Revista de Educación Matemática
Volumen 37, N° 1 (2022), páginas 61 – 92
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

Investigación en Educación Matemática

DIVERSIDAD DE IDEAS CONSTRUIDAS POR ESTUDIANTES SOBRE LOS NÚMEROS REALES, LOS NÚMEROS IRRACIONALES, EL ORDEN Y LA DENSIDAD

Virginia Montoro y Martha Ferrero

Resumen. En este artículo estudiamos las concepciones sobre el número real que han construido estudiantes de secundaria y de universidad. Analizamos las respuestas escritas a cuatro tareas que indagan sobre *qué es un número en general y en particular un número irracional, el orden, la densidad y el supremo de un intervalo, en los números reales.* Participaron 307 estudiantes de tercero, cuarto y quinto año de secundaria y de una etapa inicial o avanzada de carreras universitarias de Matemática, Biología y Educación Física. Categorizamos las respuestas obtenidas en cada tarea y luego, mediante análisis multivariado, identificamos grupos de estudiantes que ofrecen respuestas similares a las cuatro tareas y asociaciones entre estos modos de respuesta y su nivel de estudio. Encontramos un gradiente de profundidad en sus ideas desde (i) una visión *de los enteros como modelo de número, ajenidad e inseguridad frente a las tareas,* en estudiantes con menor estudio de matemática; (ii) una concepción de *los reales identificados con los decimales finitos y una discretitud explícita*, principalmente en estudiantes de secundaria; (iii) una visión de *los reales identificados con los racionales y como infinitos-potencialmente densos,* principalmente en ingresantes a carreras científicas y (iv) *comprensión del orden, la densidad y propiedad del supremo en los* reales, en estudiantes avanzados de Matemática. Sugerimos que para facilitar el pasaje de una matemática escolar a una matemática avanzada en el estudiantado la enseñanza debería prever, para los últimos años de secundaria y primeros de universidad, trabajar en profundidad estas complejas nociones.

Palabras clave: número irracional, concepciones numéricas, número real.

Abstract. This study aims to understand conceptions about real numbers that secondary and university students have developed. We analyse the written answers to four tasks that inquire about *what a number is in general and, in particular, an irrational number, order, density and supremum of an interval, in real numbers*. The participants were 307 students from the third, fourth and fifth year of high school and from an initial or advanced stage of university degrees in Mathematics, Biology and Physical Education. We categorized the answers obtained in each task and then, through multivariate analysis, we identified groups of students that offer similar answers to the four tasks and associations between response modes and the students' level of study. We found a depth gradient in their ideas from (i) a view of *the integers as a model of number, estrangement and insecurity in the face of tasks*, in students with less study of mathematics; (ii) a conception of real *numbers identified with finite decimals and an explicit discreteness*, mainly in high school students; (iii) a view of the *real numbers identified with the rational ones and as infinite-potentially dense*, mainly in newcomers science majors and (iv) *understanding of the order, density and property of the supreme in the real numbers*, in advanced students of Mathematics. We suggest that to facilitate the transition of students from school mathematics to advanced mathematics, teaching should provide, for the last years of high school and the first years of university, an in-depth work with these complex notions.

Palabras clave: irrational number, numerical conceptions, real number.

§1. Marco referencial

En Argentina, así como en varios países de la región, la currícula de la educación secundaria propone que se profundicen la comprensión y el uso de los números racionales y hacia el final de este nivel, el estudiantado comprenda el concepto de número real (diferenciando número racional e irracional), maneje el sistema de representación decimal de números reales y los pueda ordenar, representar sobre la recta numérica y usar para resolver problemas. De este modo, al ingreso a la universidad, la noción de número real debiera estar disponible para las y los estudiantes como acceso a la matemática avanzada.

Es frecuente ver que en las asignaturas matemáticas universitarias se trabaja con la noción de número real como si fuese un contenido ya naturalizado en la escuela secundaria. Sin embargo, es precisamente en este concepto complejo epistemológica y cognitivamente que se hace patente, en las y los estudiantes la transición entre un pensamiento matemático elemental (escolar) y un pensamiento matemático avanzado (universitario) que requiere una reconstrucción cognitiva que implica, por ejemplo, el paso de describir a definir y de convencer a demostrar y que principalmente requiere de la comprensión de conceptos matemáticos más abstractos, por ejemplo, los que tienen que ver con el infinito (Tall, 1991, 2004).

Nos proponemos estudiar qué nociones han naturalizado (Pozo, 2014) las y los estudiantes que han interactuado con la noción de número real en los últimos años de la secundaria o en sus carreras universitarias, no en un contexto de aula de matemática, sino las ideas que manifiestan al resolver tareas no escolarizadas.

Nuestro objetivo es conocer y describir las concepciones que han naturalizado, sobre el número real, estudiantes de secundaria, ingresantes a la universidad y de los últimos años de la universidad (cursando distintas carreras). En particular, nos propusimos: (i) conocer qué es para estos y estas estudiantes "un número" y si reconocen distintos tipos de números, particularmente si consideran a los racionales, irracionales y reales como números; (ii) indagar si conocen los números irracionales con sus principales características; (iii) si comprenden el orden y la densidad de los números reales y (iv) si comprenden la densidad de los reales y su relación con el supremo de un intervalo.

Acordamos con las teorías del aprendizaje que enfatizan en las concepciones de las y los estudiantes como uno de los puntos de partida del aprendizaje y sostienen que para que el aprendizaje sea significativo (Ausubel, Novak, y Henesiam, 1978) es necesario partir de las ideas que el estudiantado construye y utiliza en diferentes contextos, interactuando con ellas a fin de enriquecerlas o modificarla (Pozo y Gómez-Crespo, 1998; Vosniadou, 2008; Pozo y Scheuer, 1999).

La investigación en educación matemática, en diversos artículos se ha ocupado de establecer las relaciones entre el conocimiento personal (concepciones) y el conocimiento legitimado y objetivado por una comunidad de especialistas (concepto) (Freudenthal, 1983; Sfard, 2010; Tall y Vinner, 1981; Vinner, 1983; Vinner y Dreyfus, 1989). Estos trabajos destacan que en las situaciones en que se registran relevantes brechas entre ambos, de no ser conocidas y trabajadas deliberadamente, pueden conducir a cierto fracaso de la enseñanza.

Tras el análisis de la literatura internacional sobre investigaciones en Pensamiento Numérico, Verschaffel, Greer, y Torbeyns (2006) destacan la necesidad de que la investigación en este tema tome conciencia de la naturaleza de la reestructuración conceptual radical presente cuando el significado de "número" se extiende progresivamente. Como así también de la necesidad que la investigación se dirija hacia el desarrollo de aquellos objetos matemáticos a la cual damos el nombre de "número". En el citado artículo leemos que cuanto más sofisticado es el concepto de número, se encuentra menos investigación y en particular señalan, al igual que Romero y Rico (1999); Lakoff y Núñez (2000), la necesidad de investigar en la comprensión del estudiantado sobre los números reales de modo de producir un avance significativo en la comprensión de los procesos del Pensamiento Numérico Avanzado.

Podríamos asegurar, por razones históricas, que el concepto de número irracional trajo aparejado dificultades en su comprensión relacionadas principalmente con la *inconmensurabilidad* de las magnitudes irracionales respecto de la unidad y con la *no-numerabilidad* del conjunto de números reales. Generalizando, podemos decir que un segmento de longitud a es inconmensurable con otro de longitud b, si a/b no se puede escribir como cociente de dos enteros. Encontramos, aquí el germen del número irracional interpretado como la razón entre las longitudes de dos segmentos inconmensurables (Santinelli, 1999). En cuanto a la no-numerabilidad de los irracionales, G. Cantor a fines del Siglo XIX, denominó "numerable" a aquellos conjuntos que pueden ser puestos en correspondencia biunívoca con el conjunto de los enteros positivos (es decir se pueden poner en una lista). Este genial Matemático, demostró que los números racionales son "numerables" y que no puede existir ninguna correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números enteros y el conjunto de los números reales. Dado que los racionales son numerables, la no-numerabilidad de los reales viene dada por los irracionales (Montoro, 1999).

Las dificultades de las y los estudiantes en este campo podrían, además, atribuirse a que los números reales (particularmente los irracionales) fueron conceptualizados en la matemática respondiendo a necesidades netamente teóricas (Bergé, 2008; Bergé y Sessa, 2003; Cantor, 1871; Dedekind, 1963). Es, además, destacable la complejidad que conlleva la comprensión de las representaciones externas del número real, dada la carencia intrínseca de una representación que pueda dar cuenta de todas las características de este conjunto numérico (Steiner, 1984; Stevenson, 2000).

Un aspecto notable del concepto de número real es su íntima relación con el concepto de infinito, implicado esencialmente con las dificultades ya mencionadas de la inconmensurabilidad y la no-numerabilidad, pero además presente en aspectos básicos de los números reales, como son el orden, la densidad y la completitud. Notemos, también que la notación decimal de los números reales alude a infinitas cifras, tanto en el caso de los racionales (periódicas y numerables) como en el de los irracionales (no-periódicas y no-numerables). Una comprensión cabal de estas nociones involucra interactuar con la idea de infinito actual y estudios que indagan sobre concepciones del infinito matemático la muestran como contraintuitiva, lábil (Artigue, 1995; Fischbein, Jehiam, y Cohen, 1994, 1995; Juan, Montoro, y Scheuer, 2012; Moreno-Armella y Waldegg, 1995; Monaghan, 2001) y que requiere de contextos educativos que propicien la reflexión a través de intervenciones de enseñanza específicas. (Montoro, 2005; Montoro y Scheuer, 2006; Montoro, Scheuer, y Pérez-Echeverría, 2016; Reina y Wilhelmi, 2017; Sfard, 1994).

Haciendo un breve repaso histórico, tenemos que ya en la Grecia antigua conocieron las magnitudes inconmensurables, por ejemplo la escuela Pitagórica (Siglo V a.C) descubrió que si se traza un cuadrado de lado 1, su diagonal, por la aplicación del teorema de Pitágoras, es tal que el cuadrado de su longitud vale 2, la magnitud de esta diagonal no es conmensurable con el lado del cuadrado, o dicho de otra manera no es posible encontrar una fracción entera que corresponda a un número cuyo cuadrado es 2. Sin embargo, la necesidad de conceptualización de los números no aparece hasta fines del siglo XVII, con Newton y Leibniz. Durante este siglo, comenzó una cadena de construcciones teóricas en el dominio del cálculo diferencial e integral, basadas en un empleo libre de la inducción completa, el infinito y las cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes.

