay que sacar la raíz cuadrada.

Basta pues enseñarle tres cosas a un estudiante que conozca el álgebra de la hoja de cálculo para que aprenda todo lo importante del álgebra de Baldor: primero, que abrevie todas las variables con una sola letra; segundo, que ahora puede quitar todos los asteriscos, y tercero, que si ve un sombrerito "^" a la izquierda de un número, quite el sombrerito y suba un poco el número para indicar la potencia. Eso es todo lo importante.

El último punto clave sobre la competencia algebraica con el álgebra de las hojas de cálculo, en la que nos estamos refiriendo a manejar en el computador los sistemas simbólicos operatorios que sirven para modelar y tratar situaciones y procesos de la realidad, es que en cualquier computador, o calculadora, o Blackberry, las hojas de cálculo trabajan solo con números racionales, no con reales ni complejos. Eso es clave para nuestro tema de hoy. Es posible enseñar el álgebra de las hojas de cálculo desde 4° o 5°, sin esperar al 8°. El álgebra de las hojas de cálculo va perfectamente bien con los números de medir, sin esperar a definir los negativos, ni los reales, ni los complejos. No hace falta escribir una "x" o una "y" para nada. Pero eso nos lleva de nuevo a darle la última revisión al tema de hoy: los números de medir.

UNA VISTA DE SATÉLITE DE LOS NÚMEROS DE MEDIR

Al comienzo llamamos "fraccionarios" en nuestro folklore —aunque en otros países no es así— a los racionales que no son negativos; en otras partes los llaman "fracciones", y en los textos de aritmética en inglés se llaman "fractions". Pero para mí, las fracciones son los letreritos con un numeral arriba, una barra horizontal o inclinada en la mitad, y otro numeral abajo. Esa es apenas una manera de escribir los racionales positivos, y hay muchas otras.

¿Por qué a los racionales positivos los llamamos "fraccionarios?" Porque todo número racional que está en Q^+ se puede expresar como una razón de dos números de contar, y esa razón se puede escribir como una fracción con un numerador y un denominador que representan números de contar. Pero también hay otras maneras de escribir las razones o números racionales, como con los llamados "decimales", sea con una coma o con un punto para separar el numeral de la izquierda que representa los enteros, del numeral de la derecha que representa los fraccionarios decimales. Por eso, llamarlos "fraccionarios" puede llevar a confundir las fracciones con los fraccionarios. Esa es una razón por la que me gusta utilizar la expresión "números de medir".

Ustedes qué piensan: ¿El cero es un número racional, o no? ¿Es un número fraccionario o no? Si ustedes quieren, sí, y si no, no. Ya dije que a mí me parece que el cero no tiene nada de natural, pero podemos aceptarlo como fraccionario, porque podemos escribirlo también como una fracción con numerador con la cifra cero y un denominador que represente cualquier número de contar.

El cero como transformador, como operador activo, sí es un número racional y un número real, pero es un número racional o real muy peligroso, porque aniquila a todo el que se le acerque. Propongo pues aceptarlo como un monstruo fraccionario que anula a todo el que se le acerque.

Si no aceptamos que el cero sea fraccionario, tendríamos que los fraccionarios son los mismos racionales positivos que los matemáticos llaman "Q^+". Si incluimos el cero, los fraccionarios serían los racionales que no son negativos, a los que los matemáticos llaman "no negativos". Pero podríamos haber identificado a los fraccionarios con los racionales positivos Q^+. No habría mucha diferencia.

¿Qué entienden los niños y niñas cuando hablamos de enteros y quebrados? Ellos suponen que cuando los grandes decimos una "o", es exclusiva. "O son enteros o son quebrados; o están completicos, o están quebrados". Los docentes de matemáticas violamos esa convención lingüística y decimos que los enteros también son quebrados. Los niños y niñas deben llevarse las manos a la cabeza y decir: “o los grandes no saben hablar español, o nos están tomando el pelo. En aritmética no se trata de entender nada, sino de darles gusto a los grandes”.

Los niños y niñas también piensan a veces, con buenas razones, que un quebrado tiene que ser mayor que cero y menor que uno, porque si no, ¿cómo va a ser que yo parto una unidad, por ejemplo una chocolatina en tantas partes iguales? Si fuera cero, no habría nada que partir, y si fuera uno, sería la unidad y todavía no la he partido. Está entera, no quebrada; y si la quiebro, un quebrado tampoco puede ser mayor que uno, pues a los niños y niñas, con toda razón, tampoco les queda claro el asunto de partir una chocolatina en tantas partes iguales y luego escoger más. ¿Cómo es eso de que parto una chocolatina en cuatro partes iguales y escojo cinco? ¿Qué tal si parto la chocolatina en cuatro cuartos y escojo ocho? El que lo pueda hacer, ¡se vuelve rico muy rápido! Si usted llama “quebrado” a “ocho cuartos”, las matemáticas no se están aplicando para la vida real. Los niños y niñas tienen que pensar nuevamente: “aquí no se trata de entender nada sino de darle gusto a los grandes. Cómo así que parto la chocolatina en cuatro partes iguales y escojo ocho… ¡Qué quebrado ni qué ocho cuartos!”

Estudiante de 5° grado resolviendo un ejercicio.
Primera filmación de clases

¿Qué llamo entonces “números de medir”? Los matemáticos saben que, en teoría, los números de medir son los reales; pero los números de medir en la práctica de la vida real y cotidiana son los racionales, porque no se puede leer un número irracional en una regla, ni en un contador o un reloj con pantalla digital, ni en un computador. Por lo tanto, para mí, los números de medir en la vida real son los racionales Q; en casi todos los casos usuales, los racionales no negativos o números fraccionarios son suficientes, y en la educación primaria y los dos primeros años de secundaria trabajamos solo con ellos.

Si uno piensa matemáticamente en transformadores, en operadores activos, los racionales son operadores y los reales también, y eso es lo que se va a generalizar a los espacios vectoriales. Si se piensa en transformadores u operadores activos, no es difícil pasar de los fraccionarios a los racionales Q, que incluyen los racionales negativos. Para obtener los números negativos enteros y racionales, basta definir un nuevo operador mental que yo llamo “el reflector”. Uno puede decir que el reflector refleja todos los números de contar y todos los fraccionarios positivos en un espejo que uno pone mentalmente en el punto cero de la recta numérica, y produce los enteros negativos y los racionales negativos, que son los inversos aditivos de los positivos.

Ese operador reflector lo podemos escribir con una rayita y una boca para que trague números de contar o números de medir: –(_). Si lo aplicamos a los números de contar, produce los números enteros negativos, y si lo volvemos a aplicar a los enteros negativos, produce otra vez los números de contar, que ahora también podemos llamar “enteros positivos”.

El mismo operador reflector, aplicado ahora a los fraccionarios, nos da los racionales negativos, y si lo volvemos a aplicar, nos da de nuevo los fraccionarios, que ahora también podemos llamar “racionales positivos”. Ya no hay que ponerle más problemas a los números negativos, sean enteros o racionales. Nótese que en una calculadora, una tecla tiene una rayita o un signo “±”, que es para el operador reflector que transforma un número en otro, y otra tecla tiene la raya de la resta, que es para restar dos números. Son operadores muy distintos.

En un artículo mío propuse una idea que tomé inicialmente de un profesor canadiense que se llama Thomas Kieren. La idea es que no hay un solo concepto de número racional, sino varios. Se me ocurrió la comparación con un archipiélago, pues un archipiélago nunca tiene una sola isla, sino varias. La idea es pues que no hay una isla de números racionales o de fraccionarios, sino muchas islas de un archipiélago, que llamé “el Archipiélago Fraccionario”. En ese artículo propuse que la isla principal del Archipiélago Fraccionario era una isla en donde vivían unos monstruos muy peligrosos que se llaman “monstruos achicadores” y otros que se llaman “monstruos agrandadores”. Además allá vivía un monstruo que no le hacía nada a nadie, que se llama “el monstruo mansito”. Así, cuando visitemos esa isla, debemos considerar a los fraccionarios como operadores o transformadores ampliadores o reductores, pero me gusta más llamarlos “monstruos agrandadores y achicadores”. El monstruo mansito sería como un operador que no opera, o un transformador que no transforma, a veces llamado por los matemáticos “operador idéntico”, pero sin decirnos idéntico a quién.

En nuestro caso de los números de medir, ensayemos primero a pensarlos como unos monstruos que viven en una isla, en donde el que se le arrime al monstruo, este lo achica o lo agranda; está además el monstruo mansito, que no le hace nada al que se le arrime, y el cero, que es el monstruo aniquilador que anula a todo el que se le arrime. En 7º u 8º se puede agregar el monstruo reflector, que produce los racionales negativos.

Esta isla de los monstruos es conceptual, porque el Archipiélago Fraccionario es conceptual. Esos monstruos tiene que crearlos en su cabeza cada niño o niña, pero necesitan poca ayuda para hacerlo. Otra cosa interesante qué contarles acerca de la isla de los monstruos es que cada monstruo tiene muchos disfraces; en realidad, infinitos disfraces. El monstruo que achica a la mitad se puede disfrazar con una camiseta con un uno pintado, un cinturón negro, y una pantaloneta con un dos, así: “1/2”. Pero también se puede disfrazar “2/4” o “3/6”, y así. También tiene otra maleta llena de disfraces con una camisa de manga larga con un cero, un cinturón con una hebilla redonda, y un pantalón largo con un cinco, otro con un cincuenta, otro con un quinientos, y así. Además, tiene otro disfraz con una túnica que dice cincuenta, sin cinturón, y con un bastón que parece un sonajero, con una bolita a cada lado: %. Queda disfrazado así: “50%”.

Los números de medir que más sirven para la vida real son pues los monstruos de esta isla, pero no andan sueltos como un conjunto “Q” o “Q^+”. Como conjunto poco sirven, lo hacen es cuándo están vivos, activos con todas sus operaciones y relaciones, y cuando aprendemos a reconocerlos como el mismo número con sus distintos disfraces de distintos sistemas simbólicos o registros semióticos de representación.

En el nuevo currículo de 1984, ya no tan nuevo, distinguíamos entre los sistemas numéricos, que eran sistemas conceptuales montados sobre un conjunto de números con operaciones y relaciones, y los sistemas de numeración, que eran sistemas simbólicos para manejar un sistema numérico. Esa distinción sigue siendo muy importante para los docentes, pues no es lo mismo el número que el numeral: el número está en el sistema numérico, que es un sistema conceptual, y el numeral es un dibujito que está en el sistema de numeración, que es uno de los varios sistemas simbólicos o registros semióticos de representación de los sistemas numéricos.

Para el sistema numérico de los números de contar utilizamos un sistema de numeración con diez numerales, que llamamos “cifras”, para representar a todos esos números en el sistema de numeración decimal. Para el sistema numérico de los números de medir, utilizamos parejas de numerales decimales separados con una rayita, que llamamos “fracciones” o “numerales fraccionales". Pero podemos utilizar también numerales decimales u otros sistemas de numeración, separando la parte entera con un punto y una coma, y luego escribiendo la parte decimal.

Si les parece que no es aconsejable utilizar la distinción entre número y numeral con los niños y niñas de primaria, pueden utilizar la palabra "número", señalando a la cabeza, para que ellos piensen en el número del sistema conceptual, y la palabra "numerito", señalando al dibujito pintado en el libro, el cuaderno o el tablero, para que piensen en el numeral del sistema simbólico respectivo. Por ejemplo, el numeral verbal "la mitad" representa el mismo número de medir que el numeral fraccional "1/2", o que el numeral decimal "0,5" o "0.5". Por eso es bueno distinguir el número fraccionario de la fracción, que es un numeral fraccional para un cierto número fraccionario, pero que también aparece con los disfraces "2/4", que es otra fracción pero representa el mismo número, "3/6", "50/100", etc.

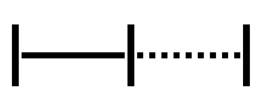
Hay pues varios sistemas simbólicos para cada sistema conceptual, y en el caso de los sistemas numéricos de números racionales, hay varios sistemas simbólicos distintos que llamábamos en el nuevo currículo: verbal, decimal, fraccional, porcentual, lineal, y hay otros más. Para aclarar un poco más este asunto, veamos estos cinco dibujitos [Figura 1]:

"La mitad"

0.5

1/2

50%



Estos dibujitos son todos distintos. Pero cuando uno los lee, dice: "¡ah, pero es lo mismo!" Cuando usted dice "eso es lo mismo", ¡eso ya es matemáticas! Pero en matemáticas también se trata de precisar en qué sentido es lo mismo y en qué sentido no. En este caso es el mismo número, pero una cosa es un numeral verbal, oral o escrito; otra cosa es un numeral decimal; otra cosa es un numeral fraccional o fracción, y otra un numeral porcentual, que en este caso son numerales distintos pero representan el mismo número. En cambio, el último sistema de representación, con un segmento horizontal dividido en dos partes iguales de largas, con una raya completa y otra punteada, no es propiamente un numeral, pero también lo usamos mucho para representar el número fraccionario un medio.

En un libro de texto o en un programa de matemáticas para la educación básica no debe pues aparecer: "números fraccionarios, fracciones, decimales, porcentajes" como cuatro cosas distintas. Las dos primeras palabras son para un sistema numérico conceptual; las tres últimas son para tres sistemas simbólicos de representar el mismo número. En ese sentido, las tres últimas palabras "fracciones, decimales, porcentajes" son "lo mismo" como sistema numérico, pero son tres sistemas de numeración diferentes. Ahí hay un solo sistema numérico conceptual, y tres sistemas simbólicos diferentes para ese mismo sistema conceptual.

En el primer renglón tenemos los numerales verbales, que pueden ser orales o escritos, en uno u otro idioma. Para los estudiantes sordos habría que agregar los numerales gestuales respectivos o señas numéricas, y para los ciegos, los numerales Braille. En el segundo renglón, que llamamos "un decimal", mejor "un numeral decimal", podemos poner el cero de la izquierda, o no ponerlo; podemos poner un punto o una coma, y a la derecha podemos poner "5", "50", "500", etc., y todos esos numerales decimales representan el mismo número. Aquí hay que tener cuidado con el lenguaje: a los numerales a la derecha de la coma o del punto los llamamos "decimales", sin pensar en que los numerales de la izquierda que representan los enteros también son decimales, pero en otro sentido: son numerales en base diez, con cada cifra como coeficiente de un polinomio en potencias de diez, con exponentes que van creciendo hacia la izquierda; en cambio, los numerales de la derecha representan coeficientes de un polinomio en potencias de un décimo, con exponentes que van creciendo hacia la derecha.

Diálogo con el Doctor Vasco, posterior a la conferencia en la Universidad del Norte.

Miremos ahora el tercer renglón. No solamente se puede escribir “1/2”, sino también “2/4”, “3/6”, etc. Cada fraccionario tiene un número infinito de disfraces; esas son las fracciones que lo representan. Por eso es mejor distinguir el número de medir, el fraccionario, del numeral fraccional, la fracción. Las que llamamos “fracciones equivalentes” son las que representan el mismo número fraccionario conceptual. En el cuarto renglón del porcentaje, que leemos “cincuenta por ciento”, podríamos también poner otro símbolo: el numeral “500” y un palito con una bolita a un lado y dos al otro, que se lee “por mil”. Además de la rayita con su división en dos partes que hay en el quinto renglón, que podríamos llamar “sistema gráfico lineal”, faltan al menos otros dos sistemas gráficos de representar los mismos fraccionarios con dibujitos, que no salieron en los cinco de la figura 1 arriba. Falta uno que es un rectángulo o un cuadrado partido en dos, con la mitad sombreada, que podríamos llamar “sistema gráfico rectangular”, y otro que parece una pizza partida en dos, con la mitad sombreada, que podríamos llamar “sistema gráfico pizzal”. Así tendríamos siete representaciones simbólicas de la misma mitad como número de medir, en siete registros semióticos diferentes.

Los sistemas gráficos lineal, rectangular y pizzal tienen un problema. Miremos otra vez el último dibujito del quinto renglón, que está en el sistema gráfico lineal para representar la mitad. ¿Ahí se representa “la” mitad, o más bien se representan dos mitades? ¿Ustedes qué dicen? Yo creo que si usted parte físicamente una chocolatina, quedan dos mitades. Si las dos mitades no son iguales, yo escojo la mitad más grande. Si es una torta, la parto horizontalmente y escojo la mitad de arriba, que tiene más crema. Pero de todas maneras, en la partición física de la unidad, sea chocolatina, torta, raya, pizza o rectángulo, resultan dos mitades, no una. ¿Por qué el profesor dice "LA mitad"? En cambio, si la partición es matemática, el resultado sí es un número de medir que se llama "LA mitad", una sola mitad, como dice el primer renglón.

En el caso de la rayita de abajo partida en dos por una rayita vertical, todavía hay dos posibilidades en las que generalmente no pensamos: ¿en dónde se debe poner el letrero "1/2"? Los profesores lo ponemos debajo de la rayita vertical de la mitad, y los niños lo ponen dos veces, una sobre la rayita de la izquierda, y otra sobre la rayita punteada de la derecha. ¿Quién tiene razón?

En el modelo mental de los monstruos achicadores y agrandadores, que yo llamo "los monstruos fraccionarios", todos estos dibujitos representan el mismo monstruo achicador un medio, precisamente el que achica cualquier cantidad de cualquier magnitud a la mitad. Es un solo monstruo fraccionario entre muchos, y esos monstruos achicadores y agrandadores son los números más útiles para todas las ciencias: matemáticas, física, química, biología, ecología, geografía, economía, administración, contaduría, sociología, antropología, ciencia política, historia, etc.

Esa isla de los monstruos agrandadores y achicadores es apenas una sola isla del Archipiélago Fraccionario. Hay otras islas, como la de los partidores matemáticos, que no hay que confundir con los partidores físicos. Otra isla es la de los puntos de la recta racional marcada con un punto de origen O y un punto unitario U, y otra la de los segmentos de la recta horizontal que arrancan del origen hacia la derecha, medidos con la longitud del segmento desde O hasta U. Otra isla tiene tres nombres raros: "la isla de las razones", que no hay que confundir con los que le mandan a la mamá con uno, o "la isla de las tasas", que no hay que confundir con los pocillos, o "la isla de las ratas", que no hay que confundir con ciertos animales dañinos. Pero esos son tres nombres distintos para la misma isla del archipiélago, que parece ser la más antigua de todas. Estas y otras islas aparecen muy bien estudiadas en un libro reciente de Martha Fandiño sobre las fracciones, de la Cooperativa Editorial Magisterio, que les recomiendo especialmente para este proyecto.

MODELACIÓN, PROBLEMAS Y SITUACIONES PROBLEMA

El proceso de modelación, para mí, es el más importante de los cinco tipos de procesos que hay en los lineamientos. De los cinco tipos de pensamientos, los tres primeros, el numérico, el espacial y el métrico van muy bien con los números de medir. Los procesos de planteamiento y resolución de problemas no son distintos de los de modelación de situaciones. Resolver problemas exige modelar primero la situación en la que surge el problema, lograr una simplificación con las matemáticas que conocemos a ver si de ahí puede salir una solución, y utilizar sistemas conceptuales y simbólicos para tratar que de ahí salga una solución.

Por eso hay mucha tensión entre los matemáticos y los educadores, que se refleja en el rechazo que sienten algunos contra las competencias, pues dicen que si se reducen las matemáticas a las que son útiles para la vida real, las rebajamos de categoría. Les parece que las matemáticas aplicadas son matemáticas de segunda categoría. ¡Yo no creo que se rebajen de categoría! Uno va por ejemplo al Japón, a la China a congresos mundiales de matemáticas y ve la modelación del oleaje que golpea un muelle, y grandes matemáticos proponen todo tipo de soluciones a través de ecuaciones diferenciales parciales con unos métodos muy refinados y muy potentes. Todas las matemáticas puras que uno sabe se quedan muy cortas para analizar un problema de esos, como el golpe de las olas en un muelle. Por supuesto que si llega un tsunami no hay nada que hacer; pero para las olas normales sí se puede hacer mucho. Pensemos por ejemplo en los tajamares de Bocas de Ceniza y en el dragado del río Magdalena. Ojalá tuviéramos matemáticos suficientemente competentes para modelar los procesos de sedimentación y recomendar unos protocolos de dragado eficaces.

Pero no pensemos solo en problemas tan complejos que requieran matemáticas muy avanzadas para su modelación. Por eso hablamos de "entrar en reversa" al diseño de situaciones problema, en las que podamos sentirnos confiados en que los estudiantes van a poder estudiarlas con interés y modelar mentalmente las situaciones para poder formular ellos mismos preguntas y problemas que sean solubles con la ayuda de los números de medir. Si "entramos en reversa" al diseño de nuestra situación problema, escogeremos una que permita distintos tipos de modelación al alcance de los niños y niñas. Un ejemplo de situación problema mucho más apropiado para el aula de clase podría diseñarse alrededor de una celebración de felicitación para los estudiantes que se gradúan de preescolar, para los que terminan su educación primaria, o para los que se gradúan de básica o de media. En cada nivel se puede poner la situación problema de planear esa fiesta, y en ese caso ya desde 4º o 5º primaria se puede utilizar la hoja electrónica para el presupuesto de costos. Pero, con o sin computadores, podemos empezar a trabajar esa situación problema o una parecida.

Si estamos "entrando en reversa" en una situación problema, no podemos comenzar poniendo un problema ni una lista de problemas. Al comienzo no sabemos gran cosa; apenas empezamos a estudiar la situación problema y ahí van a salir todos los problemas que uno quiera.

Parte del trabajo de diseño es tener algunos problemas preparados, pero si se les ocurren a los estudiantes esos mismos u otros, mejor todavía. Podemos analizar los tiempos: cuándo va a ser la fiesta, a qué horas, cuánto va a durar; podemos ver el número de invitados; podemos distribuirnos las tareas, elegir los responsables, los sitios y las horas de reuniones necesarias para la preparación. Por todas partes aparecerán los números de medir. Pero esos apenas son datos para que empiece el planteamiento de problemas solubles con el manejo competente de los números de medir.

Ahora encontramos en Internet hojas electrónicas y hasta programas PERT que permiten hacer grafos para planear actividades, que incluyen tiempos y recursos, fechas y responsables. Si queremos expandir las fronteras de la escuela, tenemos que pensar la situación problema y analizarla bien. Los estudiantes formularán problemas grandes y pequeños. Por ejemplo, si vamos a hacer una torta para la fiesta, resulta el problema de

El juego es fundamental en todas las clases. Pero, ¿sirve para aprender los números de medir?

calcular el costo de los productos que necesitamos para hornear la torta; podemos usar la hoja de cálculo para hacer el presupuesto y poner las variables con palabras completas para las cantidades de harina, mantequilla, azúcar, polvo de hornear, crema y lo demás que le queramos echar a la torta. Agregamos otras variables del costo unitario para cada libra, onza o gramo. Calculamos costos con distintas cantidades y precios, y los distribuimos entre distintas fuentes de ingresos, para que no resultemos siempre repartiendo costos por igual entre las familias. No todas las familias van a poder contribuir con lo mismo. Ese es otro problema, y no es pequeño, y la solución va a necesitar números de medir.

Con la misma situación problema se pueden trabajar problemas grandes y pequeños. No se trata solo de incluir los problemitas parecidos a los de los textos escolares que salen de la situación, sino también incluir otros aspectos de la vida real, como el costo de la energía y los costos del tiempo de las abuelas y de las mamás y otras personas que intervienen. Usualmente no hacemos esas cuentas de todos los costos reales y de lo que valdrían las contribuciones que hacen todas las personas que intervienen, que suelen ser no tanto en dinero como en tiempo, trabajo calificado, asesoría, organización y servicios voluntarios. De este modo, el docente puede poner en funcionamiento a los números de medir todo el tiempo, y conectar la situación con las competencias ciudadanas, por haber "entrado en reversa" al diseño de la situación, haciendo valer su autonomía curricular, haciendo valer el PEI de cada institución, y adaptando la situación al tipo de estudiantes que tiene en su clase. En ese sentido podemos contribuir al desarrollo de la institución, de la ciudad, del país, y del mundo.

CONCLUSIÓN

Por todo lo anterior, si integramos nuestras competencias matemáticas con las ciudadanas; con las científicas, tanto en las ciencias sociales como en las naturales, con las competencias lingüísticas, las comunicativas, las interpretativas y las argumentativas, con este proyecto podremos fortalecer en todos los niños y las niñas sus capacidades matemáticas y apoyarlos para elevar su nivel de competencia, y no solamente en los niños y niñas que estudian en los colegios privados, o en los que son una élite intelectual y sacan buenas calificaciones, sino en todos los niños y niñas de todas las extracciones sociales.

Claro que no les auguro que este proyecto sea fácil. Esta conferencia de apertura intenta apenas darles un impulso inicial para que tengan una visión amplia del trabajo del proyecto y se animen a trabajar en esta competencia matemática para el manejo de los números de medir. Sabemos que nos queda pendiente una tarea muy difícil: encontrar maneras viables de evaluar el nivel de competencias al que van llegando nuestros estudiantes. Ya vimos que las preguntas cerradas de escogencia múltiple no pueden evaluar las competencias propositivas y que es muy difícil escribir buenas preguntas de competencias interpretativas y argumentativas para distintas culturas y regiones del país. Pero lo que el ICFES no puede lograr con exámenes escritos, tal vez nosotros sí podamos lograrlo con métodos más flexibles y comprensivos para valorar y evaluar el progreso de nuestros estudiantes.

Ese problema de la evaluación del nivel de competencia queda abierto, y no lo vamos a resolver ni en este proyecto ni en el siguiente. Pero a medida que vamos aprendiendo a describir cuidadosamente las competencias y sus niveles, y en la medida en que vamos progresando en diseñar estrategias para desarrollar algunas competencias, iremos aprendiendo más y más sobre cómo evaluar el nivel de competencia al que van llegando nuestros estudiantes. Trabajémosle a la descripción fina de cada competencia; a la planeación de cómo enseñar para desarrollarla; al diseño de las situaciones problema que pueden contribuir a fortalecer las tres patas del modelo de esa competencia. Comencemos con el manejo competente de los números de medir, y "entremos en reversa" al diseño de situaciones problema potentes e interesantes.

Vamos a explorar con los niños y niñas esa isla del Archipiélago Fraccionario en la que viven los monstruos achicadores y agrandadores, y conectémosla por medio de puentes y carreteras con las otras islas del archipiélago que tal vez conocemos mejor.

Verán ustedes que estas tareas, aunque no son fáciles, son retadoras y apasionantes. De ellas va a depender si vamos a seguir diciendo o no cada diez años que la educación está mal, que los estudiantes tienen cada vez más rechazo a las matemáticas, que así no estamos preparando a nuestros estudiantes para ser ciudadanos competentes, social y culturalmente productivos. Tenemos que aprovechar este proyecto para cambiar ahora mismo, al menos con una competencia que sabemos que es muy potente para la vida real de todos nuestros estudiantes. Si no hacemos nada ahora, apenas habremos empezado el segundo decenio de otro siglo más de atraso en el país. Pero el discurso de las competencias, entendido de esta manera potente y futurista, nos ayudará a despertar ese conocimiento que está dormido en el cerebro de los niños y niñas, a pasarlo de inerte a actuante para que se vuelva potente y eficaz para la solución de los problemas de la vida real del mundo, del país, de la ciudad, de la institución y del aula.

Podemos comprobar que los estudiantes sí tienen ese conocimiento que les hemos enseñado, pero solo lo sabríamos si les hiciéramos repetidas preguntas para sacarles las respuestas con tirabuzón. Así nos daríamos cuenta de que sí tienen ese conocimiento inerte e inactivo, pero que no lo usan, o no les gusta, o se sienten mal en usarlo, o no detectan la ocasión de utilizarlo; por eso no son competentes en matemáticas. Pero si logramos pasar ese conocimiento de inactivo a activo, de inerte a actuante, estamos desarrollando sus competencias matemáticas.

El que rechace sin más el discurso de las competencias se resigna a que nuestro sistema educativo siga produciendo egresados incompetentes. En cambio, los que nos apropiarnos del discurso de competencia para volverlo más fino y potente, para buscar maneras de enseñar las matemáticas para el desarrollo de competencias, podemos contribuir positivamente a potenciar las capacidades del país. Enseñemos para hacer activo o actuante ese conocimiento que está dormido e inerte en el cerebro de los niños. Cada año nos quejamos de que después de diez años de hablarles de racionales, quebrados o fraccionarios, aun en la universidad no los conocen bien, les tienen miedo, y creen que no los pueden utilizar. Si superamos esa situación, comenzando desde ahora, expandiremos las fronteras del aula y la institución educativa hacia la ciudad, el país, Latinoamérica y el mundo.

Procesos matemáticos
¿Qué es ser competente matemáticamente?

3

Rafael Escudero Trujillo[1]
Carlos Rojas Álvarez[2]
Hember Jesús Llanos Booz[3]

ETIMOLOGÍA

Antes de definir competencia matemática y los procesos matemáticos que permiten alcanzarla, revisemos la etimología de la palabra competencia desde el punto de vista general y educativo. De acuerdo con el diccionario de la Real Academia: **competir** proviene del latín ***competere,*** de ***petere,*** pedir, aspirar, tender a. ***Cum* o *Com*** que sugiere la idea de compañía, de compartir. Así, ***competere*** indica un aspirar, un ir al encuentro de una misma cosa, contender dos o más contrincantes para alcanzar algo. El diccionario también se refiere a competencia como la "pericia, aptitud o idoneidad para hacer algo"; también como "sabiduría, práctica, experiencia, y habilidad para hacer algo".

Se nos ocurre pensar entonces, de acuerdo con las acepciones anteriores, que para ser competente se requiere: "sabiduría" esto es, (saber conocer): Tener conocimiento apropiado y la capacidad de usarlo inteligentemente en un contexto específico (saber hacer) y de manera ética y responsable (saber ser) (La Formación Básica en la Universidad del Norte, 2008).

Además, los diccionarios se refieren a: "Práctica", mejoramiento continuo (aprender a aprender). "Habilidad", uso adecuado y oportuno del conocimiento y de las herramientas necesarias para obtener un objetivo, logro, propósito o meta (saber hacer). "Aptitud", desempeño idóneo para afrontar y resolver problemas y (agregaríamos), de manera ética y responsable, para que se integren los tres saberes: saber conocer, saber hacer y saber ser. Pero como todas las definiciones en los diccionarios resultan muy generales o incompletas, se hace necesario indagar más sobre el significado de competencia.

Desde una visión educativa revisemos el siguiente concepto: competencia es "una actuación idónea que emerge en una tarea concreta y en un contexto con sentido" (Bedoya, J., 2007; Gardner, H.,1997; Ausubel D, Novak, J. & Hanesian, H., 1983, Novak, J. & Gowin. B., 1988). Tomado del proyecto PISA/OCDE Luis Rico (2004), destaca el término alfabetización matemática, que se define como las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando identifican, formulan y resuelven problemas matemáticos en variedad de dominios y situaciones. Esta idea es compartida por

---

1 Ph. D. en Educación con énfasis en educación matemática. Profesor-investigador de tiempo completo, Departamento de Matemáticas y Estadística, División de Ciencias Básicas de la Universidad del Norte. Barranquilla, Colombia. *rescuder@uninorte.edu.co*

2 Ms. C. en Educación. Licenciado en Matemáticas. Profesor-investigador de tiempo completo, Departamento de Matemáticas y Estadística, División de Ciencias Básicas de la Universidad del Norte. Barranquilla, Colombia. *crojas@uninorte.edu.co*

3 Especialista en Estadística. Licenciado en Matemáticas. Profesor de tiempo completo del British International College, Departamento de Matemáticas. Barranquilla, Colombia. *hemberllanos@hotmail.com*

muchos educadores matemáticos que consideran que el proceso transversal que promueve las competencias matemáticas es el de formular y resolver problemas contextualizados, bien sea desde la disciplina o desde el mundo de la vida.

De otra parte, la CEPAL y la Unesco definen competencia como "saberes y destrezas básicas para desempeñarse como un adulto autónomo y productivo, para el ejercicio de la ciudadanía, para la productividad en el trabajo y para comprender la ciencia y la tecnología" (CEPAL–Unesco, 1991, p. 127).

Ampliada esta definición al campo de las matemáticas, podría añadirse que ser competente, más que poseer un conocimiento formal (en matemática), es la actividad desplegada eficientemente o exitosamente en un contexto particular. Es lo que un individuo hace eficientemente con los objetos matemáticos: el establecimiento de relaciones entre ellos y las formas de razonamientos coherentes, que se hacen con las estructuras matemáticas.

¿QUÉ ES ENTONCES COMPETENCIA MATEMÁTICA?

Es un término muy integrador y polisémico como para dar una definición cerrada, tal como lo hacemos los matemáticos de los conceptos matemáticos; ya que competencia no es exactamente un objetivo, una meta, un logro, un indicador de logro, un estándar, un lineamiento, una aptitud o una actitud, pero tiene que ver con todos ellos.

Tratemos más bien de entender y llenarnos de argumentos sobre por qué una competencia matemática para el caso que nos ocupa se dice que es "saber hacer en un contexto" (MEN, 2006). Esto significa entender: ¿qué es un saber matemático?, ¿qué es saber hacer en matemática? y ¿qué es un contexto matemático? Y después de tener alguna claridad y/o aproximaciones a las respuestas de estas preguntas se respondería **¿cómo lograr que unos estudiantes puedan alcanzar las competencias matemáticas?**

Como puede colegirse, no es algo simple, porque toca con el qué y el cómo del conocimiento matemático, sus aplicaciones, su historia y la forma de abordar problemas matemáticos; en lo que concierne a la enseñanza aprendizaje de las matemáticas, a los procesos didácticos que se generan desde la propia disciplina. Desde esta perspectiva creemos que se puede comprender el marco referencial que el Ministerio de Educación Nacional ofrece para aproximarse a una conceptualización de competencia(s) matemática(s) y de los procesos que permiten desarrollarla en los estudiantes.

En lo que sigue, presentamos una síntesis de competencia(s) matemática(s) tomando como referencia los documentos del Ministerio de Educación Nacional (MEN) relacionados con otros autores y que fueron los que se utilizaron en el Programa de mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para profesores de 5° de primaria de un grupo de escuelas del Distrito de Barranquilla en el tópico de fraccionarios.

Según MEN, "una competencia ha sido definida como un hacer flexible que puede actualizarse en distintos contextos, es decir, como la capacidad de usar los conocimientos en situaciones distintas de aquellas en las que se aprendieron. Implica la comprensión del sentido de cada actividad y sus implicaciones éticas, sociales, económicas y políticas". (MEN, 2006, p.12). La competencia, según el Ministerio, no es independiente de los contenidos temáticos de un ámbito del *saber qué, del saber cómo, del saber por qué o del saber para qué,* pues para el ejercicio de cada competencia se requieren muchos conocimientos, habilidades, destrezas, comprensiones, actitudes y disposiciones específicas del dominio de que se trata, sin los cuales no puede decirse que la persona es realmente competente en el ámbito seleccionado.

Por ello, conceptúa el Ministerio, para que una persona pueda mostrarle a alguien que tiene una competencia no basta mostrarle que tiene los conocimientos necesarios, ni que posee las habilidades, ni que tiene las comprensiones, actitudes y disposiciones adecuadas, cada uno de estos aspectos pueden estar presentes sin que la persona haga evidente que es competente para esa actividad, si no los relaciona y organiza en función de un desempeño flexible, eficaz y con sentido (MEN, 2006).

Para el Ministerio, ser matemáticamente competente significa que en toda actividad matemática se lleven a cabo exitosamente los siguientes procesos:

1. Formular y resolver problemas.
2. Modelar procesos y fenómenos de la realidad.
3. Comunicar.
4. Razonar.
5. Formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos.

Para complementar la síntesis del Ministerio de Educación Nacional, revisamos los conceptos de la profesora María del Carmen Chamorro y ella señala al respecto: "llegar a ser matemáticamente competente está vinculado al desarrollo de la comprensión del contenido matemático". Agrega, "cuando se comprenden las nociones y procedimientos matemáticos, se pueden utilizar de manera flexible adaptándolos a situaciones nuevas y permitiendo establecer relaciones entre ellos y ser utilizados para aprender nuevo conocimiento matemático. Así, comprender está vinculado a saber cuál es el significado y cómo funcionan los procedimientos, cómo se relacionan unos con otros y por qué funcionan de la manera en que lo hacen".

Para la profesora Chamorro (2003) ser matemáticamente competente, debe relacionarse con ser capaz de realizar determinadas tareas matemáticas y comprender por qué pueden ser utilizadas algunas nociones y procesos para resolverlas, así como la posibilidad de argumentar la conveniencia de su uso. Según ella, el significado que debemos darle a la expresión *"matemáticamente competente"* está relacionado con los cinco aspectos de la actividad matemática, que son:

1. La comprensión conceptual.
2. Llevar a cabo procedimientos y algoritmos de manera flexible, eficaz y apropiadamente.
3. Habilidades de comunicación y argumentación matemática.
4. Pensamiento estratégico: formular, representar y resolver problemas.
5. Tener actitudes positivas hacia las situaciones matemáticas.

Desde esta perspectiva, el logro de la(s) competencia(s) se vincula al desarrollo de las diferentes dimensiones de manera integrada.

Tomando en cuenta las dos perspectivas: la del MEN (2006) y la de Chamorro (2003), estimamos que se complementan, pero llamamos la atención del último proceso que señala la autora*"tener actitudes positivas hacia las situaciones matemáticas"*. Este proceso nos parece muy importante en todos los aspectos de enseñanza aprendizaje de la(s) matemática(s), pero en especial en los primeros grados de escolaridad.

Integrando las dos visiones resumimos que para ser matemáticamente competente se deben desarrollar los siguientes procesos (MEN, 2006, Chamorro, M. 2003):

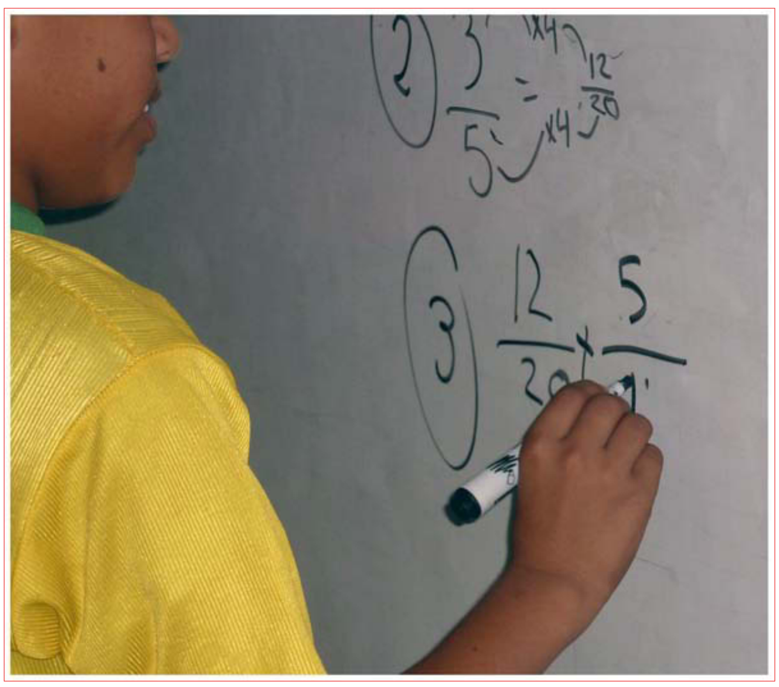
1. Formular y resolver problemas.
2. Modelar procesos y fenómenos de la realidad.
3. La comunicación.
4. El razonamiento.
5. Formular, comparar y ejercitar procedimientos algorítmicos.
6. Tener actitudes positivas hacia las matemáticas.

Consideramos que del 1 al 5 tanto el Ministerio como la profesora Chamorro coinciden en esencia, sólo cambian el orden en algunos casos y el tópico 6 distingue la propuesta de la autora.

Seguidamente, describiremos cada uno de esos procesos haciendo un resumen de acuerdo con los autores citados.

FORMULAR Y RESOLVER PROBLEMAS

Las situaciones problemas proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido en la medida en que las situaciones que se aborden estén ligadas a experiencias cotidianas y, por lo tanto, sean significativas para los alumnos. La resolución de multitud de problemas tomados de textos escolares suele ser solo ejercicios de rutina.



Estudiante resolviendo un ejercicio.

MODELAR PROCESOS Y FENÓMENOS DE LA REALIDAD

Un modelo es una construcción mental –una estructura– una representación de una situación real, basada en relaciones matemáticas. El modelo se piensa, propone y produce para poder operar transformaciones o procedimientos antes de aplicarlos a la situación real. Puede hacerse a través de distintos sistemas de representación. Hay dos niveles de complejidad: el primero consiste en reducir una situación real a una conocida, de tal manera que se pueda detectar fácilmente qué esquema se le puede aplicar, cómo se relaciona con otras y qué operaciones matemáticas pueden ser pertinentes para responder a las preguntas que suscita dicha situación, y el segundo es más propio de los cursos avanzados de física, ingeniería, economía, demografía y afines, y tiene que ver con la construcción y aplicación de "fórmulas" o "modelos" que se deducen utilizando herramientas matemáticas y que permiten entender, seguir y predecir un fenómeno de la realidad. El primer proceso puede comenzarse desde el pre-escolar e irse complejizando en los sucesivos grados escolares.

LA COMUNICACIÓN

"Si no se dispone de dos formas distintas de expresar y representar un contenido matemático..., no parece posible aprenderlo y comprenderlo" (Duval, R., 2004). Hay distintas formas de comunicación matemática: simbólica, tabular, gráfica o verbal. La comunicación matemática se refiere a la de los diversos sistemas de representación de los objetos matemáticos. Esto lo podemos ver en el excelente ejemplo que nos presentó el doctor Carlos Eduardo Vasco en la conferencia inaugural del *Programa de Mejoramiento de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas en la Escuela Primaria en Barranquilla,* dirigido a profesores de 5º de primaria de un grupo de escuelas del distrito de esta ciudad. El doctor Vasco dio un excelente ejemplo de las distintas formas de representación del fraccionario $\frac{1}{2}$. Veamos el ejemplo:

Distintas representaciones de $\frac{1}{2}$ ("un medio")[4]

"**La mitad**" (expresión verbal)

0.5 (expresión decimal)

$\frac{1}{2}$ (notación más común de fraccionario)

1/2 (otra notación de fraccionario)

50% (expresión en porcentaje)

|---|---| (representación gráfica)

Este sencillo ejemplo nos muestra que para hacer comunicación de los objetos matemáticos no hay una sola representación. Resaltamos la tesis de Duval (2004) expresada arriba: es necesario promover en los alumnos al menos la utilización con sentido y argumentación de dos sistemas de representación de un objeto matemático.

EL RAZONAMIENTO

El uso de modelos y materiales físicos manipulativos permite comprender que las matemáticas no son

[4] Adaptado de la Conferencia de Carlos Eduardo Vasco Problemas y retos de la educación por competencias, Universidad del Norte Barranquilla, Colombia, del 22 de junio de 2010.

simplemente una memorización de reglas y algoritmos, sino que tienen un sentido y una lógica que permiten percibir o detectar regularidades y relaciones, hacer predicciones y conjeturas, dar explicaciones coherentes dentro del discurso matemático, proponer interpretaciones y respuestas posibles y adaptarlas o rechazarlas, con argumentos.

Esto es, si se pueden construir esquemas generales basados en particulares, se tiene un razonamiento inductivo. Así, por ejemplo, a partir de la observación de una secuencia de figuras es posible determinar cuál es la secuencia que sigue. Si por el contrario, a partir de un conjunto de premisas o supuestos válidos es posible obtener conclusiones en casos concretos, se tiene un razonamiento deductivo. Así, por ejemplo, en geometría es posible a partir de un conjunto de proposiciones válidas obtener una nueva proposición mediante el enlace lógico de las proposiciones básicas con axiomas y propiedades conocidas.

FORMULAR, COMPARAR Y EJERCITAR PROCEDIMIENTOS ALGORÍTMICOS

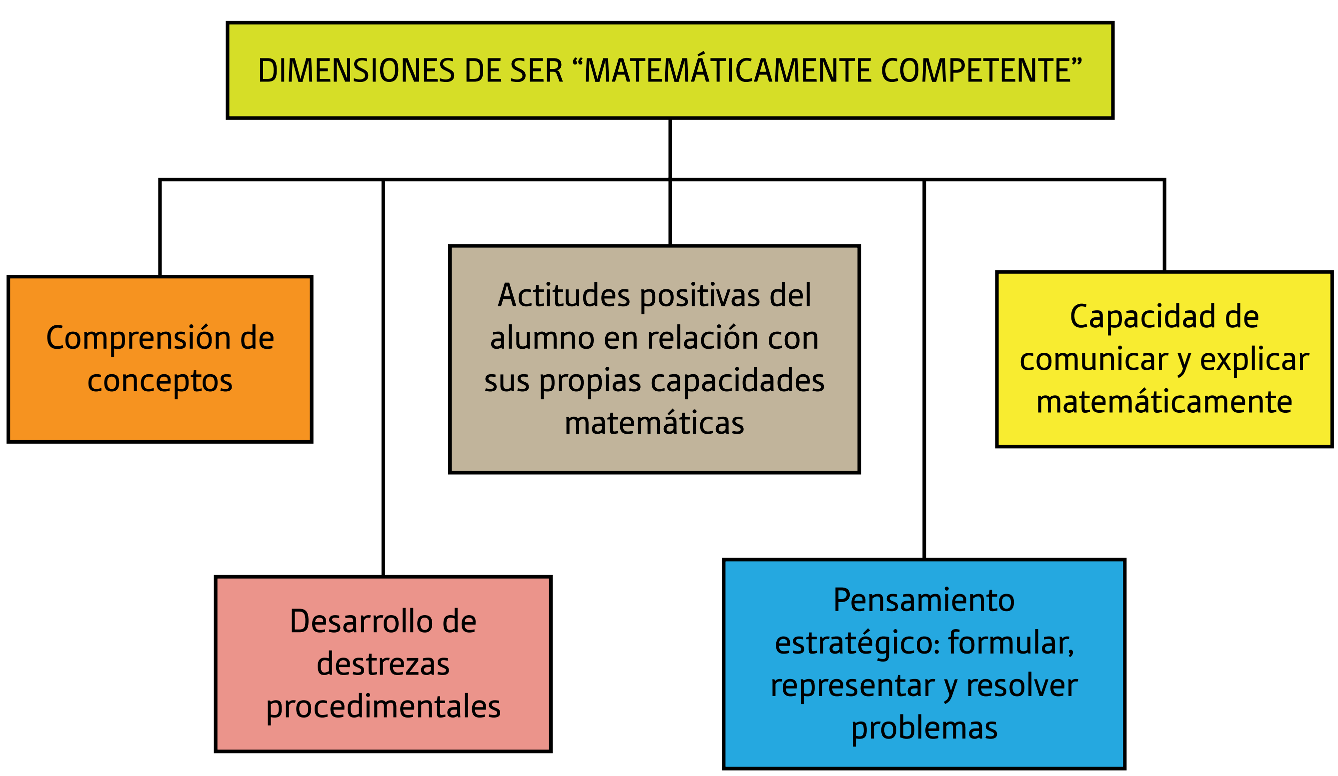
Implica comprometer a los alumnos en la construcción y ejecución segura y rápida de procedimientos mecánicos o de rutina, también llamados "algoritmos". Esta automatización no contribuye directamente al desarrollo significativo y comprensivo del conocimiento, pero sí a adquirir destrezas en la ejecución rápida y fácil de cierto tipo de tareas.

