CAPÍTULO 4

4

POLINOMIOS

María del Pilar Benito Clavijo
Universidad de La Rioja

Palabras clave

- *Ecuación polinomial*
- *Función polinomial*
- *Raíz*
- *Algoritmo de división*
- *Regla de Ruffini*
- *Polinomio irreducible*
- *Teorema Fundamental del Álgebra*
- *Factorización*
- *Fórmulas de Cardano-Viète*
- *números de De Moivre*

Los polinomios son objetos muy útiles en la Ciencia. Permiten definir funciones polinomiales en entornos que van desde la Física y la Química hasta la Economía. Con ellos podemos aproximar otras funciones y construir estructuras denominadas "anillos" que generalizan propiedades de los números. Usados por babilonios y egipcios en problemas relacionados con ecuaciones de primer grado (papiros egipcios del año 2000 a.C.), los polinomios han captado el interés de matemáticos griegos, indios, árabes y europeos a lo largo de la historia. Nombres como Diofanto de Alejandría (s. III), Al-Juarizmi (s. IX), Ferro, Tartaglia y Cardano (s. XVI) participaron activamente en la introducción de las primeras notaciones y aritmética y en la resolución de ecuaciones polinómicas hasta grado 4 incluyendo fórmulas de cálculo de raíces. El primero en dar las reglas de las operaciones aritméticas con polinomios fue el matemático e ingeniero persa Al-Karaji (véase Figura 4.1) en el año 1000 d.C., quién investigó sobre coeficientes binomiales y la expansión $(x + y)^n$ conocida como teorema del binomio.

Figura 4.1: Abu Bakr ibn Muhammad ibn al-Husayn al-Karaji (953-1029 d.C).

4.1 Introducción

Dice el refrán que *una imagen vale más que mil palabras* para transmitir ideas, significados o esencias. Vamos a comenzar este capítulo con una figura y una pregunta que nos va a permitir introducir la noción de polinomio y sus elementos básicos. Observamos las gráficas en la Figura 4.2.

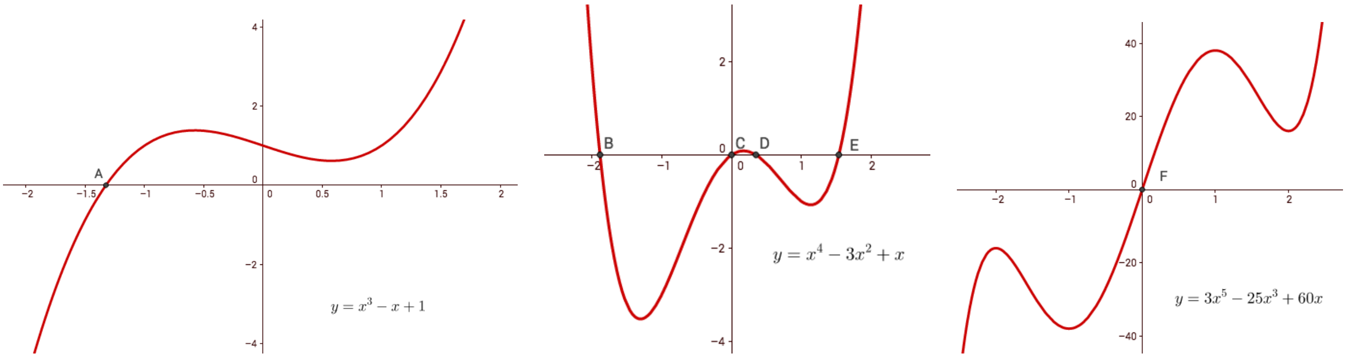

Figura 4.2: Gráficas de funciones reales de variable real.

¿Qué tienen en común las tres gráficas? Observamos que son funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de variable real que, si atendemos a la leyenda que aparece debajo de la imagen de cada una de ellas, se expresan en forma de suma en la que cada sumando contiene la variable x elevada a una cierta potencia n con n un entero positivo. Admitimos $n = 0$, declarando $x^0 = 1$. Este tipo de funciones se dicen *funciones polinomiales*.

La representación gráfica de tales funciones nos permite realizar un estudio cualitativo de las mismas, pero esta representación precisa de un estudio cuantitativo, esto es, evaluar la función en cada número real. Por ejemplo, $y = x^4 - 3x^2 + x$ nos proporciona los valores $y = 0$ para $x = 0$ e $y = -3$ si tomamos $x = -1$. En el primer caso, concluímos que la función se anula en $x = 0$, dicho de otra forma, la gráfica corta al eje de abcisas en el punto $(0, 0)$. También podemos decir que $x = 0$ es una solución de la *ecuación polinómica* (que es un caso especial de *ecuación algebraica*):

$$x^4 - 3x^2 + x = 0. \tag{4.1}$$

Esta última afirmación nos lleva a la descomposición en *factores*:

$$x^4 - 3x^2 + x = x \cdot (x^3 - 3x + 1). \tag{4.2}$$

La gráfica (b) nos informa de que hay otros tres cortes con el eje de abscisas (eje horizontal) y que denotaremos como $x = a, b, c$, que son las soluciones de la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$. Esto nos lleva a la factorización:

$$p(x) = x^4 - 3x^2 + x = x \cdot (x^3 - 3x + 1) = x \cdot (x - a) \cdot (x - b) \cdot (x - c). \tag{4.3}$$

Los factores $x, x - a, x - b$ y $x - c$ no se pueden descomponer. Ahora bien, ¿podemos dar los valores exactos de a, b y c? La respuesta es afirmativa, y la podemos obtener gracias a la identidad trigonométrica $cos\, 3\alpha = 4cos^3\, \alpha - 3cos\, \alpha$, que nos permite comprobar que el número real $a = 2cos\, \frac{2\pi}{9}$ cumple $a^3 - 3a + 1 = 0$. Aplicando la *regla Ruffini* tenemos que $x^3 - 3x + 1 = (x - a) \cdot (x^2 + ax + a^3 - 3)$ y las otras dos soluciones, expresadas usando a, son $b, c = \dfrac{a \pm \sqrt{12 - 3a^2}}{2}$. Así, usando la aritmética de los números reales (suma y multiplicación), llegamos a la *factorización de polinomios*, muy importante en la aritmética de estos objetos.

Los contenidos que vamos a desarrollar en este capítulo tienen que ver con el carácter cuantitativo de las funciones polinomiales y la aritmética de los polinomios y las ecuaciones polinomiales.