A fines del siglo XIX y comienzos del siglo XX tuvo lugar un profundo proceso de reestructuración en la Matemática que involucró las nociones de límite y de número real, la identificación del conjunto de los números reales con el continuo geométrico y el uso de los métodos infinitesimales, cuestiones todas en las que subyace el concepto de infinito. Como culminación explícita de ese proceso de reestructuración, encontramos la obra de Georg Cantor quien dotó de sentido matemático al concepto de infinito actual. Recién en 1876 a través de los trabajos de fundamentación de la matemática de lógicos y matemáticos de la época (como fueron, entre otros, Méray, Cantor, Dedekind y Weierstrass), se soluciona el problema de la definición de número real y esto fue posible sólo gracias a la explicitación de la existencia de conjuntos actualmente infinitos.

En la actualidad y a partir del movimiento formalista de comienzos del Siglo XX, se considera al número real como un *elemento de un conjunto con estructura algebraica de cuerpo, ordenado y completo.* El orden de los números reales es dado en forma axiomática, mediante la definición de una relación denominada $<$ (menor que), que permite que dos números siempre pueden ser comparados. Dicho orden posee la característica (contraintuitiva) de que un intervalo acotado puede no tener primer elemento, lo que lo diferencia del orden (más conocido por las y los estudiantes) de los números naturales.

La densidad es una propiedad que diferencia a los números reales de los enteros. Esta propiedad afirma que entre dos números reales distintos (supongamos $a < b$) hay al menos un número racional (real) q tal que $a < q < b$. Esto implica que entre dos números reales hay infinitos números reales.

Sin embargo, tanto el orden como la densidad se cumplen también en el subconjunto de los números racionales, la propiedad que caracteriza a los números reales y los diferencia del subconjunto de racionales, es la completitud (o propiedad del supremo) que se enuncia: *dado un subconjunto de números reales acotado superiormente* (*es decir que existe un número real mayor que todos los elementos de dicho subconjunto*) *entonces* (*axiomáticamente*) *existe un número real que es la menor de esas cotas superiores* (*supremo*). La *existencia* refiere a que *es* un número real. Por ejemplo, el conjunto de todos los reales que elevados al cuadrado son menores o iguales a 2 está acotado superiormente por 2 (también por 3; $3{,}5$; 4; $5{,}67 \ldots$) y la menor de esas cotas superiores sería aquel número que elevado al cuadrado me da 2, es decir $\sqrt{2}$, pero se sabe (desde la antigüedad) que ese "número" no es un racional, $\ldots$ axiomáticamente tendremos que es un número real.

En este artículo no nos centraremos ni en la inconmensurabilidad de los irracionales respecto de la unidad, ni en la no-numerabilidad del conjunto de números reales, sino en aspectos que, si bien son básicos, son también complejos epistemológica y cognitivamente, en particular nos enfocaremos en el conjunto de números reales como un conjunto ordenado, denso y completo.

§2. Las concepciones estudiantiles del número real

En los primeros años de primaria los niños conocen los números naturales ($\mathbb{N}$), se encuentran con el principio de que 1 es el primer número natural y salvo él mismo, todo número tienen un *siguiente*, de lo que se puede concluir que $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito, también conocen que entre dos números naturales consecutivos no hay otro número natural y la comparación entre números naturales mediante la definición del orden en $\mathbb{N}$ (cualquier subconjunto, no vacío, tendrá un primer elemento).

El currículo matemático escolar contempla la enseñanza de las fracciones y los decimales, en algunos casos como conjuntos numéricos distintos. Este hecho puede ocasionar que alumnos y alumnas consideren que diferentes representaciones de un número racional representan diferentes números (Khoury y Zazkis, 1994; O'Connor, 2001) y más aún que los decimales y las fracciones son subconjuntos disjuntos del conjunto de números racionales (Vamvakoussi y Vosniadou, 2010). El concepto de número racional puede permanecer aislado de la clase más amplia de números reales (Moseley, 2005).

Sabemos que la diferenciación de número racional y número irracional es esencial para la construcción del concepto de número real, que se realiza en la escolaridad extendiendo el campo numérico desde el conjunto de números racionales, propios de la matemática escolar, hacia el de números reales ámbito de la matemática avanzada. Sin embargo, encontramos diversos estudios que dan cuenta de que una cantidad importante de estudiantes, terminan sus estudios secundarios sin una comprensión cabal del número real (Artigue, 1995; Sirotic y Zazkis, 2007a, 2007b; Tirosh, Fischbein, Graeber, y Wilson, 1998; Zazkis y Sirotic, 2004, 2010), quizás como dijimos debido a su particular complejidad epistemológica (Artigue, 1995; Bergé, 2008; Cornu, 1983)), cognitiva (Fischbein y cols., 1995; Tall y Schwarzenberger, 1978; Tall y Vinner, 1981; Vamvakoussi y Vosniadou, 2004) y educativa (Rico, Castro, y Romero, 1996; Romero y Rico, 1999; Sirotic y Zazkis, 2007a, 2007b; Tirosh y cols., 1998; Zazkis y Sirotic, 2004, 2010).

Consideramos que una correcta comprensión del número racional es básica para la comprensión de los números reales, sin embargo, algunas investigaciones dan cuenta que las y los estudiantes de primaria y secundaria se encuentran con dificultades y suelen tener ideas contradictorias al aprender y utilizar conceptos relacionados con números racionales (Tirosh y cols., 1998; Merenluoto, 2003; Stafylidou y Vosniadou, 2004; Steinle y Pierce, 2006; Palacios-Amaya, Bianchi, y Montoro, 2018).

Una de las principales dificultades para comprender los números racionales se debe a la transferencia (incorrecta) de las propiedades de los números naturales a los números racionales (Vamvakoussi y Vosniadou, 2004, 2007; Yujing y Yong-Di, 2005). Por ejemplo, muchos estudiantes creen que el principio del "número siguiente" se aplica también a los números racionales (Malara, 2001; Merenluoto y Lehtinen, 2002). Entre las dificultades más evidentes se puede observar con frecuencia que las y los estudiantes trasladan a los números racionales el tipo de orden de los números naturales (Behr, Lesh, Post, y Silver, 1983; Palacios-Amaya y cols., 2018) y en ocasiones, las y los estudiantes más jóvenes presentan una visión finitista (Mayberry, 2001) de los números, lo que puede llevarle hacia una concepción no acertada y lábil de los números racionales (Widjaja, Stacey, y Steinle, 2008; Palacios-Amaya y cols., 2018).

Además de la comprensión incompleta de los números racionales, también, como ya dijimos, hay otras dificultades (cognitivas y epistemológicas) principalmente la inconmensurabilidad y la no-numerabilidad que hacen aún más difícil la comprensión de los números irracionales (Herscovics, 1989; Sierpinska, 1987, 1994; Sirotic y Zazkis, 2004, 2007a). Si bien no nos ocuparemos específicamente de estas cuestiones aquí, ambas llevan implícitas la noción de infinito, que como dijimos está también interrelacionada con el orden, la densidad y la notación decimal de los números reales (infinitos decimales periódicos o no- periódicos); de hecho, la comprensión de los números reales se suele mencionar en la literatura que trata de las concepciones de infinito (Artigue, 1995; Tall y Schwarzenberger, 1978; Tall, 2001).

Como dijimos, existe una relación estructural entre el concepto de número real y el de infinito actual, por lo que aquí destacaremos aspectos de las concepciones de infinito reportadas en la bibliografía respecto de las ideas que las y los estudiantes construyen cuando trabajan conceptos que involucran la noción de infinito. Juan y cols. (2012); Montoro (2005); Waldegg (1993) encontraron que las y los estudiantes más jóvenes o con menor estudio de matemática suelen mostrar inseguridad o resistencia frente a la posibilidad de la existencia de colecciones infinitas; en cuanto a las concepciones finitistas (Fischbein, Tirosh, y Hess, 1979) de las y los estudiantes, Juan y cols. (2012); Monaghan (2001); Montoro y cols. (2016); Waldegg (1993), encontraron dos muy arraigadas como son: concebir el infinito como un número muy grande o extender la propiedad de los conjuntos finitos a los conjuntos infinitos. Los resultados de Arrigo y D'Amore (2004); Fischbein y cols. (1979); Monaghan (2001); Montoro y Scheuer (2004), muestran que las y los jóvenes conciben al infinito, principalmente, en forma potencial y una minoría lo concibe como infinito actual (Moreno-Armella y Waldegg, 1995; Montoro, 2005; Juan y Montoro, 2008). Hemos encontrado también que la diferenciación entre infinito y todo, requiere de cierta profundidad en el estudio de matemática (Juan y Montoro, 2015; Montoro, 2005; Montoro y cols., 2016).

Un estudio pionero en cuanto a la comprensión de los números reales fue el de Arcavi, Bruckheimer, y Ben-Zvi (1987), en el que participaron maestros en servicio (con estudios universitarios). Encontraron que las y los participantes tenían problemas para reconocer los números como racionales o irracionales y que existían entre ellas y ellos una creencia generalizada de que la irracionalidad se basa en las representaciones decimales. Años después, Fischbein y cols. (1994, 1995), utilizaron un cuestionario tomado a estudiantes de nivel de estudio similares al de nuestro estudio, en dicho trabajo concluyeron que la inconmensurabilidad de magnitudes y la no-numerabilidad del conjunto de números reales aportada por los irracionales no son de naturaleza intuitiva, sino que implican una cierta madurez intelectual (o nivel de estudio) que los sujetos de este estudio no poseían. Además, las y los participantes de todos los niveles tenían grandes dificultades para diferenciar correctamente los números racionales, irracionales y reales.

Dificultades similares fueron reportadas por Tirosh y cols. (1998), con estudiantes de profesorado de primaria con estudios universitarios, especialmente aquellos que no tenían una especialización en matemáticas. Estas y estos estudiantes basaron sus concepciones de número casi en su totalidad en su experiencia con los números naturales. Estos autores alientan a que se estudie a los números reales en la formación de maestros en profundidad, de modo de que sus concepciones sean más flexibles y correctas. En un estudio de Peled y Hershkovitz (1999), que involucró a estudiantes de profesorado de matemática en su segundo o tercer año de matemáticas universitarias, encontraron que las y los participantes del estudio, a pesar de que conocían las definiciones y características de los números irracionales, fracasaban en tareas que requerían de un uso flexible de diferentes representaciones de estos.