TENER ACTITUDES POSITIVAS HACIA LAS MATEMÁTICAS

Significa promover los procesos matemáticos anteriores, transferir la matemática al mundo de la vida, ser abierto a las diferentes representaciones que tienen los objetos matemáticos, conocer la historia y la teoría del conocimiento de la matemática, prepararse en el campo disciplinar y didáctico de las matemáticas.

DIMENSIONES PARA LLEGAR SER MATEMÁTICAMENTE COMPETENTE

Complementamos las ideas de competencia(s) matemática(s) y los procesos para promoverlas con un marco de referencia desde la mirada de otros autores sobre las dimensiones a tener en cuenta para llegar ser matemáticamente competente, que se resume en el siguiente esquema.



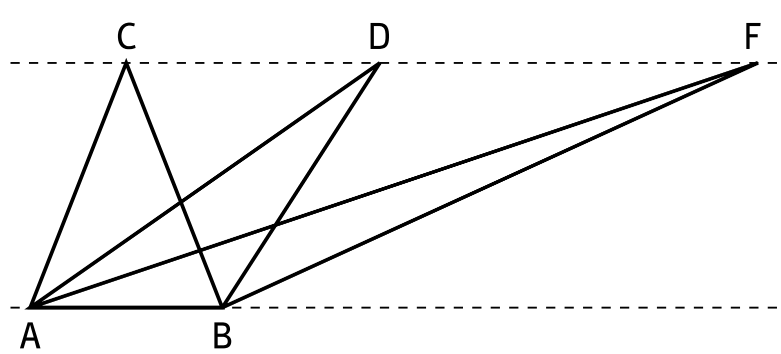
Comprensión conceptual:

Se refiere a las relaciones de las diferentes partes del contenido matemático. Por tanto, la esencia de la adquisición del conocimiento matemático estriba en: dado un conjunto determinado de objetos matemáticos, identificar las características que permitieron agruparlos, establecer relaciones entre ellos y, por último, definir operaciones que transformen uno o más elementos del conjunto en otro.

Una dimensión de la competencia matemática del alumno es la comprensión conceptual que este desarrolla y depende de cómo representa mentalmente y relaciona las diferentes partes del contenido matemático y lo usa en la resolución de problemas. Desde una perspectiva general, la comprensión está vinculada al establecimiento de conexiones entre diferentes representaciones internas de las nociones o conceptos.

Partiendo de lo desarrollado anteriormente, sería aconsejable llevar a los estudiantes a:

Comprender que el área de una figura no depende de la medida de sus lados.



Mirar que la comprensión de los números racionales sería mejor en la medida en que se relacionen las diferentes interpretaciones que tienen estos. Por ejemplo, la relación que existe entre

$$\frac{3}{4}, 0.75, 75\%, \frac{75}{100}$$

Que en la comparación de fracciones es útil utilizar puntos de referencia. Ejemplo, darse cuenta que $\frac{5}{8}$ es "un poco más de $\frac{1}{2}$" o que éste está entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$.

Aquí la mitad sirve como punto de referencia para representar y comparar otros números.

Comprender descomposiciones múltiples:

a) $8 + 7 = \begin{cases} 7 + 7 + 1 \\ 8 + 2 + 5 \end{cases}$

b) Reconocer que 43 se puede descomponer en tres decenas y trece unidades, y en cuatro decenas y tres unidades.

c) Que $300 son $200 más $100 ó tres monedas de $100.

Desarrollo de destrezas procedimentales

Se refiere a conocer los procedimientos matemáticos, conocer cómo y cuándo usarlos apropiadamente, y ser flexibles ante la posibilidad de adaptarlos. Además de que el estudiante comprenda, se espera también que haga cálculos correctamente, que siga instrucciones, que utilice de manera adecuada los instrumentos como la regla, el transportador, el compás, es decir, que ejecute tareas matemáticas que suponen el dominio de los procedimientos usuales que se pueden desarrollar de acuerdo con rutinas secuenciadas. Sin embargo, en cierta medida, el desarrollo de destrezas procedimentales debe estar vinculado con la comprensión conceptual de los conceptos que fundamentan dichos procedimientos.

Actitudes positivas del alumno en relación con sus propias capacidades matemáticas

Está relacionado con verse capaz de resolver las tareas matemáticas y ser capaz de aprender matemáticas considerando útil y con sentido el contenido matemático. Aquí hay un punto al que a nuestro juicio no se le ha dado la importancia que merece y es lo relacionado con las creencias y la ansiedad que manejan los niños ante las matemáticas, aspecto que incide en la propia capacidad de aprendizaje. Nos basaremos en el trabajo de Baroody (2004) y su punto de vista frente a este problema. Planteémonos otra pregunta: **¿cómo pueden afectar las creencias irracionales el aprendizaje ma-**

temático y la resolución de problemas de un niño? A decir verdad, la respuesta no es simple y necesitaríamos varios pasos para responderla.

Primero, lo que pudo constatar Baroody en sus investigaciones es que en ocasiones los problemas de aprendizaje no parten de una ineptitud o de una lesión cerebral, sino de una enseñanza que no se adapta a la manera de pensar del niño. Por consiguiente, las enseñanzas que no toman como plataforma el pensamiento informal para enseñar la matemática formal le ayudan al alumno a abrigar creencias que anulan el deseo y la capacidad de aprender.

Reyes L. (1984) señala que el aspecto afectivo (necesidades, tendencias, sentimientos e intereses) tiene una enorme influencia en el aprendizaje y el empleo de las matemáticas. En realidad, algunos niños se pueden desanimar, tanto que llegan a evitar las matemáticas por completo y no aprenden nada. Para demasiados niños —especialmente los considerados con problemas de aprendizaje, de aprendizaje lento o de bajo rendimiento— las matemáticas escolares parecen estar más allá de su comprensión. Esto evidencia a**ú**n más su inferioridad y, en consecuencia, amenaza su propio sentimiento de bienestar.

Mencionaremos algunas de las creencias engendradas por no tener en cuenta adecuadamente la matemática informal de los niños, según Godino, Batanero y Font (2003):

- Contar con los dedos es infantil y tonto.
- Comprender las matemáticas es algo que solo está al alcance de los genios.
- Las matemáticas no tienen por qué tener sentido

Otras creencias excesivas frente a la consecución de las respuestas correctas empleando el procedimiento adecuado también pueden crear falsos conceptos:

Todos los problemas deben tener una respuesta correcta.

- Solo hay una manera (correcta) de resolver un problema.
- Las respuestas inexactas (por ejemplo, las estimaciones) y los procedimientos inexactos (por ejemplo resolver problemas por ensayo y error) son inadecuados.

Algunos niños se ven tan abrumados por el temor que llegan a paralizarse intelectual y emocionalmente ante las matemáticas. Esta ansiedad forma un círculo vicioso de creencias irracionales, ansiedad y conductas de protección, como mostraremos en el siguiente modelo de ansiedad ante la matemática, donde dicha actitud empieza por creencias irracionales (Ellis & Harper, 1975).

Con todo lo expuesto anteriormente, surgiría la siguiente pregunta: ¿**cómo puede tratarse esta ansiedad?** La respuesta es fomentar creencias racionales y constructivas acerca de la matemática, su aprendizaje y la propia persona. Es posible fomentar creencias positivas en niños que ya hayan empezado a aprender las negativas. En realidad, incluso es posible enseñar creencias constructivas a niños con ansiedad ante las matemáticas, rompiendo así el círculo vicioso del comportamiento derrotista. A continuación se presentan algunas directrices específicas y ejemplos:

- *Poner de manifiesto la inexactitud de las creencias perfeccionistas y ayudar a los niños a desarrollar una perspectiva adecuada.* Se debe evitar darle una importancia excesiva a la perfección, sobre todo a la necesidad de dar siempre la respuesta correcta. Los ejercicios de resolución de problemas asignados a grupos pequeños alimentan la idea de que las matemáticas implican comprensión y descubrimiento.
- *Relacionar los materiales nuevos con experiencias familiares para los niños.* Conectar las matemáticas escolares con la matemática informal para hacerlas menos extrañas y amenazadoras ayudando a los niños a sentirse responsables por su aprendizaje.
- *Fomentar en los niños una imagen positiva de la matemática informal.* Esto es especialmente importante en el caso de niños con dificultades para el aprendizaje o con ansiedad ante las matemáticas. Es frecuente que maestros, padres,

compañeros, hermanos y otras personas hagan que los niños se sientan avergonzados de sus estrategias informales. Como resultado de ello, los niños tratan de ocultar o disimular las. Estos problemas pueden evitarse o reducirse al mínimo si el maestro incorpora las siguientes premisas:

- Adoptar una actitud receptiva ante la matemática informal.
- Tener en cuenta la capacidad y el valor de este conocimiento informal.
- Ayudar a desarrollar una perspectiva de la matemática informal.

Pensamiento estratégico: formular, representar y resolver problemas

Todas las capacidades anteriores se manifiestan en la habilidad de los estudiantes de plantearse, representarse y resolver problemas. Para formular un problema los alumnos deben ser capaces de identificar aquello que puede ser relevante y de establecer relaciones, por consiguiente un aspecto de esta capacidad se manifiesta cuando llegan a ser capaces de identificar estructuras generales en situaciones diferentes.

De acuerdo con la National Council of Teacher of Mathematics (NTCM, 2000) de Estados Unidos, la actividad de resolver problemas ha sido considerada como un elemento importante en el desarrollo de las matemáticas y en el estudio del conocimiento matemático. Para el caso de Colombia vemos que se reconoce que la resolución de problemas puede ser el proceso matemático que integra varios de los otros y una excelente estrategia para la enseñanza de las matemáticas, siendo además parte integral de la actividad matemática. Así la resolución de problemas puede considerarse como la verdadera esencia de las matemáticas.

Arthur Baroody, en su libro *El pensamiento matemático de los niños* (2004), plantea una serie de sugerencias de cómo puede reforzarse la capacidad para la resolución de problemas; hace una distinción entre problemas rutinarios que implican un único paso para su solución, y los no rutinarios que requieren algo de análisis y pensamiento.

Los estudiantes del ciclo inicial suelen tener éxito en problemas rutinarios porque los problemas aritméticos sencillos son significativos y tienen un formato sencillo. Los problemas rutinarios pueden asimilarse con rapidez al conocimiento aritmético informal del niño. Además, el formato de los problemas rutinarios no exige mucho análisis. La tarea básica requerida para resolver estos problemas es identificar la operación adecuada. Esto puede conseguirse con bastante facilidad mediante una simple lectura superficial de los problemas. En cambio, los no rutinarios no se conectan automáticamente con el conocimiento que tienen los niños de conceptos y procedimientos. Además, el formato de los problemas no rutinarios requiere más de una simple identificación y aplicación de una operación aritmética conocida.

Por ejemplo, cuando se incluye información extra en un problema, algunos niños aplican mecánicamente una operación aritmética a todos los números. Veamos: *Luis compró una bolsa de canicas. En la bolsa había quince canicas rojas y veinte azules. En la tienda había treinta bolsas. ¿Cuántas canicas compró Luis?* Una respuesta común para este problema es “65” porque se suman los tres números mencionados (15 + 20 + 30). Muchos niños parecen no analizar el problema para determinar la información que sobra.

¿Por qué se da esta discrepancia en cuanto a la ejecución entre problemas no rutinarios y rutinarios? Con frecuencia, la enseñanza de la resolución de problemas consiste en poco más que asignar problemas después de haberse introducido una operación o desarrollado un tema con el fin de:

a) Dominar los datos numéricos básicos de la operación,

b) Practicar el algoritmo o los algoritmos de cálculo relacionados con ella y

c) Reforzar aplicaciones específicas de las operaciones relacionadas con el mundo real.

Por tanto, el fin de los ejercicios relacionados con el mundo real es practicar técnicas básicas, no desarrollar la capacidad de resolver problemas. Les enseñamos a los niños montones de rutinas, de operaciones, de propiedades, teóricamente para que les sirvan a la hora de resolver problemas; pero no les enseñamos las estrategias básicas para afrontarlos. Esperamos que las desarrollen por sí mismos a base de proponerles muchos problemas y les increpamos cuando comprobamos que no lo hacen. No nos damos cuenta de lo fundamental que es para su futuro desarrollo intelectual hacerse sus rutas de pensamiento. Y no es algo con lo que uno se levanta un buen día de la cama.

Ahora, ¿**cómo podemos estimular la capacidad de resolver problemas?** A continuación se presentan algunas directrices generales y ejemplos apoyados en la investigación realizada por Arthur Baroody:

Motivación: los niños deben tener algo más que capacidad para comprender problemas. Como vimos anteriormente, la actitud positiva hacia las matemáticas es importantísima. La motivación procede del interés, la autoconfianza y la perseverancia. Los niños derrochan energía de buena gana en actividades que les interesan y no lo hacen cuando las actividades no les parecen interesantes ni importantes. Además, la resolución de problemas implica tomar decisiones, enfrentarse a la incertidumbre y aceptar la posibilidad del fracaso. En pocas palabras: la resolución de problemas implica riesgo y, en consecuencia, exige la confianza necesaria para aceptarlo. La resolución de problemas exige tiempo para pensar y explorar, puede implicar cometer errores, descubrirlos y volver a empezar, por tanto; requiere el compromiso de no abandonar el problema. En resumen, el factor afectivo de la motivación, que se basa en el interés, la autoconfianza y la perseverancia, es importante para el éxito en la resolución de problemas no rutinarios.

Empleo de problemas no rutinarios: ofrece más posibilidades de estimular una resolución de problemas. Se pueden utilizar los de este tipo.

Los que requieran análisis. Por ejemplo transformar el problema rutinario (Carlos tiene $500 y Jaime $800. ¿Cuánto dinero tienen en total?) en un problema no rutinario: Carlos tiene $500 y Jaime $800. ¿Los dos juntos tendrán dinero suficiente para comprar una tarjeta que cuesta $1.200?

Usando problemas con demasiados datos, con pocos o demasiados datos incorrectos. Ejemplos: Carla necesita cuatro velas para su pastel de cumpleaños, Katia necesita seis. En una caja hay doce velas. ¿Cuántas velas necesitan las niñas en total?

Teresa tenía seis canicas. Luego compró algunas más. ¿Cuántas canicas tiene ahora?

Samara compró seis libros y cuatro lápices. ¿Cuánto tuvo que pagar en total?

Usando problemas que se puedan resolver de más de una manera. Ejemplo: Tomás tiene $1.000. Quiere comprar una barra de chocolatina que cuesta $500 y una cajita de chicles que cuesta $300. ¿Cuánto dinero le queda?

Usar problemas cuya solución requiera de varias etapas. El ejemplo anterior es válido para esta situación, pues en cualquiera de los dos procedimientos se necesita de dos etapas.

Usar problemas con más de una respuesta posible: Camila tiene $2.100 para comprar su merienda. De acuerdo con la lista de precios que aparece en la tabla, ¿qué puede comprar Camila con el dinero que tiene?

ARTÍCULOS	PRECIO
Gaseosa	$900
Papita frita	$550
Empanada	$800
Chito	$500
Jugo	$750
Dedito	$800
Agua	$200
Porción de pizza	$1.350

Usar problemas que exijan un esfuerzo prolongado. Ejemplo: con anticipación se les pide a los estudiantes que siembren una planta (este trabajo se puede realizar junto con el área de ciencias). El problema sería, ¿cuántos centímetros en promedio creció mensualmente la planta que sembraste?

Capacidad de comunicar y explicar matemáticamente

Significa que los estudiantes deben llegar a ser capaces de proporcionar suficientes razones, utilizando conceptos y procedimientos apropiados, para que sus compañeros y el profesor puedan llegar a intuir "por qué han hecho lo que han hecho". En este sentido la comunicación es necesaria para construir competencia matemática.

En los últimos años se ha incrementado el interés de los investigadores por estudiar cómo comunican ideas matemáticas los alumnos y qué factores facilitan o impiden el desempeño de habilidades comunicativas. Muchas de estas características y habilidades se dan diariamente en la interacción de los alumnos en las clases.

Diversos estudios han identificado *la comunicación* como uno de los procesos más importantes para aprender matemáticas y para resolver problemas. Comunicar y explicar matemáticamente se refiere a las razones o a los porqués que el estudiante pone de manifiesto ante un problema; la expresión de dichos porqués busca poner en juego razones o justificaciones expresadas como parte de un razonamiento lógico, esto es, las relaciones de necesidad y suficiencia, las conexiones o encadenamientos que desde su curso matemático son válidas. Estas razones no deben corresponder a una argumentación desde lo puramente cotidiano, sino que deben ser razones que permitan justificar el planteamiento de una solución o una estrategia particular desde las relaciones o conexiones válidas dentro de la matemática.

Estas condiciones deben ser favorecidas por el maestro. Por lo tanto, el trabajo de la comunidad académica se hace necesario. El desarrollo de esta capacidad se apoya en la posibilidad de que el profesor proporcione regularmente oportunidades para que los alumnos puedan hablar de los conceptos y procedimientos que han utilizado y proporcionar razones de por qué han hecho lo que han hecho. Además, la interacción social es indispensable para que el niño desarrolle la lógica.

Otro aspecto importante en el desarrollo del lenguaje es el uso de preguntas convergentes y sugerencias, porque ellas permiten desarrollar y perfeccionar las acciones comunicativas y argumentativas de los estudiantes. También es importante animar a los niños a que tengan sus propias opiniones y las defiendan, dejando que ellos mismos decidan cuándo hay otra idea mejor. Por ejemplo, si un niño de primero de primaria piensa que 8+5=12 debería animársele a defender esta idea hasta que él mismo decida que hay un error en su respuesta. Con este intercambio se conseguirían dos cosas: una, se estimularía a los niños a pensar con el fin de probar o defender sus soluciones ante sus compañeros; dos, se impediría que se desarrollara la idea de que las matemáticas son arbitrarias, incomprensibles y destinadas a ser memorizadas.

¿Cómo se argumenta en matemáticas?

Investigaciones desarrolladas por Lourdes Valverde, (2004) proponen que la argumentación en matemáticas se puede lograr a través de las siguientes acciones:

La identificación de un concepto: dadas las siguientes expresiones señale cuáles son ecuaciones. Justifique su respuesta:

a) $3x - 7 > 8y + 2$;

b) $5x + 9y = 0$;

c) $\frac{1}{3}x - 0.6x = \frac{1}{6}$

La realización de un procedimiento: halle el conjunto solución de la ecuación $X^2 - 6X + 9 = 0$ en los reales y argumente por qué los valores hallados son soluciones.

La utilización de un contraejemplo: ¿se cumple siempre que:

si $x \in R$ entonces

$|x + 3| = x + 3$? ¿Por qué?

CONCLUSIONES

En este artículo hemos hecho un recorrido inicialmente etimológico y posteriormente fundamentado sobre el término competencia(s) matemática(s), desde descripciones que hacen el Ministerio de Educación Nacional y otros autores referenciados.

Para comprender un concepto tan polisémico e integrador, es necesario tener en cuenta que se entrecruzan varios saberes: *el saber conocer, el saber hacer, y el saber ser,* que permiten aproximarse a la idea de competencia matemática como la capacidad de desarrollar exitosamente una tarea matemática, específica, en un contexto específico, y de manera ética y responsable.

También hemos dado cuenta, de una manera sintética, de los distintos procesos matemáticos que de acuerdo con el MEN y los autores referidos se necesitan para llegar a ser matemáticamente competente con algunos ejemplos ilustrativos.

Estos procesos matemáticos o las dimensiones para llegar a ser matemáticamente competente son: 1. formular y resolver problemas; 2. modelar procesos y fenómenos de la realidad; 3. la comunicación; 4. el razonamiento; 5. formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos; 6. tener actitudes positivas hacia las matemáticas.

Este fue el marco referencial que se utilizó en la fase piloto del *Programa de mejoramiento de la enseñanza aprendizaje de las matemáticas para profesores de 5° de primaria de un grupo de escuelas del Distrito de Barranquilla en el tópico de fraccionarios.*

REFERENCIAS

Ausubel. D., Novak. J. & Hanesian. H. (1983). *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo*. (2ª ed.) México: Trillas.

Baroody, A. J. (2004). El pensamiento matemático de los niños. Un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial.

Bedoya, J. et ál. (2007). Modelo de situaciones problemas para la movilización de competencias matemáticas en las ciencias básicas de la Universidad de Medellín. Medellín: Proyecto de investigación.

CEPAL-Unesco. (1991). Formación basada en competencias. Recuperado de: http://www.slideshare.net/MAESTRIACID/formacion-basada-en-competencias-pdf

Chamorro, M. (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid: Pearson.

Diccionario de la Real Academia Española. (2001). 22ª ed. Madrid.

Duval, R. (2004). *La geometría desde el punto de vista cognitivo*. PMME-Unison.

Ellis, A. & Harper, R. A. (1975). *A new guide to rational living*. North Hollywood, CA: Wilshire.

Gardner, H. (2009). La teoría de las inteligencias múltiples. Multiple Intelligencies. Recuperado el 13 de abril de 2011 de: http://depsologia.com/tipos-inteligencias/

Godino, J., Batanero, C. & Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. Recuperado de internet el 30 de marzo de 2011 de http://www.scribd.com/doc/34583768/Fundamentos-de-la-enseñanza-y-el-aprendizaje-de-las-matematicas-para-los-maestros

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas y ciudadanas. *Documento, n°. 3*. Bogotá: MEN.

National Council of Teacher of Mathematics. (2000). *Principales and standards for school mathematics*. Reston: VA (NTCM).

Novak, J. D. & Gowin, B. (1988). *Aprendiendo a aprender.* Barcelona: Martínez Roca.

Reyes, R. E. (1984). Mental Computation and Estimation: Past, Present, and Future. *Elementary School Journal, 84,* 544-557.

Rico R, L. (2004). Evaluación de competencias matemáticas Proyecto PISA/OCDE 2003. En: Castro, Encarnación de la Torre (Eds): *Octavo simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática,* SEIM, 88-102. Recuperado el 13 de Abril de 2011 de http://Rico 2004-fuenes.uniandes.edu.co

Universidad del Norte. (2008). *La formación básica en la Universidad del Norte.* Barranquilla: Ediciones Uninorte. Vicerrectoría Académica. Dirección de Calidad y Proyectos Académicos.

Valverde, L. (2004). *La competencia argumentativa en matemática y su evaluación en el proceso de enseñanza-aprendizaje.* Colección Bolsillo Didáctico I.

Vasco, C. (2010). *Problemas y retos de la educación por competencias en las matemáticas de 5° grado*. [Conferencia] Universidad del Norte, Barranquilla.

Fortalezas y retos encontrados
Nuestro punto de partida

4

Judith Arteta Vargas[1],
Sonia Álvarez Morales[2]

La elaboración de una línea de base para el *Programa de Mejoramiento de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas en Barranquilla* se considera como una de las estrategias de éxito de esta intervención. Es valiosa por optimizar el uso de la información y permitir el establecimiento de puentes y relaciones en la producción de información, facilitando así el ejercicio de toma de decisiones y el establecimiento de puntos de comparación para determinar qué tanto se han logrado alcanzar los objetivos (DANE, 2004).

En la fase piloto, la línea de base posibilitó la recolección de la información con los instrumentos diseñados, aplicados y sistematizados por el equipo, y, a partir de ella, se logró la caracterización de la población objetivo (profesores, estudiantes y directivos docentes de las instituciones participantes). También posibilitó la orientación y adecuación de las actividades, talleres y acciones del proceso de actualización didáctica y disciplinar de los maestros en torno a los fraccionarios en el grado 5° de primaria, tomando en consideración las condiciones iniciales encontradas y en la idea de su mejoramiento y enriquecimiento.

Los resultados de la sistematización de la información obtenida con los instrumentos se presentan en los siguientes seis apartes del presente capítulo en el siguiente orden: las instituciones participantes, los maestros de quinto de primaria, los estudiantes de quinto de primaria, los resultados en matemáticas de las Pruebas Saber 5° del 2009, la caracterización de la práctica pedagógica inicial de los maestros y, por último, el seguimiento y evaluación del programa.

LAS INSTITUCIONES PARTICIPANTES

Trabajamos con quince instituciones distribuidas en las distintas localidades de Barranquilla, tal como lo muestra el mapa del gráfico N°. 1, la mayoría de las cuales estaban ubicadas en las localidades Suroccidente y Centro Histórico. Dichas instituciones fueron seleccionadas por el equipo a partir de una base de datos de veinte instituciones, que proporcionó la Secretaría de Educación Distrital de Barranquilla teniendo en cuenta los siguientes criterios: el compromiso asumido por los directivos docentes y maestros de quinto grado del área de matemáticas, la actitud positiva hacia el programa, el deseo y la voluntad de saber,

1 Coordinadora del *Programa de Mejoramiento de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas en Barranquilla*. Profesora-investigadora, Departamento de Química y Biología, División de Ciencias Básicas de la Universidad del Norte. Barranquilla, Colombia. *vjudith@uninorte.edu.co*

2 Asistente de investigación del *Programa de Mejoramiento de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas en Barranquilla*, División de Ciencias Básicas. Universidad del Norte. Barranquilla, Colombia. *asonia@uninorte.edu.co*

la disposición al cambio, la disposición para participar activamente en talleres, filmaciones, observaciones y análisis de clases, revisión y análisis de las Pruebas Saber, planes de clase, materiales de los estudiantes. De igual manera se valoró el compromiso asumido para llevar el registro escrito de la experiencia y cumplir con el diseño, aplicación y evaluación de innovaciones en la enseñanza de las matemáticas.

Realizamos varias visitas a cada institución. En algunas evidenciamos obras de adecuación física y del mobiliario. Cada visita sirvió para reforzar el compromiso entre la Universidad del Norte, la Fundación ANDI y la SED Barranquilla por aportar el mejoramiento de la calidad educativa de nuestros niños. La presencia del equipo de investigadores en las aulas de clase despertó la curiosidad de otros docentes por participar o apoyar desde su área o labor al proceso que se adelantaba en la institución.

La intervención educativa adelantada consiguió impactar de manera indirecta alrededor de 12.835 estudiantes (véase los gráficos N°. 2 y 3 sobre el número de estudiantes por institución). La institución con mayor número de estudiantes fue la Denis Herrera de Villa (1.552), seguida de Las Flores y La Ciudadela Estudiantil; con menos estudiantes está La Unión (318). De manera directa, la intervención impactó a 937 estudiantes de 5°, quienes se vieron beneficiados con el mejoramiento de las prácticas de enseñanza de sus maestros en el área de las matemáticas.

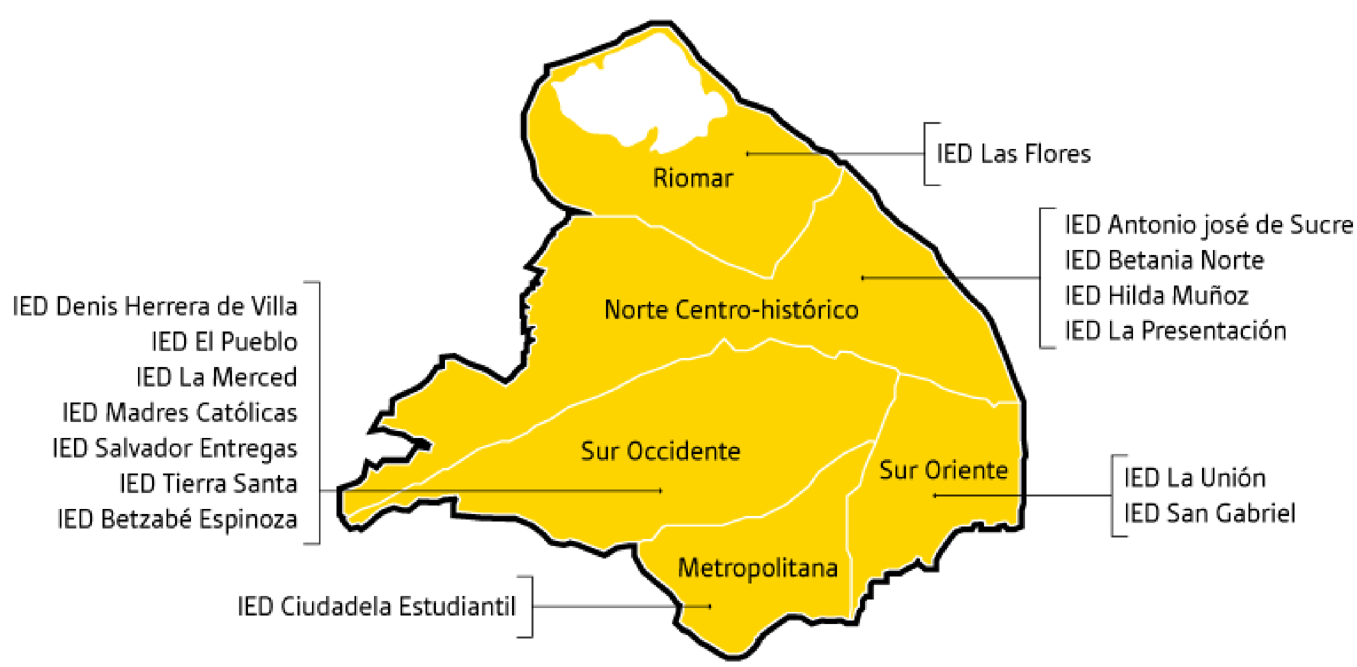
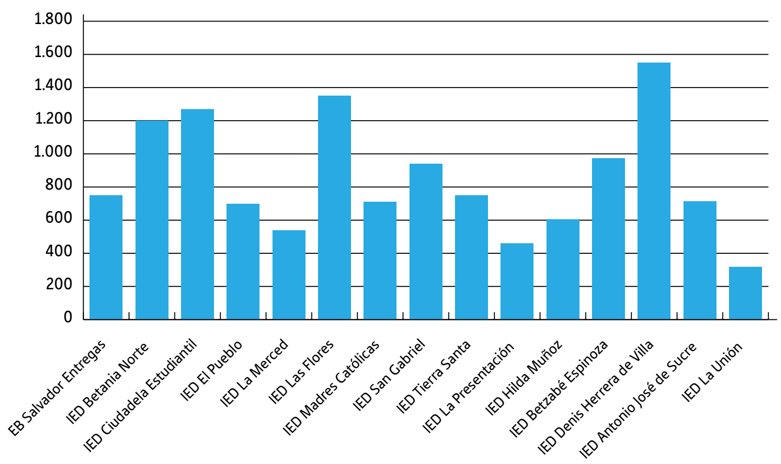


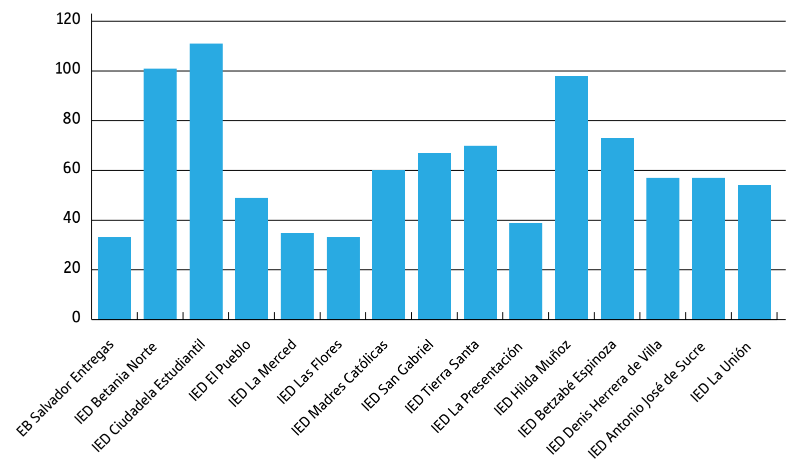
Gráfico 1
Mapa de distribución de las instituciones participantes en la intervención por localidades de Barranquilla

Nota: cabe señalar que en la página web de la Secretaría de Educación de Barranquilla, hasta el año 2009, la institución Denis Herrera de Villa figura separada de una de sus actuales sedes: La Manfa, la cual también fue atendida por el programa.



Institución	N°. de estudiantes
CEB Salvador Entregas	750
IED Betania Norte	1.200
IED Ciudadela Estudiantil	1.271
IED El Pueblo	700
IED La Merced	538
IED Las Flores	1.350
IED Madres Católicas	712
IED San Gabriel	940
IED Tierra Santa	750
IED La Presentación	460
IED Hilda Muñoz	605
IED Betzabé Espinoza	974
IED Denis Herrera de Villa	1.552
IED Antonio José de Sucre	715
IED La Unión	318
Total	12.835

Gráfico 2
Total de estudiantes de cada institución beneficiados indirectamente con la intervención.



Institución	N°. de estudiantes
CEB Salvador Entregas	33
IED Betania Norte	101
IED Ciudadela Estudiantil	111
IED El Pueblo	49
IED La Merced	35
IED Las Flores	33
IED Madres Católicas	60
IED San Gabriel	67
IED Tierra Santa	70
IED La Presentación	39
IED Hilda Muñoz	98
IED Betzabé Espinoza	73
IED Denis Herrera de Villa	57
IED Antonio José de Sucre	57
IED La Unión	54
Total	937

Gráfico 3
Total de estudiantes de 5° grado beneficiados en cada institución directamente con la intervención.

Aulas romodeladas en una de las instituciones.

Niños de 5° grado de la Institución Educativa Denis Herrera.

LOS MAESTROS DE QUINTO DE PRIMARIA PARTICIPANTES

En este programa cada maestro participante con sus estudiantes y en el contexto de su institución se constituye en una unidad de estudio y de acompañamiento, actualmente llevamos seguimiento a dieciocho maestros de quinto de primaria, cada uno lo identificamos con un seudónimo para presentar de manera más objetiva la información y cumplir con el acuerdo ético establecido con cada uno al inicio de la intervención. Consideramos clave indagar sobre el nivel de formación de los profesores, su experiencia profesional dentro y fuera del área de matemáticas y su enseñanza, así como las capacitaciones docentes recibidas, entre otros aspectos, ya que, cada uno de estos son experiencias y escenarios importantes a partir de los cuales el maestro configura su conocimiento didáctico y disciplinar.

Toda la información obtenida en la línea de base, al ser interpretada por el equipo investigador y retroalimentada con los resultados de la sistematización de otros instrumentos, fue un referente importante para orientar las acciones establecidas para a el logro de los objetivos del programa. A continuación detallamos los tres aspectos clave mencionados para este ítem:

Nivel de formación de los maestros participantes:

Respecto a la formación docente, el 100% de los maestros participantes cuenta con título profesional y las licenciaturas abarcan un 66,7%; de este porcentaje solo un 20% tiene énfasis o es en áreas relacionadas con las matemáticas. El porcentaje restante tiene estudios de pregrado en otros campos. A nivel de postgrado, 22% de los maestros han realizado especialización en distintas áreas del sector educativo. Ninguno a nivel de maestría o título superior que implique una formación investigativa.

Este bajo porcentaje, 20%, de formación especializada en el área de las matemáticas y su docencia, así como la falta de una formación investigativa a nivel de posgrado, determinó la necesidad de realizar un trabajo intensivo en el conocimiento matemático y didáctico en los talleres de la intervención. Cabe anotar que las filmaciones de clase y cuestionarios realizados a los profesores también evidenciaron debilidades de los maestros en el manejo conceptual y didáctico sobre las matemáticas básicas. Así mismo, pese a esta debilidad, sorprende el interés de los profesores por mejorar su nivel de conocimientos frente al manejo disciplinar, pedagógico y didáctico en el nivel y área que enseñan.

Pregrado	Nº. de maestros
Lic. en matemáticas y física	3
Lic. en educación/básica/infantil/ psicopedagogía/ciencias sociales	7
Lic. en educación física	1
Trabajo social	1
Ingeniería	1
Administración de empresas	1
Abogado	1

Gráfico 4
Título de pregrado de los maestros participantes.

Gráfico 5
Título de postgrado obtenido por los maestros participantes

Experiencia profesional de los maestros

El 76,5% de los maestros participantes cuenta con una experiencia docente en este grado entre uno y cinco años (ver gráfico N°. 6), de manera que más de la mitad de los maestros participantes llevaba no más de cinco años desempeñándose en el área de matemáticas de 5°, tiempo de experiencia considerado bajo respecto al total de años de ejercicio docente de cada maestro que en promedio está entre veinte y treinta. Llama la atención que las dinámicas institucionales actuales de los planteles del distrito llevan a que maestros sin la suficiente formación y experiencia terminen desempeñando su cargo con dificultades en el dominio de los contenidos para el nivel y grado asignado.

Experiencia docente [3]	‹ 1 año	1 - 5 años	Entre 5 y 10 años	›10 años
Sara	0	1	0	0
Beatriz	0	0	0	1
Camilo	0	1	0	0
Paulina	0	1	0	0
Melisa	0	1	0	0
Frida	0	0	1	0
Mariana	0	1	0	0
Gabriela	0	1	0	0
Teresa	0	0	0	1
Pedro	1	0	0	0
Helena	0	1	0	0
Belén	0	1	0	0
Berta	0	0	0	0
David	0	1	0	0
Dalia	0	0	1	0
Abril	0	1	0	0
Andrés	0	1	0	0
Úrsula	0	1	0	0
Total	1	13	2	2
%	5,6	72,2	11,1	11,1

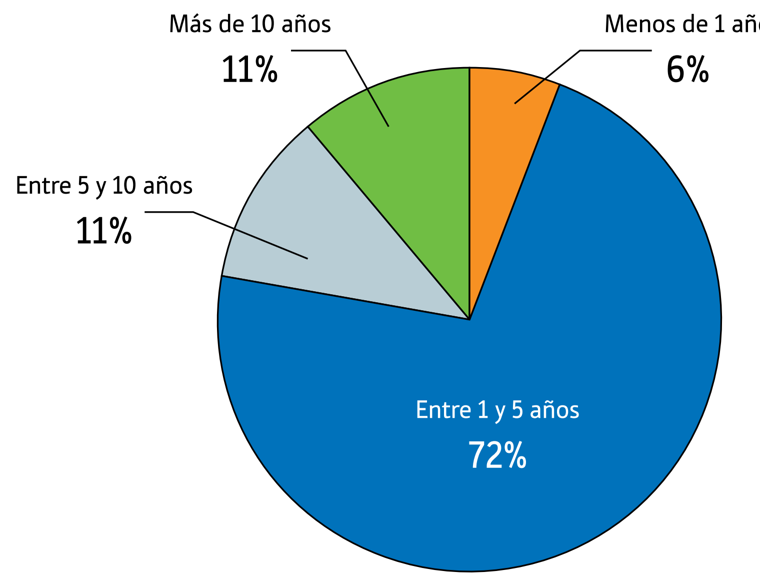


Gráfico 6
Experiencia profesional de los docentes participantes en las matemáticas de 5°

Capacitaciones en que han participado los maestros

La indagación a los maestros sobre las capacitaciones que habían recibido a lo largo de su trayectoria docente arrojó que solo cinco de los dieciocho maestros participantes (27,7%) había asistido a alguna capacitación, de los cuales solo uno de ellos había sido entrenado en competencias y los demás en capacitaciones relacionadas con temas de pedagogía, sobre todo en pedagogía conceptual, pero el 82% manifestaron no haber participado en capacitaciones en el área de matemáticas (ver gráfico N°. 7); los pocos que referenciaron alguna capacitación en el área, subrayaron que dichas jornadas tuvieron énfasis en TIC y no en aspectos conceptuales ni didácticos de la disciplina.

3 Se ha usado un nombre supuesto para proteger la identidad de los maestros participantes

Gráfico 7
Participación los maestros en capacitaciones en el área de matemáticas.

Los elementos encontrados en los tres aspectos anteriores se tomaron en cuenta al configurar las estrategias de la intervención para actualizar y fortalecer el conocimiento disciplinar y didáctico de los maestros; de esta manera, las demás visitas a las instituciones, los talleres, los materiales de apoyo y las asesorías del equipo se orientaron hacia la construcción de un modelo que permitiera proporcionar conocimiento actualizado frente a los contenidos matemáticos, enfatizando en los fraccionarios como concepto integrador, y también en aspectos que promovieran en los maestros el interés e importancia de desarrollar procesos de investigación a nivel de aula.

LOS ESTUDIANTES DE QUINTO DE PRIMARIA

Los estudiantes de 5°, alrededor de 937 impactados directamente, son niños y niñas que oscilan en los rangos de edad que muestra la figura N°. 8; la mayoría de los cuales se encuentra ente los diez y los doce años, en algunas instituciones se presentan casos de extra edad y en un par de ellas estudiantes especiales. En general, los grupos de estudiantes se caracterizan por ser dinámicos, extrovertidos, algunos con altos índices de indisciplina dentro del aula, problemas para mantener la concentración y tendencia al bajo rendimiento académico.

RESULTADOS DE LAS PRUEBAS SABER 5° EN EL AÑO 2009

La línea de base también involucró un análisis de los resultados de cada institución en las Pruebas Saber 5° en el año 2009. Se analizó esta información con los docentes del área, coordinadores académicos y rectores. Al preguntarle a los docentes sobre los resultados de la prueba encontramos que el 53% dice desconocerlos y el 47% dice conocerlos, pero usualmente los confunden con los resultados de la Prueba de Estado ICFES (Saber 11°), de manera que, por ejemplo, los maestros desconocían los tipos de niveles de competencia que discrimina la prueba. En algunas instituciones se observó que el tema no se conoce porque es considerado un asunto exclusivo de los administrativos (coordinadores y rector) de la institución.

El gráfico 10, recoge los resultados de los estudiantes de 5º en la Prueba Saber 2009, nótese que el 75% de los estudiantes colombianos (44% de insuficientes más 31% con resultados en el nivel mínimo) no alcanza niveles de desempeño satisfactorios y apenas un 8% llega a un nivel avanzado.