Definición 4.1 (Polinomio y grado)

Un ***polinomio*** *es una suma de la forma* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$*, donde* x *se dice* ***variable*** *y* $a_n, a_{n-1} \ldots, a_0$*, conocidos como* ***coeficientes*** *del polinomio, son elementos de un anillo* $\mathbb{A}$*. Un término de la forma* $a_k x^k$ *se dice* ***monomio de grado*** k*. Si* $a_n \neq 0$*, el natural* n *es el* ***grado*** *de* $p(x)$ *y* a_n *se denomina* ***coeficiente director****. El coeficiente* a_0 *se llama* ***término independiente****. Si* $a_n = 1$*, diremos que* $p(x)$ *es un* ***polinomio mónico****. Los polinomios de grado cero se dicen* ***constantes****. Dos polinomios se dicen* ***iguales*** *si están formados por los mismos monomios, en particular, tienen el mismo grado y los mismos coeficientes.*

El conjunto todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{A}$*, lo escribiremos en la forma* $\mathbb{A}[x]$*.*

Nota: *Un anillo* $\mathbb{A}$ *es un conjunto con dos operaciones internas, llamadas suma* $(a + b)$ *y multiplicación* (ab)*, y que cumplen ciertas propiedades. Aquí,* a *y* b *son elementos de* $\mathbb{A}$ *y las operaciones se dicen internas porque al sumar o multiplicar elementos de* $\mathbb{A}$*, el resultado es un elemento de* $\mathbb{A}$*. En este capítulo trabajaremos con polinomios con coeficientes en los anillos de enteros, racionales, reales y complejos, que denotaremos* $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ *y* $\mathbb{C}$ *respectivamente. Los llamaremos anillos de números y a sus elementos números. En los anillos de números, la suma y el producto son conmutativos,* $a + b = b + a$*,* $ab = ba$*, y tenemos el uno, elemento neutro para el producto puesto que* $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$*. Encontramos también el cero,* $0 + a = a + 0 = a$*, llamado elemento neutro de la suma, y el opuesto,* $-a$ *para cada elemento* a*, única solución en* $\mathbb{A}$ *de la ecuación* $a + x = 0$*. Esto permite presentar la diferencia* $a - b = a + (-b)$*, que es un elemento de* $\mathbb{A}$ *y operación válida en cualquier anillo. El conjunto* $\mathbb{N}$ *de números naturales está formado por los enteros positivos y el cero. Observamos que* $\mathbb{N}$ *no es anillo con las operaciones suma y multiplicación de números enteros ya que si calculamos la diferencia* $m - n$ *de dos naturales* m *y* n *y el minuendo,* m*, es mayor que el sustraendo,* n*, la diferencia está en* $\mathbb{N}$*, pero si el minuendo es menor, obtenemos un entero negativo, luego no está en* $\mathbb{N}$*. Las operaciones de* $\mathbb{A}$*, nos permiten sumar y multiplicar polinomios y hacen que el conjunto* $\mathbb{A}[x]$ *sea un anillo.*

Definición 4.2 (Ecuación polinomial, raíz y función polinomial)

Dado un polinomio $p(x)$ *de* $\mathbb{A}[x]$*, la expresión* $p(x) = 0$ *se dice* ***ecuación (algebraica) polinomial****. A sus soluciones, los valores de* a*, que pueden estar en* $\mathbb{A}$ *o en un conjunto que lo contenga, y tales que* $p(a) = 0$*, se les llama* ***ceros o raíces*** *del polinomio* $p(x)$*. Para un número cualquiera* b*, el* ***valor del polinomio en*** b *es:*

$$p(b) = a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0. \tag{4.4}$$

La expresión (4.4) *permite asociar a* $p(x)$ *la función* $f_{p(x)} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ *definida por* $f_{p(x)}(b) = p(b)$ *y a la que llamaremos* ***función polinomial*** *asociada al polinomio* $p(x)$*. De este modo, podemos interpretar los polinomios como funciones.*

Nota: *Al representar gráficamente los polinomios de grado impar con coeficientes reales observamos que todos tienen al menos una raíz real ya que son funciones continuas que toman valores negativos en* $(-\infty, m)$ *a partir de un cierto* $m < 0$ *y positivos en* (m', ∞) *para algún* $m' > 0$*. En la Figura 4.2 vemos dos polinomios de grado impar (observa el comentario previo en su gráfica) con una única raíz real y uno de grado par con todas sus raíces reales.*

Nota: *Generalizamos la expresión* (4.4)*: dados dos polinomios* $a(x)$ *y* $b(x)$*, la expresión* $a(b(x))$ *representa el* *polinomio que resulta al sustituir la variable x en $a(x)$ por el polinomio $b(x)$. En anillos de números, si $a(x)$ y $b(x)$ tienen grados n y m, el grado del polinomio $a(b(x))$ es $m \cdot n$.*

Ejemplo 4.1 Si $a(x) = x^2 + x + 1$, tenemos que $a(x^3) = (x^3)^2 + x^3 + 1 = x^6 + x^3 + 1$ es un polinomio de grado $6 = 2 \cdot 3$ y $a(x-1) = (x-1)^2 + (x-1) + 1 = x^2 - x + 1$ de grado 2.

El siguiente problema muestra el potencial cuantitativo de los polinomios aunque, por la forma en la que se enuncia, parece no tener relación alguna con ellos. El **truco:** encriptamos un número x_0 y, mediante operaciones básicas de sumas, productos y potencias, lo introducimos como solución de una ecuación polinomial. De este modo x_0 aparece como raíz de un cierto polinomio.

Problema 4.1 (Competition of the Mathematics Gazette, Bucharest 1943). Comprobar que siguiente igualdad entre números reales es cierta:

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4. \tag{4.5}$$

Solución *Si llamamos x_0 al número real que representa la expresión de la izquierda en la igualdad (4.5), $x_0 = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$, lo elevamos al cubo, usamos $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ y agrupamos:*

$$\begin{aligned} x_0^3 &= 20 + 14\sqrt{2} + 20 - 14\sqrt{2} + \\ &\quad 3\sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})(20 - 14\sqrt{2})}\left(\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}\right) \\ &= 40 + 3x_0\sqrt[3]{400 - 392} = 40 + 6x_0. \end{aligned}$$

De este modo tenemos que x_0 es una solución de la ecuación $x^3 - 6x - 40 = 0$, equivalentemente, x_0 es una raíz real del polinomio $p(x) = x^3 - 6x - 40$. Ahora, $4^3 - 60 \cdot 4 - 40 = 0$, por tanto 4 es también una raíz real de $p(x)$. Aplicando la Regla de Ruffini, $x^3 - 6x - 40 = (x-4) \cdot (x^2 + 4x + 10)$. Las otras dos raíces de $q(x) = x^3 - 6x - 40$ son no reales, $\frac{1}{2}(-4 \pm i\sqrt{30})$. Por tanto $x_0 = 4$, lo que prueba (4.5).