Pareciera que las diferentes representaciones del número real influyen en las respuestas de estudiantes con respecto a la irracionalidad. Al respecto, Zazkis y Sirotic (2004) centraron su análisis en cómo los números irracionales pueden ser representados o no. Sirotic y Zazkis (2007b) consideraron los conocimientos, intuiciones y creencias de las y los participantes de su estudio con respecto a la relación entre los dos conjuntos numéricos: racionales e irracionales. Las explicaciones utilizadas por las y los participantes se basaron principalmente en considerar las representaciones decimales infinitas no-periódicas de los irracionales, que dificulta el acceso a una comprensión más profunda del número irracional. Además, observaron confusión para distinguir entre los números irracionales y su aproximación decimal y una abrumadora dependencia de esta última. También Zazkis y Sirotic (2010) estudiaron las formas en que diferentes representaciones decimales de los números reales influyen fuertemente en las respuestas de las y los estudiantes con respecto a su posible irracionalidad.

Voskoglou y Kosyvas (2012) realizaron un cuestionario y entrevistas a estudiantes de secundaria (13-14 años) pocos meses después de estudiar los números reales y a estudiantes de un instituto tecnológico de pregrado (18-19 años) que utilizan las matemáticas como herramienta para estudiar y comprender mejor la ciencia. Sus resultados mostraron un fracaso casi completo de las y los estudiantes de tecnología en las tareas relacionadas a magnitudes inconmensurables. Sin embargo, sobre el papel de sus representaciones semióticas para la comprensión de los números reales, la superioridad de sus respuestas correctas con respecto a las respuestas de las y los estudiantes de secundaria fue evidente en la mayoría de los casos; lo cual constituye, expresan en su artículo, una fuerte indicación de que la edad y la amplitud del conocimiento matemático del individuo juegan un papel importante para la mejor comprensión de los números reales.

En síntesis, encontramos en la bibliografía que las dificultades de las y los estudiantes de secundaria y de universidad para comprender a los números reales están asociadas a dos niveles; uno de mayor abstracción constituido por la no-numerabilidad y la inconmensurabilidad de los números irracionales, de las cuales no nos ocuparemos aquí y otro nivel básico constituido por la comprensión incompleta de los números racionales (orden y densidad), la no diferenciación de números racionales e irracionales, las múltiples representaciones de los números reales y que estos conceptos involucran el de infinito actual (notación, densidad y completitud).

§3. Metodología

3.1. Participantes. En este estudio participaron 307 estudiantes de escuela secundaria (167) y de universidad (140) de instituciones públicas de San Carlos de Bariloche (Argentina). Las y los estudiantes de nivel secundario se distribuyeron en los tres últimos cursos de un mismo centro educativo: tercero, cuarto o quinto (15 -18 años). Las y los estudiantes de nivel universitario se diferenciaron en ingresantes, quienes estaban asistiendo al cursillo de ingreso universitario de un mes de duración (17-20 años), y estudiantes avanzados y avanzadas, quienes cursaban materias del último año de tres carreras distintas (20 -30 años).

Las y los estudiantes de los últimos años de secundaria habían cursado asignaturas de matemática en las que se enseñan los conjuntos numéricos: naturales, enteros, racionales y reales. Durante el tercer año de secundaria se estudian los números reales, basados en los enteros y racionales introducidos en primaria, enfatizando que los números enteros amplían a los naturales y están incluidos en los racionales, y que la unión de números racionales e irracionales conforma los números reales. En cuarto y quinto año de este nivel se estudian distintos temas en el marco del conjunto de los números reales, llegando incluso a un precálculo, donde se interactúa con el concepto de infinito, principalmente como proceso sin fin.

Nivel de Estudios de Matemática		NEM	N
Secundario	3er año	3ro	59
	4to año	4to	56
	5to año	5to	52
Estudiantes de secundaria			167
Universitario	Ed. Física Ingresantes	EFI	26
	Biología Ingresantes	BI	26
	Matemática Ingresantes	MI	31
	Universitarios ingresantes		83
	Ed. Física Avanzados/as	EFA	21
	Biología Avanzados/as	BA	16
	Matemática Avanzados/as	MA	20
	Universitarios avanzados/as		57
Estudiantes universitarios			140

Tabla 1. Distribución según Nivel de Estudios de Matemática (NEM) de los y las participantes.

En las tres carreras universitarias consideradas, Matemática, Biología y Educación Física, los estudios de matemática tienen presencia curricular diversa. La primera se centra en la formación matemática, llegando en los últimos años a estudiar formalmente el concepto de número real e infinito cardinal. La segunda es una carrera de ciencias naturales en la cual se cursan asignaturas de matemática, sin que ésta sea una disciplina central. Los temas habituales son cálculo en una y varias variables y ecuaciones diferenciales, siempre en el campo de los números reales y donde se trabaja implícitamente con el concepto de infinito. En la carrera de Educación Física no se contempla formación matemática.

En lo sucesivo denominaremos NEM, al Nivel de Estudio en Matemática al que pertenecen las y los estudiantes. En la Tabla 1 se informa la distribución de los participantes respecto de su Nivel de Estudio en Matemática (NEM) y la etiqueta utilizada para cada modalidad de NEM.

3.2. Tareas y procedimientos. Se analizaron cuatro tareas que forman parte de un cuestionario escrito, más amplio, que constó de 10 tareas relacionadas con la concepción de número, el orden, la densidad, la representación en la recta, la completitud y el infinito en el contexto de los números reales.

Las tareas abarcan distintos aspectos del número real según diferentes demandas y dimensiones del conocimiento; algunas escolarizadas y otras que generalmente no se las encuentra en las clases de matemática. Algunas tareas son de respuesta cerrada con una sola opción correcta y otras son abiertas. Considerando que las comprensiones, sobre todo en temas de pensamiento matemático avanzado, no son unívocas, sino que suelen ser lábiles y a menudo incluso contradictorias, hemos pensado las tareas de modo de dar diferentes oportunidades a las y los participantes para ponerlas en juego. Acceder a este repertorio de respuestas nos permitió analizar sus interrelaciones y así obtener un panorama rico de los modos en que las y los estudiantes piensan en este campo de lo numérico.

A continuación, presentamos las cuatro tareas del cuestionario en que se enfoca este artículo. Dos de estas tareas exploran en las y los participantes la concepción de número en general (N1) y de número irracional en particular (N2) y dos de ellas, buscan inferir su comprensión del orden y la densidad de los números reales (D1) y su comprensión de la densidad de los reales en relación con el supremo de un intervalo (D2). Como es de esperar en las últimas dos tareas se involucran también concepciones sobre infinito. Esta descripción responde al aspecto del número real que se pusiera en juego principalmente, ya que en todas ellas se implican más de uno de estos aspectos y esperamos sacar a la luz posible relaciones entre las ideas que hayan construido las y los estudiantes entre estos. Describiremos luego, las tipologías de respuesta que hemos detectado en la población en estudio, para cada una de estas tareas.

3.2.1. Tarea N1. Concepción de número en general, según una tipología. Con esta Tarea pretendimos conocer qué es para estos y estas estudiantes "un número" y si reconocen distintos tipos de números, particularmente si nombran a los racionales, irracionales y reales como números.

El Cuadro 1 reproduce la consigna utilizada para esta tarea en el cuestionario, tal como fue presentada a las y los estudiantes.

Por favor menciona los tipos de números que conoces. ¿Podrías darnos un ejemplo de cada uno?

Cuadro 1. La consigna utilizada para la Tarea N1 en el cuestionario.

Dado el nivel de escolarización de estos y estas estudiantes, es esperable que al referirse a *tipo de números* puedan referirse a los conjuntos numéricos convencionales y escolares, (naturales ($\mathbb{N}$), enteros ($\mathbb{Z}$), racionales-irracionales ($\mathbb{Q}$-$\mathbb{I}$) y reales ($\mathbb{R}$)), ya que, desde un punto de vista del concepto de número, éste será *un elemento de un conjunto numérico definido como tal*. Sin embargo, podrán aparecer las concepciones numéricas más diversas, sobre todo relacionadas con los números naturales (cantidad de cosas discretas) o los racionales como magnitudes (medidas). Los ejemplos nos servirán para comprobar si el tipo de número que la o el estudiante está nombrando se corresponde con el que está pensando.

3.2.2. Concepción de número irracional. Ejemplos de irracionales. El objetivo de esta Tarea fue conocer si las y los estudiantes conocen los números irracionales y si los reconocen como los números que *no se pueden escribir como fracción (cociente) de enteros, con denominador distinto de cero* o como *los que poseen infinitos decimales no-periódicos* y si pueden diferenciarlos de los racionales. Inferir una posible identificación de los reales con los racionales y/o de los irracionales con las raíces o con ciertos números muy especiales.

El Cuadro 2 reproduce la consigna utilizada para esta tarea en el cuestionario, tal como fue presentada a las y los estudiantes.

> Posiblemente has escuchado que $\sqrt{2}$ y el número π son números irracioneales. ¿Cómo explicarías con tus palabras en qué consiste esa condición de ser irracionales?
>
> ____
>
> ____
>
> ¿Conocés los números irracionales? .... ¿Cuáles?
>
> ____

Cuadro 2. La consigna utilizada para la Tarea N2 en el cuestionario.

En esta tarea se solicita se describa qué se entiende por número irracional y se espera una respuesta que contenga los elementos esenciales que describen a un número irracional. Luego, bajo el supuesto de que la mayoría de estas y estos estudiantes conoce los números irracionales π y $\sqrt{2}$, se les solicita otros ejemplos de números irracionales. En las respuestas tendremos en cuenta si se considera a los irracionales como complemento de los racionales (distintos de las fracciones o cocientes de enteros con denominador distinto de cero) o si se los considera por su notación decimal (como números con infinitos decimales no-periódicos). Fundamentalmente si se los diferencia de los racionales y los ejemplos nos servirán para ilustrar sus respuestas.

3.2.3. Tarea D1. Comprensión del orden y la densidad en los reales. El objetivo de esta tarea fue conocer cómo conciben estos y estas estudiantes, el orden de los reales con sus especiales características en relación con la densidad, e inferir concepciones sobre infinito, en correspondencia con la cantidad de números y con la densidad.

El Cuadro 3 reproduce la consigna utilizada para esta tarea en el cuestionario, tal como fue presentada a las y los estudiantes. No se ha especificado en que campo numérico se está trabajando dado que buscamos concepciones naturalizadas sobre el concepto de número.