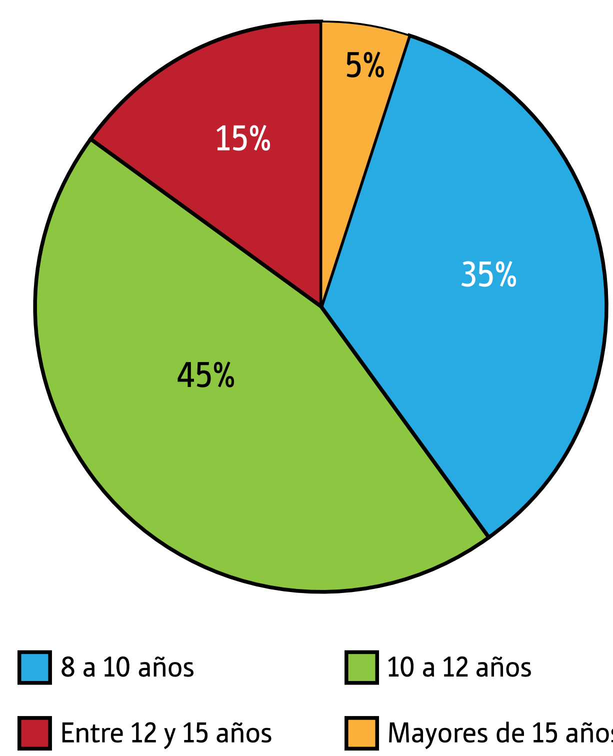
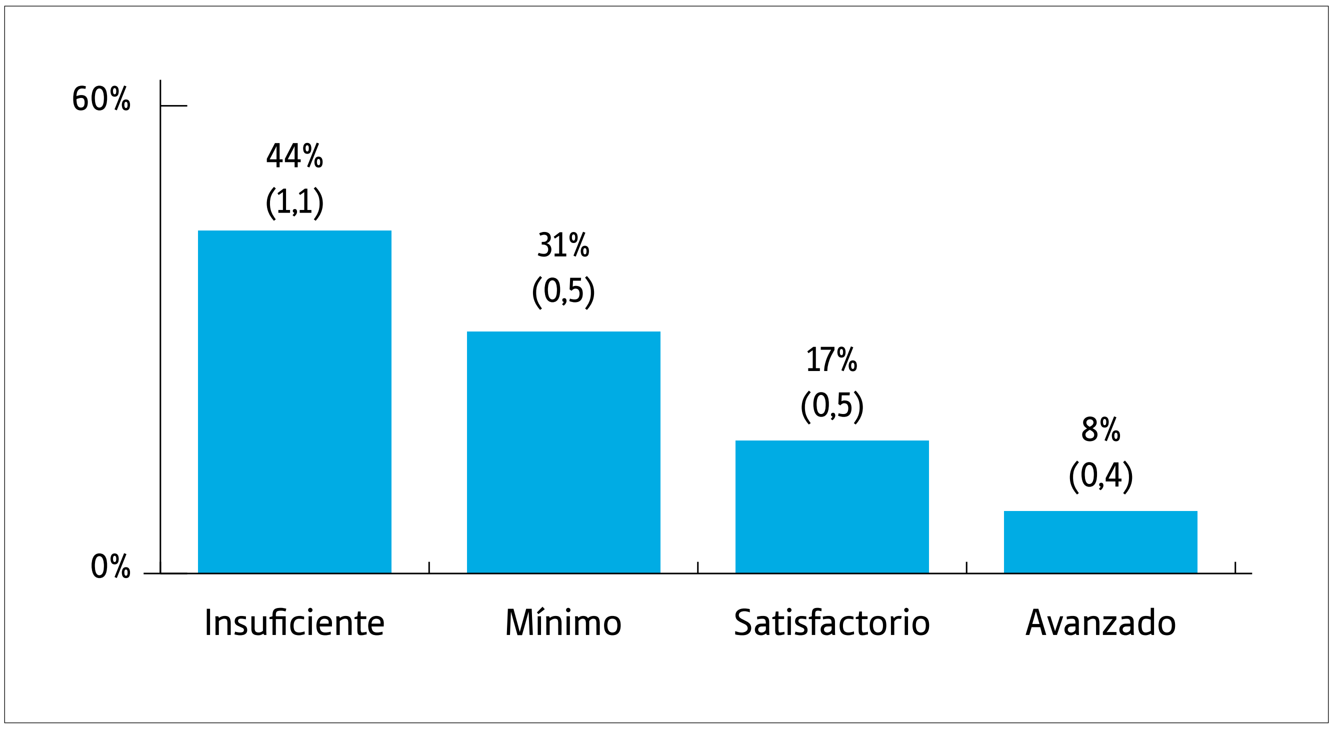


Figura 8
Rangos de edad de estudiantes de 5°



Nota: los valores entre paréntesis corresponden a los errores estándar

Fuente: resultados de las Pruebas Saber 5° y 9° en: http://www.icfessaber.edu.co

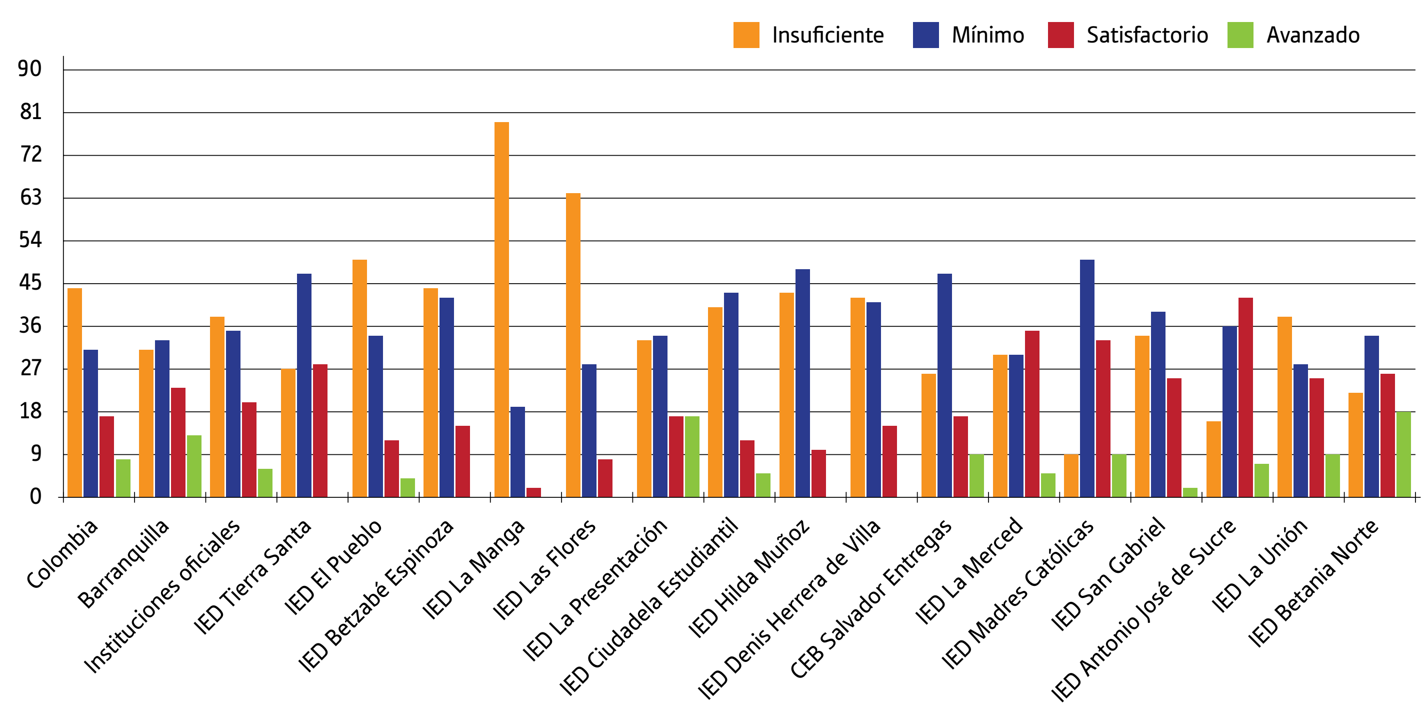
Gráfico 10

Distribución porcentual de los estudiantes de 5° según niveles de desempeño en resultados Prueba Saber 2009, área de matemáticas a nivel nacional.

En el gráfico 11, se muestran los resultados obtenidos por las instituciones públicas participantes en las Pruebas Saber 5° del 2009, en contraste con los resultados nacionales y del distrito de Barranquilla, así como los resultados de la prueba en cada una de las instituciones involucradas en el programa. De igual manera, en la última columna se muestra el estrato socioeconómico de cada escuela. Al comparar los datos se evidencian algunos de los resultados más críticos.

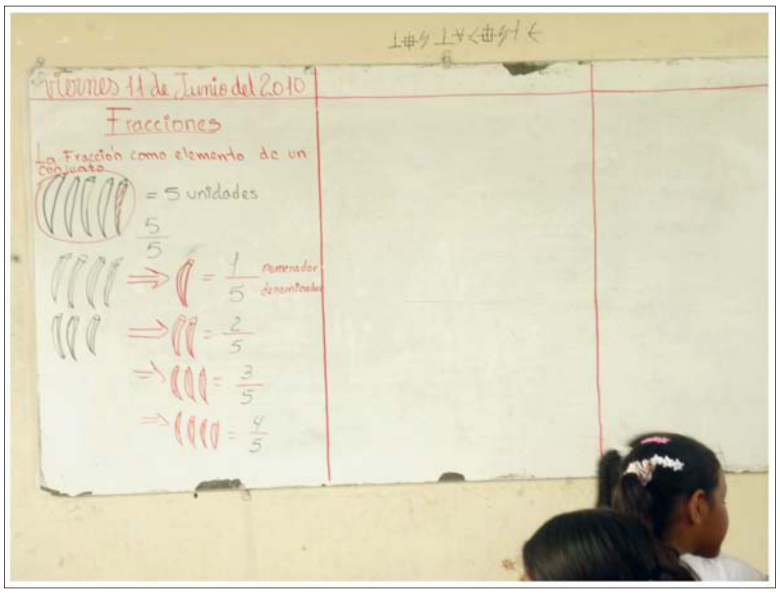
Estos resultados de bajo desempeño y el desconocimiento de los mismos por parte de los docentes implicaron el desarrollo de un diálogo con maestros y directivos docentes como estrategia para dar a conocer no solo la estructura de la prueba, sino contribuir a identificar algunos factores asociados a tales resultados, de esta manera se enfatizó en el conocimiento y fomento de los procesos matemáticos estipulados por el MEN (2006) como alternativa didáctica al desarrollo de competencias en el área.

ENTIDAD TERRITORIAL/ INSTITUCIÓN	NIVEL DE DESEMPEÑO				ESTADO SOCIOECONÓMICO DE LA INSTITUCIÓN
	Insuficiente	Mínimo	Satisfactorio	Avanzado	
Colombia	44	31	17	8	
Barranquilla	31	33	23	13	
Instituciones oficiales	38	35	20	6	
IED Tierra Santa	27	47	28	0	1
IED El Pueblo	50	34	12	4	2
IED Betzabé Espinoza	44	42	15	0	2
IED La Manga	79	19	2	0	2
IED Las Flores	64	28	8	0	2
IED La Presentación	33	34	17	17	2
IED Ciudadela Estudiantil	40	43	12	5	3
IED Hilda Muñoz	43	48	10	0	3
IED Denis Herrera de Villa	42	41	15	0	3
CEB Salvador Entregas	26	47	17	9	3
IED La Merced	30	30	35	5	4
IED Madres Católicas	9	50	33	9	4
IED San Gabriel	34	39	25	2	4
IED Antonio José de Sucre	16	36	42	7	4
IED La Unión	38	28	25	9	4
IED Betania Norte	22	34	26	18	4



Fuente: Páginas Web Secretaría Distrital de Educación de Barranquilla y del ICFES

Gráfico 11
Resultados comparativos de las Pruebas Saber 5° 2009 para el área de matemáticas de las instituciones participantes



Desarrollo de una de las clases durante el primer ejercicio de filmación y observación.

Obsérvese el alto número de estudiantes que obtiene insufiente (barra color naranja) en la mayoría de las IED participantes en la intervención. La línea roja horizontal indica el promedio nacional y en relación con esta, las escasas instituciones que alcanzan el nivel satisfactorio. Nótese también los escasos y en algunos casos nulos % de estudiantes en el nivel avanzado.

También se indagó en los docentes sobre los factores a los que se debían los resultados obtenidos, al respecto, los maestros atañen un 64,3% a la falta de participación de los padres en los procesos y actividades escolares de sus hijos, un 35,7% a la falta de conocimientos de los estudiantes y a la falta de capacitación docente en la elaboración de las pruebas, un 14,3 % aduce condiciones socioeconómicas y nutricionales de los estudiantes. El desglose de las respuestas de los profesores muestra las razones que presentamos a continuación; el número entre paréntesis indica los docentes que identificaron el item como factor asociado a los resultados. Nótese en el listado siguiente que solo en un caso la metodología del profesor es considerada como un factor que incide en los resultados. Las razones dadas fueron:

- Falta de apoyo de los padres de familia (nueve maestros)
- Falta de conocimientos e interés de estudiantes (cinco maestros)
- Falta capacitación docente - Elaboración de pruebas (cinco maestros)
- Cambio constante de docentes (tres maestros)
- Falta de recursos educativos (tres maestros)
- Condiciones económicas y nutricionales de los estudiantes (dos maestros)
- Metodologías del profesor (un maestro)

Con lo anterior, además de sensibilizar a los maestros sobre la necesidad de mejorar estos resultados, se tomó conciencia del papel del profesor en los procesos de formación de los niños y de la necesidad de introducir cambios en las formas de enseñanza, al tiempo que se busca más apoyo de los padres de familia en la educación de sus hijos e interés de los niños por aprender. Cabe destacar que al final del proceso de intervención los maestros señalan la importancia del mejoramiento de las metodologías del profesor en el interés de los niños por aprender matemáticas y en los resultados obtenidos.

CARACTERIZACIÓN DE LA PRÁCTICA PEDAGÓGICA DE LOS MAESTROS

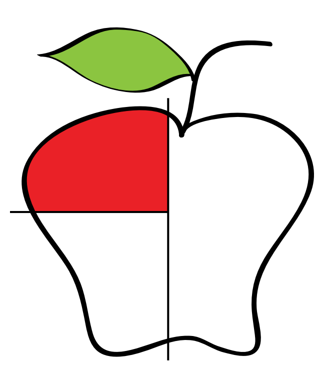
Como parte de la línea de base para la intervención consideramos oportuno y necesario incluir la caracterización de la práctica pedagógica de los maestros en las clases de matemáticas a través de la filmación de una clase y su respectivo análisis.

Cabe destacar la excelente disposición de la gran mayoría de los maestros frente a esta actividad, a pesar de los normales temores e inquietudes que conlleva este tipo de actividades que el docente asocia a evaluación con fines de censura. Una vez aclaradas las intencionalidades de la filmación, las cuales eran fundamentalmente posibilitar la propia mirada del docente a su actividad en el aula y el análisis conjunto con los asesores con fines estrictamente de consolidación de los aspectos positivos y mejoramiento de lo negativo, se logró un registro de dieciséis filmaciones. Solo una maestra pidió no ser filmada, aunque a lo largo del proceso ganó confianza y permitió la filmación final de la aplicación de su propuesta innovadora.

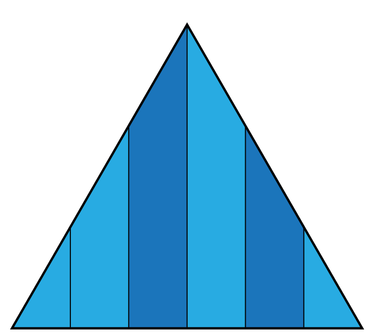
Estos hechos son un importante indicador de una mejor disposición y actitud de los maestros hacia la revisión y reflexión sobre su práctica base para el mejoramiento de su desempeño docente y la expectativa de su impacto en los aprendizajes de los estudiantes.

Al inicio de las grabaciones y entrevistas, los profesores, en su mayoría, no distinguían los procesos matemáticos que contribuyeran al desarrollo de las competencias en sus estudiantes y por ende al desarrollo del pensamiento matemático. En las segundas filmaciones y grabaciones, y en la elaboración de las propuestas, los maestros fueron capaces de identificar más de un proceso matemático y expresar cómo lo pueden promover y cómo saben si sus estudiantes lo han logrado.

Llama la atención en la mayoría de los maestros una muy buena relación con sus estudiantes y un trato afectuoso y respetuoso. También se observó la realización de prácticas pedagógicas ubicadas en el modelo tradicional, donde se notaron dificultades y limitaciones en la conceptualización de los números fraccionarios, como realizar dibujos similares a los de abajo en el tablero, en los que la partición de la unidad no es equitativa, pues las partes evidentemente no son iguales:

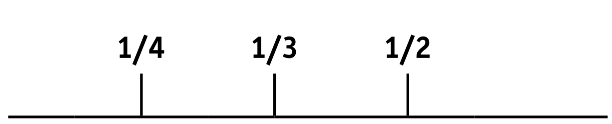


1/3



2/6

Revisemos este otro caso en que un docente señaló en la recta numérica un tercio (1/3) como el valor medio entre ½ y ¼



Otro docente aceptó como igualdad la siguiente expresión:

$$1/3 + 1/3 = 2/3 + 1/3 = 3/3 = 1$$

Las anteriores y otras situaciones fueron analizadas con los maestros y sirvieron de base para el replanteamiento y organización de los talleres de fundamentación realizados. (Ver capítulo 5: “Talleres de fundamentación”)

Las filmaciones de clases: fortalezas y aspectos para mejorar

A partir de los aportes de Llinares y Sánchez (1997), Pazos (2009) y Vasco (2010), entre otros autores, pudimos detectar y hacer seguimiento a la evolución de algunas de las dificultades conceptuales y didácticas en la enseñanza de los fraccionarios. Pazos (2009), respecto a obstáculos y dificultades en la enseñanza de las fracciones, pregunta ¿cuáles son algunas de estas prácticas que pueden obstaculizar los avances y que deberíamos revisar en busca de una mayor comprensión por parte de los alumnos?

Comparando los resultados obtenidos en esta investigación al contrastar las prácticas pedagógicas de los maestros durante la intervención con los problemas u obstáculos señalados por Pazos (2009), resumimos en el siguiente cuadro los aspectos evidenciados al inicio del proceso y los que se transformaron en los maestros a partir de la intervención. En la columna de la izquierda del cuadro se muestra el obstáculo señalado por Liliana Pazos y en la derecha se expresa lo detectado en las clases observadas antes de nuestra intervención y acompañamiento.

Estos obstáculos fueron en su mayoría superados, como se mostrará en el capítulo 7: “Innovaciones en el aula de matemáticas, con el fin de evidenciar los avances logrados”. En algunos pocos casos algunas dificultades aún se mantienen, por lo que se hace evidente la necesidad de consolidar el proceso de cualificación con acciones de acompañamiento de mediano y largo plazo.

Obstáculos señalados (Pazos, 2009)	Primera filmación
Se centran en el conteo de partes, priorizando el número de partes y no la relación entre la parte y el todo.	Se evidencia: El maestro presenta a los estudiantes representaciones de la fracción sin evidenciar claramente la relación parte todo, solo se limita a destacar la parte. Por ejemplo: ¿cuántas partes hay coloreadas?, ¿cuántas partes tomé? Miren, rellené cuatro. ¿Cuánto es eso?
No se trabaja la independencia de la forma en la representación gráfica.	Se evidencia en la mayoría de los casos, cuando los maestros no consideran distintas formas de representación de las fracciones. Por ejemplo, la mayoría es meramente gráfica, utilizando entidades continuas. Algunos utilizan entidades discretas pero no respetan el principio de igualdad entre las partes. Tampoco relacionan entre los tipos de representación que usan. Dificultades en este paso tienen impacto en la comprensión del concepto fracciones equivalentes. Dibujan formas de frutas y establecer la igualdad de partes se dificulta.
No tiene en cuenta la necesaria equidad de las partes.	Se evidencia en la mayoría de los casos. Los maestros no establecen una repartición igualitaria de las partes en que dividen la unidad. Hacen reparticiones de forma arbitraria.
No se trabaja con fracciones mayores que la unidad.	Los maestros no ponen ejemplos o actividades en las que les pidan a los estudiantes llegar a la unidad utilizando las partes.
No se hace hincapié en la relación número de partes y tamaño de las mismas.	Se detectaron inexactitudes en el tamaño de las partes o ejemplos en los que no se considera la misma unidad para extraer las fracciones respectivas. Se descuida la idea de: a mayor número de partes, las partes son menores.
No se representan distintas fracciones en una misma unidad.	Efectivamente se observó en las clases. Se sigue la idea escolar de representar en un gráfico una sola fracción. No se observan intentos de aprovechar un gráfico o unidades para representar más de una fracción

REFERENCIAS

Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE). (2004). *Línea base. Aspectos metodológicos.* Consultada el 30 de julio de 2010, de http://es.scribd.com/doc/7227822/Linea-de-Base-Metodolog-Indica-DANE.

Llinares, S. & Sánchez, M. (1997). *Fracciones. La relación parte-todo.* Madrid: Síntesis.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2010). Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES). *Resultados de Pruebas Saber 5° y 9°.* Recuperado el 2 de febrero del 2010 de: http://www.icfessaber.edu.co

Pazos, L. (2009). Las fracciones son un problema. *Revista Quehacer Educativo. Didáctica y Prácticas Docentes,* 40-45. Recuperado el 21 de octubre de 2010 de http://www.quehacereducativo.edu.uy/docs/76eb48fa_97%20010%20did+%C3%ADctica.pdf

Vasco, C. (2010, 22 junio). *Problemas y retos de la educación por competencias en las matemáticas de quinto grado.* [Conferencia]. Universidad del Norte, Barranquilla.

Talleres de actualización matemática y didáctica

5

El *Programa de Mejoramiento de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas en la Escuela Primaria en Barranquilla* incluyó una fase de actualización matemática y didáctica para consolidar las prácticas de aula de los maestros, pero partiendo del reconocimiento de las fortalezas y aspectos a mejorar. Así, teniendo en cuenta la información que se recogió en la línea de base y con el fin de aportar a la cualificación de las prácticas docentes en la enseñanza de los números fraccionarios, se diseñaron varias actividades dentro de las cuales se destaca la realización de ocho talleres de revisión conceptual y didáctica del tema, acompañados de metodologías y estrategias para orientar el aprendizaje en los niños y las niñas, desarrollando los procesos matemáticos.

Los talleres fueron especialmente diseñados para este grupo de maestros con actividades nuevas basadas en el contexto real de la población escolar y de las condiciones y recursos institucionales, y en algunos casos, las actividades fueron adaptadas de otras experiencias.

A manera de ilustración, en este capítulo presentaremos cinco talleres diseñados por el equipo de profesores de la Universidad del Norte y uno dirigido por la doctora en didáctica de las matemáticas Edelmira Badillo, de la Universidad Autónoma de Barcelona (al cual le dedicamos todo el capítulo 6), realizados con los maestros de 5° de primaria que permitieron la actualización disciplinar y didáctica sobre los números fraccionarios.

Cada taller brinda herramientas para elaborar y utilizar materiales manipulativos y desarrollar actividades lúdicas con el fin de inspirar a los maestros a diseñar sus propias innovaciones en el aula, enfocadas a mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de los fraccionarios con estudiantes de educación básica primaria.

Cabe precisar que estos talleres han sido diseñados para trabajarlos con los **maestros** y que la aplicación a los estudiantes de algunas de las actividades que se proponen, exige la revisión y adaptación de estos materiales.

Taller 1. Los números fraccionarios

Myrna Irene Jiménez[1]

PROPÓSITO

Determinar el significado de expresiones de la forma a/b, donde *a* y *b* son números naturales y *b* es diferente de cero.

UN POCO DE HISTORIA DEL ORIGAMI

Los indicios históricos hacen suponer que a partir de la invención del papel en la China se empezó a desarrollar el milenario arte de doblar papel, conocido con el nombre de papiroflexia. Esta tiene sus inicios en los **noshis** (ofrendas alimenticias que se hacían antiguamente en los templos budistas) (Flores, 2006). Las ofrendas eran cubiertas con cintas y papeles de colores con dobleces. Con el tiempo se aumentó la dificultad e importancia de los elementos ornamentales, hasta el punto de convertirse en el único elemento de la ofrenda. Cuando el secreto del papel fue llevado a Japón, alrededor del siglo VI, por monjes budistas, fue rápidamente integrado en la cultura del país. El nombre origami fue desarrollado en 1880, a partir de las palabras ***oru*** (doblar) y ***kami*** (papel) (Guzmán, 2009).

La papiroflexia se usa como medio didáctico por las habilidades que desarrolla: manual, psicomotricidad fina, atención, creatividad, orientación espacial, memoria, cuidado, precisión. En matemáticas, en 1989 el profesor Humiaki Huzita presentó un trabajo en el First International Meeting of Origami Science and Technology, en el que se establecieron los axiomas de una nueva geometría que denominó del origami. Mediante esta es posible resolver algunos problemas de construcción que en la geometría clásica, usando regla y compás, son irresolubles, dos de estos son la trisección del ángulo y la duplicación del cubo.

En la actividad propuesta se va a abordar el conocimiento de las fracciones en la interpretación parte-todo, haciendo uso de la técnica de doblado de papel.

LOS FRACCIONARIOS EN LA ESCUELA PRIMARIA

Cuando el niño llega a la escuela ha usado o ha escuchado a otros usar, en diferentes formas, las palabras que están relacionadas con el concepto de fracción, aun cuando lo hayan hecho de manera vaga e imprecisa. En lo cotidiano, la manera más usual de ver los fraccionarios es precisamente a través de las acepciones referenciadas, cuando los niños hablan en el aula o fuera de ella se pueden escuchar expresiones como las siguientes: "Juanita se comió media chocolatina; una bolsa de medio litro de leche; llegó hace como un cuarto de hora".

Taller de plegado.

1 Profesora catedrática, Departamento de Matemáticas. Universidad del Norte. Barranquilla, Colombia. *mjimenez@uninorte.edu.co*

Sin embargo, es poco probable que el niño establezca claramente la relación existente entre un litro como unidad y medio litro como parte de este o que dos medios litros hacen exactamente un litro, o que un cuarto de hora significa que la hora se ha dividido en cuatro partes iguales y que cada una de estas equivale a quince minutos. Mucho más impreciso es el uso y la interpretación que se hace en lo cotidiano de expresiones como el 10% de los niños de este curso tiene nueve años o por cada dos adultos hay cinco niños en el país.

¿Cómo podemos, a partir de los números naturales, que son los familiares a los niños en los primeros grados de la educación primaria, resolver estas situaciones? La forma que parece más expedita para comenzar el proceso de construcción del concepto de número fraccionario como un caso particular del concepto de número racional es mediante la relación parte-todo, inicialmente manejada en conjuntos continuos.

La actividad propuesta está orientada a construir el concepto de fraccionario a través de una de sus variadas interpretaciones, la relación parte-todo. Se pretende que el símbolo $\frac{m}{n}$ tenga sentido, que sea claro lo que significa y representa. Se elegirá una región que será considera como unidad, la cual podrá siempre dividirse en un número de partes de igual tamaño, tantas como sean necesarias, estas restituyen el todo. A su vez, cada una, en algún momento, puede ser considerada como un todo. Al respecto pueden consultarse los planteamientos expuestos por Piaget, Inhelder y Szeminska (1960).

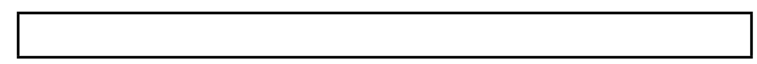
CONOCIMIENTOS REQUERIDOS PARA ABORDAR EL TEMA

Es importante que el niño tenga una clara conceptualización del concepto de unidad, no en el sentido del símbolo que se suele utilizar para su representación, “1”, sino como algo que se elige de manera arbitraria y que en el contexto de trabajo representa “el todo”. Por tanto, una unidad puede ser una galleta, el contenido de una botella de gaseosa, una fruta, un rectángulo de papel, un segmento de recta.

SITUACIÓN PROBLEMA

A partir de la tira de papel entregada,

¿cómo obtendrías $\frac{1}{9}$?



Recursos

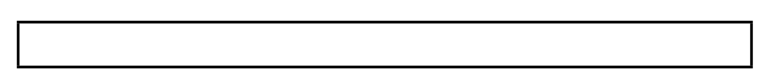
Doce tiras de papel de las mismas dimensiones de 4x24 cm.

ACTIVIDAD 1. LA FRACCIÓN COMO PARTE DE UN TODO MEDIANTE LA TÉCNICA DEL DOBLADO DE PAPEL

Trabajar en grupos de tres personas, cada una deberá tener las 36 tiras de papel y realizar el proceso de doblado.

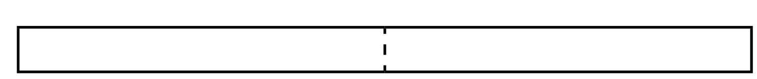
Instrucciones del doblado

Se le recuerda que las tiras de papel son la unidad.

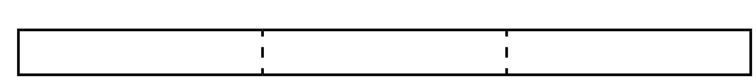


Apartar una de las cintas. Las restantes se enrollarán usando como eje el lado más corto, de acuerdo a las siguientes instrucciones:

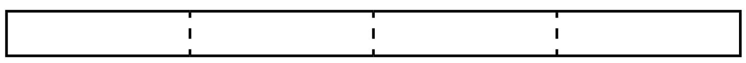
A una de las tiras se le dará una vuelta, de tal forma que los extremos opuestos coincidan, se aplanará para que quede dividida en dos partes iguales.



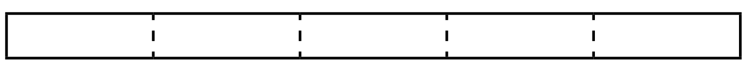
La siguiente se enrollará dándole una vuelta y media, se aplanará de tal forma que los extremos más cortos queden opuestos, al extenderla deberá estar dividida en tres partes iguales.



A la siguiente se le darán dos vueltas, de tal forma que los extremos opuestos coincidan, se aplanará y al extenderla deberá estar dividida en cuatro partes iguales.



A la siguiente se le darán dos vueltas y media y se aplanará, de tal forma que los extremos queden opuestos; al extenderla quedará dividida en cinco partes iguales.



Se procede en forma similar con todas las cintas, la tabla muestra las vueltas que deben darse en cada caso con el fin de obtener las partes deseadas. Completarla una vez se haya hecho el proceso de doblado

Nº de vueltas	Partes	Nombre de cada parte
0	1	Unidad
1	2	Medio
1(1/2)		
2		
2(1/2)		
3		
3(1/2)		
4		
4(1/2)		
5		
5(1/2)		
6		

Preguntas:

¿Cómo podría llamarse cada una de las dos partes de la cinta que fue dividida en dos partes iguales?

R/

¿Cómo se le llamaría a cada una de las partes en la que fue dividida la unidad en cada caso?

R/

¿Cómo se llamará a cada una de las partes de un todo cuando este es dividido en n- partes iguales?

R/

Todas estas fracciones tienen algo en común, representan una de las partes en se ha dividido el todo, acordemos darles un nombre especial ¿Qué nombre podría elegirse?

R/

Hagamos uso de los números que conocemos, los naturales, para representar estas situaciones ¿Cómo podrían representarse mediante estos números?

R/

¿Cuántos medios, tercios, cuartos, etcétera, hacen una unidad?

R/

Cuando se aumenta el número de partes en que se divide una unidad, ¿qué ocurre con el tamaño de cada una de estas partes?

R/

Considerando las respuestas de las preguntas 5, 6 y 7, escriban una generalización simbólica para representar las fracciones

R/ ______________________________

____

Comparen el enunciado anterior con lo siguiente:

Cuando se divide un todo en n partes iguales, cada una de estas partes es una n-ava parte de la unidad. Cada parte en que se divide la unidad se representa como

$$\frac{1}{n}$$

¿En qué se diferencian las generalizaciones?

R/ ______________________________

____

ACTIVIDAD 2: IDENTIFICAR FRACCIONES CUYO NUMERADOR ES DISTINTO DE LA UNIDAD

Instrucciones:

Recoger las tiras de papel y clasificarlas en medios, tercios etc.

Observar cada una de las tiras, correspondientes a cada tipo, y decir, en cada caso, ¿cuántas partes conforman una unidad?

R/ ______________________________

____

Colorear dos de los tercios de una de las tiras que representan los tercios.

¿Qué número fraccionario podría usarse para decir que se han coloreado dos de tres partes de una unidad?

R/ ______________________________

____

Colorear tres de los quintos de una de las tiras que representan los quintos.

¿Qué número fraccionario podría usarse para mencionar que se han coloreado tres de cinco partes de una unidad?

R/ ______________________________

____

¿Cómo simbolizar las situaciones planteadas en las preguntas dos, cuatro y seis?

R/ ______________________________

____

A partir de la respuesta de la pregunta 7, escriban una generalización simbólica para representar este tipo de fracciones.

R/ ______________________________

____

Colorea en cada una de las tiras de medios uno de los medios

¿Cuántos medios coloreados tiene el equipo?

R/ ______________________________

____

Colorea en cada una de las tiras de séptimos al menos tres de los séptimos.

¿Cuántos séptimos han sido coloreados por el equipo?

R/ ______________________________

____

¿Cómo representar, usando fracciones, las situaciones planteadas en las preguntas diez y doce?

R/ ______________________________

____

A partir de la respuesta dada a la pregunta 13, escriban una generalización simbólica para representar este tipo de fracciones.

R/ ______________________________

____

Una expresión de la forma $\frac{a}{b}$*, donde a y b son números naturales, y b es distinto de cero, representa un número fraccionario. "b"* indica las partes en que se ha dividido cada unidad, "*a*" las partes que se toman.

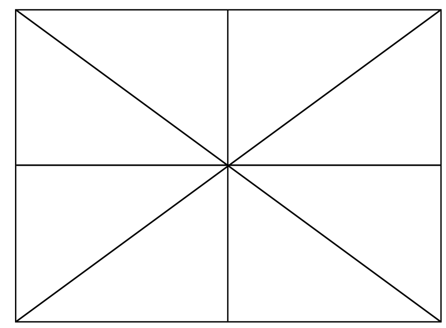
$$\frac{a \longrightarrow \text{Numerador}}{b \longrightarrow \text{Denominador}}$$

Cuando a>b se tiene una fracción mayor que uno, en consecuencia, se necesitará más de una unidad para hacer su representación, cada una de estas unidades deberá ser dividida en *b* partes iguales. Se emplearán tantas unidades como se necesiten hasta completar las *a* partes requeridas.

Una fracción por tanto puede ser menor, igual o mayor que la unidad, se representa como un par de números naturales escritos de la forma $\frac{a}{b}$ con la única condición de que el numerador sea distinto de cero, incluso el cero se puede representar en forma fraccionaria: $\frac{0}{b}$ dentro de la interpretación que le hemos dado significaría que una unidad se ha dividido en b número de partes, y no se toma ninguna parte.

Aplicaciones

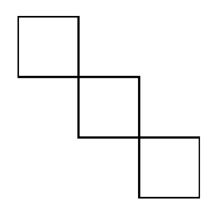
1. En la bandera colombiana, ¿qué parte del total de la bandera ocupa cada una de las franjas que la forman?



2. En el dibujo colorear 3/8

Usando como unidad la figura indicada en el ejercicio 2, representar 11/8 y 17/8.

El dibujo representa los 3/7 de una unidad, representar la unidad completa. Hay más de una representación posible.



Observa la figura Nº. 4, tenga en cuenta que cada hexágono es una unidad, y responda:

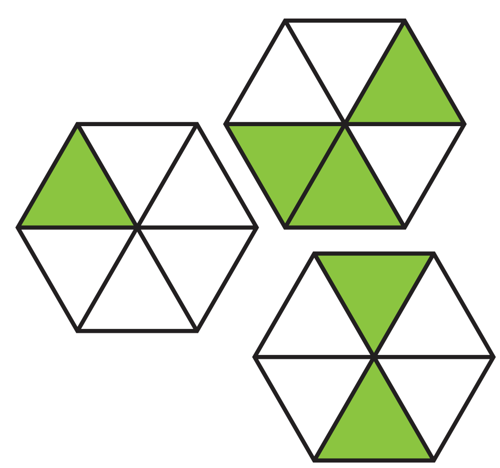


Figura Nº. 4

¿Qué fracción de la unidad representa la parte coloreada?

R/ ______________________________

¿Qué parte está sin colorear?

R/ ______________________________

Representa con un color distinto 9/6

REFERENCIAS

Acevedo, M. & Huertas C. *El conocimiento profesional: una mirada a la aritmética de la escuela.* Disponible en: http://asocolme.com/documento/publicaciones/cuadernos/cuaderno%202%20UNAL.pdf

Boyer, C. (1999). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza.

Campiglio, A. & Eugeni, V. (1992). *De los dedos a la calculadora*. Barcelona: Paidós.

Flores, J. (2006). El origami como recurso didáctico para la enseñanza de la geometría. En: Aymerich, J., Vives S. (Eds.) (2006). *Matemáticas para el Siglo XXI*. Universidad de Jaume. Recuperado de http://books.google.cl/books?id=Q7krYm2vX-4C&pg=PR13&lpg=PR13&dq=EL+ORIGAMI+COMO+RECURSO+DIDACTICO+PARA+LA+ENSE%C3%91ANZA+DE+LA+GEOMETR%C3%8DA++JES%C3%9AS++VICTORIA++FLORES++SALAZAR&source=bl&ots=pA23JjTjqW&sig=VO-cV9RDdSIgdCx54ce3be0iG_4&hl=es-419&ei=xrKgTt2MFojd0QHZ_sGIBQ&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=5&ved=0CC0Q6AEwBA#v=onepage&q=flores&f=false

Guzmán, D. (2009). *Papiroflexia. El arte de hacer figuras en papel.* Recuperado de: http://www.educrea.cl/documentacion/articulos/educacion_parvularia/37_papiroflexia_el_arte_de_hacer_figuras_de_papel.html, Junio 10 de 2010.

Llinares, S. & Sánchez, M. (1997). *Fracciones. La relación parte-todo.* Madrid: Síntesis.

Piaget, J; Inhelder, B. & Szeminska, A. (1960). *The child's concepcion of geometry.* London: Routledge and Kegan Paul.

Taller 2. Los números fraccionarios y la medida

Carlos Rojas Álvarez[1]

PROPÓSITOS

- Describir el uso de los fraccionarios en la cultura egipcia.
- Solucionar problemas aplicando los números fraccionarios.
- Interpretar los números fraccionarios en la relación parte todo en el contexto de la medición.
- Representar los números fraccionarios en la recta real.


El profesor Carlos Rojas, durante uno de los talleres a su cargo.

ALGO DE HISTORIA DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS

Los primeros registros históricos de los números fraccionarios están en el Papiro de Rhind, un rollo (0,3 x 5,48 m) elaborado por el escriba Ahmes hacia el año 2650 a. C. Este papiro es una de las fuentes de los conocimientos matemáticos egipcios. Contiene 85 problemas redactados en escritura hierática. Muchos problemas conciernen a operaciones sobre cosas concretas como pan y cerveza, mientras otros proponen ecuaciones o simples adivinanzas matemáticas. Por ejemplo, los problemas 1 a 6 del Papiro de Rhind se refieren a repartos de 1, 2, 6, 7, 8 y 9 hogazas de pan entre diez hombres, aplicando descomposiciones en fracciones unitarias y 2/3. En ellos, el escriba da el resultado y se limita a comprobar que la solución es la correcta (egiptología, Internet). Este texto, según Ahmes, es una copia de un texto más antiguo. Las cinco partes del manual de Ahmes se refieren a la aritmética, la estereometría, la geometría, el cálculo de pirámide y un conjunto de problemas prácticos (Morales, 2002, p. 5). Otra fuente es el papiro de Moscú (0,07 x 5,48 m), escrito hacia al año 1850 a. C. por un escriba desconocido. Contiene veinticinco problemas relacionados con la vida práctica y se parece al de Ahmes, salvo en dos problemas de particular significación.

¿Qué aspectos de la historia de las fracciones pueden resaltarse para exponerlos a sus estudiantes?

Existe otro documento denominado *El rollo de cuero de las matemáticas egipcias* que es un rollo de cuero (0,25 x 5,18 m) con una colección, por duplicado, de veintiséis sumas escritas en forma de fracciones unitarias. Todo parece indicar que este rollo era una copia sacada de un manual (Morales, 2002, p 7). Según la autora, los números fraccionarios surgieron en la cultura egipcia por la necesidad de medir, pero posteriormente los fueron desligando de ese contexto. En general, trabajaban con

1 Ms C en Educación. Licenciado en Matemáticas. Profesor-investigador de tiempo completo, Departamento de Matemáticas y Estadística. División de Ciencias Básicas de la Universidad del Norte. Barranquilla, Colombia. *crojas@uninorte.edu.co*

fracciones unitarias y cualquier fracción de la forma $\frac{p}{q}$ la expresaban como una suma de fracciones unitarias.

Sin embargo, un pequeño número de fracciones tenían un status especial:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \text{ y } \frac{2}{3},$$

quizás debido a su continua presencia en la vida diaria.

¿Cuál fue la actividad matemática que originó el uso de los fraccionarios y que puede emplearse en la clase?

Los egipcios usaron dos sistemas de numeración: el sistema jeroglífico, que utiliza jeroglíficos, y el sistema hierático, o sistema de los sacerdotes, que utiliza símbolos cursivos. En la figura 2 aparecen los fraccionarios con status especial en estos dos sistemas de numeración:

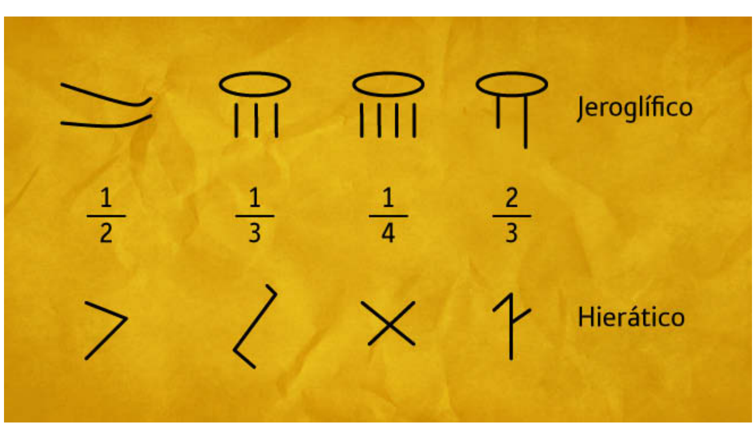


Figura 2.
Dos sistemas de representación egipcios
de los números fraccionarios

El nombre de *fracción* fue usado por primera vez por Juan De Luna, que tradujo al latín, en el siglo XII, el libro de aritmética del sabio árabe Al'Khwarizmi. De Luna empleó la palabra *fractio* como traducción latina de la palabra árabe *al-Kasr*, que significa quebrar o romper.

Problema: usando un peso

Un objeto pesó 100 gramos más tres divisiones pequeñas en la escala de la figura 1:

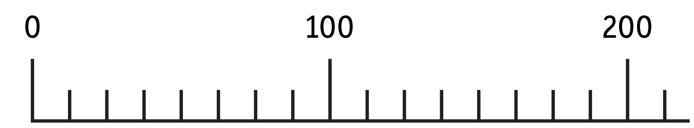


Figura 1

¿Cuál es el peso del objeto en gramos?

R/ __________________________________

Responda las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles son los datos conocidos del problema?

R/ __________________________________

2. ¿Cuál es la pregunta del problema?

R/ __________________________________

3. ¿Qué concepto matemático responde a la pregunta del problema?

R/ __________________________________

4. ¿Cómo se usa ese concepto matemático para responder a la pregunta del problema?

R/ __________________________________

5. ¿Puede expresar la respuesta a la pregunta con otro tipo de número? Explique.

R/ __________________________________

6. ¿Cómo comprueba que su respuesta es correcta?

R/ __________________________________

7. Haga una representación gráfica del procedimiento para responder a la pregunta del problema:

8. Dibuje un segmento de 16 cm de longitud, que será la unidad de medida y será la recta real. Localice en esa recta real los siguientes números: 1/32, 1/2, 13/32 y 3/4. Explique cómo lo hizo.

R/ __________________________________

9. Proponga una actividad para enseñar el uso de los fraccionarios respecto a la medición.
R/ ______________________________
____
____

10. Cuando usted prepara una clase, ¿qué tiene en cuenta primero, la actividad o los procesos matemáticos? Justifique su respuesta.
R/ ______________________________
____
____

No avance hasta que no haya respondido las preguntas anteriores.

TEORÍA: NÚMEROS FRACCIONARIOS

Los números fraccionarios, denotados por Q, son los números que se escriben en la forma $\frac{a}{b}$, en donde los números a y b son enteros, con la condición de que b no puede ser cero. En símbolos matemáticos:

$$Q = \{\, x/x = \frac{a}{b},\ a \in Z,\ b \in Z,\ b \neq 0\}$$

El número a recibe el nombre de *numerador* (del latín *numerator*, el que cuenta, enumera) y el número b el nombre de *denominador* (del latín *denominator*, el que denomina, el que designa).

Aplicaciones

1. La figura 2 representa una regla graduada en centímetros:

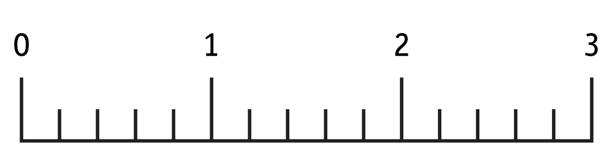


Figura 2

a. ¿Cuál es la unidad?

b. ¿En cuántas partes está dividida esa unidad?

c. Cada parte, ¿cuántos centímetros tiene?

d. Señale en la figura 2: $\frac{6}{5}$cm, $\frac{2}{5}$cm, $\frac{12}{5}$cm y $\frac{15}{5}$cm.

e. Haga una representación en la recta de los números:

$$\frac{8}{5}, \frac{3}{5}, \frac{10}{5} \text{ y } \frac{13}{5}.$$

2. La figura 3 es una escala en libras:

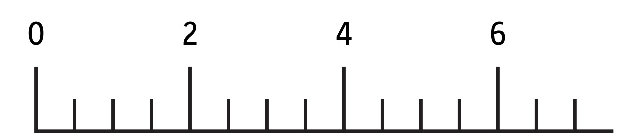


Figura 3

a. ¿Cuál es la unidad?

b. ¿En cuántas partes está dividida la unidad?

c. Cada parte, ¿cuántas libras representa?

d. Señale en la figura 3: $\frac{1}{2}$lb, $\frac{3}{2}$lb, $\frac{1}{4}$lb, $\frac{7}{2}$lb y $\frac{12}{2}$.

e. Haga una representación en la recta de los números:

$$\frac{1}{4}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2} \text{ y } \frac{1}{2}.$$

REFERENCIAS

Benoit, P.; Chemla, K. & Ritter, J. *Histoire de fractions, fractions d' histoire*. Disponible algunas páginas en la siguiente dirección: http://books.google.com.co/books?id=_AaOi60JZjIC&pg=PA237&lpg=PA237&dq=benoit+p.,+histoire+de+fractions&source=bl&ots=7XlEPVE7gj&sig=XB6e-kQyNG1HAkPzVwOs6xgGfAg&hl=es&ei=mKX6S9miLcK78gafvrjSCg&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=1&ved=0CBoQ6AEwAA#v=onepage&q&f=false

Campiglio, A. & Eugeni, V. (1992). *De los dedos a la calculadora: la evolución del sistema de cálculo*. Barcelona: Paidós.

Collette, J. (2006). *Historia de las matemáticas I*. México: Siglo Veintiuno.

Corbalán, F. *Matemáticas de la vida misma*. Disponible algunas páginas en la siguiente dirección: http://books.google.com.co/books?id=iBRyvNDDCdwC&pg=PA151&lpg=PA151&dq=juan+de+luna,+fractio&source=bl&ots=zsDMxgidm3&sig=gciErZGT4yQAPMlAPGl_yKrk5y8&hl=es&ei=TY_6S6OXG8K88gbYh93oCg&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=8&ved=0CDkQ6AEwBw#v=onepage&q=juan%20de%20luna%2C%20fractio&f=false

Morales, L. (2002, enero). Las matemáticas en el antiguo Egipto. En: *Apuntes de historia de las matemáticas 1* (1), 5- 13.