4.2 Aritmética de los polinomios

En Educación Primaria aprendemos a sumar, multiplicar y dividir y a factorizar en números primos, a calcular máximo común divisor, $m.c.d.(a,b)$, y mínimo común múltiplo, $m.c.m.(a,b)$ (se usan números naturales a, b en las primeras etapas). Todas estas operaciones constituyen la aritmética de los números. Algo muy parecido sucede con los polinomios. En los primeros cursos de Educación Secundaria aprendemos a sumar, multiplicar y dividir polinomios, y también se nos enseña que la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ tiene, si el **discriminante** $\Delta = b^2 - 4ac$ es mayor o igual que cero, dos soluciones reales (una doble si $\Delta = 0$) que se expresan en la forma:

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{4.6}$$

y por tanto, $ax^2 + bx + c = a(x - r_1) \cdot (x - r_2)$. La fórmula (4.6) también es válida para calcular las raíces de polinomios de grado dos con coeficientes complejos.

Partiendo de las operaciones básicas de suma y multiplicación, las bases de la aritmética de los polinomios se encuentran en los siguientes resultados de polinomios con coeficientes en anillos de números, luego $\mathbb{A} = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Los tres primeros son también válidos en anillos más generales.

Teorema 4.1 (Algoritmo de división)

Dados dos polinomios no nulos, $p(x), q(x)$, existen polinomios únicos $c(x)$ y $r(x)$ de modo que

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x), \tag{4.7}$$

*con $r(x) = 0$ ó $\operatorname{grado} r(x) < \operatorname{grado} c(x)$ si $r(x) \neq 0$. En este caso se dice que $c(x)$ y $r(x)$ son el **cociente** y el **resto** de la división de $p(x)$ entre $q(x)$. Además, en el caso de que el resto sea nulo, se dice que $q(x)$ divide a $p(x)$, que $p(x)$ es divisible por $q(x)$, o que $q(x)$ es un **factor** de $p(x)$.*

Teorema 4.2 (Teoremas del resto y del factor)

Si $q(x) = x - a$, el resto de la división de $p(x)$ entre $q(x)$ es exactamente $p(a)$, el valor del polinomio en a. En particular, una condición necesaria y suficiente para que a sea una raíz de $p(x)$ es que $p(a) = 0$.

Nota: *La primera parte del teorema previo se conoce como **Teorema del resto**. La segunda es el **Teorema del factor** ya que, si $p(a) = 0$, el polinomio $x - a$ es un factor de $p(x)$ gracias al Algoritmo de división. La división de $p(x)$ por $x - a$ se puede realizar, y es recomendable hacerlo, usando el llamado **método de Ruffini**.*

Definición 4.3 (Polinomio irreducible)

*Si $\mathbb{A} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, un polinomio $p(x)$ de $\mathbb{A}[x]$ se dice **irreducible** o **primo** si no puede expresarse como producto de dos polinomios de $\mathbb{A}[x]$ de grados ≥ 1 y menores que el grado de $p(x)$.*

Ejemplo 4.2 Los polinomios de grado uno, $ax + b$, son irreducibles. Los de grado dos, $ax^2 + bx + c$, con coeficientes reales e irreducibles son los que cumplen $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. En general, un polinomio $p(x)$ de grado 3 en $\mathbb{A}[x]$ de modo que la ecuación $p(x) = 0$ no tenga soluciones en $\mathbb{A}$, es irreducible y reducible en otro caso. De este modo tenemos que $x^3 - 3x + 1$ es reducible como polinomio de $\mathbb{R}[x]$ por ser de grado impar. Sin embargo, es irreducible como polinomio de $\mathbb{Q}[x]$ (ver Ejemplo 4.3).

Teorema 4.3 (Teorema de factorización única)

Todo polinomio de $\mathbb{A}[x]$ se puede expresar de manera única, salvo el orden, como producto de una constante (elemento de $\mathbb{A}$) y polinomios irreducibles y mónicos de $\mathbb{A}[x]$.

Otros resultados propios de polinomios con coeficientes en anillos de números:

Teorema 4.4 (Ceros racionales)

Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ un polinomio con coeficientes enteros y $\frac{r}{s}$ un racional expresado como fracción irreducible[a]. Si $p\left(\frac{r}{s}\right) = 0$, esto es, el número racional $\frac{r}{s}$ es raíz de $p(x)$, entonces r divide a a_0 y s divide a a_n.

[a] Dados $r, s \in \mathbb{Z}$ tales que $m.c.d.(r, s) = 1$, el número racional $\frac{r}{s}$ se dice **fracción irreducible**.

Ejemplo 4.3 El polinomio $q(x) = 3x^3 - x^2 + 3x - 1$ tiene como posibles raíces racionales $\frac{r}{s} = \pm\frac{1}{3}, \pm 1$. La única válida es $x = \frac{1}{3}$, luego $3x^3 - x^2 + 3x - 1 = (3x - 1)(x^2 + 1) = 3(x - \frac{1}{3})(x^2 + 1)$ y la segunda igualdad es la factorización (única) de $q(x)$ en producto de irreducibles en $\mathbb{Q}[x]$ y $\mathbb{R}[x]$. El polinomio $a(x) = x^3 - 3x + 1$ no tiene raíces racionales ya que las únicas posibles son $\frac{r}{s} = \pm 1$ y al evaluar tenemos que $p(\pm 1) \neq 0$. De acuerdo con el Ejemplo 4.2, $a(x)$ es un polinomio irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ por ser de grado 3 y no tener raíces en $\mathbb{Q}$. Sin embargo $a(x)$ tiene tres raíces reales. En efecto, como $p(0) \cdot p(1) < 0$, el **teorema de Bolzano** nos asegura que $p(x)$ tiene al menos una raíz en el intervalo $(0, 1)$. Las otras dos se localizan en los intervalos $(-2, -1)$ y $(1, 2)$ con el mismo argumento. Así tenemos el mismo polinomio $a(x)$ que es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ y que factoriza en $\mathbb{R}[x]$ como producto de tres irreducibles mónicos de grado uno, $a(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_1)$ con $r_i \in (-2, 2)$.

