Uniciencia Vol. 36(1), pp. 1-20, January-December, 2022
www.revistas.una.ac.cr/uniciencia
revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.41
E-ISSN: 2215-3470

Conocimiento movilizado por estudiantes para maestro, al comparar áreas de figuras 2D

Knowledge used by preservice teaching students when comparing areas of 2D figures

Conhecimento mobilizado por professores estagiários, comparando áreas de figuras 2D

Sofía Caviedes[1]*, Genaro de Gamboa[1], Edelmira Badillo[1]

Received: Oct/29/2021 • Accepted: Apr/5/2022 • Published: Nov/1/2022

Resumen

[Objetivo] Este estudio busca caracterizar el conocimiento matemático especializado que movilizan estudiantes para maestro, al resolver tareas que involucran la comparación de áreas de figuras planas. **[Metodología]** Participan 70 estudiantes para maestro que cursan el tercer año del grado de Educación Primaria, en la Universidad Autónoma de Barcelona, durante el periodo 2020-21. Los estudiantes para maestro responden un cuestionario semiestructurado de respuesta abierta que contemplaba un total de ocho tareas. Se realiza un análisis de contenido cualitativo que considera los procedimientos y las justificaciones utilizadas por los estudiantes para maestro en la resolución de dos tareas. El foco está en dos de los subdominios del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, el Conocimiento de los Temas y de la Estructura de las Matemáticas. **[Resultados]** El uso de procedimientos relacionados con la descomposición, y reorganización de superficies, facilita la movilización de categorías de conocimiento especializado y el establecimiento de conexiones con otros contenidos matemáticos. La coordinación de diversos registros de representación posibilita el establecimiento de conexiones intraconceptuales en la resolución de las dos tareas presentadas. **[Conclusiones]** Las representaciones, en sus registros discursivo y no discursivo, se presentan como indicadores claves, pues permiten hacer explícitos los procedimientos que son utilizados por los estudiantes para maestro y, a partir de estos, las justificaciones, propiedades y principios geométricos que sustentan el proceso de resolución.

Palabras clave: área de figuras planas; conocimiento especializado; conocimiento de los temas; conocimiento de la estructura de las matemáticas; registros de representación

* Autor para correspondencia
Sofía Caviedes, sofia.caviedes@autonoma.cat, https://orcid.org/0000-0002-5304-212X
Genaro de Gamboa, genaro.degamboa@uab.cat, https://orcid.org/0000-0003-0366-3988
Edelmira Badillo, edelmira.badillo@uab.cat, https://orcid.org/0000-0001-6296-4591
1 Departamento de Didáctica de la Matemática y las Ciencias Experimentales, Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, España.

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.41
E-ISSN: 2215-3470

Abstract

[Objective] This study seeks to characterize the specialized mathematical knowledge that preservice teachers make use of when solving tasks that involve comparison of areas of flat figures. **[Methodology]** Seventy (70) preservice teachers, in the third year of the Primary Education degree at the Universidad Autónoma de Barcelona during the period 2020-21, participated in the study. Preservice teachers answered a semi-structured open-ended questionnaire, which included eight tasks. A qualitative content analysis was carried out to analyze the procedures and justifications used by preservice teachers when solving two tasks. The analysis focuses on two of the subdomains of the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge model, Knowledge of Topics and of the Structure of Mathematics. **[Results]** The use of procedures related to the decomposition and reorganization of surfaces facilitates making use of categories of specialized knowledge, and establishing connections with other types of mathematical content. Furthermore, coordination of different registers of representation makes it possible to establish intra conceptual connections in the solution of the two tasks presented. **[Conclusions]** Representations, in their discursive and non-discursive registers, are presented as key indicators which assist in making explicit the procedures used by preservice teachers, and based on them, the justifications, properties and geometric principles that support the resolution process.

Keywords: Areas of flat figures; specialized knowledge; knowledge of topics; knowledge of the structure of mathematics; registers of representation.