Cuando decimos "un número entre 0 y 2", nos referimos a un número mayor que 0 y menor que 2.

¿Podrías nombrar un número entre ...

0 y 2?	☐ Sí	¿Cuál?	☐ No hay	☐ No sé
$1/5$ y $1/4$?	☐ Sí	¿Cuál?	☐ No hay	☐ No sé
3,14 y π?	☐ Sí	¿Cuál?	☐ No hay	☐ No sé

¿Podrías nombrar un número entre ...

0 y 2?	☐ Ninguno	☐ Unos pocos	☐ Muchísimos	☐ Infinitos	☐ No sé
$1/5$ y $1/4$?	☐ Ninguno	☐ Unos pocos	☐ Muchísimos	☐ Infinitos	☐ No sé
3,14 y π?	☐ Ninguno	☐ Unos pocos	☐ Muchísimos	☐ Infinitos	☐ No sé

Cuadro 3. La consigna utilizada para la Tarea D1 en el cuestionario.

Es de esperar que, estudiantes que comprendan el orden y la densidad de los números reales, respondan en los tres ítems que *sí hay un número* y den *un ejemplo correcto*. Podría suceder también que, aunque sepan que debiera existir un número entre estos dados, no se sepan cual, porque no conozcan la relación de orden entre fracciones, la equivalencia de una fracción con un decimal o el orden entre decimales. Entre $3{,}14$ y π, puede suceder que no conozcan el orden entre decimales o no sepan el valor de π.

De elegir que *no hay* un número entre $1/5$ y $1/4$ podríamos pensar en una confusión de los reales con las fracciones y una concepción de estas como discretas. La elección *no hay* un número entre $3{,}14$ y π podría provenir de identificar π con el racional $3{,}14$.

Para la segunda pregunta *¿Cuántos números hay?* entre las mismas parejas de números, la respuesta correcta es *infinitos*, sin embargo, por la forma cerrada de la pregunta, no podríamos distinguir si responden a una concepción de infinito potencial o actual. Al haber infinitos números entre dos reales distintos, las respuestas *unos pocos* y *muchísimos* también son respuestas correctas, sin embargo, es esperable que si está disponible la opción *infinitos* y se elige *unos pocos* o *muchísimos* sea porque se esté pensando en una cantidad finita. Si entre 0 y 2 se elige *unos pocos*, podríamos pensar que se está identificando a los números con los enteros (y sus fracciones), por lo que en este caso podría considerarse que no haya ningún número entre $1/5$ y $1/4$ ni entre $3{,}14$ y π.

3.2.4. Tarea D1. Densidad en relación con el supremo de un intervalo. El objetivo de esta tarea fue conocer cómo estas y estos estudiantes conciben la propiedad del supremo de un intervalo de números reales y su relación con la densidad y el orden, e inferir concepciones sobre infinito, en relación con la cantidad de números, la densidad y la completitud.

El Cuadro 4 reproduce la consigna utilizada para esta tarea en el cuestionario, tal como fue presentada a las y los estudiantes.

En matemática solemos considerar el intervalo $(1, 2)$ como todos los números mayores que 1 y menores que 2. Vemos que ni 1 ni 2 pertenecen al intervalo.
Una profesora de Matemática de la Universidad nos contó que discutió con sus alumnos sobre la posibilidad de identificar dentro del intervalo al número que se encuentra lo más cerca posible de 2.

¿Qué pensás al respecto? ¿Se puede identificar dentro del intervalo al número que se encuentra lo más cerca posible de 2 y que pertenece al intervalo?

____

____

¿Cómo le explicarías a alguien que piense lo contrario?

____

____

CUADRO 4. La consigna utilizada para la Tarea D2 en el cuestionario.

La tarea comienza con una aclaración sobre el significado de "intervalo abierto" de números y se plantea la posibilidad de identificar un número "más cercano" al supremo del intervalo. A continuación, se plantean dos preguntas abiertas.

La primera pregunta interroga sobre si es posible encontrar el número "más cercano" al supremo y que pertenezca al intervalo (es decir que no sea el mismo supremo). Mientras que en la segunda se invita a justificar la respuesta. Para la primera pregunta se espera las respuestas, *sí es posible*, *no es posible* o *no sé si es posible* y algún tipo de justificación de la respuesta elegida. En la segunda es deseable que se amplíe esta justificación.

Es esperable que estudiantes que comprendan la idea de supremo (completitud de los reales) respondan que *no es posible encontrar tal número debido a la densidad infinita de los reales.* Por su calidad de supremo del intervalo, toda vez que tengamos un número perteneciente al intervalo, habrá otro mayor que éste que pertenezca al mismo. Sin embargo, puede haber otras razones por las cuales el o la estudiante puede pensar que esto no es posible.

La respuesta *sí es posible*, supone que se consideran los reales como discretos, donde podríamos encontrar un número anterior a uno dado (al estilo de los enteros).

3.3. Procedimientos de análisis. Hemos realizado, en primera instancia, una categorización de las respuestas a cada tarea, con diferentes metodologías de análisis, que se describen en el siguiente apartado, a fin de obtener modos de respuesta que abarcaran todo el espectro de respuestas en una tarea, asociando en una misma clase aquellas que compartieran significado y de modo que las categorías fueran mutuamente excluyentes.

Se determinaron estos modos de respuesta obteniéndose cinco, siete, cinco y ocho modalidades para las tareas N1, N2, D1 y D2, respectivamente. Esta categorización se describe en la sección siguientes (*Resultados*) ya que son resultados interesantes por sí mismos que dan cuenta de las representaciones de las y los estudiantes respecto de los conceptos implicados en cada Tarea.

En una segunda instancia se asoció a cada estudiante su categoría de respuesta para cada Tarea. Cualquiera hubiese sido el método para obtener estas categorías, se aplicó un procedimiento de control inter-juez sobre la totalidad de las respuestas, es decir se volvió a los datos originales. Se solicitó a dos jueces que verificaran una por una, si las respuestas de cada estudiante se correspondían con la caracterización de la categoría que se le había asociado. Las jueces fueron dos docentes universitarias de matemática, y se obtuvo una coincidencia con la categorización realizada por las investigadoras mayor del 98 % en todos los casos, en los pocos casos que no se coincidía se consensuó la categoría que le correspondería a esa respuesta.

En una tercera fase, se definieron sobre el conjunto de estudiantes cinco variables categóricas, cuatro de ellas denominadas *variables de respuestas* (una por cada Tarea) con tantas modalidades como fueron los modos de respuesta determinados para cada Tarea en la categorización descripta y una más denominada NEM, que se corresponde con el Nivel de Estudio de Matemática con las 9 modalidades antes descriptas.

Con el fin de estudiar asociaciones entre los modos de respuesta por una parte y relaciones con las modalidades de NEM y las de respuestas por otra, se optó por la aplicación del método factorial de correspondencias múltiples (AFCM) (Benzécri, J.P., 1973; Crivisqui, 1993; Lebart, Morineau, y Fénelon, 1979) que está especialmente diseñado para describir, visualizar y sintetizar grandes cantidades de datos obtenidos sobre un conjunto de individuos. Este AFCM tomó como variables activas para la formación de los ejes factoriales las modalidades de las variables de respuesta. Las modalidades de NEM se proyectaron sobre los planos factoriales como variable ilustrativa. Este método posibilitó observar los principales factores de variabilidad de los modos de respuesta, así como visualizar la relación de éstos con cada modalidad de NEM. De un modo muy sintético, podríamos decir que con este estudio pretendemos evidenciar las asociaciones que existen entre las modalidades de respuesta a las distintas tareas, qué estudiantes responden qué y qué modalidades de NEM se relacionan con cada una de estas asociaciones.

Finalmente, y considerando a los participantes descriptos por sus coordenadas en los ejes principales del AFCM (factores de variabilidad de los modos de respuestas encontrados), realizado en el paso anterior, efectuamos una Clasificación Jerárquica Ascendente (CJA) (Ward, 1963). El método de clasificación utilizado comienza con una partición de la población de estudiantes descriptos por sus modos de respuesta, de manera que cada uno de ellos sea el único elemento de una clase y en cada iteración se agrupa en una nueva clase aquellas dos más parecidas, en el sentido de que posean casi las mismas asociaciones con los modos de respuesta a las tareas. Se corta el proceso de manera que la conformación de las clases obtenidas tenga sentido en términos de los objetivos de la investigación. Resultando en clases de respuestas a las que se dio una denominación (etiqueta de la clase) según las características emergentes de cada clase (indicadores de categorización), que pueden ser interpretadas en términos de concepciones o comprensiones de determinado aspecto por parte de las y los estudiantes.

3.3.1. Categorización de las respuestas a cada tarea. Para los ítems de las tareas en las que se contaba con respuestas verbales abiertas (Tarea N1, primer ítem de la Tarea N2 y justificación en la Tarea D2), se asoció a cada estudiante las respuestas literales y se aplicó un análisis lexicométrico del corpus de respuestas. De este modo se buscó evidenciar similitudes y diferencias entre las respuestas de las y los estudiantes, mediante la interpretación del léxico utilizado. Se utilizó para ello el Análisis Lexicométrico (AL) (Lebart y cols., 1979; Lebart, Salem, y Bécue Bertaut, 2000). Se realizó un Análisis Factorial de Correspondencias (AFC) (Benzécri, J.P., 1973; Crivisqui, 1993) del corpus de respuestas con el propósito de descubrir ideas diferenciadas presentes, como así también una tipología de respuesta. Se realizó luego una Clasificación Jerárquica Ascendente posterior al AFC, de las y los estudiantes según sean similares las palabras que usan en sus respuestas y se interpretaron las clases resultantes en términos de concepciones. En los ítems en los que se encontraron justificaciones relativamente cortas o ejemplos (ítems 2 de N2 y justificaciones de D2) se realizó una categorización de las respuestas una por una, buscando similitudes de significados según los elementos emergentes, encontrando modalidades de respuestas mutuamente excluyentes.

Para la Tarea D1, se realizó un AFCM de las y los estudiantes descritos por su tipo de respuesta a cada uno de los seis ítems, tomando éstas como variables activas.

Las nueve modalidades de NEM se proyectaron sobre los planos factoriales como variables ilustrativas. Este método nos permite básicamente encontrar asociaciones entre modos de respuesta a los distintos ítems y asociar que estudiantes responden qué. Posterior al AFCM se realizó una clasificación (CJA) de las y los estudiantes según sean globalmente similares sus modalidades de respuesta.