El ejemplo previo muestra que el caracter irreducible de un polinomio depende del anillo de números en el que lo estemos considerando. Los siguientes resultados explican este comportamiento.

Teorema 4.5 (Teorema Fundamental del Álgebra)

Todo polinomio no nulo $p(x)$ con coeficientes en un anillo de números $\mathbb{A}$ y de grado $n \geq 1$ tiene exactamente n raíces en el anillo de los números complejos[a]*, algunas de ellas ser iguales. Así, para el polinomio $p(x)$ podemos encontrar números complejos $r_1, \ldots, r_n$ que nos permiten facatorizarlo como producto de polinomios de grado 1:*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = a_n (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \cdots \cdot (x - r_n). \tag{4.8}$$

[a] Los números enteros, racionales y reales son números complejos en los que la parte imaginaria es nula.

Proposición 4.1 (Factorización de polinomios con coeficientes complejos)

Los polinomios irreducibles de $\mathbb{C}[x]$ son exactamente los de grado 1.

La Proposición 4.1, consecuencia inmediata del Teorema Fundamental del Álgebra y exclusivo de polinomios con coeficientes complejos se establece diciendo que $\mathbb{C}$ es un **cuerpo algebraicamente cerrado**. Como anillo de números, los complejos son un cuerpo, igual que los racionales y los reales, pero los dos últimos no son algebraicamente cerrados. En $\mathbb{Q}[x]$ podemos encontrar irreducibles de grado arbitrario y en $\mathbb{R}[x]$ de grado 1 o 2, debido a la construcción de los complejos como duplicado de los reales (i unidad imaginaria cumple $i^2 = -1$):

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}. \tag{4.9}$$

Proposición 4.2 (Factorización de polinomios con coeficientes reales)

Si los coeficientes del polinomio $p(x)$ son números reales, las raíces complejas no reales aparecen de dos en dos, ya que si $a + bi$ es una raíz tal que $b \neq 0$, también lo es su conjugada, $a - bi$. El polinomio con raíces $a \pm bi$ es $x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) = (x - (a + bi)(x - (a - bi))$. En particular, los factores irreducibles de los polinomios en $\mathbb{R}[x]$ son de grado 1 o bien de grado 2.

Nota: *Los resultados previos nos permiten concluir que todo polinomio de grado $m + s$ con m raíces reales factoriza en la forma (aquí $a_i^2 - 4b_i < 0$):*

$$p(x) = a_n (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \cdots \cdot (x - r_m) \cdot (x^2 + a_1 x + b_1) \ldots (x^2 + a_s x + b_s). \tag{4.10}$$

También nos dicen que la propiedad de que un polinomio sea o no irreducible depende fuertemente del anillo *de números con el que estemos trabajando y sus propiedades, como ilustran los Ejemplo 4.3 y Ejemplo 4.4.*

Resolver ecuaciones polinomiales $p(x) = 0$ no es algo sencillo. Factorizar, en general, tampoco. Ambos problemas resultan ser interesantes. Observamos que factorizar un polinomio es el primer paso para resolver una ecuación polinomial debido a que, los anillos de números $\mathbb{A} = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ son **anillos íntegros**, esto es, $(x, y) = (a, 0), (0, b)$ con $a, b \in \mathbb{A}$ son las únicas soluciones de la ecuación $x \cdot y = 0$. Vamos a ver un par de métodos de factorización: el **método de completar cuadrados** y el llamado **método de coeficientes indeterminados**. En lo que se refiere a las raíces, en la siguiente sección explicaremos algunas relaciones aritméticas entre ellas.

Ejemplo 4.4 (Métodos de factorización de polinomios). Factorizar, si es posible, los polinomios $x^4 + 4$ y $x^4 + 1$ ¿Son polinomios irreducibles?

Solución *Denotamos, en general,* $\mathbb{A} = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. *Los polinomios del enunciado no tienen ninguna raíz real puesto que* $a^4 + 4 \geq 4 > 0$ *y* $a^4 + 1 \geq 1 > 0$. *Procedemos primero con el* método de coeficientes indeterminados. *Como consecuencia del Teorema Fundamental del Álgebra, sabemos que (aquí aparecen los coeficientes* a, b, c, d *como elementos de* $\mathbb{A}$ *que hay que determinar)*

$$x^4 + 4 = (x^2 + ax + b) \cdot (x^2 + cx + d). \tag{4.11}$$

Desarrollando la parte derecha e igualando coeficientes de mismo grado en x*, obtenemos las relaciones:*

$$\begin{aligned} a + c &= 0 \\ a \cdot c + b + d &= 0 \\ ad + bc &= 0 \\ b \cdot d &= 4 \end{aligned}$$

Como el polinomio tiene coeficientes enteros, se buscan en primer lugar soluciones enteras para algunos de los coeficientes a, b, c, d. *En este caso, de* $b \cdot d = 4$*, llegamos a que* $(b, d) = (\pm 1, \pm 4), (\pm 2, \pm 2)$. *Desde* $b = d = 2$*, llegamos a que* $a = -c$ *y* $a^2 = 4$*, luego:*

$$x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 2) \tag{4.12}$$

es la única posibilidad de descomponer como producto de polinomios reales y la única factorización en $\mathbb{Q}[x]$ *y en* $\mathbb{Z}[x]$. *En el segundo caso, de forma análoga llegamos a las mismas ecuaciones a excepción de que* $b \cdot d = 1$*, luego* $b = d = \pm 1$ *es la única posibilidad de solución entera y, de* $b = d = 1$ *llegamos a la factorización en polinomios reales (observa que el sistema no tiene soluciones enteras, luego* $x^4 + 1$ *no se puede factorizar en* $\mathbb{Z}[x]$ *ni tampoco en* $\mathbb{Q}[x]$*):*

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1) \cdot (x^2 - \sqrt{2}x + 1). \tag{4.13}$$

Además, el polinomio $x^4 + 1$ *es irreducible en* $\mathbb{Q}[x]$ *y en* $\mathbb{Z}[x]$ *ya que* $\sqrt{2}$ *no es racional, pero es reducible en* $\mathbb{R}[x]$ *y* $\mathbb{C}[x]$. *El polinomio* $x^4 + 4$ *es reducible en cualquiera de los anillos comentados. Los polinomos de grado 2 que aparecen en (4.12) y (4.13) son irreducibles en* $\mathbb{R}[x]$ *pero reducibles en* $\mathbb{C}[x]$.

