CAPÍTULO 2

2

ECUACIONES EN RECURRENCIA

José Manuel Gutiérrez Jiménez
Universidad de La Rioja

Palabras clave

- *Sucesiones*
- *Combinatoria*
- *Ecuación característica*
- *Matemática Discreta*

Las relaciones de recurrencia son una técnica que sirve para resolver algunos problemas combinatorios de forma sistemática. Pueden ser de gran utilidad para problemas donde el número de objetos a considerar depende de un parámetro que va creciendo, haciendo inviables otro tipo de recuentos. En ocasiones, hay que tener una buena dosis de ingenio para deducir una ley recurrente que nos permita abordar el problema.

2.1 Introducción

Antes de definir la que se entiende por una *recurrencia*. vamos a introducir algunos conceptos previos. Una sucesión es una función f definida sobre el conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$:

$$f : \mathbb{N} \to \Omega.$$

Dependiendo de cómo sea el conjunto Ω, podemos tener diversos tipos de sucesiones:

- $\Omega = \mathbb{Z}$: sucesiones de números enteros.
- $\Omega = \mathbb{R}$: sucesiones de números reales.
- $\Omega = \mathbb{C}$: sucesiones de números complejos.
- $\Omega = \mathbb{R}^2$: sucesiones de vectores en el plano.
- $\Omega = \mathbb{R}^{m\times n}$: sucesiones de matrices de tamaño $m \times n$.

Aunque puede haber sucesiones definidas en los conjuntos anteriores y en muchos otros (espacios de funciones, por ejemplo), nuestro interés se centra en el caso de las sucesiones de números reales, $\Omega = \mathbb{R}$. Algunas matizaciones sobre la definición de sucesión:

- Se suele denotar $x_n = f(n)$ al n-ésimo término de la sucesión definida por f, que pasa a escribirse (x_n), e incluso, abusando de la notación, simplemente x_n.
- En algunos ejemplos puede ser conveniente definir la sucesión en $\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Es más, el primer elemento del conjunto donde está definida la sucesión puede ser 1, 0, -1, 2 o cualquier otro número entero. Lo importante que a partir de un número dado estén todos los consecutivos hasta el infinito.

Una sucesión se puede definir de distintas maneras:

- Mediante una *fórmula explícita*, como por ejemplo $x_n = n + 2^n + (-1)^n$. En una sucesión dada de forma explícita, para calcular un término, simplemente hay que sustituir n por el valor correspondiente, como puede verse en el Cuadro 2.1.

n	1	2	3	5	10	25
x_n	2	7	10	36	1035	33554456

Cuadro 2.1: Algunos términos de la sucesión $x_n = n + 2^n + (-1)^n$.

- Mediante una *recurrencia*, como por ejemplo, $x_1 = 2,\ x_2 = 5,\ x_n = 3x_{n-1} - x_{n-2}$, $n \geq 3$. En una sucesión dada de forma recurrente, para calcular un término, hay que calcular todos los anteriores, como se hace en el Cuadro 2.2.

n	3	4	5	6	7	8
x_n	13	34	89	233	610	1597

Cuadro 2.2: Primeros términos de la sucesión $x_n = 3x_{n-1} - x_{n-2}$, con $x_1 = 2$, $x_2 = 5$.

Dos problemas típicos relacionados con las recurrencias son los siguientes:

1. Encontrar la forma explícita de una sucesión dada en forma recurrente.
2. Plantear una recurrencia que nos ayude a resolver un problema combinatorio en el que, por ejemplo, sea necesario contar algo que dependa de un número natural n.

Vamos a ilustrar este planteamiento con un par de ejemplos clásicos.

Ejemplo 2.1 (Las torres de Hanoi, Edward Lucas, 1883) Tenemos una torre de n discos, apilados uno sobre otro en orden decreciente, insertados en una de tres agujas. El objetivo es pasar toda la torre de discos de una aguja a otra, moviendo sólo un disco cada vez y de forma que nunca puede colocarse un disco mayor sobre otro menor. Si, por ejemplo, tenemos $n = 64$ discos, ¿cuántos movimientos son necesarios para resolver el problema?

Nota: *El problema planteado por Lucas estaba basado en una leyenda en la que unos monjes tenían que mover los 64 discos. Cuando hubieren acabado su tarea, el mundo llegaría a su fin.*

Solución *Para resolver el problema, podemos tener en cuenta algunos consejos. El primero es introducir una notación adecuada. Por ejemplo, llamaremos T_n al número mínimo de movimientos necesarios para pasar una torre de n discos de una aguja a otra. Después podemos encontrar la solución del problema para los casos más sencillos. En este problema, para una torre con pocos discos. En la Figura 2.1 se muestra el caso de una torre con 3 discos.*

Así, es sencillo comprobar que $\quad T_1 = 1; \quad T_2 = 3; \quad T_3 = 7; \quad T_4 = 15.$