En las Tablas 2, 3, 4 y 5 puede observarse la caracterización de las modalidades de respuesta encontradas para las Tareas N1, N2, D1 y D2 respectivamente. Como así también ejemplos literales de respuesta (especificando el NEM al cual pertenece el o la estudiante que dio dicha respuesta) y porcentaje de la población perteneciente a cada clase de respuesta.

3.3.2. Asociaciones entre los modos de respuesta a las cuatro tareas. Como dijimos, finalmente y con el fin de observar asociaciones entre los tipos de números nombrados por las y los participantes, las descripciones que hacen de los irracionales, cómo comprenden el orden, la densidad y el supremo de un intervalo en $\mathbb{R}$, se aplicó un AFCM de las y los participantes descritos por sus modalidades de respuesta a las cuatro tareas (N1, N2, D1 y D2). Las modalidades del nivel de estudio en Matemática (NEM) se proyectaron sobre los planos factoriales como variables ilustrativas. Luego realizamos una CJA, agrupando a las y los estudiantes cuyos tipos de respuestas sean similares, globalmente en las cuatro tareas, en el sentido de que posean casi las mismas asociaciones entre los modos de respuesta.

§4. Resultados

4.1. Categorización de las respuestas a cada una de las cuatro tareas.

TABLA 2. Clases de respuestas según los tipos de números que se nombran. Ejemplos literales de respuesta (especificando el NEM del o la participante) y porcentaje de la población perteneciente a cada clase.

Caracterización de las respuestas		Respuestas de un o una estudiante de…	Porc.
No nombran reales, ni racionales ni irracionales	*N1.1. Números son sólo los enteros.* No nombran reales, ni racionales, ni irracionales. Nombran a los naturales, los enteros o algún subconjunto notable de los enteros (ej. positivos, negativos, primos). Asociada a EFA y EFI.	EFI: *positivos* (*8*), *enteros*, *negativos* (*-8*).	12 %

TABLA 2. (continuación)

<table>
<tr><th colspan="2">Caracterización de las respuestas</th><th>Respuestas de un o una estudiante de…</th><th>Porc.</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Nombran reales, racionales o irracionales</td><td>N1.2. Los enteros como modelo. Nombran a los reales, racionales o irracionales y además algún subconjunto notable de los enteros (pares, impares, primos). Asociada a EFI.</td><td>5to: números reales $\mathbb{R} = \ldots$, números irracionales $(\sqrt{5})$, números enteros (1; -3), números primos (3), números pares (2) y números racionales (1,5)</td><td>8 %</td></tr>
<tr><td>N1.3. Identificación del número con su representación. Nombran reales, racionales o irracionales y algún tipo de número por su notación (decimales, fraccionarios, periódicos, negativos, imaginarios, ej. de irracionales, romanos); principalmente decimales y periódicos. Algunas pocas respuestas que dan ejemplos de irracionales y las que dicen romanos. Asociada a EFA.</td><td>3ro: Enteros (1; 2; 3), decimales (1,2), racionales (5; 7), fraccionarios (1/2).</td><td>35 %</td></tr>
<tr><td>N1.4. Conjuntos numéricos escolares. Además de reales, racionales o irracionales dicen naturales y enteros. No dicen complejos. Asociada a MA y MI.</td><td>MI: Reales (1/5) … abarca todo, naturales, enteros (1; 2; 3; 4), irracionales $(\sqrt{5}, \sqrt{2})$ y racionales (1/2; 1/5; 6/5).</td><td>36 %</td></tr>
<tr><td>N1.5. Conjuntos convencionales con estructura. Además de reales, racionales o irracionales dicen naturales, enteros y complejos. La respuesta clásica es sólo estos 6 conjuntos numéricos y en ese orden: naturales, enteros, racionales, reales y complejos muchos nombran también los irracionales. Son todos de MA.</td><td>MA: Naturales (1), enteros (-3), racionales (3/4), irracionales $(\sqrt{2})$, reales (5), complejos $(3 + 2i)$</td><td>11 %</td></tr>
</table>

Tabla 3. Caracterización de las clases de respuestas según la descripción de los números irracionales. Ejemplos literales de respuestas (especificando el NEM del o la participante) y porcentaje de la población perteneciente a cada clase.

Caracterización de las respuestas	**Respuestas de un o una estudiante de...**	**Porc.**
N2.1. Ajenidad - Inseguridad. Desconocen los irracionales. No contestan, o expresan que no saben, o algún aspecto irrelevante. No dan ejemplos.	EFI: *Lo primero que se me ocurre es decir que* (...a los irracionales) *no los podemos concebir o razonar.* No da ejemplos.	29 %
N2.2. Centrada en la resolución de una operación. No tienen solución/resultado (exacta/o). Consideran que los irracionales son los números que no tienen (al dividir o al calcular una raíz) una solución (exacta) o un resultado (exacto o entero). Asociada a 4to y 5to. No hay MA. Generalmente no dan ejemplos, algunos dan ejemplos complejos (raíces de negativos).	5to: *Son imposibles de resolver (no tienen un nº exacto).* Ejemplos: $\sqrt{3}\ \sqrt{5}\ \sqrt{-7}\ \sqrt{10}\ \sqrt{-6}\ \ldots$	17 %
N2.3. Confunden irracionales con racionales. Son los decimales, números con coma. Manifiestan que los irracionales son números decimales o con coma o también que son las fracciones o tienen infinitos decimales periódicos, es decir los confunden con los racionales lo cual se ve reforzado por que brindan como ejemplos números racionales. Hay un subgrupo que considera que son los que sirven para medir con precisión (en el sentido de más o menos decimales). Generalmente dan ejemplos racionales. Asociada a: 3ro, 4to, 5to BI y MI.	4to: *Los números irracionales son números que no son enteros, sino que llevan coma.* Ejemplos: *Las fracciones.*	17 %
N2.4. Centrada en la noción de infinito. Infinitos decimales después de la coma. Consideran que los irracionales tienen infinitas cifras decimales o son infinitos. Suelen dar como ejemplos a ejemplares irracionales, pero también ejemplares racionales. Asociada a: BI, MI y BA.	MI: *Si es irracionales es que va a tener infinitas cifras.* Ejemplos: $0{,}2$; $\sqrt{5}$.	15 %
N2.5. Definición notacional. Infinitos decimales no-periódicos. Manifiestan que son los "decimales no-periódicos". Dan como ejemplo: ejemplares irracionales (raíces de primos- notables) o una generalización correcta centrada en la definición notacional. Asociada a 3ro.	3ro: *los irracionales son los decimales no periódicos.* Otros irracionales: $\sqrt{6}$, $\sqrt{5}$.	7 %
N2.6. Definición literal no-fracción. No se pueden escribir como fracción. Expresan la frase textual: no se pueden escribir como fracción, sin más detalles; sólo esa frase sin especificar "de enteros" o "con denominador distinto de cero", tampoco nombran que son reales. Da idea de una definición literal sin mucha comprensión. Como ejemplo suelen dar una generalización correcta. Asociada a 3ro.	3ro. *Son irracionales... porque no se pueden escribir en fracción.* Otros irracionales: $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$; *cualquier raíz de un número primo.*	9 %

Tabla 3. (continuación)

Caracterización de las respuestas	**Respuestas de un o una estudiante de…**	**Porc.**
N2.7. Definición experta. Los reales que no son cociente de enteros. Dan una definición correcta de irracionales, como: los (números reales) que no se pueden expresar como cociente de enteros con denominador distinto de cero. Como ejemplo raíces de números primos positivos o alguna generalización correcta. Asociada a MA.	MA. *Los irracionales son los reales que se pueden escribir como cociente de enteros* (*con denominador distinto de cero*). Otros irracionales: $\sqrt{5}$; $\sqrt{3}$; *cualquier raíz de un número primo.*	5 %

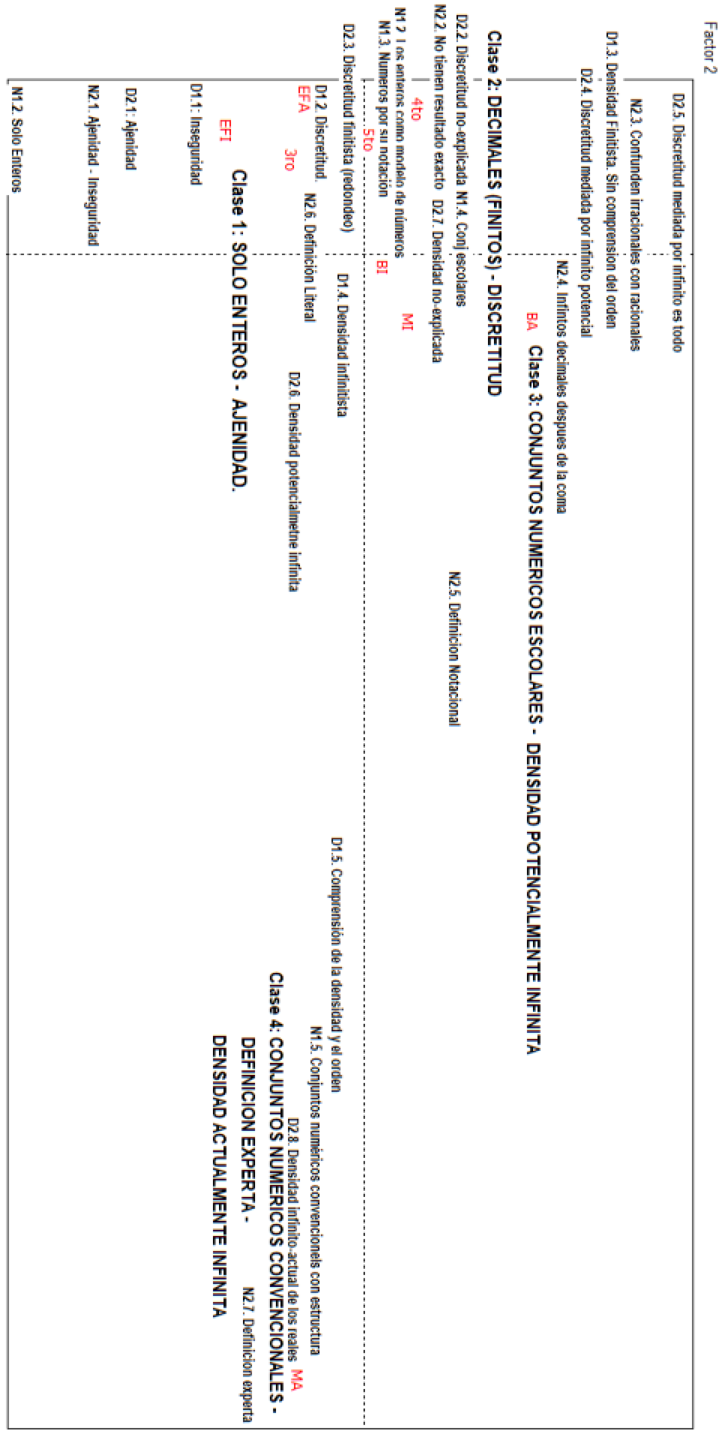
Tabla 4. Modalidades de respuesta según concepción de orden y densidad en $\mathbb{R}$. Ejemplos literales de respuestas (especificando el NEM del o la participante) y porcentaje de la población que presenta cada modalidad.