Observamos que, completar cuadrados*, es un métoda mucho más simple para llegar a las factorizaciones:*

$$x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 2) \tag{4.14}$$

$$x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1) \cdot (x^2 - \sqrt{2}x + 1). \tag{4.15}$$

¡¡EuReKa!!, *dos líneas para factorizar completando cuadrados ¿Quién necesita conocer el método de coeficientes indeterminados?* **No hay que venirse arriba con dos simples ejemplos**. *Responde a la pregunta* *tras intentar, con las técnica de completar cuadrados, llegar a que* $p(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 - 3x + 1)$. *Los factores de* $p(x)$ *son irreducibles en* $\mathbb{Q}[x]$ *y en* $\mathbb{Z}[x]$. *En el Ejercicio 4.3 hemos comprobado que el segundo factor descompone en* $\mathbb{R}[x]$ *en la forma* $x^3 - 3x + 1 = (x - a) \cdot (x - b) \cdot (x - c)$, *donde* a, b *y* c *son números reales (no racionales) tales que* $-2 < a, b, c < 2$.

Nota: *Las factorizaciones de polinomios en* $\mathbb{Z}[x]$ *y* $\mathbb{Q}[x]$ *son equivalentes para polinomios* $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ *que sean* ***primitivos****, esto es, el máximo común divisor de sus coeficiente no nulos es igual a* 1. *La afirmación es válida apoyándonos en el llamado* **Criterio de irreducibilidad de Gauss**, *y funciona porque el anillo* $\mathbb{Q}$ *es el* ***cuerpo de fracciones*** *de* $\mathbb{Z}$. *Este argumento es el que nos permite concluir que, como el sistema previo a la factorización* (4.13) *no tiene soluciones enteras para todos los coeficientes ya que* $(a, c) = \pm(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, *el polinomio* $x^4 + 1$ *es irreducible como polinomio con coeficiente en* $\mathbb{Z}$ *y en* $\mathbb{Q}$. *En el caso de* $x^4 + 4$, *la factorización* (4.12) *procede de las soluciones enteras del sistema previo. El Criterio de Gauss nos garantiza en el* Ejemplo 4.4 *que, si no encontramos soluciones enteras, tampoco existen racionales. Como puedes comprobar,* **las propiedades de los anillos de coeficientes son fundamentales en cuestiones de factorización.**

Y terminamos planteando una ecuación polinomial, sin soluciones racionales (luego tampoco enteras), con tres soluciones reales y 5 complejas. Factorización y pista en el enunciado son las claves para resolverla.

Problema 4.2 Sabiendo que $cos\, 3\alpha = 4cos^3\, \alpha - 3cos\, \alpha$, resuelve la ecuación $x^5 + x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0$.
Solución *Sea* $p(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1$. *Utilizando el método de coeficientes indeterminados, llegamos a la factorización* $p(x) = (x^2 + x + 1)(x^3 - 3x + 1)$. *Las dos raíces del primer factor son* $r_1, r_2 = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. *Para el segundo, la identidad trigonométrica nos lleva lleva a que* $r_3 = 2\cos\dfrac{2\pi}{9}$ *cumple* $r_3^3 - 3r_3 + 1 = 0$. *Usando el método de Ruffini, llegamos a la factorización* $x^3 - 3x + 1 = (x - r_3)(x^2 + r_3 x + r_3^2 - 3)$. *Por tanto, las otras dos soluciones son* $r_4, r_5 = \dfrac{r_3 \pm \sqrt{12 - 3r_3^2}}{2}$.

4.3 Identidades, raíces y números de De Moivre

El Teorema Fundamental del Álgebra nos permite factorizar un polinomio en la forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = a_n (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \cdots \cdot (x - r_n). \tag{4.16}$$

Desarrollando la parte derecha e igualando coeficientes del mismo grado en x, obtenemos:

Proposición 4.3 (Fórmulas de Cardano-Viète)

Si $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ *y* $r_1, r_2, \ldots, r_n$ *son sus raíces, entonces:*

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + \cdots + r_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_2 + \cdots + r_{n-2} \cdot r_{n-1} + r_{n-2} \cdot r_n + r_{n-1} \cdot r_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ &\cdots \\ r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{aligned}$$

Las identidades anteriores son más conocidas como **Fórmulas de Cardano** y se perfilan en 1545 (Ars Magna, Gerolamo Cardano, 1501-1576), en conexión con soluciones de la ecuación de grado 3. Franciscus Viète (1540-1603) hizo aportaciones a las soluciones de ecuaciones de grado 3 con cambios de variable, implantó las notaciones para los datos de los problemas y se dio cuenta de la relación entre las raíces y los coeficientes de un polinomio. Estas fórmulas combinan las dos formas distintas de ver un polinomio: una como producto de factores de grado uno y otra como suma de monomios. Veamos un ejemplo de aplicación de tales expresiones y cómo usar la información obtenida para resolver un problema enunciado con identidades.

Ejemplo 4.5 Consideramos el polinomio genérico de grado tres, $p(x) = x^3 + px + q$, llamado **cúbica reducida**. Si a, b, c son las raíces de $p(x)$ (las podemos localizar en $\mathbb{C}$), tenemos que:

$$\begin{array}{ccc} a+b+c & = & 0 \\ a\cdot b + a\cdot c + b\cdot c & = & p \\ a\cdot b\cdot c & = & -q \end{array}$$

Vamos a usar las relaciones del ejemplo previo para resolver el siguiente problema. Observamos el uso de la cúbica reducida para probar una identidad.

Problema 4.3 (Chinese Mathematical Competition, 1957). Suponiendo que $a+b+c=0$, prueba la siguiente identidad

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\cdot\frac{a^5+b^5+c^5}{5} = \frac{a^7+b^7+c^7}{7}.$$

Solución *Consideramos el polinomio* $p(x) = (x-a)\cdot(x-b)\cdot(x-c)$. *Por las Fórmulas de Cardano-Viète, como* $a+b+c=0$, *tenemos que* $p(x) = x^3+px+q$ *es una cúbica reducida si declaramos:*

$$a\cdot b + a\cdot c + b\cdot c = p, \quad \text{y} \quad a\cdot b\cdot c = -q.$$

Por tanto:

$$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(a\cdot b + a\cdot c + b\cdot c) = -2p.$$

Por otro lado, como $a^3 = -p\cdot a - q, b^3 = -p\cdot b - q$ *y* $c^3 = -p\cdot c - q$, *tenemos que*

$$a^3+b^3+c^3 = -(a+b+c) - 3q = -3q$$

y de las identidades $a^4 = -p\cdot a^2 - q\cdot a,\ b^4 = -p\cdot b^2 - q\cdot b$ *y* $c^4 = -p\cdot c^2 - q\cdot c$, *obtenemos*

$$a^4+b^4+c^4 = -p(a^2+b^2+c^2) - q(a+b+c) = 2p^2.$$

De forma análoga tenemos

$$a^5+b^5+c^5 = -p(a^3+b^3+c^3) - q(^2+b^2+c^2) = 5p\cdot q, \quad \text{y}$$

$$a^7+b^7+c^7 = -p(a^5+b^5+c^5) - q(^4+b^4+c^4) = -5p^2\cdot q - 2p^2\cdot q = -7p^2\cdot q.$$

De todo lo anterior, la identidad pedida es inmediata.