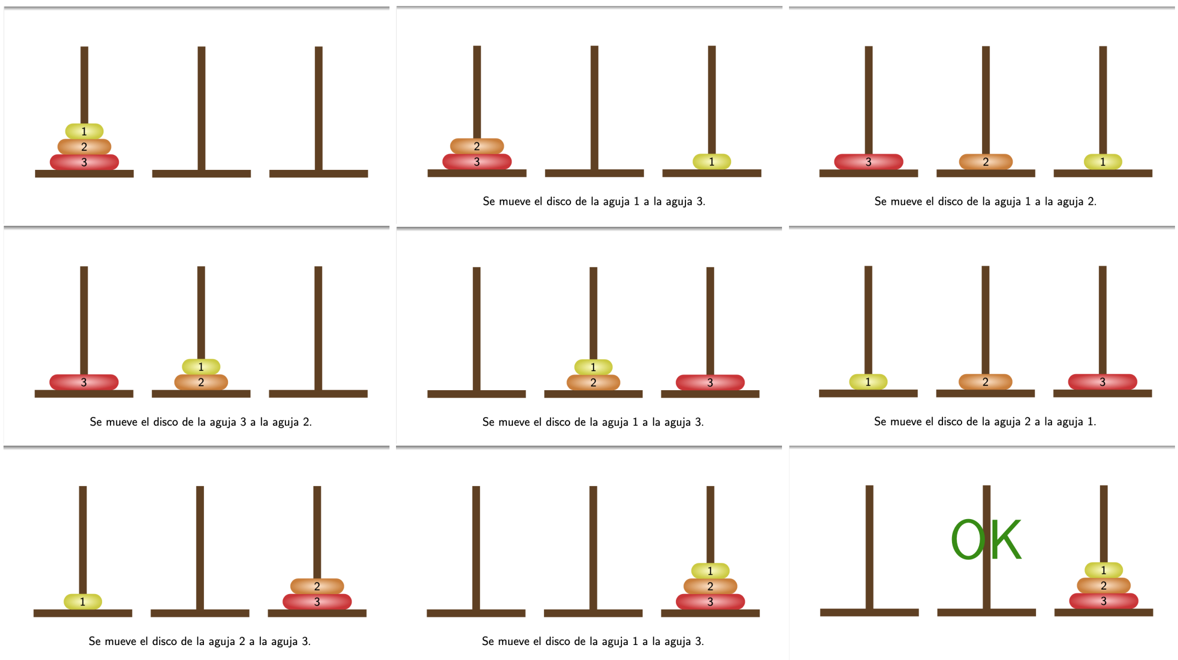


Figura 2.1: Movimientos necesarios en el problema de las Torres de Hanoi para el caso de 3 discos.

Una vez analizados los primeros casos y antes de calcular T_5 directamente, puede resultar conveniente buscar una estrategia recursiva *para resolver el problema. Dicha estrategia viene dada por los siguientes pasos:*

- *Paso 1: transferir los $n-1$ discos superiores a la aguja intermedia.*
- *Paso 2: pasar el último disco a la tercera aguja.*
- *Paso 3: mover los $n-1$ discos de la aguja intermedia a la tercera.*

En términos de T_n, el número de movimientos necesarios para transferir una torre de n discos es:

- *T_{n-1} para transferir los $n-1$ primeros discos a la aguja intermedia.*
- *Un movimiento para pasar el último disco a la tercera aguja.*
- *T_{n-1} para transferir los $n-1$ discos de la aguja intermedia a la tercera.*

Se llega así a la recurrencia:

$$T_n = 2T_{n-1} + 1, \qquad T_1 = 1. \tag{2.1}$$

Con ayuda de la recurrencia de la ecuación (2.1) *podemos resolver el problema combinatorio de las Torres de Hanoi. Incluso, para valores de* n *pequeños, podemos encontrar la solución sin muchas dificultades, como se muestra en el Cuadro 2.3.*

n	1	2	3	4	5	6	7	8
T_n	1	3	7	15	31	63	127	255

Cuadro 2.3: Primeros términos de la sucesión dada por (2.1).

Ahora bien, para valores de n *grandes el proceso se vuelve largo y pesado. Es conveniente buscar la forma explícita de la sucesión. A la vista de los primeros términos podemos conjeturar que*

$$T_n = 2^n - 1 \quad n \geq 1. \tag{2.2}$$

Sin embargo, esto no es una prueba. Una demostración rigurosa de la fórmula (2.2) *puede hacerse usando el principio de inducción. En primer lugar, tenemos que la base de la inducción se cumple, ya que para* $n = 1$ *se tiene* $T_1 = 2^1 - 1 = 1$*. En una segunda etapa, supongamos ahora que la fórmula es cierta para* $n < k$ *y probemos que entonces también es cierta para* $n = k$*. Como*

$$T_k = 2T_{k-1} + 1,$$

usando la hipótesis de inducción para $k - 1$*:*

$$T_k = 2(2^{k-1} - 1) + 1 = 2^k - 1,$$

por lo que la fórmula también es cierta para $n = k$*. De esta forma, hemos probado que* $T_n = 2^n - 1$ *para* $n \in \mathbb{N}$*. Para el problema de los monjes propuesto por Lucas (*$n = 64$*), se tiene que*

$$T_{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Para hacernos una idea de lo desorbitadamente grande que es esta cantidad, vamos a suponer que los monjes hacen un cambio cada segundo. Entonces, el mundo se acabaría aproximadamente 600 000 *millones de años después del primer movimiento. Teniendo en cuenta que la edad del Universo se estima que es* 13 770 *millones de años, han de pasar algo más de 43 veces la edad del Universo.*

Ejemplo 2.2 (Plano dividido por rectas de Jacob Steiner, 1826) ¿Cuál es el número máximo de regiones R_n en que queda dividido el plano por n rectas?