Taller 3. La fracción como parte de un todo

Rafael Martínez Solano[1]

PROPÓSITOS

- Identificar la unidad en el proceso del fraccionamiento.
- Establecer que el fraccionamiento debe hacerse en partes iguales.
- Interpretar la fracción como parte de un todo.

ESTÁNDARES

- Interpreto las fracciones en distintos contextos: "parte-todo"
- Analizo y explico las distintas representaciones de un número fraccionario.

ACTIVIDADES

Actividad 1

María comenta a sus amigas que se comió la mitad de una pizza y que su papá se comió la mitad de otra. Una de sus amigas le pregunta a María si habían comido entonces la misma cantidad de pizza, a lo que ella contesta: no, mi papá comió más pizza. ¿Creen ustedes que María tiene la razón? Justifiquen su respuesta.

R/ ____

____

____

____

El profesor Rafael Martínez en uno de los talleres de capacitación.

Proceso matemático desarrollado en la actividad: formulación, tratamiento y solución de problemas

Las situaciones problema proporcionan el contexto donde lo matemático cobra vida, pues nos permiten interpretar situaciones de la vida diaria. Además, desarrollan una actividad mental crítica y perseverante.

La solución de un problema comienza con una lectura del mismo, para **entender la situación** planteada, saber con qué información se cuenta y si es suficiente para comenzar el abordaje del mismo. A continuación podemos seguir con la **configuración de un plan,** e la que la elaboración de figuras puede ser importante para buscar patrones, un modelo y aplicar una fórmula o identificar pasos en la posible solución del problema.

1 Profesor-investigador de medio tiempo, Departamento de Matemáticas y Estadística, División de Ciencias Básicas de la Universidad del Norte. Barranquilla, Colombia. *rmartine@uninorte.edu.co*

En la **ejecución del plan** se ponen a prueba los patrones, fórmulas o modelos propuestos, a ver si conducen a la solución del mismo, en caso contrario, debe reelaborarse el plan.

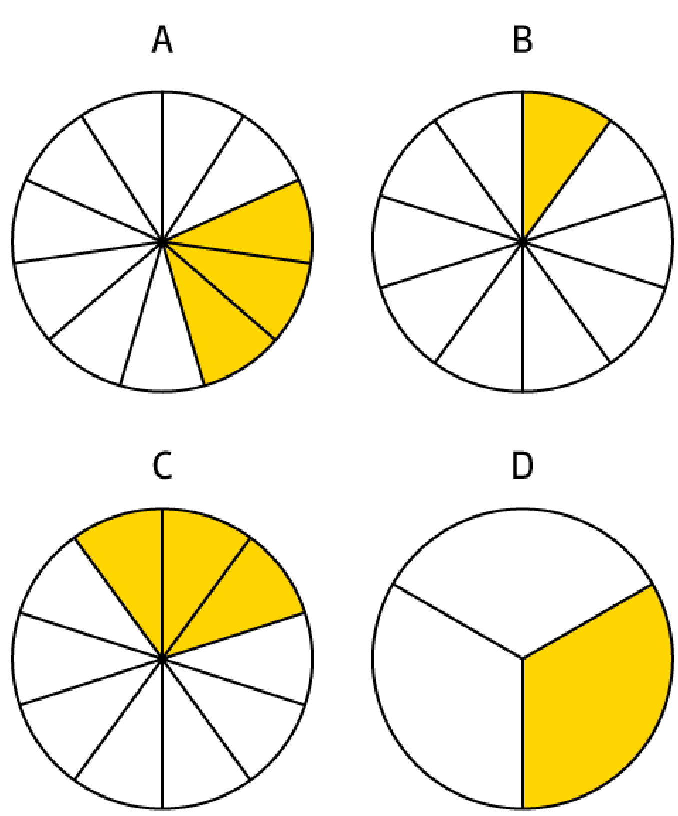
Si el problema es resuelto, se desarrollan actividades de control en torno a la respuesta, entre las que está la verificación de la solución y cómo se afecta esta si cambian una o más de las variables del mismo.

¿Qué otros procesos matemáticos se involucran en la realización de la actividad Nº. 1? ¿Por qué?

Actividad 2: las fracciones en la Prueba Saber

El siguiente ejercicio es un ejemplo de las preguntas de la Prueba Saber 5:

¿Cuál de las siguientes figuras representa la fracción $\frac{3}{10}$?, Justifique su respuesta.



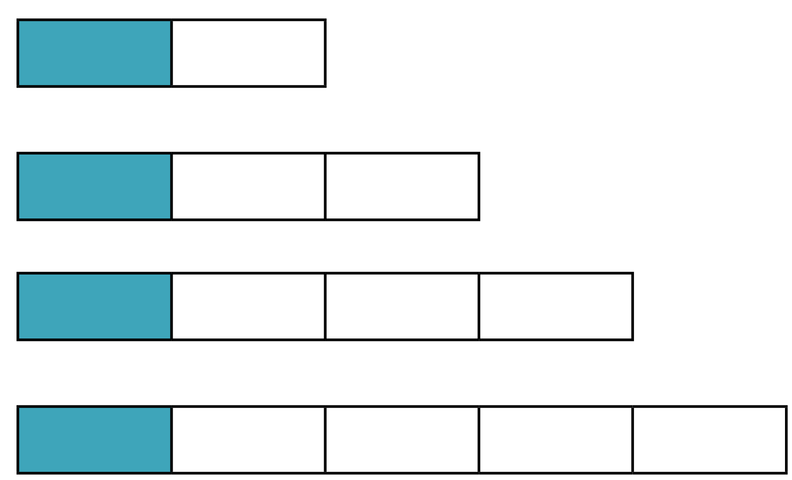
R/

¿Qué procesos matemáticos consideran ustedes se desarrollan con esta actividad?

R/

Actividad 3

Observe y compare las siguientes figuras:



1. Escriba al lado de cada figura la fracción que representa.

R/

2. Las regiones sombreadas ¿son iguales?

R/

Explique

3. ¿Quiere decir esto que representan la misma parte del todo? Explique su respuesta.

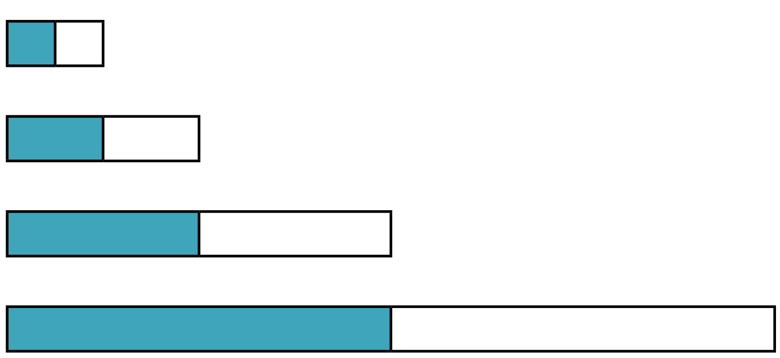
R/

4. ¿Qué procesos matemáticos considera usted se desarrollan con esta actividad?

R/

Actividad 4

Observen las siguientes figuras:



1. Escriban al lado de cada figura la fracción que representa.

2. Las regiones sombreadas aparentemente no son iguales. ¿Quiere decir esto que no representan la misma parte del todo? Expliquen su respuesta.

R/

3. ¿Qué procesos matemáticos, consideran ustedes, se desarrollan con esta actividad?

R/

DESARROLLO

La fracción como parte de un todo

En las actividades desarrolladas anteriormente la fracción se presenta como la expresión que vincula la **parte** con el **todo**, y va encaminada a responder la pregunta ¿qué parte es? Para ello hay que identificar plenamente cada uno de los siguientes aspectos:

- Un **todo**, el cual es tomado como **unidad**, pero este **todo** puede variar; por ello es el **todo** lo primero que debe determinarse cuando de fracciones se habla.
- Una partición del **todo** en un determinado número de partes **B** (Obviamente **B** es un número positivo) congruentes o iguales entre sí.
- Tomar alguna o algunas partes en que el **todo** ha sido partido o fraccionado, digamos **A** partes

Es importante determinar qué representará el **todo**, ya que será la **unidad** con la que se va a trabajar.

Una representación simbólica general toma la forma

$$\frac{A}{B}$$

Donde:

- **B** se llama denominador, e indica las partes iguales en que se ha dividido la unidad.
- **A** se llama numerador, e indica las partes que se toman de la unidad dividida.

UNA APLICACIÓN: PARTIR Y REPARTIR

¿Cómo repartirían equitativamente dos pizzas del mismo tamaño entre tres personas?

- Describan el procedimiento de manera gráfica

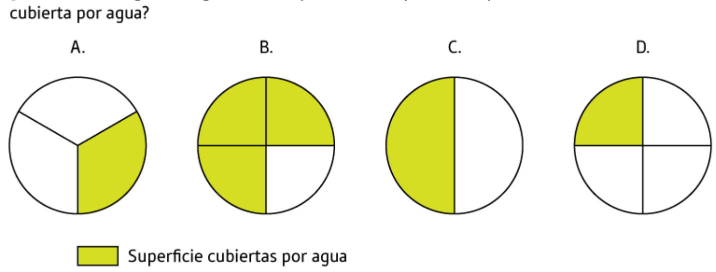
- Explíquenles a sus colegas cómo harían este reparto
- Presentar en el tablero las diversas formas de representación, en caso de haberlas.

LAS FRACCIONES EN LA PRUEBA SABER

Revisemos la siguiente pregunta de la Prueba Saber 5° 2009

Las $\frac{3}{4}$ partes de la superficie del planeta Tierra están cubiertas por agua.

¿En cuál de las siguientes gráficas se representa la superficie de planeta Tierra cubierta por agua?



R/ ______________________________

____

____

____

¿Qué procesos matemáticos consideran ustedes se desarrollan o se evalúan con esta actividad?

R/ ______________________________

____

____

____

Las preguntas de las pruebas saber nos pueden servir de base para formular otras; por ejemplo:

¿En cuál de las siguientes gráficas se representa la superficie del planeta que no está cubierta por agua?

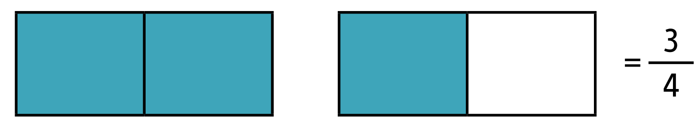
R/ ______________________________

____

____

____

Lo vemos en nuestras aulas

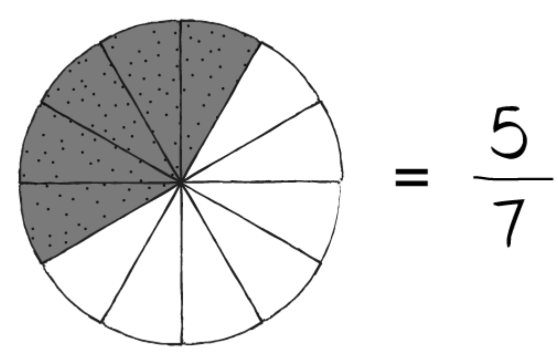


¿Por qué se produce este tipo de error? Dé una opinión al respecto.

R/ ______________________________

____

____



¿Por qué se produce este tipo de error? Dé una opinión al respecto.

R/ ______________________________

____

____

____

____

REFERENCIAS

Llinares, S. (1989). *Fracciones 4.* Madrid: Síntesis.

ICFES. (2009). *Prueba saber.* Cuadernillo 03, 5°, p. 32., pregunta 61.

ICFES. (2009). *Prueba saber.* Cuadernillo 03, 5°. p 32, pregunta 62.

Andónegul, M. (2006). *Fracciones I, Concepto y representación.* Recuperado de http://www.caf.com/view/index.asp?pageMS=50114&ms=17. Junio 20 de 2010.

Taller 4. La fracción como un operador

Liliana Garrido Hernández[1]

"Para promover el gusto por la matemática hay que desarrollar unas competencias basadas en una mesa de tres patas: en primer lugar la aptitud, que es el conocimiento del qué y del cómo; en segundo lugar la inclinación, que es el gusto y la actitud, y por último la sensitividad, que es la detección de oportunidades donde aplicar el conocimiento". Carlos E. Vasco.

INTRODUCCIÓN

Para la elaboración de este taller, que hace énfasis en la interpretación del concepto de fracción como operador y su didáctica, se tuvo en cuenta la presencia de algunas concepciones inadecuadas en los profesores en la enseñanza del concepto de fracción, tal como se evidenciaron en observaciones en el aula de clase. Con base en esto se planeó el taller, de tal manera que llevara a los maestros a una conciencia de su error, así como a la apropiación de métodos y estrategias de enseñanza que hicieran el proceso de enseñanza-aprendizaje más efectivo, contribuyendo a realizar su difícil y abnegada labor de una forma más eficaz.

En este taller se hace una descripción de los propósitos del mismo, una reflexión acerca del uso de las fracciones en la escuela, se presentan actividades para construir el concepto, así como los procesos matemáticos que se desarrollaron con cada una de estas actividades, el marco teórico correspondiente y, por último, se plantearon actividades que permitieran evaluar el concepto.

PROPÓSITOS

- Interpretar y utilizar adecuadamente la interpretación de fracción como un operador.
- Diseñar y desarrollar actividades que conlleven a la construcción del concepto de fracción como un operador.
- Describir los procesos matemáticos que se desarrollan en las actividades diseñadas.

LAS FRACCIONES EN LA ESCUELA

Como educadores somos conscientes que durante muchos años las matemáticas han constituido un "dolor de cabeza" para padres, maestros y alumnos desde el inicio de su proceso educativo. Por ello, para el Ministerio de Educación Nacional ha sido de particular importancia trabajar en estrategias que desvirtúen el temor que las matemáticas producen en los estudiantes.

Se quiere formar personas matemáticamente competentes, pero es un proceso largo y continuo que se perfecciona durante toda la vida escolar, en la medida que los procesos generales de la actividad matemática (formulación, tratamiento y resolución de problemas; modelación; comunicación; razonamiento; formulación, comparación y ejercitación de procedimientos) se van desarrollando de manera simultánea, integrados en las actividades que propone el maestro y en las interacciones que se propician en el aula de clase (MEN, 2006).

Es usual que se presenten situaciones en las que los niños se enfrentan a problemas que deben resolver mediante la manipulación de números fraccionarios, allí el maestro debe mostrar la importancia del manejo y aplicabilidad del conocimiento. El profesor de

1 Profesora catedrática, Departamento de Matemáticas y Estadística, División de Ciencias Básicas de la Universidad del Norte. Barranquilla, Colombia. *garridol@uninorte.edu.co*

matemáticas debe ser consciente de la importancia de la aplicabilidad de los conceptos en el mundo real al planificar su enseñanza y al interpretar las producciones de sus estudiantes, pues solo así logrará potenciar progresivamente en ellos las aptitudes y actitudes que los llevarán a tener mejores desempeños en su competencia matemática.

Para que el estudiante le vea una aplicación en el mundo real a las matemáticas es necesario plantearle problemas reales para que él mismo proponga soluciones, pero además dejarlo que detecte los problemas, que sea capaz de reflexionar, de comprender y no sólo de seguir un modelo impuesto (Vasco, 2010). Analizamos las siguientes situaciones a las que se puede enfrentar al estudiante.

SITUACIÓN PROBLEMA

Con las siguientes situaciones no se espera que el estudiante encuentre una respuesta correcta para el problema, sino que se enfrente a situaciones en las que es necesario conocer y manejar el concepto número fraccionario. Por esto, lo más importante de esta primera etapa del taller es que el estudiante interprete correctamente el enunciado, razone y argumente sus respuestas.

En una clase de educación física los dos tercios de los estudiantes son niñas y el resto niños. ¿Cuántos niños y cuántas niñas hay en la clase? Argumente.

R/

Luis y María salieron a comprar su merienda a la tienda escolar y María gastó la mitad del dinero que tenía, mientras que Luis gastó la cuarta parte de su dinero. ¿Quién gastó más dinero?.

R/

En un salón de 5° de primaria hay un total de veinticuatro estudiantes, de los cuales dos tercios son niñas y el resto son niñas. ¿Cuántos niños y cuántas niñas hay en el salón? Argumente.

R/

¿Qué procesos matemáticos se desarrollan con la actividad?

R/

Recursos: fichas de colores, recipientes para recolectar las fichas, cuaderno de anotaciones y lápices de colores.

ACTIVIDADES

Trabajo en parejas

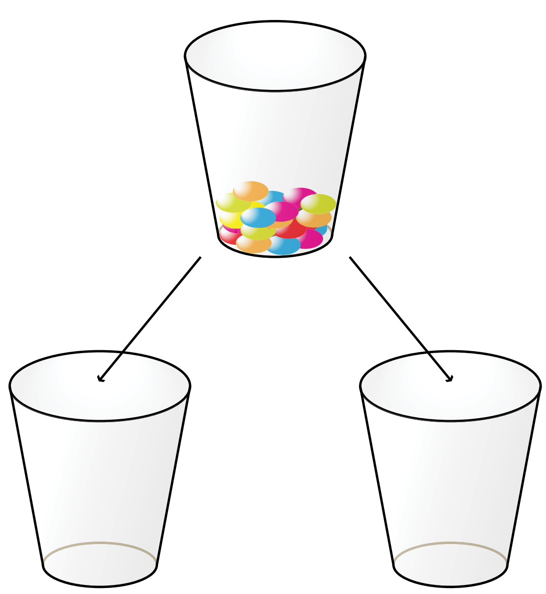
Cada pareja trabajará con veinticuatro fichas de colores y cuatro recipientes.

Cada actividad debe ser anotada y graficada en el cuaderno.

Actividad 1

Es importante tener claro el concepto de la fracción como parte de un todo antes de abordar esta interpretación.

Reparta las veinticuatro fichas en dos partes iguales.



____de 24 ____de 24

¿Qué fracción o parte de las fichas hay en cada recipiente?

R/ ______________________________

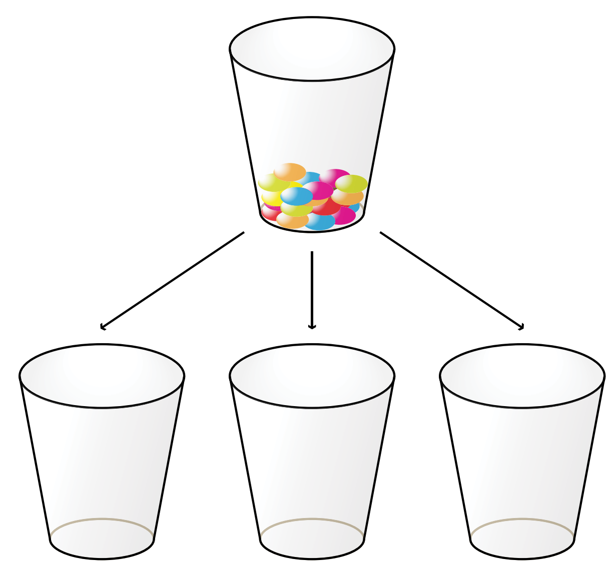
¿Qué cantidad de fichas hay en cada recipiente?

R/ ______________________________

¿Qué se puede decir a partir de las repuestas en 2 y 3? ¿Qué relación existe en las respuestas de las preguntas 1 y 2?

R/ ______________________________

Reparta las fichas en tres partes iguales.



1/3 de 24 1/3 de 24 1/3 de 24

¿Qué fracción o parte de las fichas hay en cada recipiente?

R/ ______________________________

¿Qué cantidad de fichas hay en cada recipiente?

R/ ______________________________

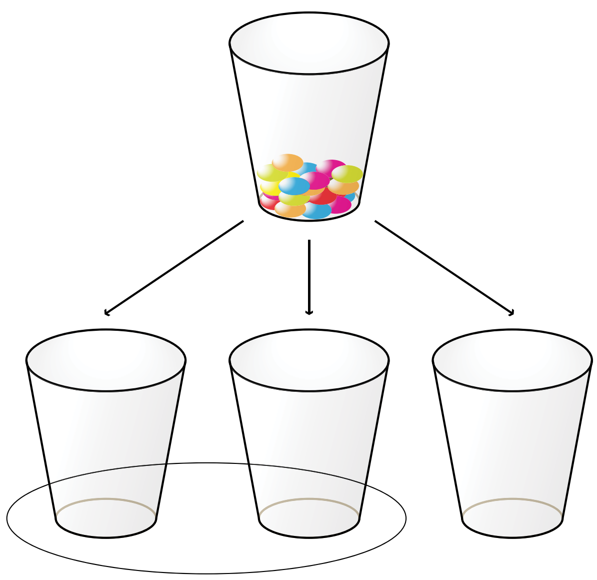
¿Qué se puede deducir a partir de las respuestas 6 y 7? ¿Qué relación existe en las respuestas a las preguntas 5 y 6?

R/ ______________________________

Si toman dos de los tres recipientes. ¿Qué fracción o parte de las veinticuatro fichas representa el número de fichas contenida en estos dos cubos?

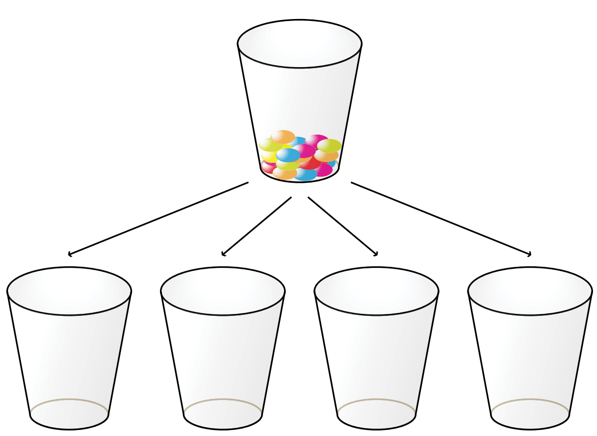
R/ ______________________________

____



2/3 de 24 fichas   1/3 de 24 fichas

Reparta las fichas en cuatro partes iguales.



1/4 de 24   1/4 de 24   ____de 24   ____de 24

¿Qué fracción o parte de las fichas hay en cada recipiente?

R/ ______________________________

____

¿Qué cantidad de fichas hay en cada recipiente?

R/ ______________________________

____

¿Qué fracción del total de fichas representa esta cantidad?

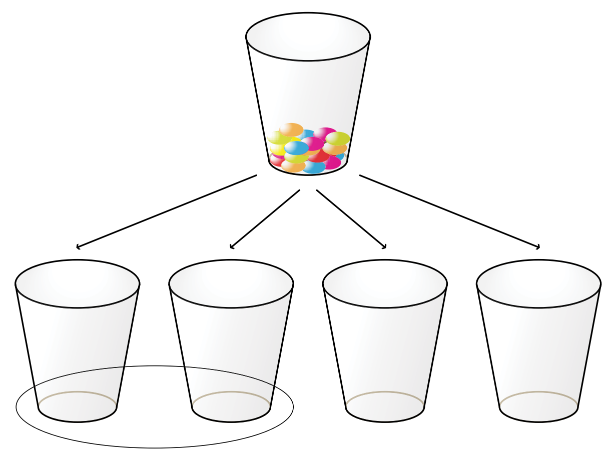
R/ ______________________________

____

Si ahora toma dos de los cuatro recipientes, ¿Qué fracción o parte de las veinticuatro fichas representan estos dos cubos?

R/ ______________________________

____



2/4 de 24 fichas   1/4 de 24 fichas   1/4 de 24 fichas

11. ¿Qué cantidad de fichas hay entre estos dos cubos?

R/ ______________________________

____

12. ¿Qué fracción o parte de las veinticuatro fichas representa el número de fichas contenidas en estos dos cubos?

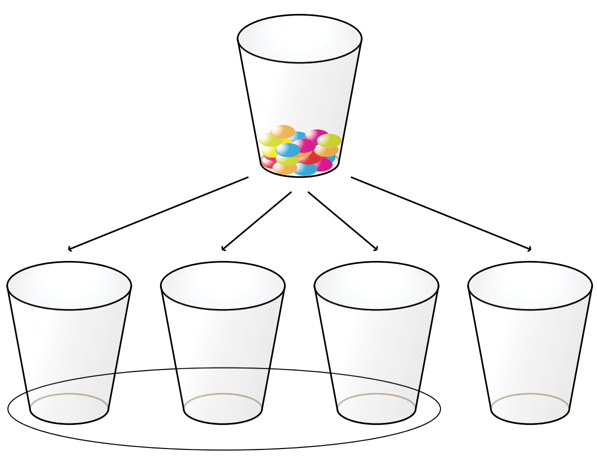
R/ ______________________________

____

13. Si toman tres de los cuatro recipientes, ¿qué fracción o parte de las veinticuatro fichas representan estos tres cubos?

R/ ______________________________

____



3/4 de 24 fichas   1/4 de 24 fichas

14. Qué cantidad hay en total entre los tres cubos?

R/ ______________________________

____

15. ¿Qué fracción o parte de las veinticuatro fichas representa el número de fichas contenidas en estos tres cubos?

R/ ______________________________

____

Actividad 2

1. Analice paso a paso el procedimiento seguido en la parte anterior y descríbalo.

2. Escriba un procedimiento para determinar en forma general las partes de un número.

R/ ______________________________

____

____

____

____

____

____

3. Haga un diagrama que muestre el procedimiento planteado en el punto anterior.

¿Qué procesos matemáticos considera usted que se desarrollan con esta actividad?

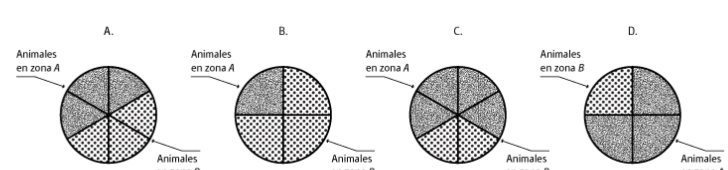
R/ ______________________________

____

LAS FRACCIONES Y LA PRUEBA SABER

En una finca hay seiscientos animales distribuidos en dos zonas, zona A y zona B. 4/6 están en la zona A y el resto de los animales en la zona B.

1. ¿Cuál diagrama representa correctamente la distribución de los animales en las dos zonas?



2. Si ¼ de los animales que estaban en la zona A pasó a la zona B. ¿Cuántos animales están ahora en la zona B?

A. 100

B. 150

C. 300

D. 400

3. ¿Qué procesos matemáticos considera usted que se desarrollan en estos problemas? ¿Por qué?

R/ ______________________________

____

____

____

3. MARCO TEÓRICO

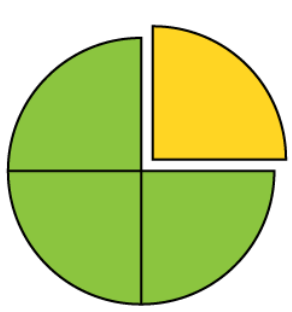
Según Malet (2010), el concepto de fracción demanda atender toda una pluralidad de significados e interpretaciones que las fracciones admiten y adquieren, según el contexto en que se emplee, por ello es considerado como un megaconcepto.

Fracciones con parte de un "todo" (continuo o discreto):

El "todo" o unidad en forma de un objeto continuo o discreto es dividido en partes iguales. La fracción responde a la pregunta: ¿qué parte es?

Ejemplo:

Para un todo formado por las cuatro canicas (objetos discretos), cada canica representa 1/4 del todo.



En una pizza, dividida en cuatro partes iguales, cada una representa ¼ del todo.

Fracciones como cociente

La interpretación como cociente, donde un número de objetos necesita ser repartido equitativamente. En este caso la fracción da respuesta a la pregunta ¿cuánto le corresponde a cada uno?

La interpretación de la fracción que indica una división de dos números naturales (3/5 = 3÷5) aparece en un contexto de reparto; por ejemplo, si hay tres barras de chocolate y se tienen que repartir en forma equitativa entre cinco niños ¿cuánto le tocará a cada uno?

La resistencia de los alumnos a ver 3÷5 como 3/5 puede ser debido a que muchos de ellos se encuentran familiarizados con la interpretación parte-todo para las fracciones y, por tanto, ven a 3/5 como la descripción de una situación (de cinco partes hay tres sombreadas), mientras que la división indica un proceso, precisamente el proceso de repartir tres barras de chocolate entre cinco alumnos.

Las fracciones como razón

Se utiliza la fracción para indicar una comparación entre dos magnitudes. La pregunta importante en este caso es ¿en qué relación están?

La fracción como representante de un punto en la recta numérica

Matemáticamente los puntos de la recta numérica se corresponden biunívocamente con los números reales; en virtud de tal correspondencia cada punto de la recta se puede identificar con un número real; esta identificación nos permite hablar de los puntos (geométricos) como si fuesen números. A su vez, una fracción es una de las formas de escribir un número real (así 1/2, 3/6 ó 0,5 es una de las tantas). Por lo tanto, si una fracción es la representación de un número real y este es identificable con un punto en la recta numérica, cabe interpretar la fracción como representante de dicho punto.

La fracción como operador

En esta interpretación, la fracción actúa como una operación matemática doble: divide y multiplica. El denominador divide y el numerador multiplica.

Bajo esta interpretación, las fracciones son vistas en el papel de transformaciones, es decir, "algo que actúa sobre una situación y modifica". Aquí se concibe a la fracción como una sucesión de multiplicaciones y divisiones, o a la inversa.

Por ejemplo, si tomamos en un contexto discreto como situación de partida el conjunto formado por los 36 niños de una clase, el efecto de la aplicación del operador 2/3 (dos tercios) se puede representar por el estado final "24 niños". El operador lleva implícito un convenio: primero actúa la división y luego la multiplicación o viceversa, así:

Para calcular los 2/3 de 36, este diagrama puede ser orientador para los dos procedimientos

$$\begin{tikzcd} 36 \arrow[r, "x2"] \arrow[d, "\div 3"'] \arrow[dr, "2/3 \text{ de } 36"'] & 72 \arrow[d, "\div 3"] \\ 12 \arrow[r, "x2"'] & 24 \end{tikzcd}$$

APLICACIONES

La maestra Mariana ha llevado una torta al salón de clases para celebrar su cumpleaños. Está partida en veinticuatro pedazos iguales y antes de irse a la clase de educación física, reparten un cuarto de torta entre los profesores. Al regresar, los niños se pusieron muy tristes porque Pablo y Manuel se comieron dos novenos de lo que había quedado. Pablo y Manuel dijeron que sólo se habían comido un pedazo cada uno.

1. ¿Cuántos pedazos se repartieron entre los profesores?
R/ ______________________________

2. ¿Cuántos pedazos de torta quedaron cuando se fueron a clases de educación física?
R/ ______________________________

3. ¿Es cierto lo que dijeron Pablo y Manuel?
R/ ______________________________

4. ¿Qué procesos matemáticos se desarrollan con la actividad?
R/ ______________________________

Juanito invita a sus amigos a pasar la tarde con él en su casa. Deciden pedir una pizza extra grande, la cual trae 36 porciones iguales. Como los gustos son diferentes, piden que la pizza esté combinada de la siguiente manera: 2/9 de hawaiana, 1/3 de pollo, 1/9 vegetariana y 3/9 de queso. ¿Cuántas porciones de cada sabor trae la pizza?
R/ ______________________________

Explica mediante un dibujo la situación.

El señor Juan tiene una finca de 120 hectáreas de terreno y desea repartirla entre sus seres queridos. El señor Juan ha decidido regalar las dos quintas partes de sus terrenos entre sus empleados. El resto del terreno ha decidido repartirlo de la siguiente manera:

Tres octavos para su nieto José, dos octavos para su hija María, un cuarto para su hijo Julián y un octavo para su amigo Pedro.

¿Cuántas hectáreas se repartieron entre sus empleados

R/ ______________________________

____

____

¿Cuántas hectáreas recibió cada uno de sus familiares y amigos?

R/ ______________________________

____

____

Grafica la situación.

REFERENCIAS

ICFES. (2009). *Lineamientos pruebas saber 2009. Grados 5º y 9º.* Bogotá. Recuperado el 24 de abril de 2010 de http://www.mineducacion.gov.co/proyectos/1737/articles-194703_recurso_1.pdf

Melet, O. (2010, octubre). Los significados de las fracciones: una perspectiva fenomenológica. *Revista digital de matemáticas Mendom@tica, 21.*

Ministerio de Educación Nacional, ICFES. *Saber 2009.* Cuadernillo 03. Grado 5°. Bloque 4. p. 41. Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Serie Lineamientos curriculares. Matemáticas.* Recuperado el 20 de mayo de 2010 de http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de competencias en matemáticas.* Recuperado el 13 de mayo de 2010 de .http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Vasco, C. E. (2010, 22 junio). ¿El reto?, motivar el gusto por las matemáticas. [Entrevista] Universidad del Norte, Barranquilla.

Taller 5. La fracción como porcentaje, razón, cociente y decimal

Carlos Rojas Álvarez[1]

PROPÓSITO

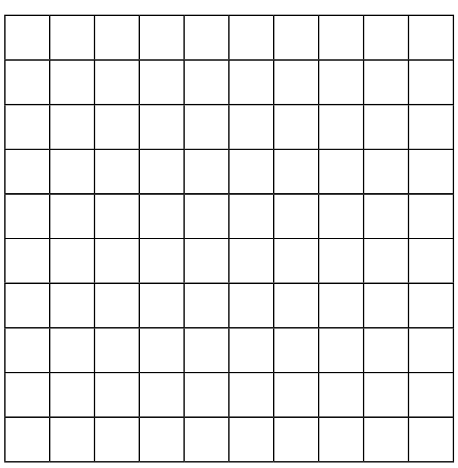
Interpretar la fracción como porcentaje, razón, cociente y decimal

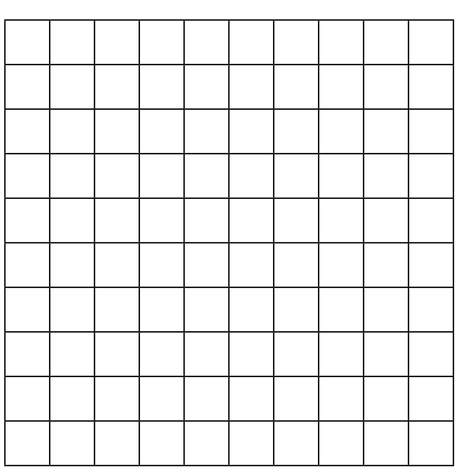
Actividad 1

1. Un celular vale $80.000 sin IVA del 16% ¿Cuál es el precio del celular con el IVA?

R/

Utilice los cuadros de abajo para resolver gráficamente el problema:





Explique con palabras su representación:

R/

¿Qué interpretaciones sobre las fracciones encuentra en este problema? Argumente su respuesta

R/

¿Qué procesos matemáticos se emplean en la solución del problema anterior? Justifique su respuesta

R/

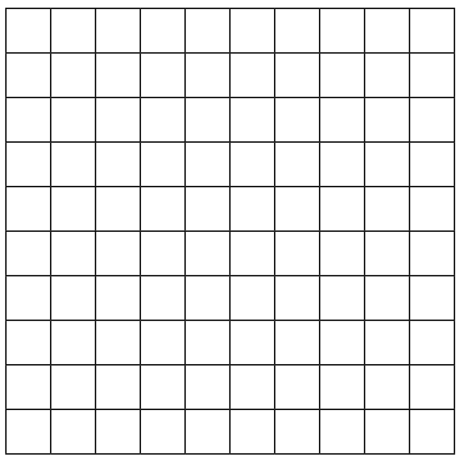
Actividad 2

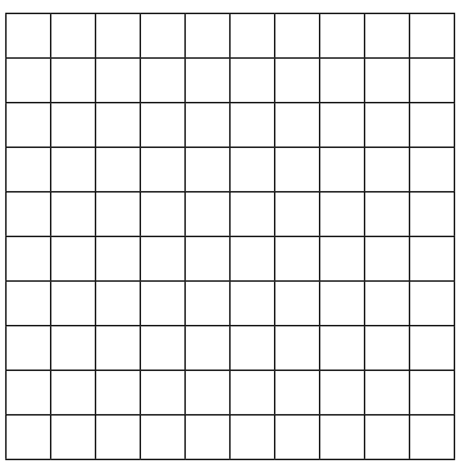
Un par de zapatos vale $34.800 con el IVA del 16% ¿Cuál es el precio de los zapatos sin el IVA?

R/

1 Ms. C. en Educación. Licenciado en Matemáticas. Profesor-investigador de tiempo completo, Departamento de Matemáticas y Estadística, División de Ciencias Básicas de la Universidad del Norte. Barranquilla, Colombia. *crojas@uninorte.edu.co*

Utilice los cuadros de abajo para resolver gráficamente el problema:





Explique con palabras su representación:

¿Qué interpretaciones sobre las fracciones encuentra en este problema? Argumente su respuesta.

R/

¿Qué procesos matemáticos se emplean en la solución del problema anterior? Justifique su respuesta

R/

Actividad 3

Un vendedor les ofrece a dos personas dos opciones para venderles un artículo: primera, le hace el 10% de descuento y luego le aplica el 16% del IVA, segunda opción consiste en aplicarle el 16% del IVA y luego le hace el 10% de descuento.

¿Cuál opción ofrece un precio más económico? Justifique su respuesta.

R/

¿Qué interpretaciones sobre las fracciones encuentra en este problema? Argumente su respuesta

R/

El desarrollo de competencias matemáticas en alumnos de primaria en contextos de juegos de mesa y resolución de problemas

6

Edelmira Badillo Jiménez[1]

RESUMEN

En este artículo se presenta una reflexión teórica y metodológica sobre una manera de entender el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas basado en un enfoque de competencias. Desde esta perspectiva, hemos venido diseñando e implementando secuencias didácticas, validadas en diferentes aulas de primaria de Europa y Latinoamérica, que buscan tanto el desarrollo de la competencia matemática: el conocimiento matemático, los procesos asociados a la actividad matemática y el contexto de aprendizaje, como el desarrollo de otras competencias, como la argumentativa y la autonomía personal. En líneas generales, el contenido de este artículo fue la base de una conferencia realizada en agosto del 2010 como investigadora invitada en el marco del Programa de Mejoramiento de la Enseñanza y El aprendizaje de las Matemáticas en la Escuela Primaria en Barranquilla-Fase Piloto, liderado por la Universidad del Norte con el apoyo de la Fundación ANDI. La propuesta que aquí presentamos pretende ser un pequeño aporte a ese gran desafío, mostrando cómo es posible desarrollar competencias matemáticas en un contexto de uso didáctico de juegos de mesa. En particular, nos centramos en el desarrollo de estrategias de resolución de problemas y técnicas de cálculo mental y, en general, en el desarrollo del sentido numérico fraccionario.

INTRODUCCIÓN

Vygotski (1979) afirma que "el juego crea una zona de desarrollo próximo en el niño que es generador de nuevos aprendizajes" (p.156). Para este autor, el juego es una actividad esencial para el desarrollo humano porque proporciona beneficios cognitivos, sociales y morales. No solo no debe coartarse en ninguna etapa del desarrollo del niño, ni posteriormente de adulto, sino que debe potenciarse.

Diversos autores afirman que el uso del juego en el aula, especialmente el colectivo, es una actividad que permite el desarrollo de diversas áreas: social, política (normas y reglas), moral, lenguaje, emocional y cognitiva (Kamii & DeVries, 1980; Cockcroft, 1982). Los resultados de estudios que vinculan el uso de los juegos colectivos en el aula de matemáticas revelan que el tiempo destinado a jugar en la clase de matemáticas puede ser una inversión de gran valor si sabemos escoger los juegos adecuados y conseguimos involucrar activamente a los alumnos en esta actividad (Edo, 1998; Corbalán & Deulofeu, 1996). De igual manera, muestran que la conexión de los juegos con las matemáticas es múltiple y se refiere tanto al aprendizaje de conceptos como de técnicas y de estrategias, y se relaciona de manera directa con la resolución de problemas (Edo, Deulofeu & Badillo, 2007; Edo, Baeza, Deulofeu & Badillo, 2008).

1 Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals, Universitat Autònoma de Barcelona, España. edelmira.badillo@uab.cat

El informe Cockcroft (1982), punto 227, recomienda, en diferentes edades y en cualquier nivel de conocimiento de los alumnos, la utilización bien planificada de puzzles y juegos matemáticos para introducir contenidos curriculares y para el desarrollo del pensamiento lógico-matemático. En España, Edo (2002) analizó diferentes currículos de matemáticas de las distintas comunidades autónomas y mostró que en todos ellos aparecen referencias concretas y recomendaciones a la utilización de juegos y recreaciones para la enseñanza y aprendizaje de estas en primaria. Destaca que estos promueven y relacionan el uso de los juegos en el aula de matemáticas con la resolución de problemas.

Desde la investigación en didáctica de la matemática también hay una preocupación por analizar la relación que hay entre las fases de resolución de un problema matemático y el proceso de búsqueda de la estrategia ganadora de un juego matemático determinado (Edo, Baeza, Deulofeu & Badillo, 2008). Desde este contexto, nos interesa mostrar la importancia que tiene la introducción de juegos matemáticos en el desarrollo de competencias matemáticas y no matemáticas.

El artículo se encuentra estructurado en cinco apartados. En el apartado dos situamos nuestra propuesta dentro de la tendencia actual del currículo de España. En el siguiente describimos los referentes teóricos que sustentan nuestras propuesta. Posteriormente, presentamos nuestra propuesta didáctica ilustrando con dos ejemplos de juegos las diferentes actividades diseñadas que relacionan los juegos de estrategia con la resolución de problemas, centrándonos en el concepto de fracciones. Finalmente, presentamos algunas conclusiones sobre la potencialidad que ofrece el contexto de juegos de mesa y resolución de problemas para el desarrollo de competencias matemáticas y no matemáticas.

ENFOQUE POR COMPETENCIAS DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Adúriz-Bravo (2011) postula que en la didáctica de las ciencias y de las matemáticas, así como en la investigación educativa en general, la noción de competencia es considerada a la vez problemática y potente. Este autor afirma que

> [...] los problemas provienen, entre otras cosas, de los orígenes extraeducativos del concepto (principalmente, desde los campos de la economía, el desarrollo y el trabajo) y de sus numerosos —y delicados— matices político-ideológicos; la potencia, por su parte, se deriva de su promisoria capacidad de hacer que se reestructuren a fondo los currículos, la evaluación (formadora o acreditativa, interna o externa) y la formación del profesorado.

En este artículo se asume el término de competencia de manera global desde la perspectiva del ámbito del Espacio Europeo de Educación Superior, como

> La capacidad general basada en los conocimientos, experiencias, valores y disposiciones que una persona ha desarrollado mediante su compromiso con las prácticas educativas. (Eurydice, 2002, p. 13)

Sin embargo, matizamos el término, de manera particular, tal y como lo plantea Adúriz-Bravo (2011), quien propone una definición *operativa* de competencia, que denomina 'modelo de las tres ces (3C)', que nos puede ayudar a los profesores de ciencias y matemáticas a ver, de manera sencilla y poderosa, la relación que debe existir entre los diferentes contenidos de ciencias en las secuencias que diseñamos, para que los alumnos construyan conocimiento científico en el aula.

> [...] una competencia científica escolar es cualquier capacidad (cognitiva, discursiva, material, afectiva) de orden superior específica, capacidad de hacer algo sobre un contenido (científico) determinado, dentro de un contexto delimitado reconocible (escolar significativo y, por tanto, transferible a la vida ciudadana).

Desde esta visión, Sanmartí (2009) afirma que un trabajo competencial en el aula implica tener en cuenta cinco variables: (1) **Complejidad**, que implica red de conocimientos, incertidumbre, emergencia, etc.; (2) **Integración** de conocimientos en la resolución de problema; (3) **Funcionalidad y transferibilidad del conocimiento**, en la aplicación a situaciones relevantes socialmente e imprevisibles, (4) **Autonomía**, para aprender y actuar eficazmente, gestionar el conocimientos y para regularse y, (5) **Evaluabilidad**, para poder autorregular el pensamiento, los valores, las emociones y la actuación.

> Así, los nuevos planes curriculares nos plantean a todos los profesores un desafío importante: pasar de una formación centrada en el logro de objetivos específicos definidos desde los “contenidos” del área, a una enseñanza centrada en el desarrollo de competencias orientada a potenciar el pensamiento matemático de los estudiantes. Asumir el enfoque de competencias implica reconocer la importancia tanto del hacer como del comprender y, por tanto, reconocer que en esta noción se involucran y relacionan diversos saberes: el saber qué, el saber qué hacer y el saber cómo, cuándo y por qué hacerlo. En este sentido, debemos tener en cuenta que cuando hablamos de la competencia matemática es necesario contemplar tres aspectos que se relacionan permanentemente: el **conocimiento matemático** (distinguiendo sus dos tipos: conceptual y procedimental), los **procesos asociados** a la actividad matemática (formular y resolver problemas, modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar y formular comparar y ejercitar procedimientos) y el **contexto** de aprendizaje (Badillo, Giménez & Vanegas, 2011).

El Currículum actual de España, basado en un enfoque por competencias, concretamente en el despliegue curricular propuesto por la Generalitat de Catalunya, remarca que

> [...] las competencias básicas son el eje del proceso educativo. El currículum orientado a la adquisición de competencias establece que la finalidad de la educación obligatoria es conseguir que los alumnos y las alumnas adquieran las herramientas necesarias para entender el mundo y sean personas capaces de intervenir activa y críticamente en la sociedad plural, diversa y en cambio continuo que nos ha tocado vivir. Un currículum por competencias significa enseñar para aprender y seguir aprendiendo a lo largo de toda la vida. (Gencat, 2009, pp 7-8)

Así, se identifican dos grupos de competencias básicas: por un lado, las *transversales*, que son la base del desarrollo personal y de la construcción del conocimiento, entre las cuales consideran: (1) **las comunicativas**, para comprender y expresar la realidad; (2) **las metodológicas**, que activan el aprendizaje, entre estas se encuentra la competencia matemática; y, (3) **las personales**. Por otro lado, las *competencias específicas*, centradas en convivir y habitar el mundo y relacionadas con la cultura y la visión del mundo. En síntesis, las competencias básicas son las ocho que presentamos en la figura 1.