El siguiente resultado permite expandir potencias en sumas y la definición posterior pone nombre y propiedades a las **raíces de la unidad**.

Teorema 4.6 (Teorema del binomio)

El desarrollo de la potencia de orden $n \geq 1$ *del binomio* $x+y$ *viene dada por la expresión:*

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n. \tag{4.17}$$

La expresión es válida al sustituir x *e* y *por elementos de anillos de números.*

Definición 4.4 (Raíces de 1 y de -1)

*Las raíces de los polinomios x^n-1 y x^n+1 se dicen **n-raíces de** 1 y -1 respectivamente. Las expresiones complejas de las mismas son:*

$$\alpha=\cos\frac{2\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n},\alpha^2,\ldots,\boldsymbol{\alpha^k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}},\ldots,\alpha^{n-1},\alpha^n=1$$

$$\beta=\cos\frac{3\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{n},\beta^2,\ldots,\boldsymbol{\beta^k=\cos\frac{3k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{3k\pi}{n}},\ldots,\beta^{n-1},\beta^n=-1.$$

*Las raíces de la unidad (de orden $n\geq 1$) se dicen también **números de De Moivre**.*

Nota: *La **fórmula de De Moivre**, fechada en 1707, para cualquier número real x y cualquier entero positivo k, afirma que:*

$$(\cos x+i\operatorname{sen} x)^k=\cos kx+i\operatorname{sen} kx. \tag{4.18}$$

*Esta fórmula nos dice que que $\cos x+i\operatorname{sen} x$ es una de las k-raíces del complejo $\cos kx+i\operatorname{sen} kx$. Se puede obtener desde la conocida **fórmula de Euler**, $e^{ix}=\cos x+i\operatorname{sen} x$, que aparece en 1741 y nos proporciona una expresión para las n-raíces de un complejo cualquiera $z=a+bi$ usando la **expresión polar** del mismo $z=r(\cos x+i\operatorname{sen} x)$ en función de su módulo $r=+\sqrt{a^2+b^2}$ y su argumento $x=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$. Las expresiones de tales raíces son:*

$$\alpha_k=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{x+2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{x+2k\pi}{n}),k=0,\ldots,n-1. \tag{4.19}$$

Ejemplo 4.6 Tenemos que $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=(x-1)(x-\alpha)(x-\alpha^2)$ con $\alpha=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ y $x^4+1=(x-\beta)(x-\beta^2)(x-\beta^3)(x-\beta^4)$ donde $\beta=\dfrac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$. Aquí,

$$\alpha=\cos\frac{2\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\quad\text{y}\quad\beta=\cos\frac{3\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} \tag{4.20}$$

Además, como $x^4+1=(x^2+\sqrt{2}x+1)\cdot(x^2-\sqrt{2}x+1)$, β y β^7 son las raíces del factor $x^2+\sqrt{2}x+1$. Por otro lado, si $\gamma=\cos\dfrac{2\pi}{6}+i\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{6}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$, tenemos que $\gamma^2=\alpha$ y, desde $x^6-1=(x^3-1)(x^3+1)$, $\gamma^3=-1$ y $\gamma^4=\alpha^2$, concluímos que $x^3+1=(x-\gamma)(x-\gamma^3)(x-\gamma^5)$.

Nota: *Observa que para cualquier complejo z, si b y c satisfacen la identidad $b^n=z$ y $c^n=-z$, las raíces x^n-z son $b\alpha^k$ $(k=0,\ldots,n-1)$ y $c\beta^k$ $(k=0,\ldots,n-1)$ las de x^n+z, donde α y β son los números complejos descritos en* Definición 4.4.

Proposición 4.4

Geométricamente, las n-raíces de la unidad son números complejos $a+ib$ que se localizan com pares $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ en el círculo unitario del plano real. En este plano, las n-raíces forman los vértices de un polígono regular de n lados (n-gon) con cen centro en el origen de coordenadas, $O(0,0)\in\mathbb{R}^2$, y un vértice en el punto $P(1,0)\in\mathbb{R}^2$ para todo $n\geq 3$.

Ejemplo 4.7 (Otras identidades). Si la suma $x+y$ representa al binomio $x+1$ ó $x-1$, usando el Teorema 4.6 llegamos a

[F-1.6.1] $(x+1)^n=\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}+\cdots+\binom{n}{n-1}x+\binom{n}{n}$, y sus generalizaciones que se obtienen aplicando la fórmula **[F-1.6.1]** previa con el cambio $y = \frac{x}{a}$:

$$(x+a)^n = a^n(\frac{x}{a}+1)^n = a^n(y+1)^n \tag{4.21}$$

[F-1.6.2] $\frac{x^n-1}{x-1} = x^{n-1} + \dots x^{n-2} + \dots + x + 1,$

y sus generalizaciones cambiando $y = \frac{x}{a}$ y aplicando la fórmula **[F-1.6.2]**:

$$\frac{x^n-a^n}{x-a} = a^{n-1}\frac{y^n-1}{y-1} \tag{4.22}$$

[F-1.6.3] Para n impar, $\frac{x^n+1}{x+1} = x^{n-1} - x^{n-2} + \dots - x + 1,$

y sus generalizaciones aplicando la fórmula **[F-1.6.3]** y cambiando $y = \frac{x}{a}$:

$$\frac{x^n+a^n}{x+a} = a^{n-1}\frac{y^n+1}{y+1}. \tag{4.23}$$

[F-1.6.4] Para n par, $\frac{x^n-1}{x+1} = x^{n-1} - x^{n-2} + \dots + x - 1,$

y sus generalizaciones aplicando la fórmula **[F-1.6.4]** con el cambio con $y = \frac{x}{a}$:

$$\frac{x^n+a^n}{x+a} = a^{n-1}\frac{y^n+1}{y+1}. \tag{4.24}$$

4.4 Problemas resueltos

Terminamos la sección con algunos problemas modelo que usan las identidades y técnicas derivadas de la aritmética de polinomios que hemos presentado en las secciones previas.