Caracterización de las respuestas	**Respuestas de un o una estudiante de…**	**Porc.**
D1.1: Inseguridad (respecto a la densidad y el orden de $\mathbb{R}$). Responden sólo cuando se trata de enteros. Consideran que entre 0 y 2 hay algún número, pero no dan ejemplo y para los demás ítems expresan no saber o no contestan.	3ro: Entre 0 y 2: *Si - Unos pocos*. Entre 1/5 y 1/4: *No sé - No sé*. Entre 3,14 y π: *NC - No sé*.	18 %
D1.2. Discretitud. Identifican π con su aproximación decimal. Sólo presentan seguridad cuando se trata de enteros; manifestando que hay pocos o muchos números entre 0 y 2. Pero consideran que entre las fracciones con denominador consecutivo no hay ningún o unos pocos números. Identifican a π con el racional 3,14. Asociada a 5to.	5to: Entre 0 y 2: *Si. 1 – unos pocos*. Entre 1/5 y 1/4: *no sé – unos pocos*. Entre 3,14 y π: *No hay* (*π es el mismo valor*) *– no contesta*.	33 %
D1.3. Densidad finitista. No comprenden el orden. Consideran que entre dos números hay pocos (a lo sumo muchos o muchísimos) números, pero no infinitos. No comprenden el orden ya que dan un número errado (o no saben) entre 1/5 y 1/4 y entre 3,14 y π. Asociada a EFA, 4to y BA.	4to: Entre 0 y 2: *Si. 1; 1,15; 1,7, etc.- Muchísimos*. Entre 1/5 y 1/4: *Si.* 0,05 *– unos pocos*. Entre 3,14 y π: *Si.* 0,005 *– unos pocos*.	21 %
D1.4. Densidad infinitista. No comprenden el orden. Consideran una densidad infinita, sin embargo, no comprenden el orden de $\mathbb{Q}$, ya que dan un número errado (o no saben) entre 1/5 y 1/4 y entre 3,14 y π. Asociada a BI y BA.	BI: Entre 0 y 2: *Si. 1 – Infinitos*. Entre 1/5 y 1/4: *Si. 1/44 – Infinitos*. Entre 3,14 y π: *Si. No sé – Infinitos*.	12 %
D1.5. Comprensión de la densidad y el orden. Consideran la densidad infinita de los reales. Los ejemplos pueden ser dados en forma de fracción o decimal, pero están bien. Asociada a MA y BA.	MA: Entre 0 y 2: *Si.* 0,5 *– Infinitos*. Entre 1/5 y 1/4: *Si.* 0,21 *– Infinitos*. Entre 3,14 y π: *Si.* 3,1413 *– Infinitos*.	16 %

TABLA 5. Modalidades de respuesta según concepción de densidad y supremo de un intervalo. Ejemplos literales de respuestas y porcentaje de la población que representa cada modalidad.

Caracterización de las respuestas	**Respuestas de un o una estudiante**	**Porc.**
D2.1: Ajenidad (frente al problema del supremo). No responden o manifiestan no saber o no entender el planteo. Asociada a EFI y 3ro.	3ro: *No sé - No lo entiendo.*	27 %
D2.2. Discretitud no explicada. Manifiestan que es posible encontrar un número anterior a 2, sin justificar, parafraseando la pregunta o expresando algún aspecto no relevante. Asociada a 4to, 5to y EFA.	EFI: *Sí se puede - Es el número más cerca de 2, que no es 2.*	15 %
D2.3. Discretitud finitista (redondeo). Consideran que es posible encontrar un número "anterior" a uno dado y éste es un decimal finito o que se puede estimar, redondear o que depende de la escala.	4to: *pienso que, sí se puede identificar, me parece que seria* 1,9.	9 %
D2.4. Discretitud mediada por la concepción de infinito potencial. Consideran que es posible encontrare un número "anterior" y este es un número con infinitos decimales. Asociada a BA.	BA: *es posible ya que el número* 1,999 . . . (*infinitos nueves*) *es menor que 2 y pertenece al intervalo - basándome en el número como un decimal. Todo número menor a 2 por más cercano que sea pertenecerá al intervalo.*	15 %
D2.5. Discretitud mediada por la concepción de infinito es todo. Consideran que debe existir tal número porque al ser infinitos deben estar todos los posibles.	BI: *Creo que sí, hay uno anterior, porque dentro de estos dos Nº hay infinitos números con coma - Le explicaría que dentro del 1 y el 2 hay infinitos números, como ejemplo le daría el 3/2 que equivale a* 1,5 *que es un número y como este hay más, hay infinitos.*	8 %
D2.6. Densidad potencialmente infinita. Consideran que no se puede encontrar un número "anterior", porque hay infinitos números y nunca se llegaría o siempre se podría agregar un decimal. Asociada a BI y MI.	MI: *Yo creo que no se puede, sería una tarea interminable - Sería como encontrar* 1,9 *e ir agregando decimales* (1,99 . . . *etc.*)	15 %
D2.7. Densidad no explicada. Consideran que no se puede encontrar un número "anterior", sin explicar su pensamiento.	5to: *creo que no se puede – no sé cómo explicarlo.*	5 %
D2.8. Densidad infinito-actual de los reales. Consideran que no existe un número "anterior", justificando por la densidad de los reales. Asociada a MA.	MA: *No, porque siempre existe uno más cercano a 2 debido a la densidad de* $\mathbb{Q}$, *es decir, entre dos reales siempre existe un racional.*	6 %

4.2. Asociaciones entre los modos de respuesta a las cuatro tareas. A continuación, (Cuadro 5) presentamos el primer plano factorial del AFCM realizado sobre las y los estudiantes descritos por sus modalidades de respuesta a las cuatro tareas.



Cuadro 5. Primer plano factorial de AFCM de las y los estudiantes descritos por sus modalidades de respuesta y de NEM.

En el AFCM de las y los estudiantes descritos por sus modalidades de respuesta a las cuatro tareas y su NEM encontramos que el principal factor de variabilidad corresponde a respuestas que expresan que *comprenden el orden y la densidad de los reales* (*como actualmente infinita*) y dan una definición correcta de los irracionales, asociada a MA oponiéndose a las respuestas que expresan una concepción discreta de los números, asociados a los enteros o a los decimales finitos, asociadas principalmente a 3ro, 4to, 5to, EFI y EFA. En una zona intermedia, las respuestas que muestran una visión de la densidad como potencialmente infinitas asociadas a BI, MI y BA.

El segundo factor discrimina entre las modalidades que expresan *Ajenidad* o *Inseguridad* frente a estos aspectos asociadas a EFI y EFA y las que proponen una visión de *densidad potencialmente infinita* y los números como los conjuntos numéricos escolares asociada principalmente a BA.

4.3. Clasificación de las respuestas a las cuatro tareas. Presentamos las clases obtenidas en la CJA posterior al AFCM del apartado anterior. Cada clase agrupa estudiantes cuyas respuestas sean similares en el sentido de que posean casi las mismas asociaciones entre los modos de respuesta en las cuatro tareas. Informaremos, para cada clase, la cantidad de estudiantes que la constituyen, porcentaje de la población que representan, modalidades de respuestas y de NEM asociadas especialmente y una caracterización según las ideas relacionadas con los modos de respuesta asociados.

Clase 1 **– Sólo Enteros – Ajenidad e Inseguridad. N=86 (28 % de la población). Asociada a EFI.**

Modalidades de respuesta asociadas: N2.1. Ajenidad. Inseguridad. Desconocen los irracionales. D2.1: Ajenidad (problema del supremo). N1.2. Los Enteros como modelo de número. N1.3. Identificación del número con su representación. D1.1: Inseguridad con la densidad y el orden de los reales.

Síntesis de ideas presentes: Consideran a los enteros como modelo de número o identifican al número con su representación, no conocen los irracionales. Exhiben inseguridad frente al orden y la densidad de los reales. Son estudiantes de secundaria o de Ed. Física

Clase 2 **- Los números son los decimales finitos - Discretitud Explícita. N=117 (38 % de la población). Asociada a 4to (mayormente de compuesta por estudiantes de secundaria).**

Modalidades de respuesta asociadas: N2.3. Confunden irracionales con racionales N1.3. Identificación del número con su representación. D1.2. Discretitud. Identifican π con su aproximación decimal. N2.2. No tienen solución/resultado (exacta/o). D2.2: Discretitud - no explicada. D2.3. Discretitud finitista (redondeo). D2.5. Discretitud mediada por la concepción de infinito es todo.

Síntesis de ideas: Identificación del número con su representación. Números son los Enteros y los decimales finitos, corrimiento de los enteros a los décimos o centésimos. Visión discreta explícita de los números.

Clase 3 **- Conjuntos numéricos escolares. Densidad potencialmente infinita. N=76 (25 % de la población). No tienen NEM asociado especialmente.**

Modalidades de respuesta asociadas: D2.6. Densidad potencialmente infinita. N2.4. Centrada en la noción de infinito. D1.4. Densidad infinitista. D2.4. Discretitud mediada por la concepción de infinito potencial. N1.4. Números son los elementos de los conjuntos numéricos escolares.

Síntesis de ideas: Números son los conjuntos numéricos escolares (Enteros - Decimales-Fracciones - Racionales -Reales). Conciben a los números como un conjunto infinito (potencialmente) denso.

Clase 4 **- Conjuntos numéricos con estructura. Densidad actualmente infinita. Definición experta de los irracionales. N=28 (9 % de la población). Asociada a MA.**

Modalidades de respuesta asociadas: N1.5. Conjuntos convencionales con estructura.