Resumo

[Objetivo] Este estudo visa caracterizar o conhecimento matemático especializado mobilizados por professores estagiários na resolução de tarefas que envolvem a comparação de áreas de figuras planas. **[Metodologia]** Participaram 70 professores estagiários do terceiro ano do ensino fundamental na Universidade Autônoma de Barcelona, durante o período de 2020-21. Os professores estagiários respondem a um questionário aberto semi-estruturado com um total de oito tarefas. É realizada uma análise de conteúdo qualitativo que considera os procedimentos e justificativas utilizadas pelos professores estagiários na resolução de duas tarefas. O foco está em dois dos subdomínios do modelo de Conhecimento Especializado do Professor de Matemática, Conhecimento dos Temas e da Estrutura da Matemática. **[Resultado]** O uso de procedimentos relacionados à decomposição e reorganização de superfícies facilita a mobilização de categorias de conhecimento especializado e o estabelecimento de conexões com outros conteúdos matemáticos. A coordenação de vários registros de representação permite estabelecer conexões intraconceituais na resolução das duas tarefas apresentadas. **[Conclusões]** As representações, em seus registros discursivos e não discursivos, são apresentadas como indicadores-chave, pois explicitam os procedimentos utilizados pelos professores estagiários e, a partir deles, as justificativas, propriedades e princípios geométricos que sustentam o processo de resolução.

Palavras-chave: área de figuras planas; conhecimento especializado; conhecimento dos temas; conhecimento da estrutura da matemática; registros de representação.

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.41
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Introducción

La agenda de investigación sobre el conocimiento del profesor ha venido tomando protagonismo en las últimas tres décadas. El trabajo de Shulman (1986), planteó la necesidad de considerar la especificidad del contenido que es enseñado por los educadores, describiendo el conocimiento necesario para instruir desde una determinada disciplina, el Conocimiento del Contenido (SMK).

De esta manera, Shulman (1986) señala que es necesario que los profesores comprendan la estructura del contenido que enseñan, su organización conceptual y las ideas relevantes. A su vez, el autor establece una diferenciación entre Conocimiento del Contenido y Conocimiento Pedagógico (o didáctico) del Contenido (PCK), entendiendo este último como una mezcla entre contenido y pedagogía, y donde adquiere relevancia la manera en que el educador transforma su propio conocimiento para hacerlo comprensible a los alumnos (p. e., mediante ejemplos o metáforas).

Esta atención a la especificidad del contenido ha permitido, en el caso de las matemáticas, el desarrollo de diversos marcos teóricos que centran su atención en el desarrollo profesional durante la formación inicial, o en la práctica del ejercicio profesional. Por ejemplo, el modelo de conocimiento matemático para la enseñanza (Ball, Thames & Phelps, 2008), el cuarteto de conocimiento (Rowland, Huckstep & Thwaites, 2005), la competencia de la mirada profesional (Llinares, 2012) o el modelo de conocimiento y competencia didáctico matemático (Godino, Giacomone, Font & Pino-Fan, 2018).

A partir del trabajo de Shulman (1986) y de Ball, Thames & Phelps (2008), Carrillo *et ál.* (2018), proponen el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), con el que buscan caracterizar de forma operativa el conocimiento matemático, y didáctico del contenido matemático, que sustenta las acciones del profesor en su práctica como profesional.

Dicho modelo, se distingue de los otros al considerar la noción de especialización desde una perspectiva intrínseca y no en relación con referentes externos al área, es decir, con otras profesiones (Scheiner, Montes, Godino, Carrillo & Pino-Fan, 2017). Carrillo *et ál.* (2018), señalan que el modelo MTSK busca comprender y analizar el conocimiento de los profesores que enseñan matemáticas, y que es específico para la enseñanza y el aprendizaje de esa disciplina.

Así, el modelo se presenta como una herramienta de análisis detallada, donde cada subdominio se construye en función de lo que el profesor utiliza o necesita, sin hacer mención a referentes externos. Esto último, tiene la ventaja de poder superar las limitaciones que tienen otros modelos de conocimiento; por ejemplo, los problemas de solapamiento entre subdominios y categorías de conocimiento, o bien, la falta de consideración del saber que los profesores ponen en juego cuando desempeñan una tarea distinta de la enseñanza, limitaciones que Carrillo *et ál.* (2018) han evidenciado en otros modelos, como el de Ball, Thames & Phelps (2008) o el de Rowland, Huckstep & Thwaites (2005).

Los referentes anteriores han abordado el conocimiento del contenido y pedagógico del contenido con profesores en ejercicio y formación. Sin embargo, el dominio de conocimiento del contenido ha sido menos estudiado en el nivel internacional, en comparación con el dominio de conocimiento pedagógico (Krauss & Blum, 2012), aun cuando se ha evidenciado que la falta de

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.41
E-ISSN: 2215-3470

dicho conocimiento afecta fuertemente, el uso de herramientas pedagógicas por parte de los profesores y, por ello, sus métodos de enseñanza (Carpenter, Fennema, Peterson & Carey, 1988; Hill & Ball, 2004; Ma, 1999).