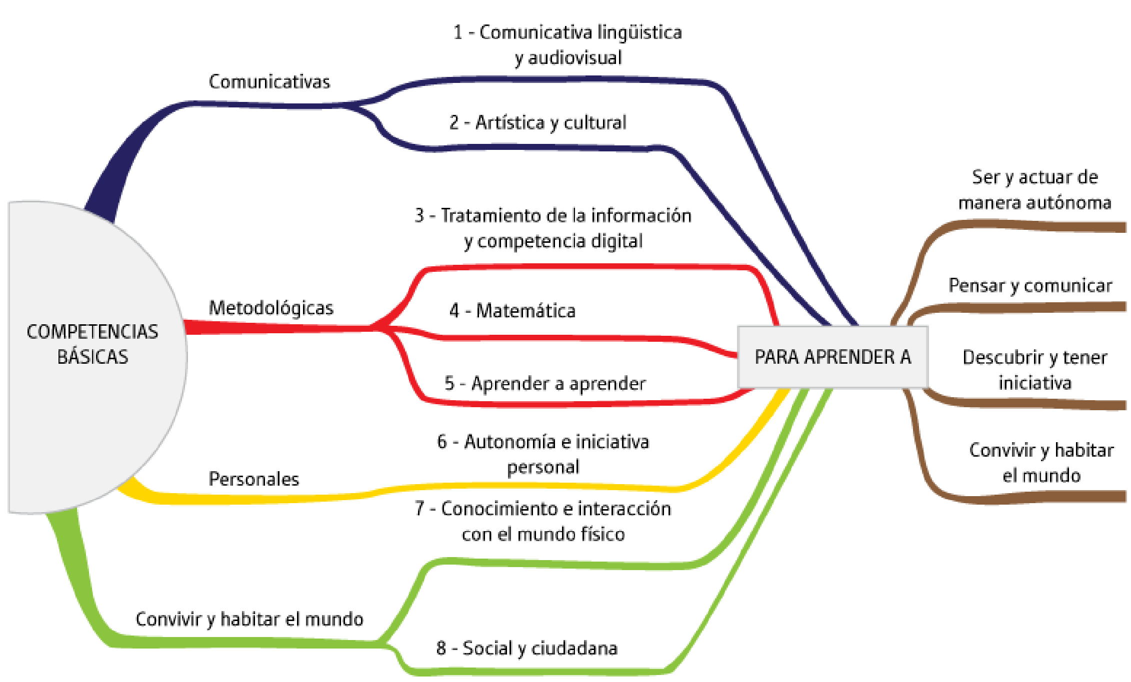


Figura 1.
Esquema sobre competencias básicas tomado de los archivos de la Web de la Generalitat de Catalunya

UNA PERSPECTIVA TEÓRICA SOBRE EL USO DE LOS JUEGOS DE ESTRATEGIA EN EL AULA DE MATEMÁTICAS DE PRIMARIA

En el campo de la didáctica de las matemáticas existe, desde hace años, un interés especial por la investigación en la enseñanza y el aprendizaje de la resolución de problemas, interés que en ocasiones se vincula con el hecho de utilizar juegos en el aula. Este interés radica en el énfasis que los actuales currículos de matemáticas por competencias ponen a la resolución de problemas como uno de los procesos que se ha de potenciar para que los alumnos adquieran la competencia matemática. Este hecho ha llevado a considerar los juegos matemáticos como elemento clave en el proceso de aprendizaje de las matemáticas y a usarlos, no solo para introducir contenidos, sino también, y muy especialmente, para favorecer el desarrollo de procesos matemáticos vinculados a la resolución de problemas (Gómez-Chacón, 1992).

Entendemos por **juego matemático** a la actividad colectiva basada en reglas fijas, sencillas, comprensibles y asumidas por todos los participantes (Edo, Deulofeu & Badillo, 2007). Las reglas establecerán no sólo los objetivos para el conjunto de jugadores, sino también los objetivos específicos de cada uno de los participantes que deberán buscar las estrategias para bloquear y/o ganar al resto de los participantes. Dependiendo del objetivo, el juego presenta diversas potencialidades en el aula de matemáticas y puede tener distintas finalidades. Corbalán y Deulofeu (1996) distinguen entre dos grandes categorías de juegos a utilizar en el marco escolar, así:

a. **Los juegos de conocimiento**, que persiguen la comprensión de conceptos o la mejora de técnicas matemáticas.

b. **Los juegos de estrategia**, que se centran en la adquisición de métodos o heurísticas de resolución de problemas.

Para estos autores los juegos de estrategia son aquellos en los que existen estrategias, entendidas como formas de jugar, para ganar siempre o para no perder. En este tipo de juegos todas las decisiones están en manos de los jugadores, ya que no interviene el azar, y se trata de que los jugadores descubran la estrategia ganadora. Es decir, encontrar una forma de jugar que permita ganar siempre, o que el otro jugador no gane nunca, dependiendo del turno de la jugada (si el jugador es el primero o el segundo en realizar sus jugadas) (Edo, Deulofeu & Badillo, 2007).

Corbalán (1994) afirma que los juegos en el contexto escolar precisan también del uso de material que permita registrar los procesos de resolución del problema matemático implicados en el juego, tales como, tableros y fichas o simplemente lápiz y papel. Si analizamos los juegos de mesa (con cartas, tableros, fichas, dados, etc.), una forma de clasificarlos es en función del grado de azar que contienen. Edo, Deulofeu y Badillo (2007) distinguen tres categorías:

a. Juegos de *azar puro*. Por ejemplo, “la oca o escalera”. Son juegos en los que los jugadores se limitan a ejecutar las órdenes dictadas por el dado. No necesitan decidir nada y solo consiste en mover la pieza asociando la cantidad que marca el dado con el valor posicional de la pieza en el tablero. En este grupo podemos ubicar al bingo.

b. Juegos con alguna *estrategia favorecedora*. Por ejemplo, “el parchís o parqués en Colombia”. Es un juego con presencia del azar, pero en el que los jugadores deben tomar decisiones que pueden influir en el resultado de su partida: ¿con cuál de mis piezas avanzo?, ¿es mejor poner a salvo esta pieza?, ¿si muevo esta voy a “matar” a un contrincante?, etc. Aunque las partidas siguen dependiendo en gran parte del azar, los dados siguen mandando, el resultado final también depende de la estrategia favorecedora que adopten los jugadores. En este grupo podemos ubicar al dominó.

c. Juegos *de estrategia*. Por ejemplo, “el tres en raya”. En estos todas las decisiones están en manos de los jugadores y ellos pueden llegar a descubrir una estrategia ganadora. Es decir, para una determinada condición, por ejemplo: ser el primero en tirar, es posible descubrir cuáles son los pasos para ganar siempre o para que el otro jugador no gane nunca. En este grupo podemos ubicar al ajedrez.

Edo, Deulofeu y Badillo (2007) afirman que el uso de los juegos del tipo b) y c) conlleva un tipo de razonamiento estrechamente vinculado al pensamiento matemático deseable en los procesos de resolución de problemas, tales como: reconocimiento e identificación de datos relevantes, planificación, aplicación de estrategias, anticipación, etc. Por ello, recomiendan que se destine tiempo en el aula de matemáticas para enseñar las reglas de algunos juegos, para jugar en pequeños grupos y para analizar y discutir en gran grupo los descubrimientos realizados.

De igual manera, estos autores consideran que los juegos del tipo a), b) y c) pueden ayudar al desarrollo y comprensión de contenidos matemáticos específicos, como los relacionados con los sistemas de numeración, el valor de posición, la descomposición de algunas cantidades, el cálculo mental exacto y aproximado y, en general, el desarrollo del sentido numérico.

Un tercer aspecto que resaltan del uso de estos tipos de juegos en el aula de matemática, y no por ello menos importante, es el valor del desarrollo de la competencia de la autonomía personal y social que puede comportar esta actividad, siempre que el profesor tenga en cuenta los siguientes aspectos: (1) la importancia de que los alumnos en pequeños grupos realicen una tarea que solo puede llevarse a cabo con la implicación y seguimiento de las normas por parte de todos ellos, sin ningún adulto; y, (2) la condición de jugar en parejas que forman un solo equipo (contra otros equipos) y que deben pactar la jugada antes de tirar favorece la comunicación entre compañeros porque intentan explicarse razonamientos muy complejos (ambiente de resolución de problemas) al tiempo que favorece la empatía y diversión propia de un juego (ambiente lúdico vinculado a las matemáticas).

Finalmente, un aspecto clave que tenemos que contemplar en el uso de los juegos de estrategia relacionándolos con la resolución de problemas es que ambos comparten el mismo proceso heurístico. Por tanto, a la hora de relacionar las fases de la heurística de la resolución de un juego de estrategia y de un problema matemático, tal y como afirma Pólya (1979), es importante el análisis de las heurísticas de resolución de un problema matemático determinado, porque implica comprender el método que conduce a la solución del problema, en particular, las operaciones mentales típicamente útiles en este proceso. Estas operaciones mentales implican, entre otras, la indagación, la exploración y el descubrimiento, que guardan estrecha relación con el desarrollo de las habilidades que activa un alumno cuando busca la estrategia ganadora de un juego matemático (Edo, Baeza, Deulofeu & Badillo, 2008).

Para estudiar el posible paralelismo entre el proceso de resolución de un problema matemático y el proceso de descubrimiento de la estrategia ganadora de un juego matemático, consideramos el paralelismo propuesto por Edo, Baeza, Deulofeu y Badillo (2008), quienes a su vez se basaron en el estudio de Edo (2002) sobre el análisis entre las fases de la resolución de un problema matemático en el ámbito de la educación primaria y las fases de resolución de un juego de sociedad (cuadro 1).

Cuadro 1.
Relación entre las fases de resolución de un problema y las fases de resolución de un juego, tomado de Edo, Baeza, Deulofeu y Badillo (2008)

Fases de resolución de problemas (Polya, 1979)	Fases de resolución de un juego (Edo, 2002)
Comprensión del problema.	Comprensión de los objetivos del juego y de las normas a seguir.
Diseño y ejecución de un plan general o de planes parciales sucesivos.	Desarrollo de la partida: experimentación, realización de conjeturas, diseño de planes parciales, planificación de una estrategia.
Verificación de la solución obtenida.	Validación o refutación de la estrategia y análisis de lo que ha pasado.

Dos juegos de estrategia para trabajar el sentido numérico de las fracciones en primaria: "*recubrir los hexágonos*" y "*no puedo detenerme*"

Como ya hemos mencionado en el apartado anterior, los juegos en general, y los de mesa en particular, guardan una estrecha relación con las matemáticas. En primer lugar, muchos utilizan las matemáticas en su desarrollo, ya sea por las relaciones numéricas (por ejemplo, el dominó) o por las geométricas (por ejemplo, tres en raya o triqui), pero sobre todo por el tipo de estrategias que necesitan descubrir cuando intentan ganar una partida. Estas estrategias o heurísticas que utilizan los alumnos pueden ser muy variadas dependiendo las características del juego e implican el desarrollo de procesos matemáticos que guardan gran similitud con las estrategias utilizadas en la resolución de problemas matemáticos (Shoenfeld, 1985).

En segundo lugar, la naturaleza de las matemáticas hace que se parezcan a un juego. No podemos afirmar que las matemáticas sean un juego, porque la finalidad y sus aplicaciones son mucho más complejas y trascienden el carácter de diversión de los juegos. Sin embargo, cuando hacemos matemáticas, y concretamente cuando resolvemos problemas, sí que comparten objetivos comunes al proceso de encontrar la estrategia ganadora de un juego. En este sentido, los currículos competenciales actuales enfatizan en la necesidad de que hacer matemáticas se convierta en una actividad lúdica y sobre todo intelectual estimulante. Así, el carácter lúdico de los juegos de mesa y el reto que nos plantea su práctica tienen gran similitud con hacer matemáticas. De esta manera, consideramos que su implementación en el aula crea un entorno ideal para reflexionar sobre conceptos matemáticos y sobre las heurísticas de resolución aplicadas durante la búsqueda de la estrategia ganadora.

Para la implementación de un taller de juegos de mesa que promueva el desarrollo de estrategias de cálculo mental en un entorno significativo y lúdico, los juegos son escogidos atendiendo el nivel de escolaridad, los contenidos matemáticos y la dificultad de las estrategias implícitas para ganar. A nivel metodológico proponemos escoger dos juegos de mesa por nivel (curso). Cada juego ocupa una unidad de programación y, generalmente, sugerimos implementarla en el último trimestre del curso con una dedicación de cuatro sesiones de una hora por cada juego (total: ocho sesiones de clases de una hora). Por tanto, en el tercer trimestre se hacen dos unidades de programación que corresponden a dos juegos (figura 2).

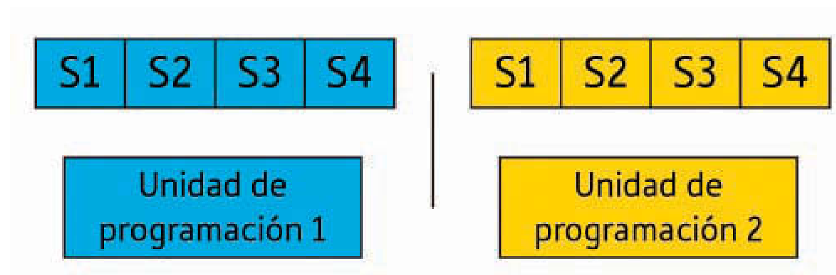


Figura 2.
Organización de las sesiones del taller de juegos de mesa en primaria.

Cada sesión sea la S_1, S_2, S_3 o S_4 (figura 2) tiene una secuencia de actividades propia. En todas las sesiones del taller todos los alumnos juegan al mismo tiempo un juego escogido previamente por el maestro. Las sesiones están estructuradas de la siguiente manera:

- **Primera sesión**: se explican las reglas o normas del juego mientras se realiza una primera partida en la cual juegan la maestra y los alumnos. Al acabar la partida inicial se detiene el juego y se inicia un diálogo preguntando: ¿qué consideran que aprenderán practicandoeste juego? El objetivo de este diálogo es que los alumnos hagan una representación, lo más justa posible, de lo que van a hacer, ¿cómo lo harán? y, sobre todo, ¿por qué lo hacen? El maestro, mediante preguntas, sugerencias y reflexiones alrededor del juego que acaban de conocer, ayuda a los alumnos a hacer conjeturas, plantear hipótesis, descubrir y verbalizar el conocimiento y los procesos matemáticos que se espera que aprendan jugando. Seguidamente, los alumnos se colocan por grupos (un material por mesa de cuatro alumnos) y comienzan a jugar solos. El maestro observa y hace anotaciones en la tabla de observación preparada para cada juego. Cuando crea conveniente, interviene jugando y actuando conjuntamente con aquellos grupos y alumnos que considere necesario.

- **Segunda y tercera sesión**: se inicia la sesión con una conversación colectiva con diferentes focos de atención. Se pueden recordar las reglas del juego, los alumnos pueden explicarle a la maestra descubrimientos o aprendizajes que van realizando o se pueden comentar incidencias positives o negativas relacionadas con conductas que se hayan dado entre los compañeros de grupo en las sesiones anteriores. Seguidamente, los alumnos juegan en pequeños grupos y la maestra observa, hace anotaciones e interviene solo cuando sea necesario.

- **Cuarta sesión**: la maestra recuerda que esta será la última sesión del juego y les comenta a los alumnos que jugarán solo entre ellos, pero que posteriormente han de exponer en grupo la(s) estrategia(s) ganadora(s) y los contenidos matemáticos utilizados. Si el maestro lo considera importante, le pide a los alumnos por escrito que redacten sus impresiones, que expliquen la(s) estrategia(s) y que justifiquen los contenidos matemáticos implícitos en las estrategias ganadoras.

A modo de ejemplo, presentamos dos juegos que pueden ayudar a desarrollar varios de los contenidos presentados. Los juegos que proponemos trabajar y analizar forman parte de una colección de primaria elaborada por profesores del grupo de investigación PREMAT de la UAB (Mequè Edo, Edelmira Badillo y Jordi Deulofeu), que se encuentra en fase de experimentación. Los juegos seleccionados se hicieron atendiendo al foco de interés del *Programa de Mejoramiento de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas en la Escuela Primaria en Barranquilla-Fase Piloto*, liderado por la Universidad del Norte con el apoyo de la Fundación ANDI. Los dos juegos de estrategias permiten explorar y desarrollar el sentido numérico fraccionario que tienen alumnos de diez a doce años que cursan quinto de primaria.

Entendemos por sentido numérico la comprensión general que tiene un alumno sobre los números y operaciones junto con la capacidad para usarlos de manera flexible para emitir juicios matemáticos y desarrollar estrategias útiles para resolver problemas complejos, en este caso encontrar y argumentar la estrategia ganadora de un juego (Godino, Font, Konic & Wilhelmi, 2009). El National Council of Teachers of Mathematics (1989) identificó cinco componentes que caracterizan el sentido numérico: (1) significado del número, (2) relaciones numéricas, (3) tamaño de los números, (4) operaciones con los números y, (5) referentes para los números y cantidades. El desarrollo de un sentido numérico óptimo implica la adquisición de destrezas relacionadas con el cálculo mental, estimación del tamaño relativo de los números y del resultado de operaciones con los números, reconocimiento de las relaciones parte-todo, conceptos de valor posicional y resolución de problemas (Godino, Font, Konic & Wilhelmi, 2009).

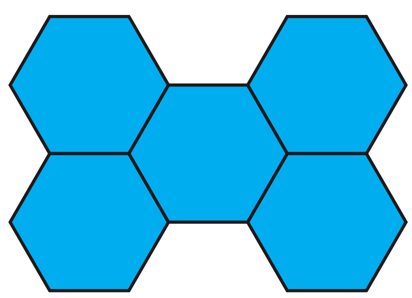
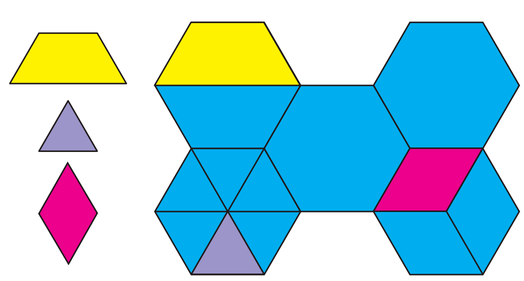
Tal y como señalan Godino et ál. (2009)

> en la vida cotidiana aparecen diversos tipos de situaciones en que se utilizan expresiones que relacionan dos números de manera multiplicativa; tales números pueden ser divisibles entre sí o no. Estas relaciones se describen mediante fracciones, razones, decimales y porcentajes, estando ligadas usualmente a cantidades de magnitudes y a prácticas específicas según los tipos de situaciones en que participen.

Estos autores hacen una revisión sobre estudios que se han centrado en el análisis semántico de las fracciones y nociones relacionadas, y señalan que son diversas las interpretaciones que se atribuyen tanto a los racionales como a las fracciones. Destacan como conceptos centrales el cociente, la razón, el operador y una versión de la relación parte-todo.

RECUBRIR LOS HEXÁGONOS

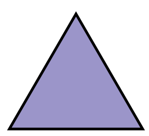
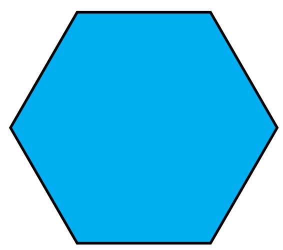
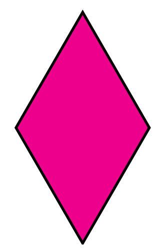
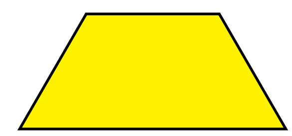
Cuadro 2.
Ficha didáctica del juego recubrir los hexágonos.

Nivel:	5° de primaria / 6° de secundaria (diez-doce años)
Material:	Tablero formado por cinco hexágonos regulares iguales.  Tres tipos de piezas de diferentes colores: diez trapecios isósceles (1/2 hexágono), quince rombos (1/3 de hexágono) y treinta triángulos equiláteros (1/6 de hexágono). 
Número de jugadores:	Cuatro jugadores (jugando por parejas)
Normas:	En un tablero formado por cinco hexágonos regulares iguales, dos jugadores, en su turno, colocan una pieza en cada jugada para recubrir los hexágonos. El jugador que coloca la última pieza, dejando todos los hexágonos llenos, gana la partida. Hay tres tipos de piezas que permiten recubrir todo el tablero: diez trapecios isósceles, quince rombos y treinta triángulos equiláteros.
Normas:	Se juega libremente (poniendo donde quiera cada pieza), pero hay dos condiciones: a. Cada pieza deberá quedar completamente colocada en cada hexágono (una pieza no puede tocar dos hexágonos consecutivos al mismo tiempo). b. Se comienza a jugar llenando hexágono a hexágono. Es decir, no se pueden colocar piezas en otro hexágono hasta que esté completamente lleno el anterior.
Variantes:	1. La mismas normas anteriores, pero con la variante de que se pueden ir colocando piezas en todos los hexágonos (se pueden dejar huecos). 2. Si al poner una pieza hay otra en aquel hexágono, se pone de manera que tengan un lado común. Por tanto, no pueden quedar dos “huecos” en un mismo hexágono.
Situación problema:	• ¿Cuál es la estrategia ganadora? • ¿Qué pasa si variamos en número de hexágonos del tablero?

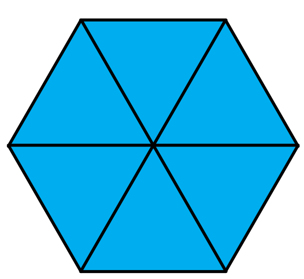
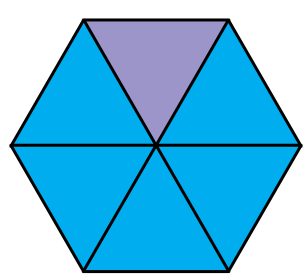
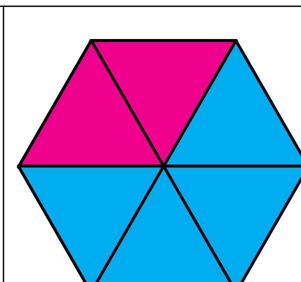
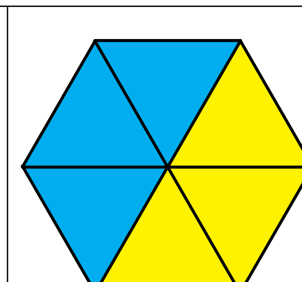
En el cuadro 2 se presenta la ficha didáctica del juego. En ella se hace referencia a los siguientes aspectos: (a) nivel de escolaridad; (b) materiales necesarios que se pueden fabricar con cartulina y plastificarlos; (c) número de jugadores; (d) las normas del juego; (e) algunas variantes de las normas iniciales, pero que el maestro debe tener claro que implican considerar la posible emergencia de otros tipos de estrategias y la aplicación de otros conceptos matemáticos; y, (f) algunas situaciones problema que se pueden plantear desde la primera sesión para que los alumnos puedan intentar responder a medida que conocen e intentar encontrar la estrategia ganadora. Estas situaciones problemas serán el centro de discusión en la cuarta y última sesión de juego de la unidad de programación.

En la primera sesión, al presentar las normas del juego y en el proceso de familiarización de los alumnos con los materiales del juego, el maestro puede aprovechar para plantearle un primer reto a los alumnos:

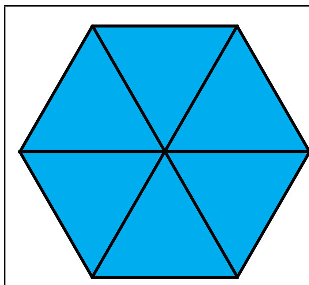
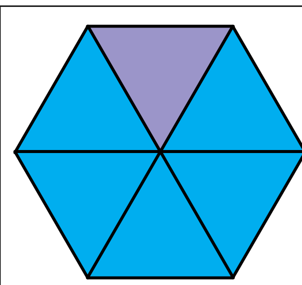
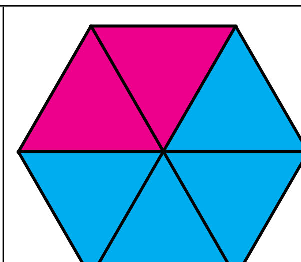
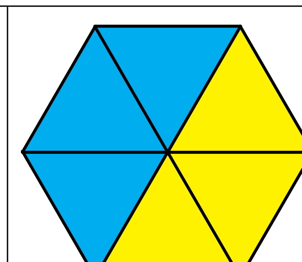
1. Identificar las figuras geométricas presentes en el juego y clasificarlas.

Polígonos			
Regulares		**Irregulares**	
			
Triángulo Equilátero-acutángulo	Hexágono	Cuadrilátero Paralelogramo rombo	Cuadrilátero Trapecio isósceles

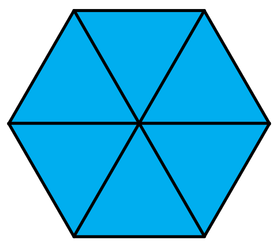
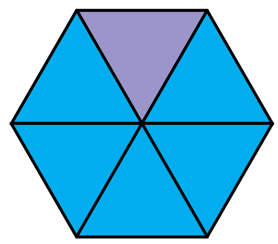
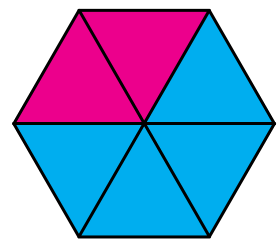
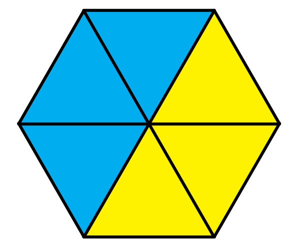
2. Figuras en posiciones no prototípicas, que son importantes para disminuir la emergencia de errores y obstáculos en el aprendizaje de los alumnos, es importante presentar la representación gráfica de las figuras con diferentes rotaciones.

3. buscar la relación numérica entre la figuras que forman las piezas del juego tomando como unidad uno de los hexágonos del tablero.

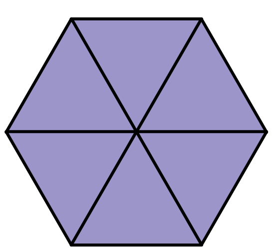
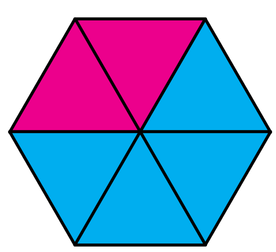
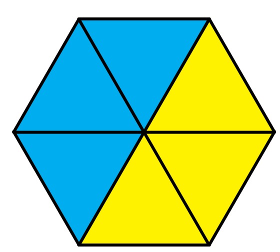
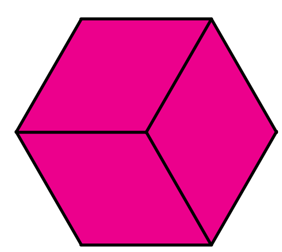
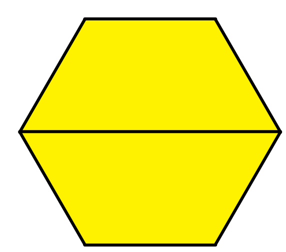
			
Unidad 1	Una sexta parte $\frac{1}{6}$ un sexto	Dos sextas partes $\frac{2}{6}$ dos sextos	Tres sextas partes $\frac{3}{6}$ tres sextos

4. Introducir o ampliar las fracciones equivalentes.

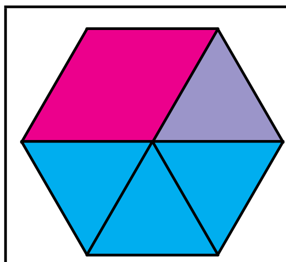
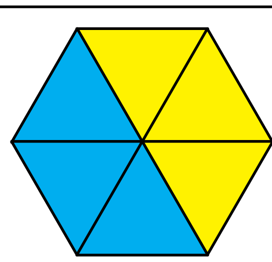
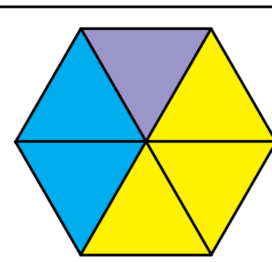
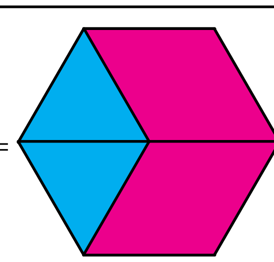
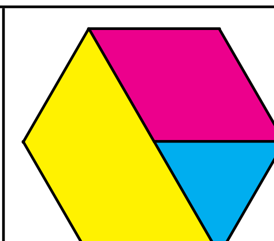
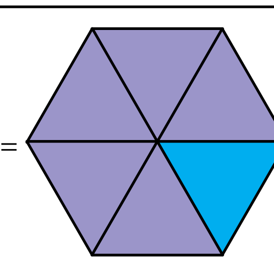
			
Unidad 1	Una sexta parte $\frac{1}{6}$	Dos sextas partes $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$	Tres sextas partes $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

5. Introducir o ampliar operaciones con fracciones homogéneas y heterogéneas a partir de la fuerza de la traducción de la visualización gráfica hacia el algoritmo numérico. A manera de ejemplo, por cuestión de espacio, ilustramos solo la suma y la resta con alguna de las posibles operaciones:

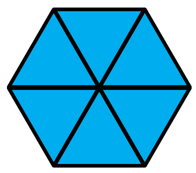
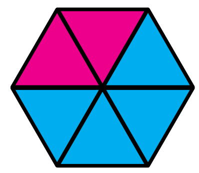
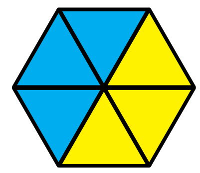
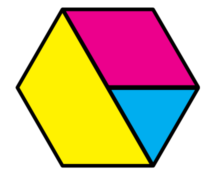
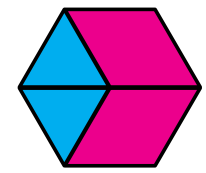
Suma y resta de fracciones homogéneas

				
$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{3}{3}=1$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1$
$1-\frac{6}{6}=\frac{6}{6}-\frac{6}{6}=\frac{0}{6}=0$	$1-\frac{2}{6}=\frac{6}{6}-\frac{2}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$	$1-\frac{1}{2}=\frac{2}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$	$1-\frac{3}{3}=\frac{3}{3}-\frac{3}{3}=\frac{0}{3}=0$	$1-\frac{2}{2}=\frac{2}{2}-\frac{2}{2}=\frac{0}{2}=0$

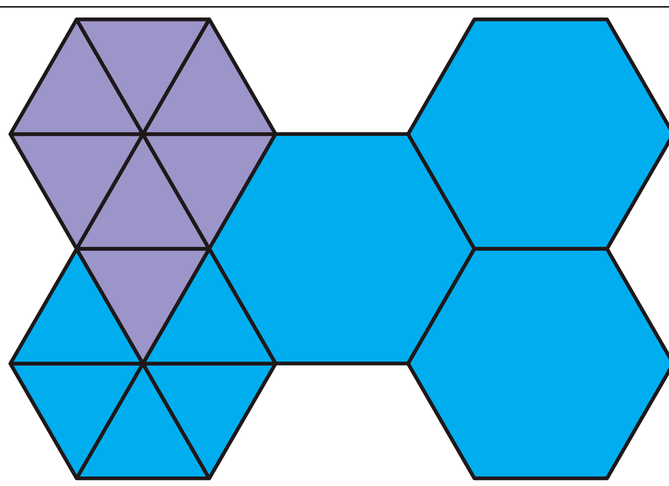
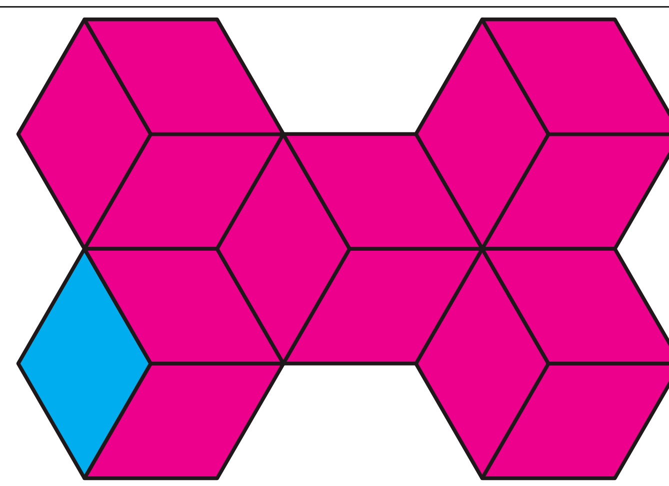
Suma y resta de fracciones heterogéneas

 = 	 = 	 = 
$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$
$1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{6}{6}-\frac{2}{6}-\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$	$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{6}{6}-\frac{3}{6}-\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$	$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{6}{6}-\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$

6. Introducir o ampliar diferentes expresiones de una fracción: diferentes representaciones de la relación parte-todo (a/b), decimal, porcentaje, etc.

Representación gráfica					
Expresión fracción (a/b)	$\frac{6}{6}=\frac{3}{3}=\frac{2}{2}=1$	$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$	$\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$
Expresión decimal	1,0	$0{,}333\_ = 0{,}\widehat{3}$	0,5	$0{,}5 + 0{,}\widehat{3} = 0{,}8\widehat{3}$	$0{,}\widehat{3} + 0{,}\widehat{3} = 0{,}\widehat{6}$
Porcentaje	100%	33,3%	50%	83,3%	66,6%

7. Introducir o ampliar números mixtos, expresión de fracciones mayores que la unidad. El grado de profundización que los maestros pongan a los aspectos anteriores favorecerá el grado de desarrollo del sentido numérico fraccionario de los alumnos.

	
$1+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}+\frac{1}{6}=\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}$	$4+\frac{2}{3}=\frac{12}{3}+\frac{2}{3}=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}$
Una unidad entera y un sexto de la unidad	Cuatro unidades enteras y dos tercios de la unidad

Estrategias favorecedoras: en este juego, teniendo en cuenta la aplicación de algunos de los conceptos matemáticos analizados anteriormente, encontramos que los alumnos necesitan aplicar dos tipos de estrategias para ganar: una numérica y una geométrica. A partir de estas dos siempre ganará el segundo si las aplica correctamente en cada una de las jugadas de la partida. El jugador que domina las dos estrategias llega a ser consciente de que el que gana en el primer hexágono del tablero ya se asegura ganar la partida.

Estrategia numérica: en la figura 3 se ilustran las diferentes opciones de ganar aplicando la estrategia numérica.

Primera jugada ganadora: cuando un jugador inicia con la pieza del trapecio, automáticamente pierde porque el segundo jugador (que será el ganador) tiene dos opciones para ganar: (a) la inmediata es colocar un trapecio y, (b) es colocar un triángulo pero dejando 2/6 separados; es decir, 1/6 a cada lado.

Segunda jugada ganadora: cuando un jugador inicia con la pieza del triángulo, la opción numérica ganadora es la (b). Es decir, colocar un trapecio dejando 1/6 a cada lado.

Tercera jugada ganadora: cuando un jugador inicia con la pieza del rombo, la opción numérica ganadora es la (c), que consiste en colocar un rombo pero dejando 2/6 separados; es decir, 1/6 a cada lado.

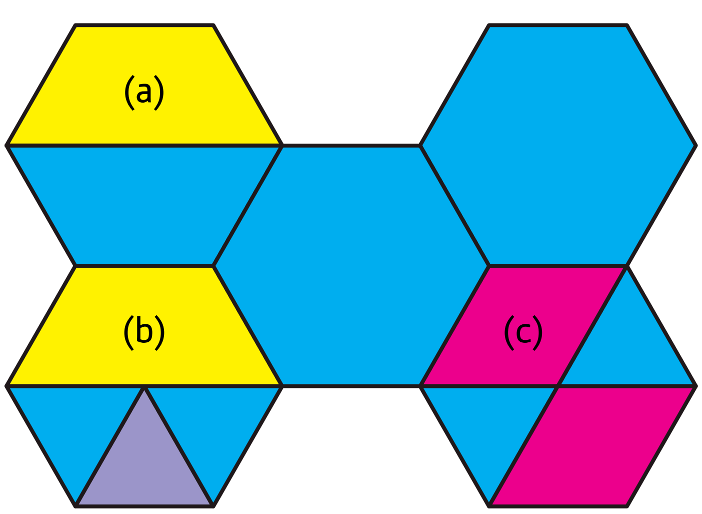


Figura 3.
Estrategia numérica: operaciones con fracciones (dejar 2/6 separados).

Estrategia geométrica: en la figura 4 se ilustran las diferentes opciones de ganar aplicando la estrategia geométrica, que consiste en colocar la pieza simétrica a la que coloca el primer jugador que inicia la partida (simetría axial).

Primera jugada ganadora: siempre que el primer jugador coloca la pieza del trapecio, automáticamente pierde porque el segundo jugador (que será el ganador), coloca la figura simétrica que es el trapecio (a).

Segunda jugada ganadora: siempre que el primer jugador coloca la pieza del triángulo, la opción geométrica ganadora es la (b), que consiste en ir colocando la figura simétrica a la pieza colocada que será otro triángulo. Está jugada se repite hasta en tres ocasiones, que es cuando se gana el primer hexágono y, en consecuencia, la partida.

Tercera jugada ganadora: siempre que el primer jugador coloca la pieza del rombo, la opción geométrica ganadora es la (c), que consiste en ir colocando la figura simétrica a la pieza colocada que será otro rombo, dejando al primer jugador solo la opción de colocar un triángulo y se gana el primer hexágono al colocar el triángulo simétrico y, en consecuencia, la partida.

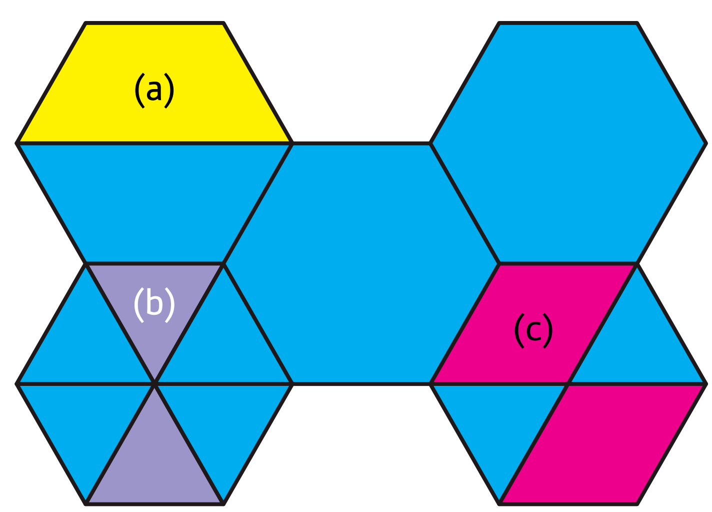
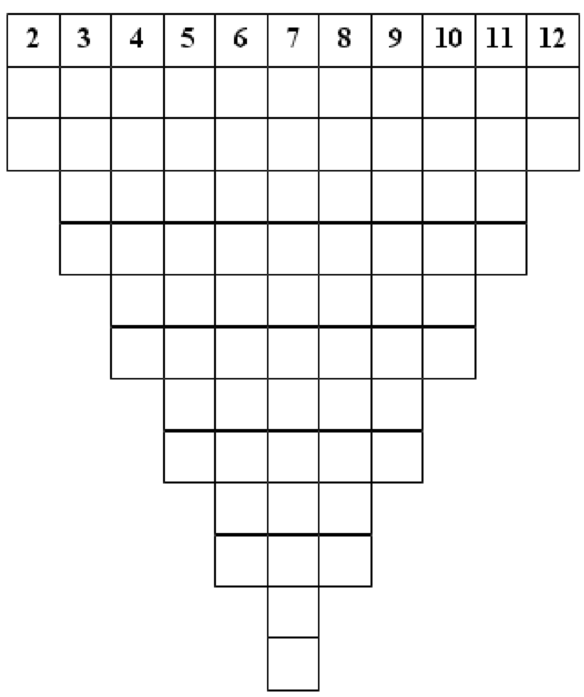
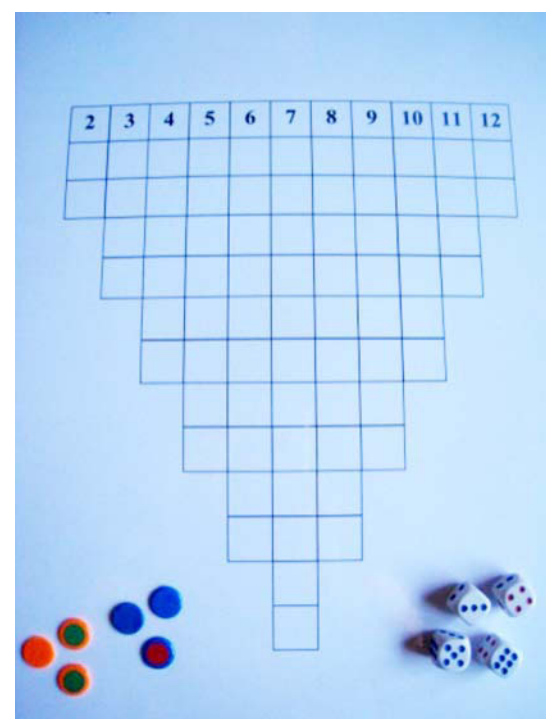


Figura 4.
Estrategia geométrica: simetría axial de polígonos regulares.

NO PODRÁS DETENERTE

Cuadro 3.
Ficha didáctica del juego no podrás detenerte.

<table>
<tr><td>Nivel</td><td colspan="2">5° de primaria / 6° grado de secundaria (diez-doce años)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Material</td><td colspan="2">Cuatro dados, tablero de números (se puede imprimir en acrílico -DNA 3- y plastificar) y tres fichas neutras y tres fichas de color para cada jugador.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Número de jugadores</td><td colspan="2">Parejas de jugadores (jugando individual)</td></tr>
<tr><td>Normas:</td><td colspan="2">Por turnos, cada jugador tira los cuatro dados (al mismo tiempo), tantas veces como quiera y, los separa de dos en dos, de la manera que quiera (y va sumando los resultados, de dos en dos dados). Por ejemplo: con la tirada 3, 4, 5 y 6 puede hacer las siguientes combinaciones 7 y 11, 8 y 10, o 9 y 9.

Posteriormente, escoge dos de las combinaciones posibles y coloca en el tablero en la columna del número correspondiente una ficha en posición de juego, en cada combinación seleccionada.

Después, si quieres, vuelve a tirar los dados y coloca la tercera ficha que le queda. Mientras que tenga fichas fuera, ha de utilizar el resultado de los cuatro dados (haciendo las combinaciones que quiera).

Una vez haya colocado las tres fichas en el tablero y esté jugando, la siguiente tirada ya puede escoger el resultado que necesite para hacer avanzar las tres fichas colocadas en las respectivas columnas seleccionadas.</td></tr>
</table>

Normas:	Se repite el proceso anterior haciendo avanzar cada una de las fichas del tablero... Tan vicioso que tiras tantas veces como quieras, solo tú decides cuándo te detienes. Cuando llegas al final de la cantidad de tiradas de las columnas seleccionadas, diferente para cada número, giras la ficha a la posición neutra y ningún jugador más puede jugar en esa columna porque ya te pertenece. En caso de que hayas avanzado mucho en una columna y tengas miedo a perder, antes de lanzar los dados puedes detenerte (colocando la ficha en posición neutra), si al lanzar el dado no encuentras una combinación posible que te permita avanzar tus fichas, pierdes. Solo las fichas que están detenidas en posición neutra se salvan y debes dar el turno a tu compañero. En caso de que siempre tengas jugadas continúas sin parar hasta llevar tus fichas al final de las columnas seleccionadas. El primer jugador que llega al final de las tres columnas escogidas acaba y cede al turno al siguiente jugador.
Precisiones sobre las normas del juego	ATENCIÓN: Cada jugador solo puede poner fichas en tres columnas de números. Si en alguna tirada los números que salen en los dados no te permiten hacer ninguna de las tres combinaciones escogidas, todo lo ganado en recorrido de la jugada se pierde, si no has llegado al final de la columna y tienes que retirar las fichas del tablero y pasas el turno a tu compañero. Ahora, si antes de hacer un lanzamiento de los dados te has plantado, y has cambiado las fichas en juego por la posición neutra, en la jugada siguiente comienzas en la posición en la que te habías quedado. Si no obtienes en los dados la combinación deseada, puedes ir jugando en las columnas que puedes, y no en las que quieres. Cuando un jugador llega al final de una columna, se la queda y cambia la ficha a posición neutra. Los otros jugadores que también hayan comenzado a jugar en esa columna retiran las fichas y ninguno puede jugar más en esa columna. A medida que avanza la partida, es más y más difícil encontrar dónde jugar (si hay más de dos jugadores). Cuando un jugador consigue las tres columnas se acaba la partida, pero en caso de que un jugador haya perdido el turno y tenga fichas detenidas y haya cedido el turno al otro compañero, tiene derecho a acabar la partida. En ese caso habría empate, pero ganará el que haya hecho un mayor recorrido (las columnas con mayor valor de desplazamientos de las fichas).
Variantes	Las mismas normas anteriores, pero con la variante de que se pueden hacer combinaciones de uno, dos, tres o cuatro dados. Es decir, con la tirada 3, 4, 5 y 6 puede hacer las siguientes combinaciones: 1 dado (3, 4, 5, o 6); de dos dados (7 y 11, 8 y 10, o 9 y 9); de tres dados (12 y 6; 16 y 3; 14 y 4; 13 y 5); de cuatro dados (18). Sin embargo, algunas jugadas son imposibles porque el tableo comienza en 2 y acaba en 12.
Situación problema	• ¿Cuál es la estrategia ganadora? • ¿Cuáles combinaciones son más probables?