Solución *En este caso, el propio enunciado del problema ya nos proporciona una notación adecuada* R_n *para la solución del mismo. Antes de intentar resolverlo, hacemos un par de reflexiones que nos pueden ayudar a buscar la solución. Así, hacemos notar que para alcanzar el máximo número de regiones, no puede haber dos rectas paralelas ni tres rectas que sean concurrentes (esto es, que coinciden) en un punto.*

A continuación analizamos los casos más sencillos. Si no hay ninguna recta, $n = 0$*, sólo hay una región (*$R_0 = 1$*). Si hay una recta habrá dos regiones (*$R_1 = 2$*). Para dos rectas el número de regiones es* $R_2 = 4$ *y para tres rectas,* $R_3 = 7$*.*

El siguiente paso es buscar una recurrencia que nos permita resolver el problema. Si la recta n*-ésima corta a cada una de las* $n - 1$ *rectas anteriores, dicha recta queda dividida en* n *segmentos, cada uno de los cuales divide una región existente en dos partes. Por tanto*

$$R_n = R_{n-1} + n.$$

Como $R_0 = 1$, podemos encontrar una fórmula explícita para R_n usando la recurrencia una y otra vez. En efecto,

$$\begin{aligned} R_n &= R_{n-1} + n \\ &= R_{n-2} + (n-1) + n \\ &= R_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n \\ &= \cdots \\ &= R_0 + 1 + 2 + \cdots + n = 1 + 1 + 2 + \cdots + n. \end{aligned}$$

Así, obtenemos finalmente la expresión

$$R_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \geq 0.$$

2.2 Recurrencias lineales

En ocasiones se puede encontrar un procedimiento para calcular el término general de una sucesión que viene dada de forma recurrente, como hemos visto en los ejemplos de la sección anterior. Lo mismo ocurre cuando tenemos una recurrencia lineal con coeficientes constantes. Existen técnicas que permiten determinar la solución en este caso y que se pueden encontrar en muchos libros de texto relacionados con la Combinatoria o la Matemática Discreta. Por sencillez, en esta sección vamos a plantear el caso de las recurrencias lineales de segundo orden. Los resultados y técnicas que vamos a desarrollar se pueden extender sin mucha complicación a órdenes superiores.

Definición 2.1

Una recurrencia lineal de segundo orden *es una sucesión (a_n) que viene definida de la forma*

$$a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n + f(n), \quad n \geq 0,$$

donde c_1 y c_2 son dos números reales conocidos y $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es una función conocida. Para que (a_n) esté bien definida es necesario conocer los dos primeros términos, digamos a_0 y a_1. Si $f(n) \equiv 0$, la recurrencia se dice homogénea.

Presentamos a continuación, de forma muy resumida, una técnica para resolver recurrencias lineales de segundo orden. La misma está basada en encontrar todas las soluciones de la recurrencia homogénea asociada y una solución particular de la recurrencia no homogénea.

2.3 Recurrencias lineales homogéneas

Existe una técnica para encontrar el término general de una recurrencia lineal de segundo orden homogénea

$$a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n, \quad n \geq 0. \tag{2.3}$$

Se basa en los dos hechos siguientes:

1. El término general de una recurrencia lineal de primer orden homogénea $a_{n+1} = q a_n$, con $n \geq 0$, es de la forma $a_n = a_0 q^n$
2. Si (x_n) e (y_n) son dos sucesiones que satisfacen la ecuación (2.3), entonces la sucesión (z_n), tal que $z_n = A x_n + B y_n$, con $A, B \in \mathbb{R}$, también satisface la ecuación (2.3).

Como en las recurrencias de orden uno, podemos buscar si existen progresiones geométricas $a_n = \lambda^n$ que satisfacen

$$a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n, \quad n \geq 0.$$

Entonces, se tiene que cumplir $\lambda^{n+2} = c_1\,\lambda^{n+1} + c_2\,\lambda^n$. Dividiendo por λ^n, se obtiene la ecuación característica.

Definición 2.2

La ecuación característica *de una recurrencia lineal de segundo orden homogénea* (2.3) *es la siguiente ecuación polinómica de segundo grado*

$$\lambda^2 - c_1\lambda - c_2 = 0$$

Se distinguen tres situaciones, dependiendo de que las raíces de la ecuación característica sean:

- Dos números reales diferentes: λ_1 y λ_2. La solución es

$$a_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n.$$

- Una única raíz doble λ. La solución es

$$a_n = (A + Bn)\lambda^n.$$

- Dos números complejos conjugados: $\lambda_1 = re^{i\theta}$ y $\lambda_2 = re^{-i\theta}$. La solución es

$$a_n = r^n(A\cos n\theta + B\,\mathrm{sen}\,n\theta).$$

En todos los casos, las constantes A y B se deducen de las condiciones iniciales a_0 y a_1.

Ejemplo 2.3 (La sucesión de Fibonacci) Este problema se atribuye a Leonardo de Pisa, alias *Fibonacci*, matemático italiano del siglo XII. Su enunciado es el siguiente: un hombre encerró a una pareja de conejos en un lugar rodeado por un muro por todas partes. ¿Cuántos pares de conejos pueden producirse a partir del par original durante un año si consideramos que cada pareja engendra al mes un nuevo par de conejos que se convierten en productivos al segundo mes de vida?