Problema 4.4 Si $\alpha^5 = 1$, calcula $\alpha + \frac{1}{\alpha}$. Deduce de la información previa el valor de $\cos 72°$.

Solución *Sea* $a = \alpha + \frac{1}{\alpha}$. *Tenemos que* α *es raíz de* $p(x) = x^5 - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$. *Si* $\alpha = 1$, *entonces* $a = 2$. *En otro caso,* $\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1 = 0$. *Dividimos la ecuación entre* α^2, *arreglamos y llegamos a:*

$$\alpha^2+\alpha+1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2} = 0 = (\alpha+\frac{1}{\alpha})^2 + (\alpha+\frac{1}{\alpha}) - 1 = a^2+a-1. \tag{4.25}$$

Esto nos proporciana las soluciones $a = \frac{\pm\sqrt{5}-1}{2}$. *Finalmente,* $\cos 72° = \cos\frac{2\pi}{5}$. *Tomamos la 5-raíz* $\alpha = \cos\frac{2\pi}{5} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}$ *y observamos que* $\alpha^4 = \frac{1}{\alpha} = \cos\frac{2\pi}{5} - i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}$ *(*$\alpha\cdot\alpha^4 = 1$*). De este modo* $\cos 72° = \frac{1}{2}(\alpha+\frac{1}{\alpha}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ *por ser un número real positivo.*

Problema 4.5 Encontrar todos los números primos de la forma n^4+4.

Nota: *Un natural* $n \in \mathbb{N}$ *se dice primo si las soluciones de la ecuación* $p = a\cdot b$ *en* $\mathbb{N}$ *son* $(a,b) = (1,p),(p,1)$.

Solución *Como* $n^4+4 = (n^2+2n+2)(n^2-2n+2)$, *para que un número de esta forma sea primo tiene que ocurrrir que* $n^2+2n+2 = 1$, *luego* $0 = n^2+2n+1 = (n+1)^2$ *o que* $n^2-2n+2 = 1$ *luego* $0 = n^2-2n+1 = (n-1)^2$. *Las demás posibilidades dan números compuestos. Por tanto* $n = \pm 1$ *y el único primo de esta forma es* $p = 5$.

Problema 4.6 Encontrar el resto de la división de $p(x^5)$ entre $p(x)$ donde $p(x) = x^4+x^3+x^2+x+1$.

Solución *Observamos que* $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = (x-1)p(x)$*, luego las raíces de* $p(x)$ *son las* 5*-raíces de 1 distintas de* 1*.*

$$p(x^5) = x^{20} + x^{15} + x^{10} + x^5 + 1 = (x^{20} - 1) + (x^{15} - 1) + (x^{10} - 1) + (x^5 - 1) + 5$$

Ahora

$$\begin{aligned} x^{20} - 1 &= (x^5)^4 - 1 = (x^5 - 1)(x^{15} + x^{10} + x^5 + 1) \\ x^{15} - 1 &= (x^5)^3 - 1 = (x^5 - 1)(x^{10} + x^5 + 1) \\ x^{10} - 1 &= (x^5)^2 - 1 = (x^5 - 1)(x^5 + 1) \end{aligned}$$

lo que nos dice que el resto de la división es 5 *ya que* $p(x) = (x^5 - 1)(x^{15} + 2x^{10} + 3x^5 + 4) + 5$*.*

Problema 4.7 Si $p(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros, entonces el entero $p(b) - p(a)$ es divisible por $b - a$ para cualquier par de enteros a, b.

Solución *Usando el Algoritmo de la División y el Teorema del resto tenemos que* $p(x) = (x-a) \cdot c(x) + p(a)$*. Evaluamos esta expresión en* $x = b$ *y obtenemos la igualdad de enteros* $p(b) = (b-a)p(b) + p(a)$*, que la podemos escribir en la forma* $p(b) - p(a) = (b-a)p(b)$*, lo que prueba el resultado.*

Problema 4.8 Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes enteros tal que la ecuación $p(x) = 7$ tiene al menos cuatro soluciones enteras. Demostrar que la ecuación $p(x) = 14$ no tiene soluciones enteras.

Solución *Llamamos* r_1, r_2, r_3 *y* r_4 *a las soluciones enteras de la ecuación* $p(x) = 7$*, luego* $p(r_i) = 7$*, y suponemos que hay otro entero* c *de modo que* $p(c) = 14$*. El polinomio* $q(x) = p(x+c) - 7$ *tiene coeficientes enteros y* $r_i - c$ *para* $i = 1, 2, 3, 4$ *son cuatro de sus raíces y* $q(0) = 7$*. Usamos la información del Problema 7 con los enteros* $b = r_i - c$ *y* $a = 0$ *y tenemos que cada entero* $r_i - c$ *divide a* $q(r_i - c) - q(0) = -7$*. Como los únicos divisores enteros de* -7 *son* $\{\pm 1, \pm 7\}$ *y* $r_i - c$ *proporcionan cuatro enteros distintos, la única posibilidad es que las cuatro raíces* $r_i - c$ *sean* $\pm 1, \pm 7$*. Usamos el Algoritmo de la división y el Teorema del resto (cuatro veces) en* $\mathbb{Z}[x]$ *y llegamos a que existe un polinomio* $c(x)$ *con coeficientes enteros de modo que:*

$$q(x) = (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x-7) \cdot (x+7) \cdot c(x) \tag{4.26}$$

Sustituimos $x = 0$ *en la ecuación (4.26) y tenemos* $7 = q(0) = 49 \cdot c(0)$*, lo cual no es posible. Por tanto el entero* c *no puede existir, lo que prueba el enunciado por reducción al absurdo.*

Problema 4.9 ¿Para qué valores $n \in \mathbb{N}$ el polinomio $p(x)$ es un factor de $x^{2n} + x^n + 1$?