En el cuadro 3 se presenta la ficha didáctica del juego. En ella se hace referencia a los siguientes aspectos: (a) nivel de escolaridad; (b) materiales necesarios que se pueden fabricar con cartulina y plastificarlos; (c) número de jugadores; (d) las normas del juego; (e) algunas variantes de las normas iniciales, pero que el maestro debe tener claro que implican considerar la posible emergencia de otros tipos de estrategias y la aplicación de otros conceptos matemáticos; y, (f) algunas situaciones problema que se pueden plantear desde la primera sesión para que los alumnos puedan intentar responder a medida que conocen e intentan encontrar la estrategia ganadora. Estas situaciones problema serán el centro de discusión en la cuarta y última sesión de juego de la unidad de programación.

En la primera sesión, al presentar las normas del juego y en el proceso de familiarización de los alumnos con los materiales del juego, el maestro puede aprovechar para plantearle un primer reto a los alumnos:

1. Introducir o ampliar el cálculo de probabilidad de un suceso: lanzar un dado. Aquí pueden ver otra aplicación de los racionales como el cociente entre dos valores (**Regla de Laplace:** define la probabilidad de un suceso como el cociente entre casos favorables y casos posibles) y relacionarlos con los significados trabajados en el juego anterior.

   P(A) = casos favorables / casos posibles

Probabilidad de que al lanzar un dado salga el número 2: el caso favorable es tan solo uno (A=que salga el dos), mientras que los casos posibles son seis (puede salir cualquier número del uno al seis que corresponden a las caras del dado). Por lo tanto:

$$P(A) = 1 / 6 = 0{,}166... = 16{,}6\%$$

2. Introducir o ampliar las combinaciones de la suma de dos, tres o cuatro dados. Por ejemplo con dos dados: 2=1+1; 3=2+1; 4=2+2=3+1; 5=2+3=4+1; **6=1+5=2+4=3+3; 7=4+3=5+2=6+1; 8= 2+6=3+5=4+4;** 9=3+6=4+5; 10=4+6=5+5; 11=5+6; 12=6+6.
3. ¿Cuáles son las combinaciones más probables con 2, 3 o 4 dados. Por tanto, ¿qué columnas consideras que es mejor escoger?

Estrategia favorecedora: el jugador que comienza tiene más opciones de ganar porque puede seleccionar las columnas con más probabilidad de que salgan. Es conveniente intentar mover simultáneamente las tres fichas y no llevar al final una columna y después seguir con las otras porque hay riesgos de tener menos jugadas posibles. El cálculo mental es fundamental para agilizar la partida.

A MANERA DE CONCLUSIÓN

Uno de los aspectos claves, después de haber implementado diversas secuencias didácticas utilizando contextos de juego matemáticos para el desarrollo del sentido numérico en primaria, es la motivación de los alumnos durante todo el desarrollo de la actividad matemática que se genera en el aula. Otro aspecto a resaltar es que el contexto de juegos de estrategia permite la construcción de significados colectivos en relación con los conceptos numéricos y geométricos inmersos en la búsqueda de las estrategias ganadoras y en los problemas matemáticos implícitos en cada juego.

De igual manera, la respuesta tanto de los formadores de maestros (equipo de formadores de la Universidad del Norte del *Programa de Mejoramiento de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas en la Escuela Primaria en Barranquilla*) como de los veintiún maestros en ejercicio de las quince instituciones públicas que participan en el programa de formación sobre el mejoramiento del aprendizaje y la enseñanza de las fracciones en el ciclo superior de primaria valoraron positivamente las experiencias propuestas en un marco competencial, porque consideran que el contexto de juego matemático permite:

1. Conexiones permanentes entre el conocimiento matemático implícito en las estrategias ganadoras, distinguiendo aspectos conceptuales y procedimentales de los mismos.

2. El desarrollo progresivo del sentido numérico. Concretamente, el sentido numérico fraccionario porque facilita: (1) la construcción del significado del número racional como: cociente, razón, operador y la relación parte-todo, (2) el establecimiento de relaciones numéricas, (3) la comparación del tamaño de los números, (4) la comprensión de las operaciones con los números utilizando diferentes registros semióticos y, (5) la construcción de referentes para los números y cantidades.

3. Centrar la atención en los procesos asociados con la actividad matemática, ya que se crea un ambiente de formulación y resolución de problemas, modelación de procesos y fenómenos de la realidad a partir del estudio y la argumentación matemática durante el análisis de las estrategias que utilizan los alumnos para ganar una partida.

4. Generar contextos de aprendizaje funcional y significativo, porque se trabajan con igualdad de importancia los aspectos matemáticos y los aspectos emocionales y afectivos asociados a la dinámica de interacción de los estudiantes en la búsqueda de las estrategias o heurísticas ganadoras.

Agradecimientos: este trabajo ha sido realizado en el marco del proyecto: EDU2009-07713/EDUC, *Estudio sobre el desarrollo de competencias discursivas en el aula de matemáticas,* financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

REFERENCIAS

Adúriz-Bravo, A. (2011). Competencias metacientíficas escolares dentro de la formación del profesorado de ciencias. En E. Badillo, L. García, A. Marbà & M. Briceño (Eds.), El *desarrollo de competencias en las clases de ciencias y matemáticas*. Mérida: Fondo Editorial Mario Briceño Iragorry. Universidad de los Andes (aparición en octubre de 2011).

Badillo, E., Giménez, J. & Vanegas, Y. (2011). Desarrollo de competencias en un contexto artístico: construyendo significados sobre la forma. En E. Badillo, L. García, A. Marbà & M. Briceño (Eds.), El *desarrollo de competencias en las clases de ciencias y matemáticas*. Mérida: Fondo Editorial Mario Briceño Iragorry. Universidad de los Andes (aparición en octubre de 2011).

Cockcroft, W.H. (1982). *Mathematics counts*. London: HMSO.

Corbalán, F. (1994). *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*. Madrid: Síntesis.

Corbalán, F. & Deulofeu, J. (1996). Juegos manipulativos en la enseñanza de las matemáticas. *Uno, revista de didáctica de las matemáticas*, *7,* 71-80.

Edo, M. (1998). Juegos y matemáticas. Una experiencia en el ciclo inicial de primaria. *Uno, revista de didáctica de las matemáticas*, *18,* 21-37.

Edo, M. (2002). *Jocs, interacció i construcció de coneixements matemàtics*. Tesis doctoral. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.

Edo, M., Deulofeu, J. & Badillo, E. (2007). Juego y matemáticas: un taller para el desarrollo de estrategias en la escuela. *Actas XIII JAEM, Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*, Granada. Julio, 2007. ISBN: 84-920438-3-0; Depósito legal: LU- 359/99.

Edo, M., Baeza, M., Deulofeu, J. & Badillo, E. (2008). Estudio del paralelismo entre las fases de resolución de un juego y las fases de resolución de un problema. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 14,* 61-75.

Eurydice (Red Europea de Información en Educación). (2002). *Las competencias clave: un concepto en expansión dentro de la educación general obligatoria.* Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (disponible en línea).

Gencat. (2009). *Currículum Educació Primària*. Barcelona: Servei de Comunicació, Difusió i Publicacions. Generalitat de Catalunya. Departament d'Educació (disponible en línea).

Godino, J., Font, V., Konic, P. & Wilhelmi, M. (2009). El sentido numérico como articulación flexible de los significados parciales de los números. En, J. M. Cardeñoso & M. Peñas. (2009), *Investigación en el aula de matemáticas. Sentido Numérico* (117-184). Granada: SAEM Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. (Disponible en, http://thales.cica.es/granada/)

Gómez-Chacón, I. (1992). Los juegos de estrategia en el currículum de matemáticas. *Apuntes I.E.P.S, 55.* Madrid: Narcea ediciones.

Kamii, C. & DeVries, R. (1980). *Juegos colectivos en la primera enseñanza: implicaciones de la teoría de Piaget.* Madrid: Visor.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Pólya, G. (1979). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas.

Sanmartí, N. (2009). ¿Qué cambios implica la introducción del concepto de competencia en la educación científica? Conferencia *VIII Congreso Internacional*, Barcelona, España (disponible en línea).

Shoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, E.E.U.U: Academic Press.

Vygotski, L. S. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores Lev S. Vygotski: edición al cuidado de Michael Cole.* Barcelona.

Innovaciones en el aula de matemáticas

7

Judith Arteta Vargas[1]
Sonia Álvarez Morales[2]

"Al plantear el diseño pensé en materiales accesibles, cotidianos y que realmente fueran manejables. Igualmente, que las situaciones me permitieran identificar qué procesos estaba desarrollando, qué contenidos iba a tener en cuenta en ese diseño y que, además, les gustaran a los niños, que ellos sintieran propios los planteamientos y les facilitaran la comprensión del tema".

Maestra participante en el programa

El *Programa Mejoramiento de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas en Barranquilla*, Fase Piloto-Los fraccionarios en 5° de primaria, como hemos dicho, involucró procesos de actualización en matemáticas con énfasis en la conceptualización de los números fraccionarios y su didáctica, además de la participación de los maestros en la construcción de la línea de base acerca de la condición de cada institución, el registro en video y la reflexión de una clase de matemáticas y el análisis de los resultados académicos de las Pruebas Saber 5°. Asì, un aspecto central de la estrategia implementada fue el necesario y oportuno proceso de reflexión sobre la práctica pedagógica de cada maestro, que incluyó el análisis de una de sus clases para determinar sus fortalezas y los aspectos a mejorar respecto al desarrollo de procesos matemáticos en los estudiantes. Adicionalmente, los talleres de actualización desarrollados en el tema de fraccionaros en 5° de primaria (de esta intervención educativa) aportaron elementos concretos a la transformación de la práctica de los maestros.

Con el fin orientar la cualificación de la práctica pedagógica del maestro e impactar el aula con actividades significativas, se diseñó una guía (ver anexo 1) para los maestros participantes que decidieran asumir el reto de innovar, mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y construir propuestas innovativas en el tema de los números fraccionarios. Dicha guía orientaba a los maestros hacia la construcción de una o varias situaciones didácticas que les permitieran a los estudiantes el desarrollo de uno o varios procesos matemáticos necesarios para ser matemáticamente competente. Al final de este capítulo presentamos algunos casos en los que los maestros lograron elaborar, implementar y evaluar un diseño que incluyó actividades de aula partiendo del contexto real y cotidiano de los estudiantes.

---

1 Coordinadora del *Programa de Mejoramiento de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas en Barranquilla*. Profesora-investigadora. División de Ciencias Básicas de la Universidad del Norte. Barranquilla, Colombia. vjudith@uninorte.edu.co

2 Asistente de investigación del *Programa de Mejoramiento de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas en Barranquilla*. División de Ciencias Básicas. Universidad del Norte. Barranquilla, Colombia. asonia@uninorte.edu.co

La guía incluyó varias partes para que el maestro involucrara aspectos de tipo pedagógico, curricular, conceptual y didáctico, por esto, en cuanto al contenido pedagógico se les pidió a los docentes enunciar y considerar para el diseño las características de sus estudiantes, la dinámica de los grupos de estudiantes, sus fortalezas, debilidades, edad, etc. En torno al contenido curricular, se les solicitó una revisión de los estándares básicos de competencias estipulados por el MEN (2006), que se relacionaban directamente con su diseño, también enunciar y explicitar uno a uno los procesos matemáticos que desarrollarían los estudiantes con las actividades propuestas. Desde luego, la conceptualización, construcción de un referente teórico y revisión de antecedentes o experiencias similares sobre el tema no escaparon a esta sección.

Por su parte, el contenido didáctico se desarrollaba en la guía al momento de detallar los contenidos (conceptuales, procedimentales y actitudinales) implicados en el diseño, con las actividades respectivas para el tiempo disponible, los recursos y la sistematización de las reflexiones producto de la planeación, ejecución y evaluación de las mismas. Se destaca este tipo de conocimiento por su importancia, dado que en este se explicita específicamente el conocimiento que los profesores poseen respecto al contenido que enseñan, así como la forma como transforman ese conocimiento en un tipo enseñable y comprensible para los alumnos (Marcelo, 1992).

Acorde con lo anterior, es importante que el maestro desarrolle destrezas para construir situaciones de aprendizaje en el aula, en las que los estudiantes puedan apropiar o construir con sentido los contenidos básicos para ser matemáticamente competentes; esto mismo implica, para el caso del CDC matemático, que el maestro promueva cinco procesos generales: (1) formular y resolver problemas; (2) modelar procesos y fenómenos de la realidad; (3) comunicar, (4) razonar, (5) formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos MEN (2006).

El diligenciamiento, aplicación y evaluación del diseño elaborado por los maestros estuvo asesorado por el cuerpo docente que orientó el programa de formación para determinar el efecto del mismo en la calidad educativa de la institución y el cambio en la concepción de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas de los profesores participantes, al tiempo que contribuyó a fomentar en los estudiantes actitudes de aprecio, seguridad y confianza hacia las matemáticas.

Las situaciones de aprendizaje planeadas, implementadas y evaluadas por los maestros podían incluirse en cualquiera de las siguientes modalidades de innovación: proyectos de aula, unidades didácticas, diseños de clase o actividades didácticas, entendiendo por:

Proyecto de aula: conjunto de actividades planificadas con el fin de lograr el aprendizaje de los estudiantes a partir de su propia actividad e intereses y bajo el acompañamiento de un maestro, y, en lo posible, de la comunidad. Usualmente incluye actividades abiertas y flexibles apoyadas en la investigación.

Unidad didáctica: unidad de trabajo relativa a un proceso de enseñanza-aprendizaje completo y articulado alrededor de un eje organizador. Formas de organizar los programas escolares dotadas de capacidad para integrar contenidos diversos y estructurar periodos relativamente largos de la actividad escolar (Cañal, 1997).

Diseño de clase: planeamiento didáctico que incluye la secuencia de actividades de iniciación, desarrollo, síntesis y evaluación en una unidad de tiempo, que usualmente se asocia a una hora de interacción del profesor con sus estudiantes para lograr aprendizajes específicos.

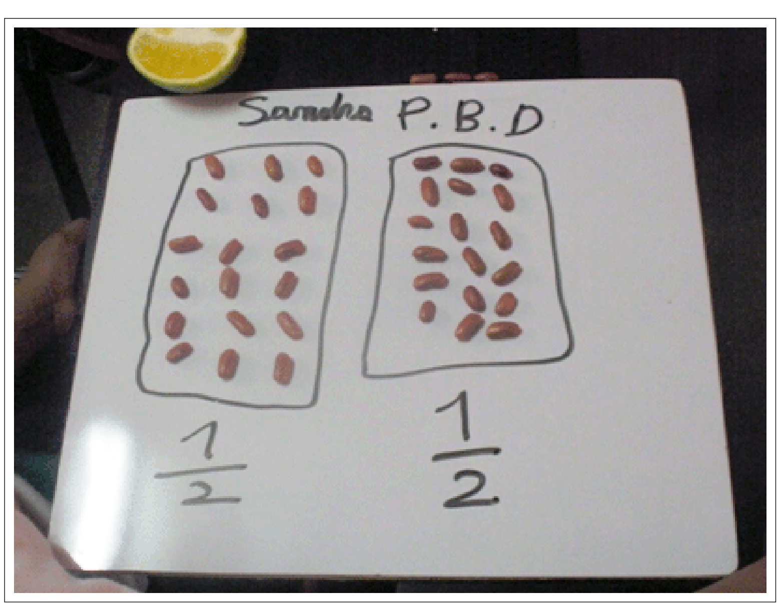
Actividad didáctica: situación planeada por el docente para lograr resultados específicos de aprendizaje en sus estudiantes en un tiempo dado. Se constituye en el medio para movilizar el entramado de comunicaciones que se pueden establecer en clase; tendrá efectos educativos en función de las características específicas de las relaciones y procesos que posibilita. Usualmente una clase comprende la realización de una o varias actividades.

El tema de los diseños versó sobre los tópicos enunciados en la tabla 1. Cabe destacar que las propuestas 2, 3, 6, 10 y 11 se lograron a partir del trabajo colectivo entre maestros de la misma institución; las propuestas 2 y 12 contaron con el trabajo de maestros de distintas instituciones. Estos aspectos favorecieron la calidad de los trabajos y las acciones adelantadas, brindando así garantías para la sostenibilidad de la intervención educativa hacia el mediano plazo.

Tabla 1
Instituciones participantes y nombre asignado a los diseños elaborados por los maestros durante el proceso de innovación.

N° Propuesta	Instituciones involucradas	Nombre del diseño
1	IED Salvador Entregas	"La fracción como parte del todo"
2	IED Denis Herrera de Villa IED Betania Norte	"La fracción como porcentaje"
3	IED Ciudadela Estudiantil	"Las fracciones decimales"
4	IED El Pueblo	"Fracciones equivalentes"
5	IED La Merced	"La fracción de una cantidad"
6	IED Las Flores	"Leo, escribo y dibujo mis fracciones"
7	IED Madres Católicas	"La fracción como operador"
8	IED Tierra Santa	"Construcción del concepto fracción a partir de las ideas previas de los estudiantes"
9	IED La Presentación	"Ubicación de fracciones en la recta numérica a partir de representaciones geométricas"
10	IED Antonio José de Sucre	"Con el juego de las canicas aprendemos sobre las fracciones como un operador"
11	IED Hilda Muñoz	"La fracción como operador"
12	IED San Gabriel IED la Unión	"Una propuesta lúdica sobre los fraccionarios como parte de un todo"

Cabe señalar que, aunque las clases inicialmente observadas enfatizaron en la interpretación de la fracción como parte de un todo, luego de la innovación se utilizaron otras interpretaciones: la fracción como operador, porcentaje, decimal y las fracciones equivalentes, incluyendo la lúdica en el desarrollo de las actividades de aprendizaje.



Trabajo desarrollado por estudiantes en una de las clases.

Las propuestas didácticas se caracterizaron en términos generales por:

- Tomar en consideración las características del grupo de estudiantes.
- Partir de las ideas previas de los niños.
- Plantear problemas contextualizados relacionados con la cotidianidad del estudiante.
- Uso de manipulativos para el desarrollo y la apropiación de conceptos.
- La explicitación de los estándares curriculares desarrollados en la clase.
- Establecer los propósitos específicos de las actividades propuestas.
- El diseño detallado de las actividades, especificando los procesos matemáticos a desarrollar con cada actividad.
- Tomar en consideración las fortalezas didácticas de cada maestro.
- Reflexión permanente durante el diseño, implementación y evaluación de las actividades.
- Formulación de proyectos integradores y transversales a partir de esta innovación matemática.

- Varios proyectos implicaron otras áreas del currículo como artes e informática.
- Trabajo conjunto de maestros de las dos jornadas de una misma institución o de escuelas distintas.

Aunque todos los maestros realizaron esfuerzos y concretaron propuestas que evidenciaron la cualificación el y mejoramiento de su práctica, se detectó la persistencia de algunos obstáculos en la manera como el maestro orientó el aprendizaje de los números fraccionarios. A partir de los aportes de Llinares (1997), Pazos (2009) y Vasco (2010), entre otros autores, se detectó e hizo seguimiento a la evolución de algunas de las dificultades conceptuales y didácticas en la enseñanza de los números fraccionarios.

Comparando los resultados obtenidos en esta investigación-acción y contrastando especialmente las prácticas pedagógicas de los maestros antes y durante la intervención con los problemas u obstáculos señalados por Pazos (2009), resumimos en la tabla 2 los aspectos evidenciados al inicio del proceso (en la primera filmación) y los aspectos que se transforman en los maestros a partir de la intervención (ver tabla 2).

Nótese que en algunos pocos casos algunas dificultades aún se mantienen, como se ha dicho, por lo que

Tabla 2:
Obstáculos para el aprendizaje de las fracciones detectados acogiendo los criterios orientadores de Pazos (2009).

Obstáculos señalados (Pazos, 2009)	Primera filmación	Segunda filmación y diseño de clase
1. El trabajo con fracciones se apoya mayoritariamente en representaciones gráficas que trabajan fundamentalmente el aspecto parte-todo.	Se evidencia.	Cuatro (4) diseños finales muestran esta tendencia, aunque se exploraron otras representaciones en otros diseños: 4 diseños de clase de la fracción como operador 1 diseño basado en la fracción porcentaje 1 la fracción como decimal 1 lugar en la recta numérica 1 diseño basado en las fracciones equivalentes
2. Apela al mismo tipo de representaciones, generalmente rectángulos o círculos; es decir, trabaja sobre cantidades continuas.	Se evidencia en la mayoría de los casos, aunque se dibujan también formas de frutas donde se dificulta establecer la igualdad de partes.	1 diseño incluyó representaciones en la recta numérica 3 diseños con ejemplos en contextos discretos.
3. Se centran en el conteo de partes, priorizando el número de partes y no la relación entre la parte y el todo.	Se evidencia en las clases observadas.	Se mantiene el conteo de partes ya divididas en la unidad.
4. No se trabaja la independencia de la forma en la representación gráfica.	Se evidencia esta dificultad.	Persiste en varios docentes.
5. No tiene en cuenta la necesaria equidad de las partes.	Se evidencia en la mayoría de los casos.	Se supera esta dificultad en la gran mayoría de los maestros.
6. No se trabaja con fracciones mayores que la unidad.	Se observó.	Se trabajó en uno de los talleres de fundamentación con los maestros.
7. No se hace hincapié en la relación número de partes y tamaño de las mismas.	Se detectaron inexactitudes en el tamaño de las partes.	Los maestros hicieron énfasis para que sus estudiantes apropiaran la relación entre el número de partes y el tamaño de las mismas.
8. No se representan distintas fracciones en una misma unidad.	Efectivamente se observó en las clases.	En un problema desarrollado en uno de los talleres con esta orientación esto se constituyó en la mayor dificultad para los maestros.

se sugiere continuar el proceso de acompañamiento docente para fortalecer los procesos iniciados.

Los maestros reconocieron la importancia del proceso de cualificación desarrollado en torno al mejoramiento del conocimiento matemático y la formación didáctica a lo largo del proceso. Algunas de sus expresiones fueron:

> "La experiencia en estos talleres me dio la oportunidad de innovar tratando que los estudiantes construyeran el concepto de fracción a partir de sus ideas iniciales y de reflexionar sobre mi propia práctica a partir de las filmaciones" (Profesora 5° participante).
>
> "Otra reflexión que me queda es que ahora puedo identificar mejor los procesos matemáticos".
>
> "Al llegar al primer encuentro nos dimos cuenta de que el proyecto trataba sobre un tema de difícil aprendizaje por parte de los estudiantes y en el cual también nosotros nos sentíamos con falencias para poder explicarlo, como son los fraccionarios".
>
> "Cuando empezamos a ver los distintos temas que tiene la unidad de los fraccionarios, desde la perspectiva de los diferentes docentes expositores, nos dimos cuenta de que hay un cúmulo de actividades dinámicas, divertidas y de fácil manejo, tanto por parte de los estudiantes como de nosotros los docentes".

Otras expresiones de los maestros durante la intervención recogen el valor de la experiencia realizada para los docentes:

> "He generado una dinámica de clase activa-participativa que ha permitido la realización de clases amenas que despiertan el interés por aprender y, en mi caso personal, me ha inducido a realizar indagaciones y planeación de clases mejor estructuradas".
>
> "Esta segunda clase [...] me reconfirma que el uso de las nuevas tecnologías incorporadas al trabajo en el aula presenta unas enormes ventajas y aspectos positivos, tanto para el docente como para los estudiantes. El uso de estas crea expectativas y curiosidad en los estudiantes, centra la atención, agiliza el desarrollo de actividades [...]"

De acuerdo con los criterios de seguimiento, veintiuno de los veinticuatro profesores que pertenecían a trece de las quince escuelas seleccionadas por la Secretaría Distrital de Educación culminaron con éxito la fase piloto al aplicar sus propuestas de innovación (93%), aunque todas participaron de la mayoría de las actividades; los casos de los maestros que no aplicaron su diseño se debieron a motivos de fuerza mayor, como enfermedad y obras de mantenimiento a la infraestructura de las escuelas.

A continuación y como segunda parte de este capítulo se muestran algunos de los diseños realizados por los maestros y sus reflexiones sobre su desarrollo.

Ha sido un arduo trabajo, pero finalmente gratificante, pues se pudieron evidenciar logros y avances en todos los maestros participantes, además de una condición generalizada de mejor actitud y gusto hacia el aprendizaje de las matemáticas por parte de los niños.

Se ha ganado el reconocimiento de directivos, docentes y estudiantes respecto a la importancia del proceso adelantado y la necesidad de continuarlo.

REFERENCIAS

Cañal, P. (1997). El diseño de unidades didácticas. Fundamentación y procedimientos. En: Cañal, P., Lledó, A. Pozuelos, F. & Travé, G. (1997). *Investigar en la escuela: elementos para una enseñanza alternativa.* Sevilla: Diada.

Llinares, S. Sánchez, M. (1997). *Fracciones, la relación parte-todo*. Madrid: Síntesis.

Marcelo, C. (1992). Cómo conocen los profesores la materia que enseñan. Algunas contribuciones de la investigación sobre conocimiento didáctico del contenido. En: Montero, L. & Vez, J. *Las didácticas específicas en la formación del profesorado*. (pp. 151-186). Santiago: Tórculo.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares* básicos de *competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: MEN.

Pazos, L. 2009. Las fracciones son un problema. *Revista Quehacer educativo. Didáctica y prácticas docentes*, 40-45. Recuperado el 21 de octubre de 2010 de http://www.quehacereducativo.edu.uy/docs/76eb48fa_97%20010%20did+%C3%ADctica.pdf

Vasco, C. E. (2010, 22 junio). *Problemas y retos de la educación por competencias en las matemáticas de quinto grado.* [Conferencia]. Universidad del Norte. Barranquilla.

Innovación 1. La fracción como porcentaje

Marlene Sofía Rodríguez, Mariela Acosta de la Hoz,
Modesta Solano Navarro, Javier Jiménez Jiménez, Navis Londoño

INTRODUCCIÓN

Las actividades propuestas por los docentes tienen como objetivo enseñar el concepto de la fracción como porcentaje a través de situaciones reales que los estudiantes encuentran con frecuencia en su medio, como los descuentos del 30%, 50% etc. o las promociones pague dos y lleve tres. Para la planeación y el desarrollo del diseño se reunieron profesores de dos escuelas de distintos estratos del Distrito de Barranquilla: IED Betania Norte y IED Dennis Herrera de Villa. A través de las actividades que se desarrollaron en clase, los estudiantes fueron capaces de identificar y elegir cuando una promoción es benéfica, según el descuento que les estén brindando. Se observó que la implementación de situaciones reales ayuda a lograr un aprendizaje significativo. De igual manera, el uso de los diferentes sistemas de representación ayuda a una mayor comprensión y aprehensión del concepto matematico. Estas actividades les permitieron a los estudiantes observar una de las aplicaciones que tiene el porcentaje en su cotidianidad y afianzaron el concepto formal de la fracción como porcentaje por medio de la utilización de dos sistemas de representación, el algebraico y el gráfico.

OBJETIVOS DEL DISEÑO

Objetivo general

- Aplicar el concepto de la fracción como porcentaje en la solución de problemas reales que les permitan la toma de decisiones frente a diversas situaciones.

Objetivos específicos

- Conocer y aplicar la fracción como porcentaje mediante actividades lúdicas.
- Resolver problemas mediante la aplicación de sistemas de representación gráfica al algebraico y viceversa.

ANTECEDENTES DE LA EXPERIENCIA

Destacamos experiencias pedagógicas relacionadas con el tema de los fraccionarios como el diseño de una clase interactiva apoyada en un software (fracciones), que se elaboró en el marco del proyecto *Computadores para Educar* y con el apoyo de la Universidad Industrial de Santander, en la IED Betania Norte, y el trabajo interactivo realizado por un docente, cuya reseña se encuentra en la web de la institución. En esta experiencia la docente planeó y desarrolló una clase integrando la matemática con la informática y les enseñó a niños de 5º las fracciones propias e impropias de una manera amena y novedosa.

Por otro lado, Amada (2010) diseñó un software educativo para desarrollar el tema "porcentajes, fracciones y decimales" para grado **5º y 6º. Es un material interactivo** que parte de una pizarra virtual en donde se proponen diversos ejercicios relacionados con el tema para que el estudiante los desarrolle, además, cuenta con una ayuda que orienta al usuario y le recuerdalos pasos a seguir y los conceptos aprendidos. Para mayor información: http://tic56.wordpress.com/2010/08/06/porcentajes-fracciones-y-decimales/

PLANIFICACIÓN DE LA ACTIVIDAD

Se desarrolló en tres sesiones:

- **Sondeo de saberes previos:** de los conocimientos previos sobre fracciones decimales y conversión de estas a números decimales y viceversa.

- **“Vamos de shopping”:** se convirtió el aula de clase en una miscelánea, con productos en oferta y con descuentos. Los niños realizaron las correspondientes compras, (mediante el juego, los estudiantes, sin saberlo, resolvieron los problemas).

- **Calculemos porcentajes de una cantidad:** los estudiantes calcularon el porcentaje utilizando diferentes sistemas de representación, gráfico y algebraico.

CONTENIDOS

Conceptuales

Fracción: es dividir la unidad en partes iguales, el denominador indica la cantidad de partes iguales en que se divide la unidad y el denominador, la cantidad de partes que se toman de la unidad

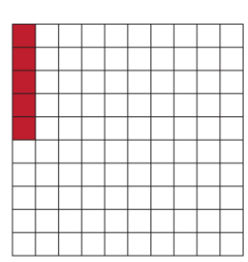
Fracción decimal: es aquella que tiene como denominador la unidad seguida de ceros.

El porcentaje: se refiere a dividir un todo en cien partes iguales, cada una de esas representa el porcentaje, es decir, el total te indica el 100%.

Fracción como porcentaje: se representa mediante una fracción con denominador 100.

$$\frac{5}{100} = 0{,}05 = 5\%$$

Fracción — Número decimal — Porcentaje



Representación decimal como porcentaje y gráfica

Procedimentales

Solución de problemas: Los estudiantes resolvieron los problemas, luego respondieron las preguntas que la docente les formuló y realizaron los registros de las respuestas dadas en sus cuadernos.

Lectura y escritura del porcentaje:

Fracción	Porcentaje	Significado	Se lee
$\frac{50}{100}$	50%	Cincuenta de cada cien	Cincuenta por ciento
$\frac{20}{100}$	20%	Veinte de cada cien	Veinte por ciento

Cálculo de porcentaje, aumentos y descuentos: con el fin de verificar el aprendizaje de los conceptos, se entregó una guía de trabajo con problemas y ejercicios para hallar el porcentaje de un número, calcular el descuento de un producto dado, etc.

Actitudinales

Despertar el interés por las matemáticas mediante la aplicación de ellas en actividades cotidianas, como son la interpretación y comprensión de anuncios publicitarios, para hallar el descuento que se hace en cada uno de los productos en oferta.

Despertar la curiosidad y el interés por enfrentarse a problemas cotidianos. Es de vital importancia la aplicación de la matemática para darle una solución acertada.

PROCESOS MATEMÁTICOS IMPLICADOS

- **Formulación, tratamiento y resolución de problemas:** los estudiantes leen cada uno de los avisos que encuentran en la miscelánea y cada anuncio se convierte en un problema a resolver. Le dan solución sin saber que están usando las matemáticas. Solo hasta cuando comienzan a consignar los conceptos en sus cuadernos se dan cuenta de que era la forma de aprender el concepto de porcentaje.

- **Comunicación:** los estudiantes en el salón de clases participan en la actividad de la compra y venta en la miscelánea e intercambian información sobre porcentaje, descuentos, ofertas y rebajas. Emplean el cambio de sistemas de representación para una mayor asimilación y comprensión del concepto de porcentaje y sus aplicaciones.

Miscelánea organizada en el aula de clases

Los sistemas empleados por los estudiantes fueron el gráfico y el algebraico, cuando tenían una cuadrícula de cien y había un número determinado de cuadritos de un color diferente, ellos debían decir qué fracción se representaba y cuál era su equivalente en porcentaje, de igual manera, hacían la conversión del sistema de representación algébrico al gráfico.

- **Razonamiento:** los estudiantes analizaban cada una de las situaciones presentadas en clase para dar la solución correcta; reflexionaban sobre algunas respuestas que daban sus compañeros, que no eran correctas y ellos le decían al profesor por qué razón la respuesta no era la adecuada.

- **Formulación, comparación y ejercitación de algoritmos:** los estudiantes escriben los algoritmos de cada uno de los ejercicios que se les presenten y tratan de resolverlos poniendo en práctica los conocimientos aprendidos.

- **Recursos:** los materiales o implementos necesarios para el desarrollo de cada actividad son: talleres, afiches, objetos, avisos con las ofertas, rebajas, descuentos, marcadores y cartulinas.

Tiempo: tres sesiones de cincuenta minutos.

REFLEXIONES SOBRE LA EXPERIENCIA

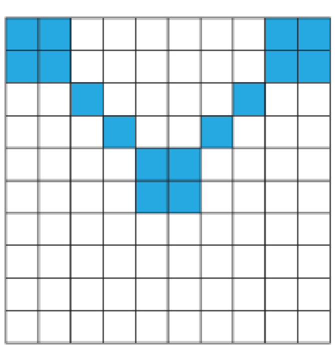
La innovación *La fracción como porcentaje* ha creado entre el grupo de docentes participantes muchas expectativas, al tiempo que se ha elaborado en detalle un especial momento pedagógico, encaminado a despertar el interés y la motivación de los estudiantes por las matemáticas mediante la lúdica. Esta es una estrategia pedagógica que facilita la adquisición de conocimientos en el educando de manera práctica y va llevándolos a construir sus propios conceptos en cada tema.

No es desconocido que los niños aprenden más rápido vivenciando sus propias experiencias mediante el juego. Esto nos lleva a implementar estrategias pedagógicas y didácticas que orienten soluciones a la problemática, de tal suerte que se le proponga a las directivas de la institución un replanteamiento en la intensidad horaria del área de matemáticas y se le dé la importancia que esta tiene, al igual que la geometría y la estadística. Lo anterior permitirá hacer énfasis en la unidad didáctica de los fraccionarios en sus diferentes contextos.

ACTIVIDADES PLANEADAS EN CADA SESIÓN

Primera sesión: en una clase antes de la sección principal se hace un sondeo de las ideas previas sobre fracciones decimales y conversión de estas a números decimales y viceversa.

Ejercicios: Escribe al lado la fracción qué representa cada gráfico y convierte la respuesta en número decimal.



= ______

Se le formularán preguntas como:

¿Qué son las fracciones decimales?, ¿qué son números decimales?, ¿qué relación hay entre los dos?, ¿cómo se convierten las fracciones decimales a números decimales?

Segunda sesión: se les solicita a los estudiantes analizar cada una de las situaciones de la miscelánea, o de un almacén o supermercado en el cual encuentran ofertas, rebajas para comprar aprovechando el descuento y así hacerse a cosas necesarias que ameriten dicha compra, al igual, responden preguntas para resolver las situaciones problémicas.

Un balón cuesta $20.000, tiene un descuento de 50%. ¿Cuánto tienes que pagar?

¿Cómo sabes lo que tienes que pagar?

R/ ______________________________

¿Qué hiciste para saber cuánto te toca pagar?

R/

Tercera sesión: problemas o situaciones de la vida cotidiana presentados en carteles tales como:

¿Cuánto es el 7% de interés que se debe pagar por $20.000 al mes?

Cuánto debes pagar por el celular de $80.000 si tienes un descuento del 10%?

EVALUACIÓN DEL PROYECTO

Con este proyecto se evidenció en los estudiantes:

- Cambio de actitud positiva hacia el área de matemáticas.
- Gusto en la realización de talleres.
- Motivación en las evaluaciones.
- Participación activa en las clases.
- Interés por desarrollar ejercicios en el tablero.

En los aspectos negativos se puede mencionar

Poca colaboración en la institución, ya que no se dan los espacios para socializar la experiencia y hay un acceso negado al uso de la sala de informática para vivir mejores experiencias y llevar a la práctica el uso de las TIC.

REFERENCIAS

Amada A. (2010) Porcentajes, fracciones y decimales. Material audiovisual interactivo. Disponible en: http://tic56.wordpress.com/2010/08/06/porcentajes-fracciones-y-decimales/

Camargo, L; Castiblanco, A; Leguijamon, C. & Samper, C. (2004). *Espiral 5º*. Bogotá: Norma.

Díaz, L. (2000). *Yupana*. Bogotá: Reí Andes.

Equipo Editores, SM. (2008). *Aprendo matemáticas 5°*. Bogotá: Ediciones SM.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas.* [http:// www.mineducación.gov.co//cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf] (consultado en octubre 10).

Zea, A., Riveros O. & De Castellanos, V. *Habilidades Matemáticas 5°.* Bogotá: Libros & Libros.

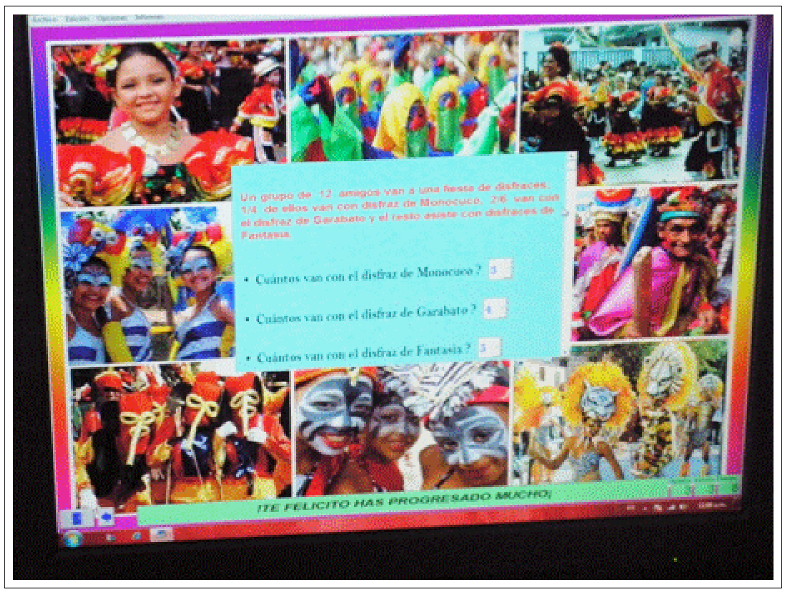
Vanegas, Y. (2006). *Glifos 5°.* Bogotá: Libros & Libros.

Innovación 2. El Carnaval de Barranquilla como agente motivador del aprendizaje de las fracciones

Mery del Rosario Bula[1], Alicia Ramos Cera[2], Liliana Garrido H.[3]

INTRODUCCIÓN

Se muestra a continuación la experiencia del diseño y la ejecución de la clase "La fracción como operador", llevada a cabo por docentes de 5° de la Institución Educativa Hilda Muñoz y realizada durante el *Programa de Mejoramiento de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas en Barranquilla.* Se desarrollaron actividades con materiales manipulativos que hicieran ameno el aprendizaje; además, se escogieron temas atractivos para los niños, tales como el Carnaval de Barranquilla, para activar su motivación. Por último, se planearon actividades interactivas en el computador con el software Clic 3.0., en las que se evaluaron y afianzaron los conceptos sobre fraccionarios. Con esta experiencia se logró despertar el interés por el tema, así como motivar hacia la solución de los problemas contextualizados.



Cartelera alusiva a un problema relacionado con el contexto de la ciudad.

Esta propuesta se realizó con el propósito de diseñar y ejecutar una clase con actividades que le proporcionaran al estudiante una motivación adecuada para el aprendizaje, brindando así un medio adecuado que le permitiera interactuar e interrelacionarse con su medio, y compartir su pensamiento mediante el trabajo grupal para llegar a una conceptualización, de tal forma que aprendiera utilizando todos los sentidos e interactuara con su realidad (Becerra et ál, 2006), logrando así un aprendizaje significativo.

El diseño de esta propuesta fue totalmente enriquecedor, ya que a partir de sus propias vivencias en el Carnaval de Barranquilla, los estudiantes compartieron las diferentes experiencias, con lo que se promovió la motivación para la clase. Por medio de conversaciones se dialogó sobre situaciones problemas como: confección de disfraces, organización de comparsas, preparación de fiestas, negocios populares, etc., que involucraban las fracciones. Estos escenarios se tomaron como punto de partida para desarrollar tareas que mantuvieron despierto el interés de los niños y a la vez permitieron desarrollar y comprender el tema. Además, se logró la integración de entre las asignaturas de matemáticas e informática, asignatura que es de gran interés para los niños, y que a la vez facilitó la evaluación del tema.

1 Docente I.E.D Hilda Muñoz, Barranquilla. *merybula@hotmail.com*
2 Docente I.E.D Hilda Muñoz, Barranquilla. *alice1867@hotmail.com*
3 Profesora catedrática, Departamento de Matemáticas y Estadística, División de Ciencias Básicas de la Universidad del Norte. Barranquilla, Colombia. *garridol@uninorte.edu.co*

OBJETIVOS DEL DISEÑO

Objetivos generales

Reconocer y aplicar la fracción como operador en diferentes contextos (escolar y extraescolar).

Contribuir al desarrollo del pensamiento lógico-matemático y al ejercicio del cálculo matemático.

Objetivos específicos

- Identificar el todo en cantidades continuas y discretas.
- Adquirir conocimientos y habilidades matemáticas con fraccionarios a través de actividades que refuercen el concepto de la fracción como operador.
- Plantear y resolver problemas de su contexto diario que le permitan desenvolverse en forma práctica aplicando el concepto de fracción como operador.

ANTECEDENTES DE LA EXPERIENCIA

En el ámbito nacional e internacional existen muchas investigaciones referentes a las fracciones, entre las cuales se tuvieron en cuenta las siguientes para la realización de la nuestra propuesta:

En México, Álvarez (1994) presenta un estudio sobre el aprendizaje de las fracciones en primaria a partir de materiales manipulativos, bajo el nombre *Estudio exploratorio sobre fracciones comunes II: conceptos y estrategias de solución de problemas y operaciones en niños de primaria*. En este estudio resalta: la acción docente (la práctica educativa docente puede resultar deficiente si no han construido el concepto de fracción en sus diferentes significados), los materiales manipulativos como primer recurso (considera que se debe partir de las actividades con materiales manipulativos como geoplanos, regletas, tangram, multicubos, etc. Es necesario después una representación gráfica de las actividades realizadas con los materiales manipulativos) y la correspondencia de los materiales manipulativos con los modelos gráficos sobre fracciones de los libros de texto en 5º de primaria (presenta un cuadro comparativo de diferentes textos en cuanto a contenido y representaciones gráficas).

Becerra et ál (2006), en su artículo “Fracciones, juego y aprendizaje”, investigación realizada en el Colegio Guillermo León Valencia de Duitama (Colombia), en el desarrollo del *Programa de Capacitación y Acompañamiento a Docentes para el Desarrollo de los Niveles de Competencia de Matemáticas y Diseño de Secuencias Didácticas a Partir de las Experiencias Significativas de los Maestros,* asumen el juego y la manipulación de materiales como mediaciones hacia el aprendizaje de las fracciones en la educación primaria, en las que se privilegia el trabajo en equipo y se aportan herramientas conceptuales y procedimentales fundamentales para comprender el concepto de fracción, sus operaciones y relaciones.

PLANIFICACIÓN

El diseño de la clase se planificó teniendo en cuenta los conceptos previos de los estudiantes y su contexto cultural. Inicialmente se evaluaron los distintos significados de fracciones que se habían estudiado con anterioridad y que eran importantes para la comprensión del nuevo concepto. Se hizo una revisión bibliográfica referente a las distintas investigaciones referentes a la enseñanza de las fracciones. Se organizaron las actividades a desarrollar en la clase teniendo en cuenta que fuesen acordes con el contexto de los estudiantes. Para el diseño de la clase “la fracción como operador” relacionamos el tema con el Carnaval de Barranquilla porque muchos de los estudiantes participan por tradición en comparsas y disfraces en los desfiles del carnaval. Además, esta es la fiesta cultural más importante en el ámbito regional, donde se manejan muchos negocios populares y organizaciones de bailes y eventos, lo cual es apropiado para el tema de fraccionarios.

Escogimos la fracción como operador porque es uno de los significados de la fracción que tiene más aplicabilidad en diferentes aspectos de la vida diaria y, por lo tanto, su comprensión ayudará a mejorar su competencia matemática. Se programaron con el profesor de informática el programa y las tareas para la evaluación del tema, de tal forma que esta fuera amena y no provocara temor en los niños. Se seleccionaron los materiales que utilizarían los estudiantes para el desarrollo de las distintas actividades planeadas, teniendo en cuenta que se manipularan cantidades discretas (como las tapas de gaseosas) y cantidades continuas (como la tela).

CONTENIDOS

Concepto de fracción: es una expresión de la forma a/b, donde a y b son números naturales; a es el numerador y b el denominador. La fracción a/b se considera como la porción que se obtiene al dividir cada unidad en "b" partes y tomar "a" de esas partes.

Cantidades discretas: son las que constan de unidades o partes separadas unas de otras, como tres lápices, cuatro mesas, dos niños, etc. Las cantidades discretas pueden ser contadas y reciben por ello el nombre de contables.

Cantidades continuas: como el agua, la harina, el serrín, etc. no son contables; son medibles si seleccionamos una unidad de medida y vemos cuántas veces contiene dicha cantidad la unidad de medida elegida.

Significados de las fracciones: son cuatro, como medida, como cociente, como razón y como operador multiplicativo (Álvarez, 1994)

La fracción como medida: incluye el concepto parte-todo en un contexto continuo, discreto y decimal y se representa por lo general con diagramas rectangulares o circulares, subconjuntos y en la recta numérica.

La fracción como cociente: es una división indicada y puede representarse con regiones o segmentos, línea numérica y tablas.

La fracción como razón: se da en el contexto de las probabilidades y porcentajes, se utiliza para indicar una comparación entre dos magnitudes. Para representarla se utilizan escalas de dibujos y mapas, comparaciones bidimensionales entre polígonos, diagramas de barras o sectoriales.