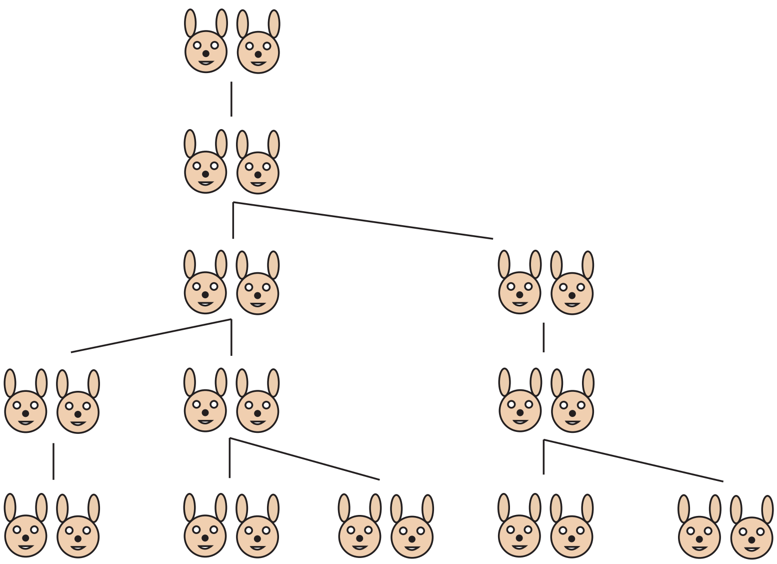


Figura 2.2: Evolución de la población de conejos en el problema de Fibonacci.

Solución *Para resolver el problema, empezamos siguiendo los consejos sugeridos en la sección anterior. En primer lugar, introducimos una notación adecuada llamando, por ejemplo,* F_n *al número de pares de conejos en el mes* n*-ésimo. Con ayuda de la Figura 2.2 analizamos lo que pasa en los primeros meses:*

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_3 = 2, \quad F_4 = 3, \quad F_5 = 5.$$

Con esta una información, podemos deducir una relación para los términos de la sucesión:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

La ecuación característica es, en este caso,

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Sus soluciones son $\lambda = (1 \pm \sqrt{5})/2$*, por lo que la solución de la recurrencia es de la forma*

$$F_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Los coeficientes A *y* B *se determinan a partir de los dos primeros términos de la recurrencia,* $F_1 = F_2 = 1$*. Así, tenemos las siguientes ecuaciones:*

$$\text{Para } n = 1: \qquad A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1.$$

$$\text{Para } n = 2: \qquad A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1.$$

Mediante una simple resta, las ecuaciones anteriores pueden escribirse como

$$(A+B) + \sqrt{5}(A-B) = 2,$$
$$3(A+B) + \sqrt{5}(A-B) = 2.$$

De aquí se deduce que $A + B = 0$ *y* $A - B = 2/\sqrt{5}$*. Por lo que finalmente* $A = 1/\sqrt{5}$*,* $B = -1/\sqrt{5}$*. La solución para la sucesión de Fibonacci es*

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}, \quad n \geq 1.$$

Los números F_n *se llaman* números de Fibonacci*. Notemos que, a pesar de su apariencia, por construcción, son números enteros.*

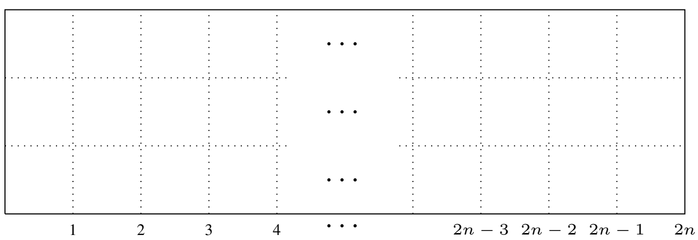
En la expresión de los números de Fibonacci, aparece una constante famosa, la razón áurea*,*

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

también conocida como divina proporción*, sobre la cual se cuentan un gran número de curiosidades y propiedades.*

Por último, la solución al problema de los conejos planteado por Fibonacci es $F_{12} = 144$*.*

Ejemplo 2.4 ¿De cuántas formas se puede cubrir un rectángulo de base $2n$, $n \in \mathbb{N}$, y altura 3 con baldosas de tamaño 2×1? Encuentra una recurrencia que te ayude a resolver el problema.



Solución *Para resolver el problema, introducimos una notación adecuada. Por ejemplo, llamaremos u_n al número de tales recubrimientos. Empezamos calculando los casos más sencillos. Por ejemplo, para $n = 1$, se tiene que $u_1 = 3$, como se ve en la Figura 2.3.*

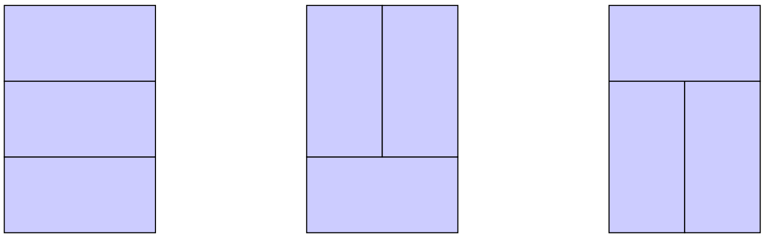


Figura 2.3: Soluciones al problema de las baldosas para $n = 1$.