N2.7. Definición experta. D1.5: Comprensión de la densidad y el orden. D2.8. Comprenden la densidad y completitud de los reales. N2.5. Definición notacional. No hay estudiantes de secundaria en esta clase.

Síntesis de ideas: Número es elemento de un conjunto numérico con estructura. Definición correcta (sea experta o notacional) de los irracionales. Comprenden el orden y la densidad actual de los reales.

§5. Discusión y conclusiones

Encontramos un gradiente en la profundidad de las concepciones de los reales como números que comienzan con las y los estudiantes que (i) **sólo consideran como números a los enteros y presentan ajenidad o inseguridad frente al orden y la densidad de los números reales**. Esta clase representa el 28 % de la población y está compuesta principalmente por estudiantes de secundaria o de Educación Física, que consideramos con menores estudios en matemática.

Es notable cómo las y los estudiantes de Educación Física, que no han estudiado matemática en la universidad, han naturalizado, en la secundaria como *número* sólo a los enteros. Estos resultados coinciden con Arcavi y cols. (1987); Fischbein y cols. (1994, 1995); Tirosh y cols. (1998), quienes encontraron que estudiantes secundarios y futuros maestros de matemática consideran a los enteros como modelo de número o identifican al número con su representación y no conocen los irracionales. Si bien, alguno pareciese conocer a las fracciones y los decimales lo suelen tomar como conjuntos disjuntos tal como habían encontrado en poblaciones similares Khoury y Zazkis (1994); O'Connor (2001); Moseley (2005). Estas y estos estudiantes exhiben inseguridad frente al orden y la densidad de los reales, lo cual es coherente con pensar sólo en los enteros y enfrentarse a un orden compatible con la densidad que es la propiedad que distingue a los números racionales de los números enteros. Esta ajenidad frente a la densidad es acorde también con los resultados de (entre otros trabajos) Juan y cols. (2012); Montoro (2005); Waldegg (1993), que han observado que las y los estudiantes con menor estudio de matemática suelen mostrar inseguridad o resistencia frente a tareas que de alguna manera impliquen el infinito.

En una zona intermedia y como la idea más difundida en la población (38 %), se ubica la concepción de (ii) **identificación de los números con los decimales finitos y una discretitud explícita de los números**, idea que encontramos principalmente entre las y los estudiantes de secundaria, los ingresantes a las carreras científicas e incluso en estudiantes de los últimos años de Biología, podríamos decir que la mayoría de las y los participantes de este estudio, que están estudiando matemática, han naturalizado el concepto de número real identificándolo con el de decimal (finito) y discreto. Pareciera que en su comprensión hay un corrimiento de los enteros a los décimos o centésimos. Vemos aquí como una transferencia incorrecta de las propiedades de los números naturales a los números racionales puede llevar a una comprensión deficiente de los números racionales (Vamvakoussi y Vosniadou, 2004, 2007; Yujing y Yong-Di, 2005). Puede observarse que las y los estudiantes de esta clase trasladan a los racionales el tipo de orden de los naturales (un racional puede tener un siguiente) y no reconocen los irracionales, lo que concuerda con lo encontrado por Behr y cols. (1983), Malara (2001), Merenluoto y Lehtinen (2002) y Palacios-Amaya y cols. (2018).

Entre estas y estos estudiantes encontramos una concepción de los reales como discretos y manifiestan una visión finitista asociada al redondeo (Palacios-Amaya y cols., 2018; Widjaja y cols., 2008), que extiende la propiedad de los conjuntos finitos a los conjuntos infinitos (Juan y cols., 2012; Monaghan, 2001; Montoro y cols., 2016; Waldegg, 1993). En otros casos una visión asociada a la idea de que *en infinito debe estar todo*, concepción que identificamos en otros trabajos con poblaciones similares, pero con tareas de conteo y que no hemos encontrado en otra bibliografía de las concepciones sobre el número real (Juan y Montoro, 2015; Montoro, 2005).

Vemos, también, en estas y estos estudiantes, de la zona intermedia, que, tal como encontraron Zazkis y Sirotic, las diferentes representaciones del número real influyen en las respuestas de las y los estudiantes con respecto a la irracionalidad y se observó confusión entre los números irracionales y su aproximación decimal (Sirotic y Zazkis, 2007a, 2007b; Zazkis y Sirotic, 2004, 2010). Notamos que esta clase se encuentran las respuestas del tipo *Definición literal no-fracción*, que solo representa el 9 % de la población. Estudiantes que en este caso expresan la frase textual: *no* *se pueden escribir como fracción*, sin más detalles; sólo esa frase sin especificar que son números reales. Da idea de una definición literal sin mucha comprensión, son principalmente estudiantes de 3ro de secundaria, daría la impresión, por el resto de las respuestas asociadas, que hay incoherencia entre las intuiciones de los participantes y su conocimiento formal (definición) similar a lo encontrado por Sirotic y Zazkis (2007b).

También en una zona intermedia encontramos una concepción de (iii) **densidad infinito potencial de los números**, son estudiantes que parecen identificar los reales con los racionales. Para estas y estos estudiantes los números son los conjuntos numéricos escolares. Conciben a los números como un conjunto infinito (potencialmente) denso. Representa el 25 % de la población, casi todos universitarios, no especializados en Matemática, lo cual coincide con que frecuentemente los jóvenes conciben al infinito en forma (intuitiva) como potencial (Arrigo y D'Amore, 2004; Fischbein y cols., 1979; Monaghan, 2001; Montoro y Scheuer, 2004), a pesar de haber estudiado los racionales y los irracionales, no hacen un uso flexible de diferentes representaciones de estos. Al igual que parte de la población estudiada por Peled y Hershkovitz (1999) se encuentran con la dificultad de mantener una concepción potencial del infinito.

Finalmente, sólo unos pocos estudiantes (9 %), todos estudiantes avanzados de Matemática, poseen concepciones de número como elemento de un (iv) **conjunto numérico correctamente diferenciado** brindando una descripción de los irracionales con características necesarias y suficientes, describiéndolos como números reales que no se pueden expresar como *cociente* de enteros y con denominador distinto de cero y/o como aquellos que poseen infinitos decimales no-periódicos y una visión infinito actual de la densidad y del supremo de un intervalo.

Respecto a los números irracionales, mostramos que las dificultades en su comprensión no son sólo de naturaleza intuitiva, sino que implican una cierta profundidad en el estudio, que solo obtienen las y los estudiantes avanzados de matemática. Esta es una fuerte indicación de que la profundidad del conocimiento matemático juegan un papel importante para la mejor comprensión de los números reales, aun en las nociones más básicas, como son la diferenciación de racionales e irracionales, orden y densidad (Voskoglou y Kosyvas, 2012). Esto va de la mano con los estudios que indagan sobre concepciones del infinito matemático y que muestran que la comprensión de esta noción requiere de contextos educativos que propicien la reflexión matemática y un estudio específico (Artigue, 1995; Moreno-Armella y Waldegg, 1995; Fischbein y cols., 1994; Monaghan, 2001; Montoro, 2005; Montoro y Scheuer, 2006; Juan y cols., 2012; Montoro y cols., 2016), dejando en evidencia la relación intrincada y evidente en la historia, de los números reales con el infinito matemático.

Encontramos apropiada la metodología de este trabajo para cumplir con nuestro objetivo de estudiar las concepciones que han naturalizado, sobre el número real, estudiantes de secundaria, ingresantes a la universidad y de los últimos años de la universidad (cursando distintas carreras), sin embargo, al no tener información de cómo estos estudiantes estudiaron estas nociones, poco podemos decir sobre las dificultades derivadas de la enseñanza. Sin embargo, nuestros resultados pueden dar pistas para la enseñanza en varios sentidos ya que ponen de manifiesto que las y los estudiantes no han logrado una comprensión acabada de las propiedades de los números reales aquí abordadas. Al sacar a la luz las nociones que han construido las y los estudiantes, la enseñanza puede prever que éstas se exterioricen y se realice un trabajo específico, aclarando concepciones alternativas y explicitando la complejidad de estas nociones de modo de facilitar una más acabada extensión de los campos numéricos.

Es notable también la diversidad de ideas con las que pueden operar las y los estudiantes de un mismo grupo educativo, aún frente a una misma definición explicitada por el docente. Mostrando que lejos de ajustarse a una expectativa de homogeneidad, en cada grupo educativo (excepto aquel con mayor nivel de estudio específico, MA) conviven un amplio rango de supuestos y nociones. Es decir: la diversidad, lejos de ser una anomalía, es una condición esperable para la enseñanza. Además, hemos mostrado que el supuesto imperante en la enseñanza de la matemática universitaria de que la idea de número real puede resultar 'naturalizada' desde la secundaria o accesible directamente al estudiante universitario, puede convertirse en un serio obstáculo para favorecer la comprensión de este concepto indispensable para incursionar en las asignaturas matemáticas de sus carreras universitarias.

§6. Agradecimientos

A los y las estudiantes e instituciones participantes, a la Dra. Nora Scheuer (IPEHCS - CONICET) por el asesoramiento en todas las etapas de la investigación y sus atentas lecturas y discusiones de estos resultados. A los y las integrantes del Grupo de Pensamiento y Educación Matemática del Departamento de Matemática del CRUB – UNCo por su colaboración en todas las etapas de esta investigación. El trabajo contó con el apoyo de la Universidad Nacional del Comahue, mediante los Proyectos de Investigación: B186 -B221 subvencionados por la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la UNCo.

Bibliografía

Arcavi, A., Bruckheimer, M., y Ben-Zvi, R. (1987). History of Mathematics for teachers: the case of Irrational Numbers. *For the Learning of Mathematics*, *7*(2), 18–23.

Arrigo, G., y D'Amore, B. (2004). Otros hallazgos sobre los obstáculos en la comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor. *Educación Matemática*, *16*(2), 5–19.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios de cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, y P. Gómez (Eds.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (p. 97-140). Iberoamérica.

Ausubel, D., Novak, J., y Henesiam, H. (1978). *Educational psychology: A cognitive view*. New York, USA: Holt, Rinehart and Winston.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., y Silver, E. (1983). Acquisition of Mathematics Concepts and Processes. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Rational number concepts* (p. 91-25). Academic Press.

Benzécri, J.P. (1973). *L'analyse des données* (*Vol* 2). Dunod.