La fracción como operador: indica una acción a realizar (operador) en una situación y se puede representar como una máquina operadora. En el significado de operador, la fracción actúa sobre otro número, en lugar de hacerlo como una entidad con sentido autónomo. En esta interpretación la fracción actúa como una operación matemática doble: divide y multiplica; el denominador divide y el numerador multiplica.

Podemos calcular la fracción de un número N de una de estas formas:

- Se divide el número N entre el denominador y el resultado se multiplica por el numerador.
- Se multiplica el numerador por el número N y el resultado se divide por el denominador.

ACTIVIDADES

El Carnaval de Barranquilla

Consistió en un conversatorio sobre los carnavales como actividad de inicio y motivación para la clase, lo cual propició la participación de los estudiantes. Escucharon una pequeña muestra de música de carnaval y se les hicieron preguntas tales como: ¿cuál es la fiesta más popular y alegre de nuestra ciudad?, quiénes participan en esas fiestas?, ¿quiénes participan en comparsas?, ¿cómo es el vestido o disfraz?, ¿cuál es el valor de esos vestidos?, ¿qué tipo de negocios se dan frecuentemente en estas fiestas?, ¿crees que en los carnavales se utilizan las matemáticas? , ¿y las fracciones? ¿Dónde?

Disfrutemos el carnaval

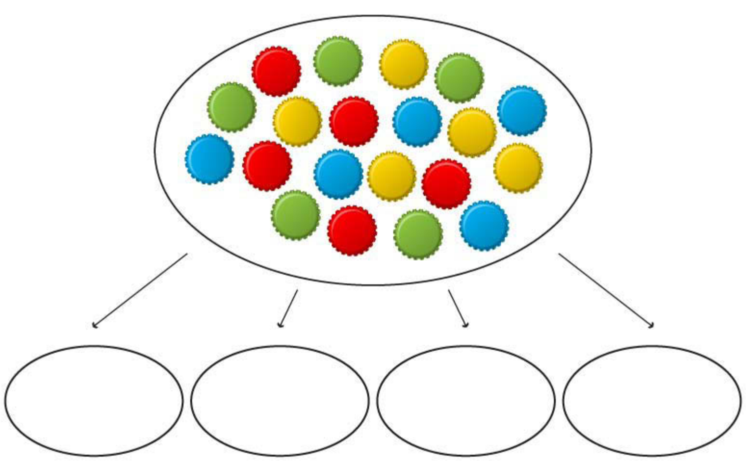
Se presentó la siguiente situación, que debieron analizar y resolver en grupos de cuatro:

Juan y Carlos van a organizar una fiesta de carnaval y compran veinte gaseosas: ¼ de ellas son de sabor a naranja, 2/5 son de sabor a cola y el resto son de sabor a manzana. ¿Cuántas gaseosas tienen sabor a naranja y cuántas a cola?

A cada grupo se le entregan veinte tapas de gaseosa (sin ninguna marca), colocadas en un plato grande, y varios platos pequeños para hacer las reparticiones.

A. Para saber cuántas gaseosas eran de sabor a naranja necesitaban saber cuánto es ¼ (la cuarta parte) de veinte gaseosas.

Se les pidió que repartieran las veinte tapas en cuatro grupos en forma equitativa, y se les preguntó:



¿Qué fracción hay en cada grupo si lo repartimos en cuatro partes iguales?

R/ ______________________________

____

¿Cuántas tapas de gaseosa hay en cada grupo?

R/ ______________________________

____

Luego se tomó un grupo que representa ¼ de veinte y observaron que había cinco tapas.

Esta actividad realizada manualmente se representó con un gráfico en el tablero y en los cuadernos.

Luego se trasladó esa representación gráfica al lenguaje simbólico con los números fraccionarios, deduciendo (con base en el procedimiento realizado) el procedimiento algorítmico para hallar la fracción de un número de la siguiente manera:

¼ de 20 = 20 : 4 = 5; 5 X 1 grupo = 5

Se obtuvo de esta manera la respuesta: hay cinco gaseosas con sabor a naranja.

B. Para encontrar cuántas gaseosas había con sabor a cola, es decir, para saber cuánto era 2/5 de 20 se realizó el mismo procedimiento:

Las veinte tapas se repartieron en cinco grupos (cada grupo era 1/5 de 20) y se tomaron dos grupos que representarían los 2/5 de 20. Se les preguntó:

¿Qué fracción hay en cada grupo si se dividen en cinco partes iguales?

R/ ______________________________

____

¿Cuántas tapas hay en los dos grupos?

R/ ______________________________

____

Después de manipular el material, los estudiantes pasaron al tablero para hacer la representación gráfica y simbólica, deduciendo, a partir de la manipulación realizada, el algoritmo para encontrar los 2/5 de 20 de la siguiente manera: primero se divide entre cinco y luego se multiplica por dos.

20 dividido 5= 4; 4 X 2grupos = 8

De esta manera se obtuvo la siguiente respuesta: hay ocho gaseosas de sabor a cola.

C. Se utilizó el mismo material y se ejecutó el mismo proceso para obtener los 3/5 de 20 y los 4/5 de 20

Diseñemos un disfraz del carnaval

Se les presentó a los estudiantes una muñeca con un disfraz típico del carnaval: **el garabato.** Después de observar el vestido se les preguntó: ¿cómo podemos utilizar el concepto de fracción en el vestido de garabato? Después de escuchar sus respuestas se les planteó la siguiente situación, que debían trabajar en grupos de cuatro estudiantes:

A. Para confeccionar el disfraz de garabato Karina necesita tres metros de tela. Los 3/5 de esa cantidad de tela debe ser de color negro. ¿Qué cantidad de tela negra debe comprar?

Se les indicó a los estudiantes que debían convertir los metros a centímetros.

¿Un metro cuántos centímetros tiene? ______

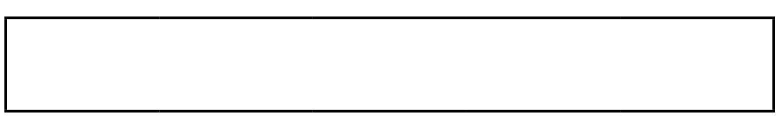
Entonces, tres metros tienen ________ cm.

Entonces debían calcular 3/5 de 3 metros, o lo que era lo mismo, 3/5 de 300 centímetros.

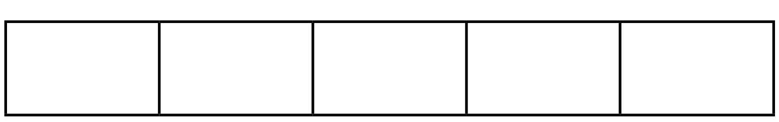
Para ello los estudiantes debían fabricar el retazo de tela de los tres metros, usando una cartulina y un metro.

Trabajaron con representación gráfica antes de realizar la operación:

300 cm.



Lo dividimos en cinco partes:



¿Qué fracción de tela representa cada parte?

R/ ____

____

¿Cuánto mide cada parte?

R/ ____

____

Si tomamos tres partes, ¿qué cantidad de tela tendrías?

R/ ____

____

Luego se les pidió que explicaran el proceso seguido para determinar los 3/5 de 300 y el algoritmo seguido para encontrar su respuesta.

Los 3/5 de 20 son: ________ cm de tela.

3/5 de 300 cm = 300 ÷ 5 = 60; 60 X 3 = 180 cm.

Respuesta: Karina debe comprar 180 cm de tela negra.

B. Si 1/10 del total de tela es de color rojo, ¿cuántos centímetros de tela roja se necesitan?

Esta pregunta se desarrolló de manera similar a la pregunta anterior.

C. En un grupo de garabato hay cuarenta bailarines entre niños y niñas. Si los 2/5 de los bailarines son niños y los 3/5 son niñas, ¿cuántos niños y cuántas niñas integran el baile?

Se realizó el mismo procedimiento.

D. Por último, se concluyó el tema preguntando cuáles eran los pasos que se debían seguir para hallar la fracción de un número.

Los estudiantes le explicaron al grupo el procedimiento realizado para luego anotar en el cuaderno la conclusión.

La profesora resumió explicando que cuando se habla de la fracción como operador o fracción de un número, la fracción actúa sobre el número con una doble operación: división y multiplicación. Para hallar la fracción de un número se divide este entre el denominador y el resultado (cociente) se multiplica por el numerador o primero se multiplica por el numerador, y el resultado se divide entre el denominador. Ejemplo:

2/5 de 40 =

40 ÷ 5 = 8 ; 8 X 2 = 16; o también

40 X 2 = 80; 80 ÷ 5 = 16

El procedimiento se representa de la siguiente forma:

275 de 40

$40 \div 5 = 8$

$8 \times 2 = 16$

Juguemos en el computador

Los estudiantes pasaron a los computadores, en los que ya se había instalado el software Clic 3.0., allí encontraron una serie de actividades de asociación, rompecabezas, sopa de letras, selección múltiple, etc., cuyo objetivo era evaluar los conocimientos adquiridos a la vez que se afianzaba el nuevo saber.

Fue una actividad interactiva en la que los estudiantes recibieron una retroalimentación inmediata. Además de las actividades de este software, realizaron una actividad a través de un link que los llevaba a una página de Internet donde les presentaron rompecabezas con el tangram para formar diferentes siluetas.

PROCESOS MATEMÁTICOS QUE PROMUEVE EL DISEÑO

El diseño promueve los siguientes procesos matemáticos propuestos por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia en el documento *Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas* (2006), como aquellos indispensables para alcanzar la competencia matemática:

Comunicación: en la primera actividad hay una comunicación verbal sobre estimación de valores de costo de atuendos, negocios, cantidad de personas en grupos de baile y en eventos, cantidades de objetos, etc.).

En las siguientes actividades se da una comunicación gráfica (representaciones gráficas de la fracción), simbólica (símbolos numéricos y del sistema métrico), verbal (expresiones verbales para explicar sus procedimientos matemáticos) y escrita.

Solución de problemas: se presentan problemas que el estudiante debe resolver.

Razonamiento: el estudiante debe pensar las estrategias para resolver el problema, dar respuesta a las preguntas planteadas recurriendo a sus conocimientos previos como conversión de medidas, de cantidades, de tiempo; debe ordenar ideas para responder a las preguntas y sacar conclusiones.

Ejercitación de algoritmos: el estudiante debe deducir el algoritmo matemático para calcular las partes de un número a partir de la observación y el razonamiento de la manipulación de objetos.

Modelación: el estudiante debió seguir el modelo matemático para resolver el problema.

CONCLUSIONES

Teniendo en cuenta las etapas del diseño y aplicación de esta clase, podemos concluir lo siguiente:

Para diseñar las actividades tuvimos en cuenta la etapa del desarrollo intelectual en que se encuentra el estudiante de primaria, en la que es fundamental la manipulación de materiales para la comprensión de conceptos. De igual manera, se le dio gran importancia a la tecnología aplicada a la educación para desarrollar competencias académicas, en este caso, competencias matemáticas. Por eso, diseñamos unas actividades para realizar en el computador, que se adaptaron al software Clic 3.0.

El diseño implementado generó una actitud positiva en los estudiantes hacía las matemáticas, observada en su interés y concentración en la realización de las actividades. Con la metodología propuesta se logró mayor comprensión y participación en la clase.

En la primera actividad "El Carnaval de Barranquilla", en la cual conversamos sobre esta fiesta popular, los estudiantes mostraron su motivación comentando sobre su participación en los grupos folclórico, comparsas y danzas. También mostraron su interés en hablar sobre los diferentes negocios propios del carnaval, como el alquiler de palcos, de sillas, ventas de maizena, espumas, comidas y bebidas, etc. Esta actividad ayuda a desarrollar el proceso de comunicación matemática en los estudiantes al mencionar, por ejemplo, las ganancias que pueden obtenerse en los diferentes negocios, el costo de los diferentes atuendos, la cantidad de bailarines en un grupo de danza, etc.

En la segunda actividad, "Disfrutemos el carnaval", se les presentaron varias situaciones problemáticas que debían resolver. Los estudiantes tenían que encontrar la cantidad correspondiente a la fracción dada de los diferentes sabores de gaseosas utilizando primero material manipulativo (tapitas plásticas) y colocando cada fracción en los platos de icopor. Esto lo trabajaron en grupos pequeños en los que observamos la participación total de los estudiantes; algunos grupos encontraron la solución más rápido que otros, pero, al final, todos comprendieron el proceso. Los estudiantes mostraron un cambio de actitud hacia la clase, al pasar en forma voluntaria al tablero para graficar la situación y simbolizarla con un número fraccionario.

En la tercera actividad, "Diseñemos un disfraz de carnaval", los estudiantes mostraron admiración por la belleza de la muñeca con el vestido de garabato. Al preguntarles ¿cómo se pueden ver las fracciones en el vestido?, respondieron: "por los diferentes colores del vestido", "cada color representa una fracción de tela", "por la cantidad de tela utilizada de cada color", "por cuánto se gasta en cada parte de tela". Estas respuestas evidencian la aplicación del concepto de fracción.

La cuarta actividad, "Juguemos en el computador", fue emocionante e interesante para ellos. Se les explicó en qué consistía cada dinámica y su procedimiento: ejercicios de cálculo mental, asociaciones, rompecabezas, selección múltiple y sopa de letras, en los que se afianzaban y evaluaban los conocimientos sobre fracciones. Pudimos evaluar la comprensión de los temas y las dificultades que presentaban algunos estudiantes en el cálculo mental y en la realización de la actividad siguiendo una instrucción. A estos niños se les explicaba nuevamente cómo debían desarrollar la actividad. Aunque el manejo del computador retrasó un poco la evaluación los niños, obtuvieron buenos resultados en la misma.

Por último, debemos resaltar la importancia que tuvo la elección del tema del carnaval para despertar el interés de los estudiantes, lo cual se evidenció en la participación espontánea y permanente de los estudiantes. Este hecho sustenta la idea de que las aplicaciones que se ajusten a sus intereses y conocimientos redunda en el desarrollo de la creatividad e iniciativa en la solución de los problemas planteados. Pero el diseño no solo tiene éxito por despertar el interés de los estudiantes, sino por mantener activo el entusiasmo, al escoger tareas con materiales en las que el alumno es el protagonista y no la profesora, pues además de que se divierte en la labor, logra comprender al deducir el algoritmo que se deseaba y que en últimas era el fin de la clase. Esto es, se suscita el interés, se dirige y mantiene, y se logra el objetivo de aprendizaje que se fijó.

REFERENCIAS

Álvarez A. (1994). *Estudio exploratorio sobre fracciones comunes II: conceptos y estrategias de solución de problemas y operaciones en niños de primaria*. México: Subsecretaría de Servicios Educativos para el D.F, SEP.

Becerra, D., Becerra, D., Rodríguez, O., Nocúa, B. & Suárez J. (2006). *Fracciones, juego y aprendizaje*. http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/article-110449.html (consultado 12/08/10).

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. http:/www.mineducación.gov.co//cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf (consultado 10/2010).

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2003). *La revolución educativa. Estándares básicos de matemáticas y lenguaje, educación* básica y *media*. http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-70799_archivo.pdf (consultado 10/2010).

Luelmo, M. (2004, julio - diciembre). Concepciones matemáticas de los profesores de primaria en relación de la fracciones como razón y como operador multiplicativo. *Revista del Centro de Investigación: Universidad de la Salle 6.* México.

Innovación 3. Las fracciones equivalentes

Mónica Patricia Loaiza Muñoz[1], Navis Londoño[2]

INTRODUCCIÓN

La actividad didáctica propuesta buscó la apropiación del concepto de fracciones equivalentes mediante la manipulación de material didáctico que facilite la interacción entre situaciones reales y los contenidos matemáticos, dando un alto sentido al aprendizaje visual al hacer la comparación de las áreas (representaciones continuas). Esta actividad se desarrolló para estudiantes de ambos sexos entre los diez y los quince años, de 5°, un grupo heterogéneo en intereses y en el manejo de las temáticas anteriores en números fraccionarios.

Para el desarrollo de la misma se propuso una situación problémica para la aprehensión del concepto de fracciones equivalentes, en la que se pusieron en juego conocimientos previos (parte-todo), que les permitieron a los estudiantes desarrollar procesos de análisis y razonamiento y la combinación de los diferentes tipos de pensamiento numérico, geométrico-métrico (Medida, área).

El propósito de la actividad fue mostrarles a los docentes de básica primaria que a través de problemas o situaciones reales se puede enseñar el concepto de fracciones equivalentes. La actividad se realizó en parejas favoreciendo el trabajo cooperativo entre los estudiantes. El uso de material manipulativo (cuadriculas) fue importante para lograr una mayor comprensión y manejo del concepto de fracciones equivalentes, ya que a través de él los estudiantes pudieron simular las situaciones planteadas en los problemas (concretas).

Las cuadrículas como material educativo constituyen la herramienta mediadora con la cual pueden representar las situaciones de la actividad y la solución de esta. “El lenguaje no es suficiente para transmitir una lógica; se ayuda a comprender mediante la manipulación de material didáctico, que depende por su parte, de la coordinación y orientación de las acciones” (Piaget, 1973, p. 103).

OBJETIVOS DEL DISEÑO

Objetivo general

- Comprender el concepto de fracciones equivalentes y representar situaciones gráficas mediante material manipulable como las cuadrículas.

Objetivos específicos

- Utilizar y explicar con las cuadrículas la fracción como parte-todo.
- Justificar por qué determina que dos o más fracciones son equivalentes.
- Emplear diferentes sistemas de representación para señalar las fracciones equivalentes.

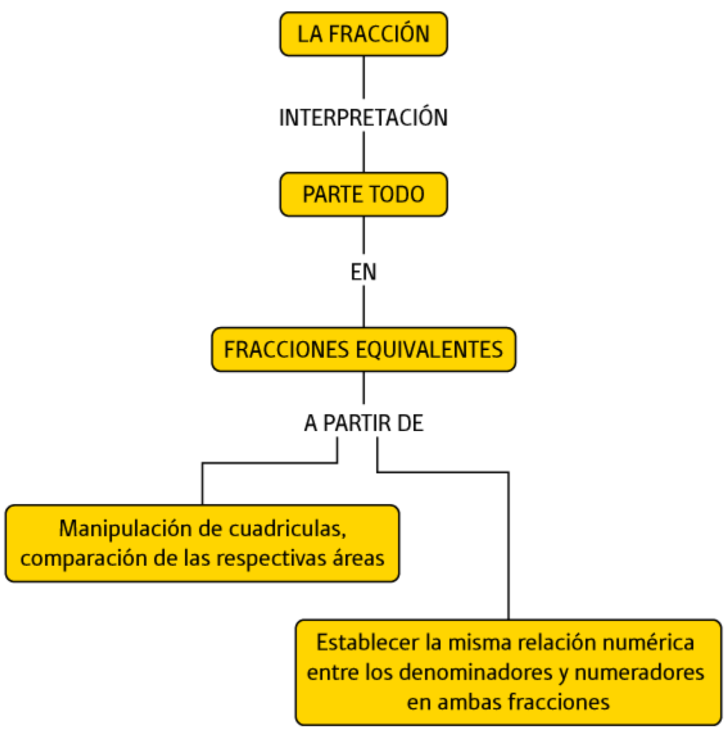
ANTECEDENTES

En Internet encontramos el artículo “Estrategias docentes en propuestas didácticas para EGB”, de María Del

1 Profesora de la Institución Educativa Distrital El Pueblo. *mploaiza71@yahoo.es*
2 Licenciada en Matemáticas. Magister en Educación.

Valle Coronel y Margarita Curotto, sobre enseñanza de las fracciones, publicado en la Revista Iberoamericana de Educación y. disponible en http://www.rieoei.org/deloslectores/1044Valle.PDF

PLANIFICACIÓN



Para el caso del desarrollo de la temática propuesta, el trabajo se realizó por parejas, cada pareja tuvo su actividad didáctica y el paquete de las cuadrículas: una cuadrícula verde de $100u^2$, cien cuadrículas azules de $1u^2$, veinticinco cuadrículas amarillas de 4 u^2, cuatro cuadrículas rojas de 25 u^2. La actividad didáctica se orientó inicialmente con la lectura del contenido, se explicó la forma de trabajar en parejas para realizar las actividades y luego socializar las preguntas. Durante el desarrollo de la actividad la profesora pasó por los equipos de trabajo y orientó mediante preguntas.

CONTENIDOS

Conceptuales

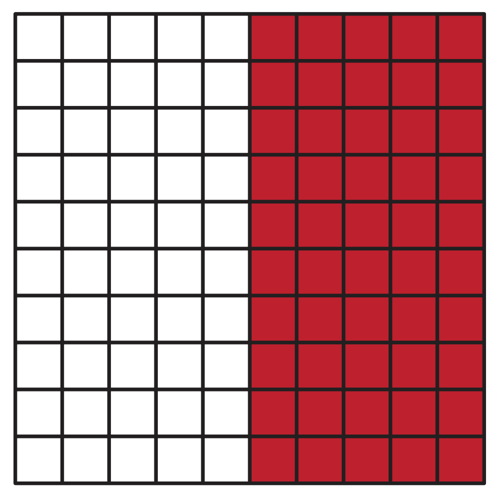
Al abordar el tema de fracciones equivalentes se debe partir del concepto de **fracción como parte todo**, para luego desarrollar el tema que se pretende en la actividad didáctica.

La fracción como parte de un todo

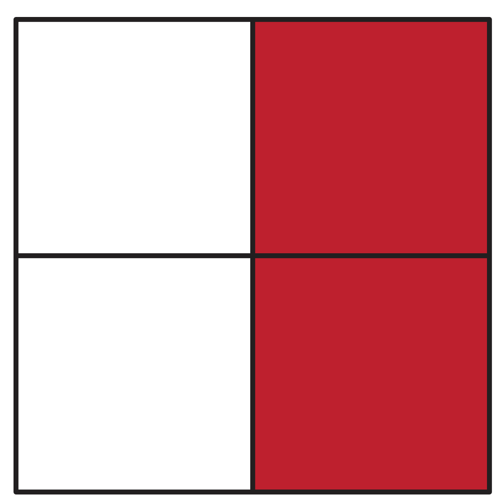
> Una fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el número total de partes. El total de partes se denomina ***el todo*** o ***la unidad.***

Fracciones equivalentes

Dos o más fracciones son equivalentes si representan la misma parte de la unidad.



$$\frac{50}{100}$$



$$\frac{2}{4}$$

Las fracciones $\frac{50}{100}$ y $\frac{2}{4}$ son equivalentes

Procedimentales

A partir del diseño en la figura, construir el mismo modelo a seguir con las cuadrículas. Con estas herramientas mediadoras se pueden representar las situaciones para cada acción (con baldosas azules y con baldosas amarillas), así se construirá, representará, analizará y diferenciará para llegar a la solución y a la conclusión: cuándo dos fracciones son equivalentes.

Actitudinales

Asumir el trabajo en parejas para que se propicien la colaboración y el intercambio de ideas.

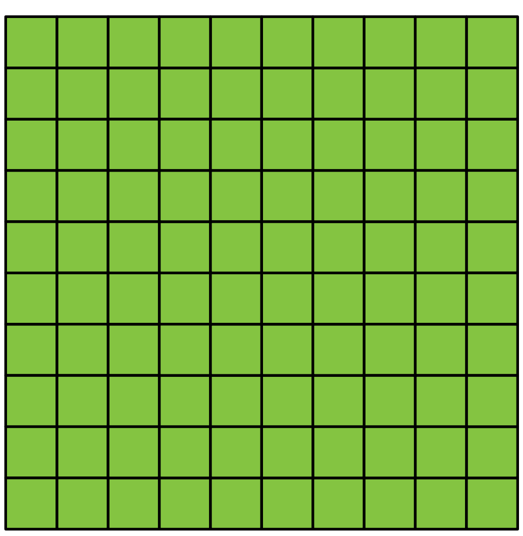
Respetar la diferencia de opiniones en cuanto a la respuesta en las actividades.

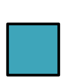
Interés y motivación en las actividades propuestas.

ACTIVIDADES

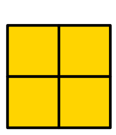
Problema planteado

Los esposos Juan y Ana desean remodelar el piso del patio de su casa, para esto cuentan con las siguientes clases de baldosas:

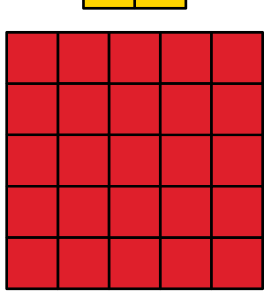




Medida 1 u^2



Medida 4 u^2



Medida 25 u^2

Uso de manipulativos en las clases de matemáticas

Juan desea embaldosar el patio de su casa con el diseño que muestra la gráfica, para esto quiere utilizar veinte baldosas azules, pero su esposa Ana le dice que es lo mismo si emplean en su lugar cinco amarillas. ¿Es cierto lo que dice su esposa?

Con el material manipulativo, los estudiantes tuvieron que representar cada una de las figuras anteriores y responder las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántas baldosas azules se utilizarían?
2. ¿Cuántas baldosas amarillas se utilizarían?
3. ¿A qué fracción corresponde una baldosa azul del piso?
4. ¿A qué fracción corresponde una baldosa amarilla del piso?
5. Expresa en número fraccionario el área embaldosada con baldosas azules.
6. Expresa en número fraccionario el área embaldosada con baldosas amarillas.
7. ¿Cuántas unidades cuadradas del piso se cubrieron con las baldosas azules?
8. ¿Cuántas unidades cuadradas del piso se cubrieron con las baldosas amarillas?

9. Si se embaldosa la misma área del piso con ambas baldosas, ¿qué podemos concluir de las fracciones 20/100 y 5/25?

10. ¿Es cierto lo que dice su esposa?

PROCESOS MATEMÁTICOS IMPLICADOS

Comunicación

Representaciones de las fracciones:

Gráfico	Algebraico	Lectura
La cuadrícula	$\frac{1}{100}$	Una centésima
La cuadrícula	$\frac{20}{100}$	veinte centésimas

Razonamiento

Percibir qué relación tienen las partes con el todo y proponer respuestas posibles, adaptarlas o rechazarlas con argumentos.

Formulación y resolución de problemas

Buscar y construir la solución de la situación y la pregunta:¿Es cierto lo que dice la esposa de Juan?

Esta situación está ligada a una experiencia con la vida cotidiana y se recre en la clase con el recurso de las cuadrículas, lo cual se traduce en una experiencia significativa.

Recursos: fotocopias, la actividad didáctica, juego de cuadrículas en cartulina, tablero, marcador, lápiz, borrador y sacapuntas.

Tiempo: en la hora de clase de cincuenta minutos se realizaron la actividad 1 en veinte minutos y la actividad 2 en diez minutos.

REFLEXIONES SOBRE LA EXPERIENCIA

Con la estrategia innovadora que propone el programa piloto, los elementos de apoyo dados durante los encuentros y las orientaciones de mis tutores considero tener las bases suficientes para abordar el tema propuesto y darle riqueza y claridad a mi quehacer en la preparación de la estrategia innovadora. Mi gran expectativa, entre otras, es darle estructura a mi clase al tener en cuenta los procesos que quiero desarrollar en mis estudiantes. La otra expectativa es que mis estudiantes vean el cambio en la clase de matemática, que ellos sean los que aporten a la construcción de su conocimiento, que se sientan motivados, que se apropien de la clase y de lo que están haciendo.

> **Mi reflexión durante la elaboración del diseño:** es difícil cambiar pero no imposible mientras yo tenga la disposición y crea que se puede. No es fácil escribir y reflexionar de esta manera frente a las propuestas de actividades, pues siempre había estado cómoda con los temas de los libros y sus ejercicios. Así como quiero que mis estudiantes sean partícipes de la construcción de su conocimiento, de igual manera yo quiero ser partícipe de la construcción de mis clases y de mi quehacer pedagógico y didáctico. Quiero ser más trascendental en mi quehacer pedagógico y no seguir "dictando una clase más".
>
> Los tropiezos que he tenido en el método de dar mis clases, mi redacción de situaciones problémicas y otros, se han constituido hoy en mi plan de acción y prioridad para trabajarlos y mejorarlos.

EVALUACIÓN

Resultados de la implementación del proyecto

En la clase se orientaron actividades que buscaron desarrollar los procesos matemáticos como la comunicación, el razonamiento y la resolución de problemas. Se notó participación de los estudiantes, interés en representar con las cuadrículas el diseño propuesto en el dibujo, como también en expresar verbalmente las fracciones y escribirlas en su guía de trabajo. Se leyeron las preguntas orientadas para el razonamiento, haciendo énfasis en **expresar en números fraccionarios el área embaldosada con las baldosas del respectivo color** y **cuántas unidades cuadradas del piso se cubrieron con las baldosas del respectivo color,** para poder orientar y que así los estudiantes llegaran a la conclusión y a darle la solución a la situación a resolver.

Evaluación del diseño: el diseño tuvo una finalidad: que los estudiantes llegaran "al concepto de fracción equivalente". La parte gráfica del diseño presentado en el dibujo ayudó para ubicar las baldosas y obtener las conclusiones. La actividad sobre la relación entre numeradores y denominadores sirvió para aplicar los conceptos de ser divisor o ser múltiplo. El diseño involucró el pensamiento geométrico y el pensamiento numérico, y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistemas de medidas.

El espacio para que los estudiantes puedan concluir se debe dar más a menudo, puesto que no están acostumbrados a manejar espacios de escritura, por esta razón me faltó marcar las líneas para ayudarlos en el orden y estética de sus escritos.

REFERENCIAS

Bravo, A. (2001). *Desafíos, matemáticas 5º*. Bogotá: Norma.

Centeno, R. (2007). *Mi matemática: desarrollo del pensamiento conceptual 5º*. Bogotá: Libros & Libros.

Del Valle Coronel, M., Valle, M. & Curotto, M. Estrategias docentes en propuestas didácticas para EGB de estrategias docentes en propuestas didácticas para EGB. *Revista Iberoamericana de Educación.* Disponible en http://www.rieoei.org/deloslectores/1044Valle.PDF

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemática.* Bogotá: MEN.

Innovación 4. Conozcamos y juguemos con las fracciones decimales aplicándolas a nuestra vida diaria

Osmiro Cantillo Ramos[1], Luis Páez Cajamarca[2], Myrna Jiménez Niebles[3]

INTRODUCCIÓN

Esta propuesta es el resultado del trabajo desarrollado por los docentes Osmiro Cantillo y Luis Páez en las instituciones La Presentación y Ciudadela Estudiantil. En La Presentación, el trabajo propuesto a las estudiantes estuvo enfocado en la ubicación de fracciones en la recta numérica. En la Ciudadela Estudiantil se trabajó en la medida de longitudes de algunos objetos del salón de clase, usando el metro como unidad de medida, para luego expresar el resultado como fracción del metro.

El trabajo se realizó en forma independiente en cada institución, sin embargo, se presenta una propuesta que fusiona el trabajo realizado en ambos lugares, dado que los procesos de ubicar fracciones sobre una recta numérica y el de medir longitudes están estrechamente relacionados.

Esta propuesta muestra los procesos desarrollados con el fin de que los estudiantes aprendan a ubicar fracciones en una recta numérica, a medir longitudes usando el metro como unidad de medida y a expresar las medidas obtenidas como partes de la unidad. Al medir magnitudes, las fracciones surgen naturalmente, ya que cualquiera que sea el patrón de medida elegido siempre podrá ocurrir que el número que represente la magnitud no sea un múltiplo entero del patrón. Si se miden longitudes y el patrón elegido es el metro, este será el todo, y cualquier longitud se expresará como una parte del mismo.

El proceso de medir longitudes condujo a que los estudiantes emplearan las fracciones para expresar los resultados como partes del metro, lo que se facilitó dado que los metros empleados estaban divididos en centímetros y milímetros. De esta forma se relacionaron los procesos de medir longitudes con las fracciones, su representación gráfica y su ubicación en la recta numérica.

OBJETIVOS DEL DISEÑO

Objetivo general

- Hacer uso de las fracciones para interpretar o expresar situaciones de la vida diaria.

Objetivos específicos

- Expresar números fraccionarios en forma de números decimales.
- Ubicar sobre una recta números fraccionarios o decimales.
- Establecer relaciones parte-todo entre el metro y sus submúltiplos.

ANTECEDENTES

Las múltiples propuestas para la enseñanza del concepto de fracción, y en particular el concepto de orden

1 Licenciado en Educación Básica con énfasis en Matemáticas I.E.D La Presentación. *jaed590@hotmail.com*
2 Maestro I.E.D Ciudadela Estudiantil. *lupaca27@hotmail.com*
3 Especialista en Matemática. Catedrática Universidad del Norte. Asesora. *mjimenez@uninorte.edu.co*

y ubicación de fracciones sobre una recta numérica, hacen hincapié tanto en el grado de dificultad que este aspecto tiene para los niños, dado el grado de abstracción que deben enfrentar al tratarse de una generalización del concepto de número, como en la necesidad de que se trabaje desde situaciones concretas y familiares al niño.

Llinares y Sánchez (1997) afirman: "los decimales (la notación decimal de algunas fracciones), están vinculados a la relación más general parte-todo. Así concebidas, las fracciones como decimales forman una extensión natural de los números naturales". La representación de fracciones en la recta numérica es fuente tanto de dificultades como de ventajas para los niños (Dickson, 1991). Esta representación permite que las fracciones impropias sean aceptadas de forma mucho más natural, que los números fraccionarios sean vistos como una extensión de los números naturales, en el sentido de llenar 'huecos' en la recta, y que se establezcan conexiones con la idea de medida y el uso de escalas.

En el momento en que los niños comienzan a aprender en forma sistemática acerca de las fracciones, necesitan del apoyo de las representaciones gráficas y del manejo de situaciones concretas para una adecuada apropiación e interpretación de los conceptos de unidad, partes, equivalencia y orden. El tener claridad acerca de que el todo puede elegirse en forma arbitraria, según las condiciones o el contexto en que se trabaja, contribuye a que el estudiante construya el concepto de fracción, inicialmente desde una perspectiva concreta, hasta que alcanza un adecuado nivel de abstracción y generalización.

PLANIFICACIÓN

Los estudiantes de 5° de las escuelas en la que se desarrolló la propuesta no tuvieron dificultades para representar fracciones en forma gráfica o para interpretar una representación gráfica, sin embargo, fue más difícil para ellos establecer relaciones de equivalencia o de orden, y la ubicación de fracciones en una recta numérica.

Conocidas las dificultades, se comenzó a analizar qué hacer para superarlas. Se creyó necesario que las fracciones con las cuales se trabajarían los conceptos de orden, equivalencia y ubicación en la recta numérica fuesen obtenidas por los niños mediante procesos que para ellos tuvieran sentido. Se pensó que una forma "natural" de obtener fracciones sería mediante la medida de longitudes, utilizando como unidad de medida el metro.

En el diseño de las actividades se tuvieron en cuenta las siguientes consideraciones:

- Los estudiantes deben familiarizarse con el metro, establecer las relaciones existentes entre el metro y sus submúltiplos, y expresar estas relaciones en forma de fracción.

- Deben establecerse relaciones entre la representación de un número como decimal y la representación como fracción. Dado un número decimal exacto, los estudiantes deben ser capaces de responder la siguiente pregunta ¿cómo puede ser representado en forma de fracción?

- En la ubicación de fracciones en la recta numérica, se debe elegir una unidad de medida cuya longitud permita la fácil división en medios, tercios, cuartos, quintos, sextos... Es buena idea trabajar inicialmente con una unidad de medida algo grande para facilitar el proceso de ubicación. No importa que solo puedan ser ubicadas unas pocas divisiones.

CONTENIDOS

La construcción de la recta numérica está basada en los siguientes supuestos:

- Toda recta se puede extender indefinidamente y puede representarse en cualquier dirección, aun cuando lo usual es la dirección horizontal.

- Un punto que se elige arbitrariamente sobre la recta representará el punto de referencia u origen y se le asignará el cero.

- Se elige una unidad de medida arbitraria, pero una vez elegida, se conservará. En otras palabras, en una recta numérica es necesario que las divisiones que representan cada unidad tengan el mismo tamaño.

- A partir de cero, hacia la derecha, usando la unidad de medida elegida, se hacen marcas sobre la recta.

- La primera marca inmediatamente después del cero corresponde al uno, la siguiente al dos, etcétera.

- Para representar sobre esta recta cualquier fracción es necesario dividir cada unidad, partiendo desde la primera, en las partes que indique el denominador, hasta cuando se tengan las partes indicadas por el numerador.

El proceso de medida requiere que los niños identifiquen los siguientes aspectos:

- Medir es comparar

- Se miden ciertas cualidades de los objetos

- En un mismo objeto se pueden distinguir diversas cualidades medibles

- Las cualidades medibles son las magnitudes

- Para poder medir se necesita un patrón de comparación

- Este patrón puede ser arbitrario

- Por conveniencia es necesario, en algún momento, usar patrones establecidos y aceptados por todos

- En nuestra cultura los patrones que se usan para medir corresponden al sistema métrico decimal, aun cuando aun se usan algunas unidades de medida que no pertenecen a este sistema

- La longitud es una magnitud, entendida como la distancia que separa dos puntos dados, sea que estén ubicados sobre una recta, un plano o en el espacio

De acuerdo a lo expuesto, es claro que los contenidos trabajados están relacionados con los conceptos de orden, equivalencia de fracciones, fracciones propias e impropias, números mixtos, magnitudes, relaciones en el sistema métrico decimal y en un nivel no explícito y sutil, con el hecho de que entre dos números naturales hay infinitos números fraccionarios.

ACTIVIDADES

En una institución la actividad inicial consistió en una lluvia de saberes. En el salón se ubicaron carteles con las palabras fracción, fracciones propias, fracciones impropias, fracciones equivalentes y operaciones con fracciones. Con estas palabras se exploró el nivel de apropiación que los niños habían alcanzado de esos conceptos. Esta actividad permitió que los estudiantes recordaran, expresaran dudas e inquietudes, y puso de manifiesto aspectos que necesitan trabajo de refuerzo.

En la otra institución las niñas vieron un video acerca de cómo ubicar fracciones sobre una recta; a través de este recurso las estudiantes observaron el proceso en forma sistemática, la adecuada elección de la unidad de medida, cómo ubicar fracciones propias en el espacio comprendido entre 0 y 1, y cómo hacerlo cuando se trata de fracciones impropias.

Actividad 1. Reconocimiento del metro

Los alumnos se organizaron en grupos de tres y con un metro de los usados en modistería se procedió a observar las divisiones presentes, una vez tuvieron claro que se pueden observar cien divisiones del mismo tamaño, las cuales se llaman centímetros, se les preguntó acerca de otras divisiones más pequeñas, el número de estas en un metro, y se informó acerca del nombre con el que se conocen. Se acordó tomar el metro como el todo o la unidad.

Actividad 2. Uso del metro

Hallaron la altura de cada uno de los integrantes del grupo, igualmente midieron largo y ancho del tablero, de las puertas y las ventanas, de los pupitres se midieron la altura el ancho y el largo. La mayoría registró estos datos en centímetros, en particular cuando esta medida era inferior a un metro. Cuando la medida fue superior a un metro la expresaron en la forma 1m tantos centímetros.

Se les recordó que consideraran el metro como unidad, **el todo**, y que usando como referente la actividad 1, expresaran cada una de las medidas halladas como fracciones del metro. Con el fin de guiarlos se les preguntó: si un metro está dividido en cien centímetros, ¿qué fracción del metro es un centímetro? Una vez se alcanzó consenso en la respuesta, se les invitó a que escribieran los datos como fracciones del metro. En lugar de afirmar que la altura de un compañero es de 1m 28 cm se expresó como 128/100 de metro, una medida de 57 cm se expresó como 57/100 de metro.

Actividad 3. Medida de segmentos

Se propuso que dibujaran algunos segmentos de longitud inferior a 10 cm, que midieran sus longitudes y expresaran las mismas en centímetros y en milímetros, y luego que expresaran estos datos como fracciones del metro y como fracciones del centímetro, es decir, en un caso se consideraba el metro como la unidad de medida y en el otro el centímetro. Si un segmento midió 76 mm diremos que es 76/10 de centímetros o 76/1.000 de metro

Actividad 4. Ubicación en una recta numérica

Con la ayuda de una cuerda de un poco más de tres metros de longitud se dibujó sobre el piso una recta, en el extremo izquierdo se ubicó el cero y se usó como unidad un segmento de 1 m para ubicar sobre la recta las divisiones correspondientes a los enteros 1, 2, 3. A continuación se procedió a ubicar en la recta las medidas halladas como fracciones de metro.

Actividad 5. Ubicación en una recta numérica

En una hoja sin rayas tamaño oficio dibujaron un segmento de unos 40 cm, se ubicó el cero en el extremo izquierdo y se tomó como unidad de medida un segmento de 10 cm de longitud para ubicar sobre la recta las divisiones correspondientes a los enteros 1, 2, 3. A continuación se procedió a ubicar en la recta las medidas halladas como fracciones de centímetro. Las actividades 4 y 5 desembocaron en una discusión acerca del concepto de escalas, al comparar el metro y sus divisiones con las divisiones que se hicieron sobre las rectas trazadas.

Actividad 6. Formación de fracciones con un dado

Se organizaron en grupos de seis estudiantes, cada uno tenía dos dados de colores distintos, se convino en que el número que saliera en uno de ellos haría el papel de numerador y en el otro tendría el de denominador. Los dados se lanzaron unas veinte veces, en cada lanzamiento se anotaron los resultados escritos como fracción, según lo acordado.

Actividad 7. Ubicación en una recta numérica

De una hoja sin rayas tamaño oficio se cortaron cuatro rectángulos de papel de 32,8 cm de largo y todos del mismo ancho se pegaron para formar un rectángulo de aproximadamente unos 130 cm. Sobre este se trazó una recta, se ubicó el cero y se usó como unidad un segmento de 12 cm. Se ubicaron los enteros 1, 2, 3, 4, 5 y 6, luego con cinco tiras de papel de 12 cm y haciendo uso del plegado, se obtuvieron fracciones de ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6. Con la ayuda de estas fracciones se ubicaron los números obtenidos en la actividad anterior sobre la recta numérica. Se discutió acerca del orden en que las fracciones a representar están ubicadas en la recta, y el hecho de que fracciones como 1/3 y 2/6 quedaron ubicadas en el mismo lugar. Este hecho se relacionó con las fracciones equivalentes.

PROCESOS MATEMÁTICOS QUE PROMOVIÓ EL DISEÑO

Comunicación: se estimuló en todas las actividades. En la primera expresaron sus ideas sobre conceptos presentados en los carteles, establecieron acuerdos acerca de la forma en que desarrollarían su trabajo, comunicaron las observaciones relativas al metro, e interpretaron sus ideas en forma gráfica.

Solución de problemas: resolvieron problemas relativos a la elección de una escala adecuada para ubicar las fracciones en la recta numérica.

Razonamiento: el estudiante hizo razonamientos para poder establecer relaciones de proporcionalidad, lo que le permitió determinar en dónde ubicar cada fracción, observar que el todo se puede elegir de forma arbitraria, pero que una vez elegido debe conservarse, establecer comparaciones entre el metro como unidad y sus submúltiplos, y entre el centímetro, considerado como unidad, y el milímetro. Razonó acerca de cómo divide el espacio entre un natural y el siguiente en partes iguales para poder ubicar en la posición correcta la fracción a representar.

Ejercitación de algoritmos: cuando el estudiante ubicó la fracción a/b en la recta numérica, necesitó encontrar un proceso adecuado para dividir el todo en b partes iguales y tomar luego a de estas partes.

Modelación: la ubicación de fracciones sobre una recta es un proceso de modelación que relaciona conceptos aritméticos con conceptos geométricos.

Los procesos aquí trabajados buscaron desarrollar en los estudiantes competencias matemáticas acordes a la declaración de principios expuestos en el Documento N°. 3. *Estándares* básicos de *competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas,* del Ministerio de Educación Nacional.

Recursos: papel, metro, dados, objetos del entorno, lápices, cuerdas, equipo de proyección.

Tiempo: en la actividad inicial se empleó un tiempo de 30 minutos, las otras actividades se desarrollaron en aproximadamente 45 minutos cada una.

REFLEXIONES SOBRE LA EXPERIENCIA

La experiencia contribuyó a mejorar el ambiente de las clases al estimular el trabajo en equipo y la colaboración entre los niños, ya que para encontrar soluciones a los problemas planteados debieron hacer consultas escuchar a sus compañeros y analizar propuestas diversas.

Las actividades motivaron a los niños a trabajar, ya que al ser escuchados se sintieron importantes, perdieron un poco el temor a equivocarse y se atrevieron a proponer soluciones para luego ensayarlas.

Los niños encontraron divertido el proceso de medición y el de ubicación de fracciones en la recta dibujada en el piso, sin embargo, al momento de hacer interpretaciones y de resolver problemas que implicaban un mayor nivel de abstracción se perdió un poco el entusiasmo.

Es necesario optimizar el manejo del tiempo en las diversas actividades, ya que en algunas los niños empleaban mucho en el proceso de preparación del trabajo.

Aun cuando no se desarrolló un proceso sistemático de toma de información, se observó un mejor desempeño de los estudiantes durante el proceso de evaluación.

REFERENCIAS

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Documento N°. 3. *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas.* Bogotá

Llinares, S. & Sanchez, M. (1997). *Fracciones, la relación parte todo.* Madrid: Editorial Síntesis S.A.

Dickson, Linda, et ál. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas.* Barcelona: Editorial Labor.

Innovación 5. Construcción del concepto de fracción a partir de las ideas previas de los estudiantes

Alicia Salgado Osorio[1], Rafael Escudero Trujillo[2]

INTRODUCCIÓN

El propósito de la propuesta fue diseñar una clase usando actividades lúdicas que les permitieran a los estudiantes comprender de una manera significativa el concepto de fracción y escribirlo a partir de sus conocimientos previos y lograr un aprendizaje significativo (Ausubel D., 1983).