Para $n = 2$, tenemos que cubrir un rectángulo 4×3. El número de recubrimientos posibles es $u_2 = 11$, como se aprecia en la Figura 2.4.

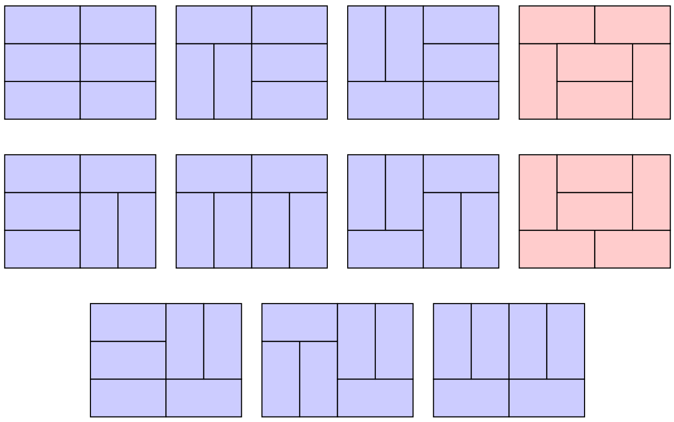


Figura 2.4: Soluciones al problema de las baldosas para $n = 2$.

Se puede llegar a una recurrencia para resolver el problema por razonamientos muy diversos. Por ejemplo, si volvemos a analizar el caso para $n = 2$, vemos que los posibles cubrimientos son:

- *3 veces los cubrimientos obtenidos para el caso $n = 1$, coloreados en azul.*
- *Más dos cubrimientos «especiales», que son los coloreados en rosa.*

En consecuencia, $u_2 = 3u_1 + 2 = 3 \times 3 + 2 = 11$..

Si analizamos el caso para $n = 3$, vemos que los posibles cubrimientos son:

- *Los del caso $n = 2$, adjuntando cada uno de los del caso $n = 1$ a la derecha ($3u_2$).*
- *Los del caso $n = 1$, adjuntando cada uno de los dos especiales de tamaño 3×4 a la derecha ($2u_1$).*
- *2 nuevos bloques especiales de tamaño 3×6 (véase la Figura 2.5).*

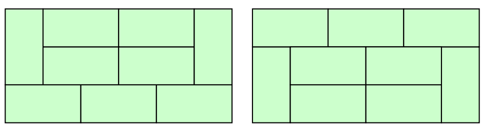


Figura 2.5: Los 2 nuevos bloques especiales de tamaño 3×6 en el problema de las baldosas para $n = 3$.

En consecuencia, $u_3 = 3u_2 + 2u_1 + 2 = 3 \times 11 + 2 \times 3 + 2 = 41$.

Repitiendo este razonamiento, llegamos a la expresión

$$a_{n+1} = 3a_n + 2a_{n-1} + 2a_{n-2} + \cdots + 2a_1 + 2,$$

Sin más que tener en cuenta que

$$a_n = 3a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2a_{n-3} + \cdots + 2a_1 + 2.$$

y restar ambas expresiones, se obtiene la recurrencia:

$$a_{n+1} - a_n = 3a_n - a_{n-1} \Rightarrow a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}.$$

Si ahora queremos resolver la recurrencia para encontrar el término general de la misma, buscamos la ecuación característica, que en este caso es $\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$. *Las raíces de la misma son* $\lambda_1 = 2 - \sqrt{3}$ *y* $\lambda_2 = 2 + \sqrt{3}$. *Por tanto*

$$a_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n,$$

con $a_1 = 3$, $a_2 = 11$. *Para obtener* A *y* B *debemos resolver el sistema*

$$\begin{cases} A\lambda_1 + B\lambda_2 = 3 \\ A\lambda_1^2 + B\lambda_2^2 = 11 \end{cases}$$

para obtener finalmente la expresión explícita de la sucesión (a_n)

$$a_n = \frac{\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^n + \left(9+5\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^n}{6\left(2+\sqrt{3}\right)}. \tag{2.4}$$

A pesar de su «fiera apariencia», esta sucesión está formada por números enteros positivos. Los primeros términos de esta sucesión se ven el el Cuadro 2.4.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	3	11	41	153	571	2131	7953	29681	110771	413403

Cuadro 2.4: Primeros términos de la sucesión dada por la ecuación (2.4).

2.4 Recurrencias lineales no homogéneas

Consideremos ahora el caso de una recurrencia lineal no homogénea dada por la ecuación

$$a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n + f(n), \tag{2.5}$$

donde $f(n)$ es una función conocida de n, distinta de la función nula.

La solución general de la ecuación anterior depende de 2 constantes arbitrarias y su estructura es de la forma:

$$a_n = a_n^h + a_n^p,$$

donde a_n^h es la solución general de (2.5) con $f(n) = 0$ y a_n^p una solución particular de la ecuación (2.5).

El método de los *coeficientes indeterminados* es una técnica que permite encontrar soluciones particulares cuando $f(n) = p(n)r^n$, con $p(n)$ un polinomio de grado conocido y $r \in \mathbb{R}$ (generalizable a $\sum_{j=i}^{m} p_j(n) r_j^n$).