Bergé, A. (2008). The completeness property of set of real numbers in the set of real numbers in the transition from calculus to analysis. *Educational Studies in Mathematics*(67), 217–235. doi: 10.1007/s10649-007-9101-5

Bergé, A., y Sessa, C. (2003). Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. *Revista Latinoamericana en Matemática Educativa*, *6*(3), 163–197.

Cantor, G. (1871). Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. *Mathematische Annalen*, *V*, 123–132.

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: Conceptions et Obstacles* (Tesis Doctoral no publicada). Grenoble, Francia.

Crivisqui, E. (1993). *Análisis Factorial de Correspondencias. Un instrumento de investigación en ciencias sociales.* . Asunción, Paraguay: Laboratorio de Informática Social de la Universidad Católica de Asunción.

Dedekind, J. W. R. (1963). *Essays on the theory of numbers: I. Continuity and irrational numbers. II. The nature and meaning of numbers.* New York, USA: Dover.

Fischbein, E., Jehiam, R., y Cohen, D. (1994). *The irrational numbers and the corresponding epistemological obstacles* (Vol. 2).

Fischbein, E., Jehiam, R., y Cohen, D. (1995). The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*(29), 29–44.

Fischbein, E., Tirosh, D., y Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*(10), 3–40.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht, Holanda: D. Reidel.

Herscovics, N. (1989). *Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra.* Budapest, Hungría: National Council of Teachers of Mathematics.

Juan, M. T., y Montoro, V. (2008). Concepciones de estudiantes de nivel medio sobre aspectos básicos de la noción de infinito en un contexto de conteo. *Revista de*

Educación Matemática. Descargado de https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10443

Juan, M. T., y Montoro, V. (2015). *Cuando infinito es todo* [*Comunicación de Reporte de Investigación*]. XXVIII Reunión de Educación Matemática, Unión Matemática Argentina. Santa Fe, Rep. Argentina.

Juan, M. T., Montoro, V., y Scheuer, N. (2012). Colecciones infinitas. Ideas de estudiantes de escuelas secundarias. *Educación Matemática*, *24*(2), 61–90.

Khoury, H. A., y Zazkis, R. (1994). On fractions and non-standard representations: Pre-service teachers' concepts. *Educational Studies in Mathematics*(27), 191–204.

Lakoff, G., y Núñez, R. (2000). The Basic Metaphor of Infinity. En *Where Mathematics Comes from: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being* (pp. 155–180). Basic Books.

Lebart, L., Morineau, A., y Fénelon, J. (1979). *Traitement de Donnés Statistiques*. Dunod.

Lebart, L., Salem, A., y Bécue Bertaut, M. (2000). *Análisis estadístico de textos*. Milenio.

Malara, N. (2001). *From fractions to rational numbers in their structure: Outlines for an innovative didactical strategy and the question of density* (Vol. II). Praga, Rep. Checa.

Mayberry, J. (2001). The Foundations of Mathematics. En *Theory of Sets.* Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.

Merenluoto, K. (2003). *Abstracting the density of numbers on the number line a quasi - experimental study.* (Vol. 3). Bergen, Noruega.

Merenluoto, K., y Lehtinen, E. (2002). Conceptual change in mathematics: Understanding the real numbers. En M. Limon y L. Mason (Eds.), *Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice* (pp. 233–258). Kluwer Academic Publishers.

Monaghan, J. (2001). Young People's Ideas of Infinity. *Educational Studies in Mathematics*(48), 239–258.

Montoro, V. (1999). La teoría de conjuntos. Una mirada histórica y epistemológica. *Cuadernos Universitarios. Centro Regional Bariloche.*, *33*(0).

Montoro, V. (2005). Al infinito y más acá: concepciones de estudiantes universitarios. *Infancia y Aprendizaje*, *28*(4), 409–427.

Montoro, V., y Scheuer, N. (2004). ¿Cómo piensan el infinito matemático estudiantes universitarios de distintas carreras? *Épsilon*, *60*(3), 435–447.

Montoro, V., y Scheuer, N. (2006). *Distintas formas de pensar el infinito* (Vol. 19).

Montoro, V., Scheuer, N., y Pérez-Echeverría, M. P. (2016). ¿Cuán abundantes son los conjuntos de números? Estudiantes comparando infinitos. *Educación Matemática*(28), 145–174.

Moreno-Armella, L., y Waldegg, G. (1995). Variación y representación: del número al continuo. *Educación Matemática*, *7*(1), 12–28.

Moseley, B. (2005). Students' Early Mathematical Representation Knowledge: The Efects of Emphasizing Single or Multiple Perspectives of the Rational Number Domain in Problem Solving. *Educational Studies in Mathematics*(60), 37–69.

O'Connor, M. C. (2001). "Can any fraction be turned into a decimal?" A case study of a mathematical group discussion. *Educational Studies in Mathematics*(46), 143–185.

Palacios-Amaya, M., Bianchi, V., y Montoro, V. (2018). Estudiantes de escuela secundaria pensando los números racionales. *Revista de Educación Matemática*, *33*(3), 5–26.

Peled, I., y Hershkovitz, S. (1999). Difficulties in knowledge integration: Revisiting Zeno's paradox with irrational numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *30*(1), 39–46.

Pozo, J. I. (2014). *Psicología del Aprendizaje Humano: adquisición de conocimiento y cambio personal*. España: Morata.

Pozo, J. I., y Gómez-Crespo, M. A. (1998). *Aprender y enseñar ciencia. Del conocimiento cotidiano al conocimiento científico*. España: Morata.

Pozo, J. I., y Scheuer, N. (1999). Las concepciones sobre el aprendizaje como teorías implícitas. En J. Pozo y C. Monereo (Eds.), *El aprendizaje estratégico* (pp. 87–108). Santillana.

Reina, L., y Wilhelmi, M. R. (2017). *Mimetismo ostensivo de objetos matemático. El caso de los números irracionales.*

Rico, L., Castro, E., y Romero, I. (1996). *The role of representation systems in the learning of numerical structures* (Vol. 1). Valencia, España.

Romero, I., y Rico, L. (1999). Construcción social del concepto de número real en alumnos de secundaria: Aspectos cognitivos y actitudinales. *Enseñanza de las Ciencias*, *17*(2), 259–272.

Santinelli, R. (1999). La teoría de conjuntos. Una mirada histórica y epistemológica. *Cuadernos Universitarios. Centro Regional Bariloche.*, *34*(0).

Sfard, A. (1994). Reification as the Birth of Metaphor. *The Learning of Mathematics*, *14*(1), 44–55.

Sfard, A. (2010). A theory bite on infinity: A companion to falk. *Cognition and Instruction*, *28*(2), 210-218. Descargado de https://doi.org/10.1080/07370001003676637 doi: 10.1080/07370001003676637

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits . *Educational Studies in Mathematics*(18), 371–397.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. Brigthon, Inglaterra: Falmer Press.

Sirotic, N., y Zazkis, R. (2004). *Irrational numbers: dimensions of knowledge.*

Sirotic, N., y Zazkis, R. (2007a). Irrational Numbers: The Gap Between Formal and Intuitive Knowlwdge. *Educational Studies in Mathematics*(65), 49–76.

Sirotic, N., y Zazkis, R. (2007b). Irrational numbers on the number line: where are they? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *38*(4), 477–488.

Stafylidou, S., y Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, *14*, 503–518.

Steiner, R. (1984). Teaching About the Real Numbers. *The American Mathematical Monthly*, *91*(3), 202–203. doi: 10.1080/00029890.1984.11971526

Steinle, V., y Pierce, R. (2006). *Incomplete or incorrect understanding of decimals: an important deficit for student nurses* (Vol. 5). Praga, República Checa.

Stevenson, W. S. (2000). *Exploring the Real Numbers*. Nueva Jersey, Estados Unidos: Prentice Hall.

Tall, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (Vol. 11, pp. 3–21). Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics*(48), 200–238.

Tall, D. (2004). *Thinking Through Three Worlds of Mathematics.* Bergen, Noruega.

Tall, D., y Schwarzenberger, R. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*(82), 44–49.

Tall, D., y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics. With Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151–169.

Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber, A., y Wilson, J. (1998). *Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers.* Descargado de `http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Pros.El.Tchrs.html`

Vamvakoussi, X., y Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, 453-467.

Vamvakoussi, X., y Vosniadou, S. (2007). How many numbers are there in a rational numbers' interval? Constraints, synthetic models and the effect of the number line. En S. Vosniadou, A. Baltas, y X. Vamvakoussi (Eds.), *Reframing the conceptual change approach in learning and instruction* (pp. 265–282). Elsevier.

Vamvakoussi, X., y Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and instruction*, 181–209. doi: 10.1080/07370001003676603

Verschaffel, L., Greer, B., y Torbeyns, J. (2006). Numerical thinking. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 51–82). Sense Publishers.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *14*(3), 293–305.

Vinner, S., y Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), 356–366.

Voskoglou, M., y Kosyvas, G. (2012). Analysing students' difficulties in understanding real numbers. *REDIMAT*, *1*(3), 301–226.

Vosniadou, S. (Ed.). (2008). *International handbook of research on conceptual change.* Routledge.

Waldegg, G. (1993). *La comparaison des ensembles infinis: un cas de résistance à l'instruction* (Vol. 5).

Ward, J. (1963). Hierarchical grouping to optimize an objective function. *Journal American Statistic Association*(58), 236–244.

Widjaja, W., Stacey, K., y Steinle, V. (2008). Misconceptions about density of decimals: Insights from pre-service teachers' work. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*, *31*(2), 117–131.

Yujing, N., y Yong-Di, Z. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27–52.

Zazkis, R., y Sirotic, N. (2004). *Making sense of irrational numbers: Focusing on representation* (Vol. 4). Bergen, Noruega.

Zazkis, R., y Sirotic, N. (2010). Representing and Defining Irrational Numbers: Exposing the Missing Link. *CBMS Issues in Mathematics Education*(16), 1–27.

Virginia Montoro
Departamento de Matemática. Centro Regional Universitario Bariloche.
Universidad Nacional del Comahue. (Rep. Argentina). Grupo Vinculado al IPEHCS (Instituto CONICET – UNCo)
(✉) *vmontoro@gmail.com*

Martha Ferrero
Departamento de Matemática. Centro Regional Universitario Bariloche.
Universidad Nacional del Comahue. (Rep. Argentina).
(✉) *marthaferrero@gmail.com*

Recibido: *15 de marzo de 2021.*
Aceptado: *11 de marzo de 2022.*
Publicado en línea: *25 de abril de 2022.*