Solución *Observamos que* $x^r - 1 = (x-1) \cdot (x^{r-1} + x^{r-2} + \cdots + x + 1)$*. Si evaluamos* x *en* x^3 *en la igualdad previa, tenemos que:*

$$x^{3r} - 1 = (x^3)^r - 1 = (x^3 - 1) \cdot (x^{3(r-1)} + x^{3(r-2)} + \cdots + x^3 + 1). \tag{4.27}$$

Por tanto $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ *es un factor de* $x^{3r} - 1$ *para todo* $r \in \mathbb{N}$*, y* $x^2 + x + 1$ *también lo es . Observamos que cualquier natural* n *es de la forma* $3r, 3r+1$ *'o* $3r+2$*. Así, si* $n = 3r$*, tenemos que* $x^{6r} + x^{3r} + 1 = (x^{6r} - 1) + (x^{3r} - 1) + 3 = (x^2 + x + 1)q(x) + 3$*. Por unicidad de cociente y resto en el algoritmo de división,* $x^2 + x + 1$ *no es factor* $x^{6r} + x^{3r} + 1$ *pues el resto de la división es* $3 \neq 0$*. En el caso* $n = 3r + 1$*,*

$$x^{6r+2} + x^{3r+1} + 1 = x^2(x^{6r} - 1) + x(x^{3r} - 1) + (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)s(x). \tag{4.28}$$

Luego $x^2 + x + 1$ *es factor si* $n = 3r + 1$*. Finalmente, en el caso* $n = 3r + 2$ *también llegamos a que* $x^2 + x + 1$ *es factor:*

$$\begin{aligned} &x^{6r+4} + x^{3r+2} + 1 = x^4(x^{6r} - 1) + x^2(x^{3r} - 1) + (x^4 + x^2 + 1) = \\ &x^4(x^{6r} - 1) + x^2(x^{3r} - 1) + x(x^3 - 1) = (x^2 + x + 1)t(x). \end{aligned}$$

Problema 4.10 (United States of American Mathematical Olympiad, 1975). Si $p(x)$ es un polinomio de grado n tal que $p(k) = \dfrac{k}{k+1}$ para $0 \leq k \leq n$, calcula $p(n+1)$.

Solución *El valor de $p(k)$ nos dice que el polinomio $(x+1)p(x) - x$ tiene como raíces $0, 1, \ldots n$, luego factoriza en la forma:*

$$(x+1)p(x) - x = a \cdot x \cdot (x-1) \cdot \cdots \cdot (x-n). \tag{4.29}$$

En (4.29), sutituímos $x = -1$ y obtenemos que $1 = a(-1)^{n+1}(n+1)!$ y que

$$p(x) = \frac{(-1)^{n+1}x \cdot (x-1) \ldots (x-n)/(n+1)! + x}{x+1}. \tag{4.30}$$

De $x = n+1$ en (4.30) concluímos que $p(n+1) = 1$ si n es impar y $p(n+1) = \dfrac{n}{n+2}$ si n es par.

Por último, a modo de curiosidad histórica, en el Cuadro 4.1 se puede observar el lenguaje escrito empleado por Al-Karaji para referirse a las diversas potencias para un variable desconocida, así como para sus respectivos inversos. Por ejemplo, vemos que Al-Karaji denota por “cosa” (en inglés “thing”) a la variable independiente x, mientras que utiliza el vocablo “parte-cosa” (en inglés “part-thing”) para referirse a la inversa de x, esto es, a la expresión x^{-1}.

Al-Karaji (1000 d.C.)	Actual	Al-Karaji (1000 d.C.)	Actual
cube-cube	x^6	part-cube-cube	$x^{-6} = 1/x^6$
square-cube	x^5	part-square-cube	$x^{-5} = 1/x^5$
square-square	x^4	part-square-square	$x^{-4} = 1/x^4$
cube	x^3	part-cube	$x^{-3} = 1/x^3$
thing	x^1	part-thing	$x^{-1} = 1/x$
unit	1	-	-

Cuadro 4.1: Notación para polinomios adoptada por Al-Karaji (1000 d.C.).

Ejercicios Propuestos

1. Calcula el valor de la suma de los cuadrados de las tres raíces del polinomio $x^3 + 3x^2 - 7x + 1$.

2. Calcula todos los polinomios con coeficientes reales tales que $xp(x-1) = (x+1)p(x)$.
   Pista: Usa $q(x) = (x+1)p(x)$ y su relación con la ecuación dada.

3. Calcula las soluciones reales de la ecuación $\sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x} = 5$.
   Pista: Llama $a = \sqrt[4]{97-x}$ y $b = \sqrt[4]{x}$ y manipula la ecuación.

4. Sean α, β raíces del polinomio $x^2 - 6x + 1$. Si $r_n := \alpha^n + \beta^n$, prueba que $n \geq 2$, $r_n = 6r_{n-1} - r_{n-2}$ y que r_n es un número entero no divisible por 5 para todo $n \geq 0$.
   Pista: Juega con la recurrencia del enunciado y las Fórmulas de Cardano-Viète.

5. Dado el polinomio $p(x) = x^4 + \square x^3 + \square x^2 + \square x + \square$, en el que cada cuadrado $\square$ representa un hueco donde se colocar un coeficiente, se plantea el siguiente juego entre dos jugadores: Alternativamente, el primer y el segundo jugador eligen un hueco vacío y colocan en él un entero no nulo hasta rellenar los cuatro huecos. Si el polinomio resultante tiene al menos dos raíces enteras gana el segundo jugador, en otro caso el ganador es el primero. Prueba que, eligiendo la estrategia adecuada, el primer jugador siempre puede ganar. (Fase local de la XLVI Olimpiada Matemática Espa ñola, Alicante 2010.)

6. * Encuentra los pares de polinomios $(a(x), b(x))$ con coeficientes reales tales que su composición, $a(b(x))$, de como resultado un polinomio que factoriza en la forma $a(b(x)) = b(x)x^2$. (South Africa MO 2013, Problema 4)

7. * Si $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ y $s(x)$ son polinomios tales que
   $$p(x^5) + xq(x^5) + x^2r(x^5) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)s(x),$$
   demostrar que $p(x)$ es divisible entre $x - 1$. (United States of American Mathematical Olympiad, 1976)
   Pista: Evalúa la ecuación dada en las 5-raíces de uno $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ que son distintas de 1 observando que la parte derecha se anula.

Nota: *Los ejercicios con * son de mayor grado de dificultad. Bien por desarrollo elaborado (Ejercicio 6) o porque requieren de una idea feliz (Ejercicio 7).*

Bibliografía Adicional

1. Engel, A. (1998). Polynomials. *Problem-Solving Strategies*. Editorial Springer, 245-270.
2. Lehmann, C. H. (2004). *Álgebra*. Editoral Limusa.
3. Swokowski, E. W. & Cole, J. A. (2009). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. Editorial Cengage Learning.