Si r no es solución de la ecuación característica de la recurrencia homogénea, este método consiste en buscar una solución de la forma

$$a_n^p = q(n) r^n.$$

Si r es raíz de la ecuación característica de multiplicidad m, entonces se busca $a_n^p = n^m q(n) r^n$.

En ambos casos, $q(n)$ y $p(n)$ son polinomios del mismo grado.

Ejemplo 2.5 Encuentra la solución de la recurrencia no homogénea $a_n = 4a_{n-1} - 6n$, $n \geq 1$, con $a_0 = 3$.

Solución *Es sencillo comprobar que la solución de la recurrencia honogénea $a_n = 4a_{n-1}$ es $a_n = C4^n$, con C una constante. Dado que el término independiente de la recurrencia no honogénea es $-6n$, esto es, un polinomio de grado 1, buscamos una solución particular de dicha recurrencia que sea de la forma $a_n = An + B$. Sin más que sustituir en la propia recurrencia, tenemos*

$$An + B = 4A(n-1) + 4B - 6n.$$

Igualando los coeficientes de ambos polinomios, tenemos que $A = 4A - 6$, $B = -4A + 4B$. Por tanto, $A = 2$, $B = 8/3$. La solución es $a_n = 2n + 8/3 + C4^n$.

La constante C la determinamos a partir de la condición inicial: $a_0 = 8/3 + C = 3$, luego $C = 1/3$ y la solución es

$$a_n = 2n + \frac{8 + 4^n}{3}.$$

2.5 Recurrencias no lineales

El problema de encontrar el patrón general que sigue una cierta sucesión de números puede dar lugar a recurrencias no lineales para las que, al contrario de las recurrencias lineales con coeficientes constantes, no existe un método general de resolución. Hay algunos resultados generales que pueden ayudar:

Proposición 2.1 (Regla del "bocadillo")

Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ y las sucesiones (a_n) y (c_n) convergen al mismo límite L, entonces (b_n) también converge a L. Si $a_n \leq b_n$ y (a_n) tiende a infinito, entonces (b_n) también tiende a infinito.

Proposición 2.2 (Principio de Weierstrass)

Toda sucesión de números reales monótona y acotada es convergente.

Ejemplo 2.6 Demuestra que la sucesión definida por la recurrencia

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{12 + a_n}, \quad n \geq 0,$$

es monótona creciente y acotada superiormente por 4. Encuentra su límite.

Solución *Usaremos unos razonamientos inductivos. En primer lugar, $a_0 < a_1$ pues $0 < \sqrt{12}$. Supongamos que $a_{n-1} < a_n$, entonces $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 12} < \sqrt{a_n + 12} = a_{n+1}$, y (a_n) es creciente.*

Por otra parte, es claro que $a_0 = 0 < 4$. Supongamos $a_{n-1} < 4$, entonces $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 12} < \sqrt{16} = 4$ y, por tanto, (a_n) está acotada superiormente.

En consecuencia, por el Principio de Weierstrass la sucesión (a_n) tiene un límite $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, que podemos encontrar tomando límites en la propia expresión de la recurrencia:

$$L^2 = L + 12 \Longrightarrow L = 4, \text{ ya que necesariamente } L > 0.$$

Ejemplo 2.7 (La fórmula de Herón para aproximar raíces cuadradas) A Herón de Alejandría (10–70 d.C. aproximadamente) se le atribuye la fórmula para calcular el área de un triángulo, conocidos sus lados a, b y c:

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ con } s=(a+b+c)/2.$$

Para poder aplicarla, es necesario saber calcular raíces cuadradas o ... al menos aproximarlas. Para calcular la raíz cuadrada de un número $A>0$, se parte de una aproximación inicial a de $\sqrt{A}$ y se propone como nueva aproximación $(a+A/a)/2$. En general se repite el proceso para obtener la siguiente sucesión recurrente:

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{A}{a_n}\right), \quad n\geq 0.$$

Demuestra que esta sucesión converge, en efecto, a la raíz cuadrada de A.

Solución *Vamos a probar que si $a_0>\sqrt{A}$, la sucesión definida por la recurrencia de Herón $a_{n+1}=f(a_n)$ con $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{A}{x}\right)$, cumple $\sqrt{A}<a_{n+1}<a_n, \quad n\geq 0$. En consecuencia, es monótona decreciente y acotada inferiormente por $\sqrt{A}$, que es su límite.*

Notemos que $f(\sqrt{A})=\sqrt{A}$. Además, f es creciente en $(\sqrt{A},\infty)$, ya que $f'(x)>0$ para $x>\sqrt{A}$. Entonces $a_1<a_0$. En efecto,

$$a_1=(a_0+A/a_0)/2<a_0 \iff a_0^2>A,$$

que es cierto pues $a_0>\sqrt{A}$. Por otra parte, veamos que $\sqrt{A}<a_1$. Por el Teorema del Valor Medio, existe $\xi_0\in(\sqrt{A},a_0)$ tal que

$$a_1-\sqrt{A}=f(a_0)-f(\sqrt{A})=f'(\xi_0)(a_0-\sqrt{A}).$$

Como $f'(x)>0$ para $x>\sqrt{A}$, es cierto $\sqrt{A}<a_1$.