El diseño de la propuesta consistió en visitar un supermercado y observar productos que tenían propagandas de descuentos que se podían relacionar con fracciones, tales como "Pague 20 rollos de papel higiénico y lleve 24", "Pague dos productos y lleve tres". Adicionalmente, se propuso armar varios rompecabezas de diferentes tamaños y formar subgrupos a partir de una cantidad discreta.

Esta propuesta fue importante porque el estudiante construyó el concepto de fracción a partir de una realidad contextualizada. Esto permitió una conceptualización con sentido para los alumnos de las fracciones y sus aplicaciones.

También se considera que es importante esta forma pedagógica de trabajar el concepto de fracción porque facilita la transición de los números naturales a los fraccionarios.

OBJETIVOS DEL DISEÑO

Objetivo general

- Construir el concepto de fracción a partir de las ideas previas de los estudiantes.

Objetivos específicos

- Determinar el concepto de fracción a partir de la observación de productos en un supermercado.
- Construir el concepto de fracción completando las partes de un rompecabezas.
- Formar subgrupos de fracciones con cantidades discretas.

ANTECEDENTES

Existen muchas propuestas para enseñar el tema relacionado con las fracciones, de las cuáles especificamos dos: Nancy Ross (2001), en su trabajo de investigación, recomienda que para introducir con éxito la noción de fracción, construir el concepto y luego establecer la operatividad, es necesario saber que no se debe enseñar aisladamente, sino hay que considerar los contenidos trabajados con anterioridad en los números naturales y tener en cuenta las ideas previas de los alumnos. Además que para que ellos puedan entender cuál es

1 Profesora autora de la innovación. Licenciada en Matemáticas, Énfasis en Educación Básica de la Universidad del Atlántico. Profesora de la Institución Educativa Tierra Santa. *alice1867@hotmail.com*

2 Profesor asesor de la experiencia. (Ph. D.) en Educación, Énfasis en Educación Matemática de Newport International University (USA). Profesor de tiempo completo de la Universidad del Norte. División de Ciencias Básicas. Departamento de Matemáticas y Estadística. *rescuder@uninorte.edu.co*

el sentido y la función de las fracciones es necesario plantearles situaciones en las que éstas tengan distinto significado.

Streefland L. (1990) dice "lo importante es que el niño construya un concepto utilizando los saberes previos como base para empezar la secuencia de la enseñanza de las fracciones con ideas relativas a mitad, un cuarto, un tercio y los procesos básicos de dividir o repartir".

PLANIFICACIÓN

La planificación consistió en la construcción del concepto de fracción a partir de ideas previas, palabras o experiencias que previamente tenían instaladas los estudiantes en su mente. Se observaron las dificultades que presentaron los estudiantes para comprender las fracciones y, de acuerdo con ellas, se expuso el modelo de una clase pertinente. Se hizo una recopilación de los conocimientos previos que tenían los estudiantes del contexto cotidiano. Se realizaron actividades lúdicas como: armar rompe cabezas y completar figuras.

CONTENIDOS

Los principales contenidos conceptuales que se involucraron en la experiencia fueron:

Concepto de fracción: definición del nuevo concepto de fracción propuesto en el aula después de haber desarrollado las actividades descritas en la planificación.

Construcción del concepto de fracción: es una cantidad igual que está contenida en el todo y que adquiere valores diferentes según su unión, división o reparto.

El número de partes iguales que se juntan o se dividen en el todo se llama denominador: porque indica las partes de la división o el reparto.

El número que indica las partes iguales que debo usar para armar o unir un objeto o figura se llama numerador.

Representación continua: cuando dividimos un objeto que representa el todo en partes iguales se dice que la representación es continua, porque se puede seguir haciendo divisiones del todo hasta donde sea posible.

Representación discreta: cuando un conjunto de objetos representa el todo y se reparte formando subconjuntos con cantidades iguales se dice que la representación es discreta porque al formar los subconjuntos no deben sobrar ni faltar elementos.

Clases de fracciones: las fracciones las podemos comparar teniendo en cuenta el valor de sus partes y así clasificarlas en homogéneas, heterogéneas, propias e impropias.

Comparación de fracciones: cuando comparamos dos o más fracciones y estas representan la misma cantidad en el todo se dice que son equivalentes.

Procedimentales: para desarrollar las clases, los estudiantes realizaron una visita previa a un supermercado de la localidad donde observaron situaciones relacionadas con las fracciones y así lograron contextualizar los saberes previos sobre el tema de fraccionarios.

Se buscó que los estudiantes se apropiaran de los conceptos matemáticos para que los pudieran aplicar en cada una de las actividades a desarrollar.

Al desarrollar las distintas actividades programadas nos dimos cuenta de que el razonamiento de este proceso llevó a pensar o a imaginar al estudiante, cual puede ser la solución a una situación problema: la modelación que puede imaginarse el alumno, las diversas representaciones que puede hacer de las fracciones y lo más importante, promover la capacidad de proponer y resolver un problema, y que exprese o comunique las ideas o aportes sobre cada actividad a desarrollar.

Actitudinales

Se promovió en los alumnos que al construir el concepto de fracción a partir de sus ideas previas, y de relacionarlas con una situación de la vida real, se despertaran en ellos actitudes positivas hacia las matemáticas. También se procuró despertar el trabajo de equipo para llegar entre todos a la construcción de un concepto como ejemplo de trabajo colaborativo o de grupo.

ACTIVIDADES

Actividad 1. Aprendo las fracciones a través del uso del rompe cabeza

Consistió en entregarles a los estudiantes partes de un rompe cabeza por grupos, con la siguiente condición: que las medidas de las fracciones que formaban las partes del rompe cabeza no fueran iguales.

Ejemplo: en un rompe cabeza todas las piezas miden un cuarto, en otro un medio, etc. Se pretendía que el estudiante observara las medidas de las piezas de cada rompe cabeza que servían para representar las fracciones. Además, que construyera el concepto de fracción de forma diferente, ya que siempre se enseñan las fracciones partiendo y dividiendo. En nuestro caso, lo construimos uniendo partes como las del rompe cabeza.

Procesos matemáticos implicados

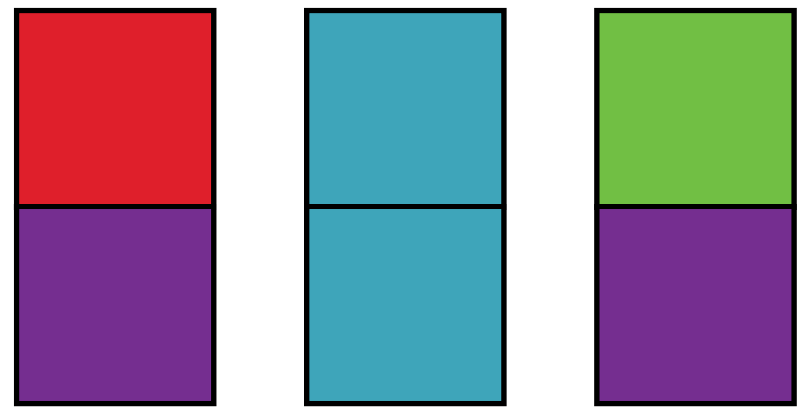
En esta actividad los procesos matemáticos implicados fueron: la comunicación y el razonamiento.

Proceso de comunicación: el estudiante pudo pasar del lenguaje simbólico al matemático. **Razonamiento:** en este proceso el estudiante, además de observar, pudo analizar detalladamente los datos de la actividad antes de dar un resultado. Es decir, lo llevamos a pensar para encontrar una solución.

Actividad 2. Construcción de diferentes banderas

Con esta actividad se buscaba que los estudiantes analizaran las diferentes situaciones que se les presentan al comparar las cantidades de piezas que se le entregaba a cada grupo.

Se tenía que elaborar una bandera del mismo tamaño, pero a cada grupo se le entregaba cantidades de piezas que midieran un medio para formar una bandera, otra de un cuarto, otra de un octavo y así sucesivamente. Al terminar de construir las banderas, los estudiantes comparaban las fracciones y podían establecer el valor de cada fracción, hallar la relación de equivalencia y encontrar el valor del todo.



PROCESOS MATEMÁTICOS IMPLICADOS

La comunicación: los estudiantes pudieron escribir un resultado en lenguaje matemático usando figuras simbólicas. Después de estas actividades se les formularon algunos problemas como el siguiente:

Una manzana está dividida en cinco partes iguales. ¿Cuánto es el valor de cada pedazo y que nombre le dan a cada uno de los pedazos?

Con esta situación, los estudiantes también pudieron calcular cuánto medía cada pedazo o su peso, con el fin de relacionarlo con las clases de fracciones propias e impropias.

Actividad 3. El círculo humano

Con esta actividad pretendimos que los estudiantes manejaran los contextos discretos. En ella, el todo hace parte de un conjunto. Los estudiantes hicieron un círculo con una cantidad de doce niños. De este círculo se tomaron las 2/3 partes del círculo. Los estudiantes observaron luego que se formaban tres círculos más pequeños con cantidades iguales. Se les aclaró también que con los conjuntos podemos representar fracciones. Además pueden hallar la fracción de cualquier número. Se les propusieron los siguientes ejercicios:

a) Hallar 1/2 de 10

b) Hallar 2/5 de 25

c) Hallar 1/4 de 8

Procesos matemáticos implicados

Resolución de problemas: se les presentó a los estudiantes un problema que debieron resolver usando cualquier forma.

Comparación y ejercitación de algoritmos: los estudiantes pudieron resolver el problema de forma simbólica y luego compararlo con el algoritmo de la fracción de un número.

Actividad 4

Hallar la fracción de un número con un contexto discreto (hallar los 2/3 de 6).

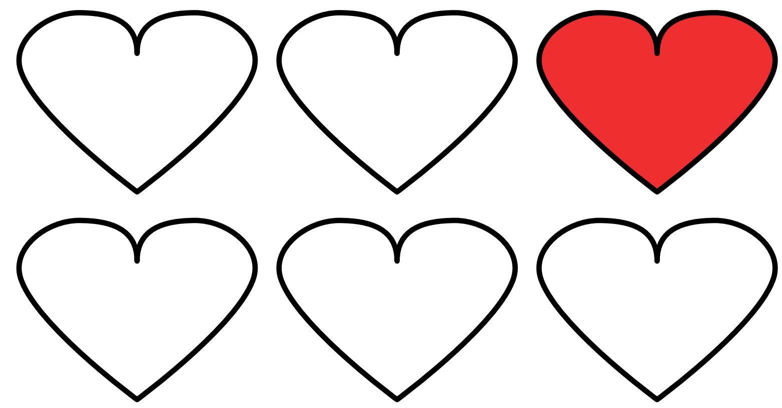
De seis estudiantes se formaron tres grupos con dos estudiantes en cada grupo, luego se tomaron dos grupos de los tres y dio un total de cuatro estudiantes. (2/3) de 6 = 4.

Resolver los siguientes problemas:

Situación A: Luisa tiene dos tortas y las va a repartir entre sus amigos de tal forma que todos coman igual cantidad. ¿En cuántas partes dividió Luisa las tortas?

Situación B: Resuelve la situación problema. Ayuda a Juan a encontrar la fracción que relaciona el tiempo que gastan sus amigos en llegar de la casa a la escuela. José dice: yo gasto quince minutos para ir de la casa a la escuela. Lucia: mi bus escolar tarda media hora de la casa a la escuela. Luis: yo puedo dormir en el bus porque tardo en llegar a la escuela 45 minutos. Nota: Recuerda que la hora tiene sesenta minutos. Expresa el tiempo que demora cada niño para ir de su casa a la escuela en forma de fracción (puedes dibujar el reloj).

Situación C: observa que de los seis corazones uno es gris. ¿Qué parte del número de corazones es gris? ¿Qué fracción indica el total de los corazones?



Recursos: libros, cartulinas, círculos plásticos, papeles de colores, rompe cabezas.

Tiempo: cada actividad se realizó en 35 minutos.

REFLEXIONES SOBRE LA EXPERIENCIA

Su puede decir que la expectativa que tenía como maestra innovadora era demasiado grande frente a ese reto de hacer el momento pedagógico en el aula de manera diferente a la tradicional.

La experiencia en estos talleres me dio la oportunidad de innovar, tratando que los estudiantes construyeran el concepto de fracción a partir de sus ideas iniciales y de reflexionar sobre mi propia práctica a partir de las filmaciones de las clases. Creo que se debe seguir con este proyecto para continuar mejorando nuestra práctica. Sería bueno implementar estas actividades desde 3° de primaria para que se puedan ver los resultados con los estudiantes.

Otra reflexión que me queda es que ahora puedo identificar mejor los procesos matemáticos, lo que puedo evidenciar con el relato de uno de mis estudiantes que a continuación destaco: “Con esta forma de estudiar aprendemos más porque es más fácil con las cosas que uno mismo puede ver y tocar”.

EVALUACIÓN

Resultados de la implementación del diseño: los resultados obtenidos en los estudiantes frente a los procesos matemáticos presentes en cada una de las actividades quedaron muy bien reconocidos. En su mayoría, del grupo de 37 estudiantes, 31 (83,8%) alcanzaron un desempeño alto en las actividades, y de estos, seis obtuvieron un desempeño básico (16,2%).

Los estudiantes estuvieron muy motivados por esta experiencia, se logró un mejor ambiente para aprender.

Pude implementar, específicamente, los procesos matemáticos de solución de problemas, razonamiento y comunicación.

Probablemente debí promover más la ejercitación de algoritmos, especialmente en la clase que sirvió para la segunda filmación.

REFERENCIAS

Ausubel, D. (1997). Aprendizaje significativo y facilidad del significado del aprendizaje verbal. En: Schunk Dale. (1997). *Teorías del Aprendizaje.* (2ª. ed.) México: Prentice Hall.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Documento N°. 3. *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas.* Bogotá: MEN.

Ross, N. (2001). Enseñar matemáticas desde un enfoque humanista. Entrevista a Nancy Ross publicada en la revista *Novedades Educativas, edición N°. 100.* (Consultado 23 de noviembre de 2010). Disponible en http://www.noveduc.com/entrevistas/rossnancy.htm

Streefland, L. (1990). Ideas y experiencias en torno a la capacitación (consultado el 23 de novimbre de 2010). Disponible en: http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/ceencia_sa

Consideraciones finales

8

Rafael Escudero Trujillo[1]
Judith Arteta Vargas[2]
Rafael Martínez Solano[3]

El *Programa de Mejoramiento de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas en la Escuela Primaria en Barranquilla* se llevó a cabo en un trabajo concertado de equipo en el que participaron en alianza la Asociación Nacional de Industriales (Seccional Barranquilla) ANDI, a través de su Fundación, la División de Ciencias Básicas y el Centro de Educación Continuada (CEC) de la Universidad del Norte, así como el grupo de maestros y directivos docentes con sus estudiantes. Estos atendieron la convocatoria para participar en el programa con el objetivo de contribuir al fortalecimiento de la formación didáctica de los profesores participantes y de su conocimiento matemático con el fin de estar en capacidad de diseñar, aplicar y evaluar actividades que promovieran el desarrollo del pensamiento matemático en sus estudiantes.


Integración de las TICs en las innovaciones aplicadas.

En este apartado recogemos unas consideraciones finales sobre los logros alcanzados y las estrategias de intervención educativa utilizadas para el desarrollo del piloto del programa.

A modo general podemos resumir los resultados obtenidos tomando en cuenta el objetivo general en la tabla siguiente:

1 Ph. D En Educación con énfasis en Educación Matemática de Newport International University. Profesor- Investigador, División de Ciencias Básicas. Departamento de Matemáticas y Estadísticas de la Universidad del Norte

2 Coordinadora del Programa de Mejoramiento de Enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en Barranquilla. Profesor- Investigador. División de Ciencias Básicas de la Universidad del Norte. Barranquilla –Colombia. *vjudith@uninorte.edu.co*

3 M.Sc. Matemáticas, Universidad Del Valle- Universidad Del Norte. Docente de la División de Ciencias Básicas. Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad del Norte. Docente de la Institución Educativa Francisco José de Caldas de Baranoa

OBJETIVO GENERAL	ALCANCES	INDICADORES	PRODUCTOS
Contribuir al mejoramiento del conocimiento matemático y a la formación didáctica de los maestros participantes, lo que les permite estar en capacidad de diseñar, aplicar y evaluar actividades significativas en el tema de fraccionarios y propiciar el desarrollo del pensamiento matemático en sus estudiantes.	Veintiún profesores de matemáticas de 5° de primaria innovando en sus clases. Quince instituciones participando en el proceso y renovando su pensamiento y acciones en el aula. (150%) de impacto en instituciones. (Compromiso inicial, solo diez). 937 estudiantes participando del proceso de innovación didáctica 12.835 alumnos en el rango de influencia del Programa (total de estudiantes de las quince instituciones atendidas.	Doce diseños de clase renovados y aplicados en trece instituciones haciendo partícipes de manera directa a trece profesores. Mejoramiento en la apropiación conceptual del concepto números fraccionarios en los estudiantes y en el desarrollo de ambientes de aprendizaje que enfatizan procesos matemáticos.	Ocho talleres temáticos de formación docente desarrollados en encuentros o en jornadas de trabajo, realizados con el apoyo de conferenciastas internacionales en dos de ellos. Trece de las quince instituciones aplicaron sus diseños de clases (86.6%). 53 docentes capacitados Treinta directivos docentes involucrados en el proceso adelantado. Documento con la sistematización y evaluación del trabajo realizado. Al menos veinte documentos con relatos y sistematizaciones realizadas por maestros. Libro derivado del desarrollo de la fase piloto del programa, para divulgación y apropiación por parte de los maestros y comunidades de práctica en matemáticas.

Las estrategias que hicieron posible estos resultados se desarrollaron en el marco de las tres fases descritas en el capítulo 1: una **primera fase** fue el establecimiento de la línea de base para la intervención, que incluyó la convocatoria, reconocimiento de las condiciones iniciales y motivación de los docentes, sus instituciones y sus alumnos. En esta, por medio de las visitas a las instituciones, los encuentros con el equipo académico del programa y la conferencia inaugural del experto en didáctica de las matemáticas, doctor Carlos Vasco, se les presentaron a los docentes participantes diferentes aspectos sobre la enseñanza de los números fraccionarios y sus diversas formas de representación, que llevaron a los profesores a un plano que probablemente no habían imaginado, en el sentido que los números fraccionarios pueden ser vistos de diversas maneras y que cada una de ellas requiere de un tipo especial de aproximación que responde a problemas específicos.

De igual forma, se indag*ó* sobre las características del medio en que el docente desarrolla su labor y sus prácticas pedagógicas con referencia al desarrollo de los procesos matemáticos. Cada maestro revisó, valoró y reflexionó sobre las características y posibilidades didácticas de su práctica pedagógica en la enseñanza de un concepto matemático, mediante la observación de un video de una de sus clases, bajo el acompañamiento y mediación de uno de los tutores del equipo académico. Esta estrategia les permitió a los participantes observarse y ser observados, reflexionar sobre su quehacer, someterse a la crítica de otro, en este caso de los docentes del equipo académico y de sus colegas, exponer sus ideas y creencias, recibir retroalimentación disciplinar y concientizarse de cierto tipo de situaciones que pueden generar confusión entre su alumnos,


Disfrute de las clases de matemáticas por parte de la maestra y sus estudiantes.

tanto en lo disciplinar como en lo pedagógico. Además, observaron y tomaron conciencia de su accionar, su forma de comunicarse con el grupo y cómo abordan los diferentes momentos de su clase. Este acercamiento mostró además que los docentes desconocían los procesos que involucraban el ser matemáticamente competente.

Respecto a lo anterior, en la **segunda fase,** o de actualización, las estrategias de desarrollo de talleres y tutorías individuales y grupales con base en el diagnóstico inicial permitieron una aproximación a la competencia matemática, tal y como lo presenta el Ministerio de Educación Nacional de Colombia, conceptualización que requiere de procesos como la comunicación matemática, el razonamiento, la modelación y la ejecución de algoritmos, además del planteamiento y la solución de problemas, dado que durante la primera fase del programa pudo establecerse, mediante el diálogo directo con los docentes, el desconocimiento de dichos procesos. Adicionalmente se observó que la mayoría de los docentes participantes no cuentan con una formación sólida en el área de las matemáticas y que adicionalmente deben responder por las demás asignaturas del plan de estudio de la básica primaria.

En este sentido, la falta de formación disciplinar y didáctica es crucial, ya que se dejan escapar aspectos relevantes por desconocimiento de las diversas relaciones entre los conceptos, sus formas de representación y su aplicabilidad. Cabe destacar que los talleres presentados por el equipo docente en esta fase apuntaron tanto al aspecto formativo disciplinar y didáctico como al reconocimiento de los procesos matemáticos y la caracterización de cada uno de ellos, al tiempo que se les dieron las bases para que diseñaran una propuesta con situaciones de aprendizaje que involucrasen el desarrollo de procesos matemáticos en torno a los números fraccionarios y sus diferentes formas de representación.

Esto abrió un espacio que les permitió a los docentes participantes exponer sus dudas abiertamente y recibir retroalimentación constante en el proceso del diseño de su propuesta para desarrollar una de las diversas formas de representación de las fracciones, lo que les permitió orientar de mejor manera las actividades que pensaban proponer en su diseño de clase.

Se adelantó una **tercera fase** o de innovación, en donde los maestros participantes, acompañados por un miembro del equipo académico, prepararon e implementaron para sus alumnos una propuesta de acercamiento a los números fraccionarios, la cual se materializó en un diseño de situaciones de aprendizaje desde alguna de las formas de representación de los fraccionarios. Los docentes también tuvieron retroalimentación fílmica y presentaron un documento en donde reflexionaron, entre otros, acerca de los objetivos, las actividades, los logros y las dificultades de su propuesta.

Para promover el desarrollo del pensamiento y la competencia matemática, se sugirió que el diseño de las situaciones de aprendizaje partiera de una o de varias situaciones problema contextualizadas con las realidades de los niños y desde allí se desarrollara la conceptualización. Este aspecto fue tenido en cuenta por los docentes participantes, de modo que sus propuestas de acercamiento a los números fraccionarios partieron de actividades concretas como punto de partida para mejorar la comunicación matemática con sus diversos tipos de representaciones: concreta, verbal, escrita, simbólica y geométrica. De modo que de un tipo de representación el niño pudiera pasar a otros y viceversa.

Si bien iniciar con actividades concretas puede servir como punto de partida para generar procesos matemáticos, se observa en los maestros una marcada tendencia a llevar los procesos de razonamiento hasta una fórmula o algoritmo, sin dejar que los alumnos maduren las ideas o respuestas a las preguntas que los docentes hacen, con las que pretende inducir la reflexión, la generación de patrones, la formulación de una hipótesis a partir de las situaciones particulares o la modificación de una situación inicial para generar otra de mayor grado de complejidad.

La implementación del diseño permitió apreciar que si bien hay dificultades en el orden disciplinar, hay avances en lo referente a:

1. El interés por desarrollar una clase más atractiva, rica en situaciones concretas y que lleve a una participación más afectiva y efectiva de los niños en las actividades individuales y grupales.

2. Cambio en la actitud de los maestros frente a los niños, al igual que la actitud del maestro frente a las matemáticas.

3. La toma de conciencia por parte de los docentes participantes en el sentido que la utilización de los recursos tecnológicos tanto para comunicarse de manera efectiva como para buscar información que los ayude a preparar mejor los materiales que utilizaran en sus clases es una necesidad.

4. El avance en la identificación de los procesos matemáticos, los cuales se sugiere tener en cuenta en el diseño de las actividades que se pretendan llevar al aula; los maestros fueron capaces de identificar más de un proceso matemático, expresar cómo lo podían promover y decir cómo sus estudiantes habían logrado desarrollar ese proceso matemático.

5. Articulación de las propuestas al modelo pedagógico institucional y apertura inicial a la introducción de nuevos elementos didácticos en las clases.

6. La integración de docentes de la misma institución y otras instituciones en torno a una preocupación común: la de mejorar sus prácticas para fomentar en ellos y sus alumnos el reconocimiento y la observancia de los diversos procesos matemáticos que son necesarios para ser matemáticamente competente.

7. La receptividad hacia las sugerencias del equipo académico en el marco de la exposición de ideas como punto de encuentro y acuerdo para el desarrollo de las actividades observadas y propuestas.

8. Mejoró la actitud de los niños hacia la clase de matemáticas ("la clase ahora es más chévere"); por ejemplo, dedican el recreo a continuar la clase, manifestando su agrado por ella. Mayor empatía con su maestro, que está haciéndoles la clase diferente; se logra mayor concentración, lo cual puede derivar en una mejor condición para el aprendizaje.

9. Expectativas positivas de las escuelas hacia el mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas y compromiso para el mejoramiento de los resultados en las pruebas.

10. Sustentabilidad de la propuesta desde tres dimensiones:

    - Los directivos docentes manifiestan querer mantener a la institución en el programa.
    - Los maestros manifestaron de muchas maneras y en distintos escenarios su interés y compromiso para continuar en fase 2 del programa.
    - Proyección institucional 6º en secundaria y grados inferiores de primaria.

Otros indicios de mejoramiento del conocimiento matemático y la formación didáctica de los maestros (no generalizables, por supuesto) que se pueden tomar como referentes son los testimonios que ellos consignaron en sus diferentes propuestas de innovación. A continuación citamos los de algunos maestros participantes:

> "La experiencia en estos talleres me dio la oportunidad de innovar tratando que los estudiantes construyeran el concepto de fracción a partir de sus ideas iniciales y de reflexionar sobre mi propia práctica a partir de las filmaciones".

> "Otra reflexión que me queda es que ahora puedo identificar mejor los procesos matemáticos".

> "Al llegar al primer encuentro nos dimos cuenta de que el proyecto trataba sobre un tema de difícil aprendizaje por parte de los estudiantes y que nosotros también nos sentíamos con falencias para poder explicarlo, como son los fraccionarios".

> "Cuando empezamos a ver los distintos temas que tenía la unidad de los fraccionarios, desde la perspectiva de los diferentes docentes expositores, nos dimos cuenta de que había un cúmulo de actividades dinámicas, divertidas y de fácil manejo, tanto por parte de los estudiantes y como de nosotros los docentes".

> "Una de las recomendaciones que puedo dar es que los talleres deben continuar y además esta propuesta innovadora es recomendable implementarla desde el 3° para un mejor seguimiento con miras a que los estudiantes estén mejor preparados para las Pruebas Saber".

Por otro lado, vale la pena señalar que para el equipo académico de Uninorte que acompañó a los maestros la experiencia permitió conocer de primera mano la problemática que se presenta en algunas instituciones educativas distritales en lo concerniente al trabajo que realizan los docentes de 5°. Una problemática que revela el poco conocimiento disciplinar de los docentes, lo que lleva a una enseñanza centrada en lo algorítmico y alejada de lo fundamental en estas primeras etapas de formación, como es la promoción de procesos matemáticos que contribuyan a consolidar la competencia matemática.

También nos permitió conocer a maestros valiosos que están ansiosos de llegar a sus alumnos con mejores formas de comunicar y promover el conocimiento, y que a pesar de las dificultades fueron capaces de consolidar un diseño que respondiera tanto a sus expectativas como a las exigencias del programa.

Los profesores de Uninorte consolidamos un equipo de investigadores comprometidos con los retos y desafíos de la educación matemática. Las actividades desarrolladas dentro del programa permitieron adquirir experiencia en uno de los aspectos de la investigación, como lo es el de reconocer, comprender y sistematizar las prácticas de los docentes en su ámbito natural (el salón de clases).

Fue muy significativo trabajar en este programa y contribuir en la formación matemática de un grupo de maestros del Distrito de Barranquilla con el propósito de que desarrollen las competencias matemáticas en sus estudiantes y que, en consecuencia, haya un mejoramiento en el desempeño de sus escuelas y de sus estudiantes en los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas. Las reflexiones derivadas de la implementación del programa retroalimentan a su vez las prácticas docentes e investigativas en el nivel universitario.

A MANERA DE CONCLUSIONES

Hemos iniciado y desarrollado un importante proceso de acompañamiento a un grupo de escuelas para su mejoramiento en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en Barranquilla. Este programa piloto arrojó excelentes resultados desde los siguientes criterios:

Acogida e integración de propósitos comunes en torno al mejoramiento de la educación matemática entre el sector empresarial representado en la Fundación ANDI, la Secretaría de Educación de Barranquilla, la Universidad del Norte y las escuelas participantes.

Reconocimiento de la importancia de la temática de los números fraccionarios y el grado seleccionado para la intervención a pesar de la necesidad notoria de cualificación de la educación en todas las áreas, niveles y grados.

Inicio de la apropiación del cambio e implementación de propuestas didácticas renovadas por parte de los maestros en beneficio de los aprendizajes de los niños.

Los maestros participantes mostraron inicialmente prácticas de enseñanza de las matemáticas centradas en el desarrollo y explicación de ejercicios modelo y reglas básicas para operar la aplicación de operaciones aritméticas para luego incentivar la ejercitación de algoritmos y en menor grado la comunicación y el razonamiento.

La orientación del programa y las estrategias implementadas posibilitaron la aceptación y autorreflexión sobre la propia práctica pedagógica, lo cual le ayudó a los maestros a reconocerse en sus fortalezas y limitaciones del ejercicio docente y a desarrollar el compromiso y dedicación que culminó con la aplicación de mejores ambientes de aprendizaje de las matemáticas.

Los maestros iniciaron procesos de formación que les permitieron asumir roles como profesionales reflexivos y críticos frente a sus condiciones didácticas y su efecto en los estudiantes.

Con el apoyo de los tutores y conferencistas, y el desarrollo de los talleres se mejoró en los maestros la comprensión de la temática acerca de los números fraccionarios. La calidad del diseño de actividades y su desarrollo en el aula está relacionada con la claridad conceptual y el manejo de conceptos por parte del maestro, con la disposición del maestro hacia el cambio y con la calidad y oportunidad del proceso de acompañamiento.

Los diseños de las clases y su desarrollo mostraron en la mayoría de los casos la introducción de problemas y ejercicios contextualizados a las realidades escolares, el uso de manipulativos y materiales de apoyo y el diseño de actividades que posibilitaban el desarrollo de procesos matemáticos base para el logro de la competencia matemática en los estudiantes.

Mejor aceptación de los niños hacia la clase de matemáticas. Los estudiantes lograron una actitud positiva hacia la clase y hacia su maestro(a).

El trabajo en equipo favorece que el profesor se atreva a asumir cambios, a innovar su clase y a diseñar sus unidades didácticas con mayor riqueza de objetivos educativos y mejor adecuación entre estos y las actividades previstas.

Apoyo de académicos e investigadores nacionales e internacionales para la asesoría y continuidad del programa.

RECOMENDACIONES

La experiencia de la fase piloto desarrollada permite sugerir tener en cuenta los siguientes aspectos en fases posteriores del programa:

Niños de las escuelas durante la visita a las instalaciones de la Universidad del Norte .

- La complejidad conceptual del tema de fraccionarios desarrollada en los talleres no ha sido completamente apropiada por los maestros, dada la condición inicial encontrada de no ser especialistas en el tema de matemáticas.
- La condición de los maestros exige un mayor acompañamiento, pues solo se tuvieron seis meses de intervención.
- Los maestros mostraban confusión entre competencias básicas y procesos matemáticos, que exigieron la reiterada reconceptualización y análisis. Muchas dificultades fueron superadas, aunque requieren profundización y monitoreo.
- Ampliar el tiempo de los docentes para el trabajo colectivo en sus instituciones.
- Atender en la segunda fase del programa, prioritariamente, a los maestros recién posesionados, a maestros con visión y compromiso de permanencia en las instituciones y con capacidad e interés por el trabajo en equipo, y a quienes atiendan directamente a más cursos y estudiantes.

Centro de Educación Continuada CEC

Fundación ANDI

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD DEL NORTE
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

ANEXO 1

GUÍA PARA EL DISEÑO DE SITUACIONES DE APRENDIZAJE INNOVADORAS

PROGRAMA DE MEJORAMIENTO DEL PROCESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN LA ESCUELA PRIMARIA EN BARRANQUILLA.

Estudio piloto:
Los fraccionarios en 5° de primaria

Estimado maestro:

El equipo investigador del *Programa de Mejoramiento de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas en la Escuela Primaria en Barranquilla. Estudio piloto: los fraccionarios en 5° de primaria*, desea ofrecerle un reconocimiento por el interés y la participación en los talleres de conceptualización sobre los fraccionarios y algunas implicaciones de su enseñanza en la escuela primaria. Así mismo, agradecerle los espacios de encuentro que nos han permitido documentar la práctica pedagógica de los participantes, hacer su revisión y reflexión con el ánimo de cualificarla en beneficio de la calidad de nuestra educación.

Ha llegado el momento de decir **"manos a la obra"**, es tiempo de concretar nuestros proyectos de innovación, y para esto hemos elaborado esta guía en donde encontrará los parámetros básicos para el diseño de situaciones de aprendizaje innovadoras. Esta guía es una pauta que usted puede adaptar y/o complementar, según su propio diseño.

PASO 1: ELECCIÓN DEL TIPO DE DISEÑO A IMPLEMENTAR

En primer lugar, el maestro o maestros innovadores deberán decidir qué **tipo de situación de aprendizaje** innovadora quieren realizar. Pueden elegir entre las siguientes opciones: proyecto de aula[1], unidad didáctica[2], diseño de una clase[3], o simplemente el diseño de una actividad didáctica[4].

Las anteriores situaciones de aprendizaje son distintos niveles de planificación didáctica, los cuales le proporcionan al docente pautas para orientar su práctica en el aula. Estas modalidades de planificación didáctica determinan las formas utilizadas para organizar y presentar los contenidos de aprendizaje. Toman como base los criterios de alcance, duración, nivel de complejidad e integralidad en su estructuración, desarrollo y evaluación en torno al logro de un fin educativo.

Cualquiera de estas cuatro opciones debe caracterizarse por su valor auténtico, innovador y significativo, de tal manera que permita mejorar la calidad del proceso de enseñanza y aprendizaje de los números fraccionarios en nuestras escuelas, impactando el desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes.

[1] Proyecto de aula: conjunto de actividades planificadas con el fin de lograr el aprendizaje de los estudiantes a partir de su propia actividad e intereses y bajo el acompañamiento de un maestro y en lo posible de la comunidad. Usualmente incluye actividades abiertas y flexibles, apoyadas en la investigación.

[2] Unidad didáctica: unidad de trabajo relativa a un proceso de enseñanza-aprendizaje completo y articulado alrededor de un eje organizador (Ring, 2008). Formas de organizar los programas escolares dotadas de capacidad para integrar contenidos diversos y de estructurar periodos relativamente largos de la actividad escolar (Cañal, 1997).

[3] Diseño de clase: planeamiento didáctico que incluye la secuencia de actividades de iniciación, desarrollo, síntesis y evaluación en una unidad de tiempo, que usualmente se asocia a una hora de interacción del profesor con sus estudiantes para lograr aprendizajes específicos.

[4] Actividad didáctica: situación planeada por el docente para lograr resultados específicos de aprendizaje en sus estudiantes en un tiempo dado. Se constituye en el medio para movilizar el entramado de comunicaciones que se pueden establecer en clase; tendrá efectos educativos en función de las características específicas de las relaciones y procesos que posibilita. Usualmente una clase comprende la realización de una o varias actividades.

PASO 2: DELIMITACIÓN DEL TEMA

Luego de elegir el tipo de situación didáctica significativa que se diseñará, se debe delimitar el **tema específico** del que este tratará. Los maestros innovadores tienen la absoluta libertad de escoger dicho tema, pueden nutrir sus ideas con cualquiera de las temáticas trabajadas en los seis talleres: el concepto de fracción, las fracciones y la medición, la fracción como parte todo, como operador, cociente, decimal, porcentaje, etc.

Esta es una de las etapas donde los maestros innovadores utilizarán de mejor manera su creatividad pues, como se mencionó en el paso 1, la temática que gire en torno a los números fraccionarios deberá ser significativa, en lo posible que resulte de situaciones del mundo de la vida, del contexto real o cotidiano de nuestros niños. Pueden tomarse en consideración los resultados de la valoración de las ideas previas de los estudiantes, la revisión de los cuadernos y guías desarrolladas por los estudiantes con el fin de detectar dificultades y errores conceptuales y de procedimiento.

PASO 3: ELABORACIÓN DEL DISEÑO

Este paso consiste en plantear formalmente su diseño o planeación. Para esto, los maestros innovadores deberán elaborar un documento escrito de no más de quince páginas en tamaño carta, en el que se incluya el desarrollo de los siguientes aspectos:

Información básica de la innovación:

Identificación del Proyecto Marco: esta parte es común a todos y debe conservarse tal cual.

- **Título del programa:** *Mejoramiento de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas en La Escuela Primaria en Barranquilla. Estudio piloto: los fraccionarios en 5º de primaria.*
- **Entidades patrocinadoras:** Fundación ANDI, Secretaría de Educación Distrital, Universidad del Norte
- **Institución responsable**: Universidad del Norte - División de Ciencias Básicas- CEC

- **Grupo de investigación que acompaña el programa:** Eureka
- **Coordinador del programa:** Judith Arteta Vargas
- **Correo electrónico**: vjudith@uninorte.edu.co
- **Teléfono:** 350 9509 Ext. 3045

Identificación de la institución innovadora

- Nombre de la Institución Educativa:
- Dirección de la institución:
- Barrio:
- Ciudad:
- Teléfono de la institución:
- Correo electrónico de la institución:

Identificación de los maestros innovadores

- Nombre y apellido de cada maestro participante:
- Profesión:
- Cargo y nivel de enseñanza en la que labora:
- Correo electrónico:

Ejemplo: Pedro Agustín Castro Roa

Licenciado en Matemáticas

Docente de Matemáticas 5º de primaria

pedroagustin@hotmail.com

Título: debe ser un título no muy extenso, atractivo, que comunique la temática del diseño.

Resumen: una síntesis de la propuesta que ilustre la temática escogida, su justificación, el desarrollo del diseño y resultados esperados de la implementación.

Justificación del diseño: en este aparte debe explicitarse el tema del diseño, exponer los argumentos que justifiquen su realización, el aporte de la propuesta al mejoramiento de los aprendizajes en los niños de 5º y en general a la educación matemática. Los resultados de las Pruebas Saber, las dificultades y las motivaciones de los estudiantes pueden incluirse como elementos de argumentación.

Destinatarios: caracterización del grupo de estudiantes de 5° con quienes se implementará en diseño. Detallar la dinámica del grupo (fortalezas, debilidades), número de estudiantes, etc.

Tiempo: enunciar el número de sesiones de clases necesarias para el desarrollo de todo el diseño. Ejemplo: dos sesiones de cincuenta minutos cada una, o, cuatro sesiones de una hora cada una, o, un mes con doce sesiones de clases de una hora cada una, etc.

Objetivos del diseño: se enunciarán máximo dos objetivos generales y máximos cinco objetivos específicos.

- **Objetivo general del diseño:** se planteará el(los) propósito(s)general(es) del diseño. Deben incluirse en su redacción el tema y los destinatarios.
- **Objetivos específicos del diseño:** se plantearán los objetivos que posibiliten alcanzar el objetivo(s) general(es).

Estándares básicos de competencias para 5°: se enunciarán cuáles de los estándares básicos de competencias formulados en el documento del Ministerio de Educación Nacional se relacionan con los objetivos del diseño[5].

Antecedentes de la experiencia: enunciar cuando menos dos experiencias similares realizadas en la región, en los ámbitos nacional o internacional, relacionada con el tema del diseño.

[5] Es bueno tener presente la recomendación del documento del MEN respecto a la lectura y coherencia vertical y horizontal de los estándares estos, según las orientaciones señaladas en las páginas 15 a 17 del documento.

Planificación docente: consiste en mostrar la estructura del diseño como tal. En este aparte se enunciarán los contenidos del tema que trata el diseño[6], la metodología de trabajo que el maestro innovador implementará con sus estudiantes de 5º, las actividades, los recursos y el tiempo necesario para realizarlo.

Contenidos: enunciarán los tres tipos de contenidos que implica el diseño:

- **Conceptuales:** principales contenidos conceptuales de la matemática involucrados en el diseño. Incluir una síntesis de una a dos páginas del desarrollo teórico o conceptual.

- **Procedimentales:** principales acciones ordenadas orientadas a la consecución de una meta de aprendizaje, relacionados con la configuración de algoritmos, uso de métodos, técnicas, elaboración de gráficos, uso de calculadoras y de instrumentos de medida, entre otros.

- **Actitudinales:** principales disposiciones y comportamientos a ser propiciados en los estudiantes mediante las actividades propuestas.

Actividades:

- **Nombre de la actividad:** debe enunciarse el nombre de cada actividad

- **Descripción:** debe hacerse una descripción detallada de la actividad

- **Procesos matemáticos implicados:** enunciar de los cinco procesos matemáticos cuáles y cómo se desarrollarán cada uno en cada actividad:

    1. Formulación, tratamiento y resolución de problemas

    2. Modelación

    3. Comunicación

    4. Razonamiento

    5. Formulación, comparación y ejercitación de algoritmos

- **Recursos para la actividad :** enunciar los materiales o implementos necesarios para el desarrollo de cada actividad.

- **Duración de la actividad:** número de sesiones y/o horas y/o minutos requeridas para el desarrollo de cada actividad.

Reflexiones de la etapa de diseño: describir las expectativas de los maestros innovadores frente al diseño, así mismo las reflexiones suscitadas durante la elaboración de esta etapa del mismo.

Referencias bibliográficas: deben citarse los libros, capítulos de libros, artículos de revistas o páginas web utilizadas para en la elaboración del diseño.

> **Nota:** los maestros innovadores contarán con el acompañamiento y asesoría permanente del equipo investigador de la Universidad del Norte para el desarrollo de los puntos anteriores. Pueden enviar sus inquietudes al correo electrónico *vjudith@uninorte.edu.co* o comunicarse directamente con los tutores asignados.

PASO 4: PRESENTACIÓN DEL DISEÑO

Los maestros innovadores presentarán al equipo investigador de la Universidad de Norte el documento (diez páginas máximo.) con el diseño completo, antes de ser implementado, con el fin de retroalimentar la propuesta y realizar los ajustes que sean necesarios.

PASO 5: EJECUCIÓN

Este consiste en implementar el diseño con los estudiantes de 5º. Los maestros innovadores decidirán y comunicarán oportunamente (con al menos una se-

[6] En lo correspondiente a contenidos conceptuales, es pertinente revisar el mapa conceptual sobre las interpretaciones de las fracciones mostrado en el sexto encuentro, situarse en una interpretación de las fracciones y desarrollar una secuencia de enseñanza.

mana de anticipación), qué parte o sesión de su diseño quieren que sea filmada. Tal como se hizo en la primera filmación, los maestros innovadores recibirán oportunamente retroalimentación por parte del equipo de tutores.

PASO 6: EVALUACIÓN

Una vez desarrollada la filmación, los maestros innovadores sistematizarán, con ayuda del equipo, la ejecución de su diseño. Para ello complementarán el documento inicial, incluyéndole los siguientes aspectos:

Resultados de la implementación del diseño: resultados de cada actividad evidenciando el impacto en cada uno de los procesos matemáticos desarrollados en los estudiantes

Evidencias de la aplicación: fotografías, materiales elaborados por los niños, relatos de los niños, etc.

Evaluación del diseño*:* valoración de los logros o resultados evidenciados (respecto principalmente a los aprendizajes de los estudiantes), pero también valorar las dificultades y aciertos.

Reflexiones finales: se enunciarán las reflexiones suscitadas de todo el proceso (diseño, implementación y evaluación). Pueden incluirse los aportes de los talleres, los aportes del equipo investigador, reflexiones e impactos del programa en el propio maestro, en su práctica pedagógica, en el grupo de colegas, en la institución, en los padres, todo esto respecto al programa de mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas en Barranquilla.

Recomendaciones: se enunciarán algunas recomendaciones para el diseño de situaciones de aprendizaje innovadoras semejantes, dirigidas a sus colegas y otros maestros innovadores.

Referencias bibliográficas: deben incluirse las nuevas referencias utilizadas en la etapa de implementación y evaluación.

Anexos: En este aparte incluir la información adicional que evidencia cualquiera de las etapas del diseño (fotografías, trabajos elaborados por los estudiantes, reflexiones personales, etc.).

PASO 7

Los maestros innovadores entregarán un documento final, no mayor a veinte páginas tamaño carta, que incluya los aspectos anteriores.

PASO 8

Los maestros investigadores socializarán el proceso de diseño, implementación y evaluación de su trabajo ante los otros maestros investigadores del programa, el equipo investigador y algunos miembros de nuestras instituciones.

Reconocimientos: al final del proceso, los mejores diseños de situaciones de aprendizaje innovadoras recibirán un reconocimiento especial al esfuerzo, la creatividad y el compromiso por el mejoramiento de la educación en nuestra ciudad, por parte de las instituciones patrocinadoras, durante la ceremonia de socialización final del programa.

Esta obra recoge la sistematización del desarrollo de la fase piloto del PROYECTO DE MEJORAMIENTO DE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS, realizado por un grupo de escuelas de la ciudad de Barranquilla, cofinanciado por la Fundación ANDI y la Universidad del Norte, con el aval y acompañamiento de la Secretaría Distrital de Educación.

Estos aportes, escritos por los maestros y maestras participantes, por el equipo de colegas de la División de Ciencias Básicas de la Universidad del Norte, y por académicos de reconocida trayectoria, constituyen la valiosa documentación de un esfuerzo mancomunado y loable, como fue acompañar y apoyar el trabajo de educación en matemáticas, en un momento particularmente complejo de la realidad de nuestro sistema escolar.

Secretaría de Educación
Alcaldía de Barranquilla

Fundación ANDI
Barranquilla

Fundación Promigas

CEC Centro de Educación Continuada
ISO 9001
Certificado SC 5509-1

UNIVERSIDAD DEL NORTE