De forma parecida se prueba por inducción que $\sqrt{A}<a_{n+1}<a_n$ para $n\geq 0$. Por el principio de Weierstrass, existe $L=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, con $L\geq\sqrt{A}$. Tomando límites en la expresión de la sucesión:

$$L=\frac{1}{2}\left(L+\frac{A}{L}\right)\Rightarrow L^2=A \overset{L\geq\sqrt{A}}{\Longrightarrow} L=\sqrt{A}.$$

Hemos visto que si se toma como punto de partida un valor $a_0\in(\sqrt{A},\infty)$ se obtiene una sucesión monótona decreciente a $\sqrt{A}$. Sin embargo, si $a_0\in(0,\sqrt{A})$, $a_1\in(\sqrt{A},\infty)$. A partir de aquí la sucesión es monótona decreciente a $\sqrt{A}$. Este ejemplo pone de manifiesto la importancia del punto de partida a la hora de estudiar la convergencia de una sucesión recurrente no lineal.

El análisis gráfico de la función que define la sucesión,

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{A}{x}\right)$$

nos permite hacer algunas consideraciones gráficas interesantes:. En primer lugar, los posibles límites[1] de la sucesión (a_n) son puntos fijos de f, es decir puntos tales que $f(L)=L$. Estos puntos son intersecciones de las gráficas de $y=f(x)$ y de la diagonal $y=x$.

Podemos hacer un análisis gráfico de una sucesión (a_n) obtenida por iteración de una función f siguiendo los siguientes pasos:

- *Dibujar sobre los mismos ejes las gráficas de $y=f(x)$ y de la diagonal $y=x$.*
- *Situar el punto de partida a_0 sobre el eje de abcisas y desplazarse verticalmente hasta la gráfica de $y=f(x)$, obteniendo un punto cuya abcisa es $f(a_0)=a_1$.*

[1] El límite de una sucesión, si existe, es único. Ahora bien, para distintos puntos de partida se obtienen sucesiones diferentes y, por tanto, posibles límites diferentes.

- *Desplazarse horizontalmente hasta la diagonal* $y = x$.
- *Volver a desplazarse verticalmente hasta cortar la curva* $y = f(x)$, *obteniendo un punto cuya abcisa es* $f(a_1) = a_2$.
- *Repetir el proceso las veces que se consideren oportunas.*

En la Figura 2.6 se muestra la representación gráfica de las iteraciones de $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$, *con* $a_0 = 5$ *(izquierda) y* $a_0 = 0.3$ *(derecha). Ambas converge a* $\sqrt{2} \approx 1.41421$.

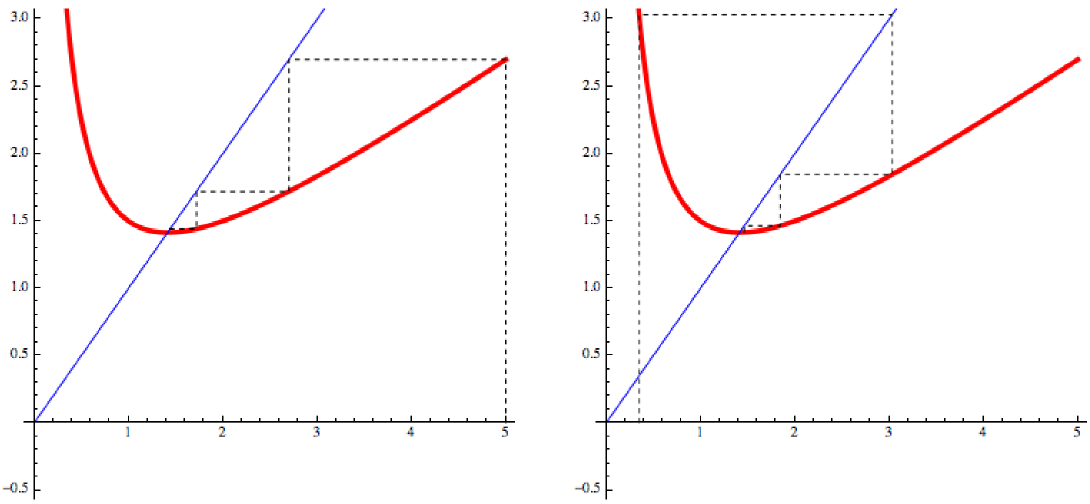


Figura 2.6: Análisis gráfico de un par de iteraciones dadas por la fórmula de Herón para aproximar $\sqrt{2}$.

Ejemplo 2.8 La función logística A pesar de su aparente sencillez, las iteraciones de la función logística

$$\ell_\lambda(x) = \lambda x(1 - x), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

esconden interesantes sorpresas. Un experimento interesante es calcular, con ayuda de una calculadora o de un ordenador, unas cuantas iteraciones de

$$x_{n+1} = \ell_\lambda(x_n) = \lambda x_n(1 - x_n)$$

para distintos puntos de partida y distintos valores de λ y ver qué ocurre.

Solución *Para fijar ideas, tomemos el punto de partida* $x_0 = 0.5$, *así como distintos valores de* λ.

1. $\lambda = 1$: (x_n) *es monótona decreciente a 0.*
2. $\lambda = 2$: (x_n) *es constantemente* $1/2$.
3. $\lambda = 2.5$: (x_n) *es convergente, de forma oscilante, a* 0.6.
4. $\lambda = 3.2$: *a partir de un cierto* n, (x_n) *va tomando los valores* 0.513045 *y* 0.799455.
5. $\lambda = 3.3$: *la tendencia repetitiva aumenta a cuatro términos* 0.38280, 0.826941, 0.500884 *y* 0.874997.
6. $\lambda = 3.8$: *no se aprecia ningún tipo de orden en los términos de la sucesión.*

Podemos estudiar con detalle la convergencia de la función logística en algunos casos:

1. $\lambda = 1$ *y* $x_0 = 1/2$. *En este caso* $x_{n+1} = \ell_1(x_n) = x_n(1 - x_n)$. *Es muy sencillo comprobar que* $0 < x_{n+1} < x_n$ *para* $n \geq 0$. *Por lo tanto* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.
2. $\lambda = 3/2$ *y* $x_0 = 1/2$. *Ahora* $x_{n+1} = \ell_{3/2}(x_n) = 3/2 x_n(1 - x_n)$ *y se tiene que* $1/3 < x_{n+1} < x_n$ *para* $n \geq 0$. *Por lo tanto* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1/3$.
3. $\lambda = 2$ *y* $x_0 = 1/10$. *La sucesión está definida por* $x_{n+1} = \ell_2(x_n) = 2x_n(1 - x_n)$ *y, en este caso,* $x_n < x_{n+1} < 1/2$ *para* $n \geq 0$. *En consecuencia,* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1/2$.

El estudio para otros valores de λ es más complicado y requiere de técnicas y herramientas numéricas. Se puede detectar la aparición de comportamientos cíclicos e, incluso, de comportamientos caóticos.

Nota: *Hemos visto unas cuantas técnicas clásicas para trabajar con recurrencias, tanto lineales como no lineales. Existen muchas otras técnicas: cambios de variables, recurrencias dobles, funciones generadoras, etc.*

Ejercicios Propuestos

1. Se quiere recubrir un rectángulo de tamaño $2 \times n$ con baldosas de tamaños 2×2 y 2×1. Encuentra una relación de recurrencia para calcular a_n, el numero total de recubrimientos diferentes que pueden hacerse.

2. Busca el término general de la sucesión recurrente
$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n}, \quad n \geq 0.$$

3. Estudia la convergencia de la sucesión $x_{n+1} = x_n(2 - x_n)$, $n \geq 0$, con $x_0 = 0.1$.

4. Un matemático despistado escribe mal la sucesión de Fibonacci, cambiando el signo de la suma por el del producto:
$$a_0 = 1 \quad a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n a_{n-1}, \quad n \geq 1.$$
¿Cuál es la fórmula general de la sucesión obtenida?

5. Calcula la fórmula general de la sucesión (b_n) dada por
$$\begin{cases} b_1 = 8, \quad b_2 = 26, \\ n(n+1)b_{n+2} = 4n(n+2)b_{n+1} - 3(n+1)(n+2)b_n, \quad n \geq 0. \end{cases}$$

6. La sucesión (c_n) cumple
$$\begin{cases} c_1 = 1, \\ c_{n+m} + c_{n-m} = \dfrac{c_{2m} + c_{2n}}{2}, \quad m \geq n \geq 0. \end{cases}$$
Encuentra el término general de (c_n).

7. Se define la sucesión (d_n) por
$$\begin{cases} d_0 = d_1 = 1, \\ d_{n+1} = 1 + d_n d_{n-1}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$
Prueba que d_{2017} no es divisible entre 4.

8. Se define la sucesión (e_n) por
$$\begin{cases} e_1 = e_2 = 1, \\ e_{n+1} = \dfrac{e_n^2 + 2}{e_{n-1}}, \quad n \geq 2. \end{cases}$$
Prueba que (e_n) es una sucesión de números enteros.

9. Tenemos n objetos numerados del 1 al n y tenemos n lugares para dejarlos, también numerados del 1 al n. Sea f_n el número de formas de dejar los objetos sin que haya ninguno en su lugar (este tipo de permutaciones se llaman *desarreglos* o *desórdenes*). Calcula una recurrencia para f_n y encuentra su término general.

Pista: Analiza los casos más sencillos para $f_1 = 0$, $f_2 = 1$, $f_3 = 2$, etc. Usa una notación adecuada que te ayude a buscar una recurrencia. Por ejemplo, puedes expresar los desarreglos de 3 elementos en forma de permutación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Piensa en los desarreglos de n como elementos de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots \\ i & \dots & 1 & \dots \end{pmatrix}$$

y en los de la forma ($j \neq 1$)

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots \\ i & \dots & j & \dots \end{pmatrix}$$

Prueba que $f_1 = 0$; $f_2 = 1$; $f_n = (n-1)(f_{n-1}+f_{n-2}), n \geq 3$. Equivalentemente, $f_0 = 1$; $f_n - nf_{n-1} = (-1)^n$, $n \geq 1$. La solución es

$$f_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}, \quad n \geq 0.$$

Bibliografía Adicional

1. Alegría, P. (2009). Sucesiones de recurrencia en la matemática recreativa. *Rev. Eureka Enseñ. Divul.Cien.*, **6** (3), 483-490. https://www.ehu.eus/~mtpalezp/descargas/eureka_2009.pdf
2. Engel, A. (1998). Sequences. *Problem-Solving Strategies*. Editorial Springer, 221-240.
3. Guitérrez Jiménez, J. M. & Lanchares Barrasa, V. (2010). *Elementos de matemática discreta*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Rioja. https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=424510