El conocimiento del contenido permite a los profesores comprender y justificar mejor por qué resuelven tareas matemáticas de una manera determinada, y conocer diferentes formas de resolución, a fin de poder enseñar el contenido a los alumnos (Shulman, 1986).

En los profesores, este conocimiento es importante para todos los temas, incluida la geometría, pues es uno de los más aplicables a la vida cotidiana, pero a menudo descuidado en los planes de estudios (Aslan-Tutak & Adams, 2017). En este sentido, destaca la importancia del saber sobre el área de figuras planas, ya que, ello puede servir como un modelo de base para trabajar otros contenidos matemáticos en la Educación Primaria, como, por ejemplo, la multiplicación de números naturales o las fracciones (Freudenthal, 1983).

A pesar de las distintas aplicaciones que puede tener el área, numerosas investigaciones, centradas en el conocimiento sobre el área para la enseñanza, concluyen que los profesores en formación no cuentan con el conocimiento del contenido y pedagógico del contenido necesarios (Baturo & Nason, 1996; Chamberlin & Candelaria, 2018; Tierney, Boyd & Davis, 1990). Esta falta de conocimiento puede estar relacionada con las dificultades para coordinar los distintos registros de representación (p. e., geométrico o simbólico) que intervienen en la resolución de tareas de área, con la falta de estrategias de resolución (Caviedes, De Gamboa & Badillo, 2019, 2021; Runnalls & Hong, 2020, Simon & Blume, 1994); o bien, con la falta de adquisición de las propiedades involucradas en los procesos de medición de áreas (Hong & Runnalls, 2020).

Este estudio considera la relevancia del dominio del conocimiento del contenido desde el modelo de conocimiento especializado – MTSK- (Carrillo *et ál*., 2018), donde dicho dominio se nombra como Conocimiento Matemático (MK). El MTSK se presenta como una herramienta teórica y metodológica que permite analizar diferentes prácticas del profesor de matemáticas a través de sus dominios, subdominios y categorías (Carrillo *et ál*., 2018), lo cual permite caracterizar aspectos de conocimiento específico, sobre el área de figuras planas, en Estudiantes para Maestro (EPM).

En este contexto, se propone dar respuesta la siguiente pregunta: ¿cuál es el conocimiento matemático especializado que movilizan los EPM cuando resuelven tareas de comparación de áreas? Específicamente, el objetivo es caracterizar el Conocimiento de los Temas (KoT) y el Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM) que movilizan los EPM al resolver tareas de comparación de áreas de figuras planas.

Marco teórico

El modelo MTSK se caracteriza por presentar una reconfiguración del conocimiento matemático, una reinterpretación del conocimiento pedagógico del contenido y una nueva forma de conceptualizar la noción de especialización (Scheiner *et ál*., 2017). Así, el modelo considera la especialización como el núcleo del conocimiento del profesor de matemáticas en todos sus dominios, subdominios y categorías (Aguilar-González, Muñoz-Catalán & Carrillo, 2018).

Si bien es cierto, el modelo es utilizado para estudiar, principalmente, la práctica de los profesores, algunas investigaciones

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.41
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

señalan que es posible utilizarlo como una herramienta para dirigir el diseño de tareas (Policastro, Mellone, Ribeiro & Fiorentini, 2019), o bien, como un referente de los componentes deseables en el conocimiento de los EPM, y por ello, como una primera aproximación a lo que los EPM deberían conocer para su futura práctica (Liñan, Barrera & Infante, 2014).

El MTSK conserva la separación entre PCK y SMK (Shulman 1986), aunque este último es renombrado como MK (Conocimiento Matemático). El modelo consta de seis subdominios, tres referentes al MK: Conocimiento de los Temas (KoT), Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM) y Conocimiento de la Práctica de la Matemática (KPM); y otros tres referentes al PCK: Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM), Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT) y Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS). Específicamente, nos interesa el subdominio del KoT y, de manera complementaria, el KSM.

El KoT describe el qué y de qué manera el profesor de matemáticas conoce el contenido que enseña. De esta forma, detalla el conocimiento que los educadores tienen sobre distintas definiciones como: el concepto de área en sus diferentes niveles escolares (p. e. ¿qué es el área matemáticamente hablando?); las propiedades y los principios involucrados en los procesos de medición de áreas (p. e., la propiedad de conservación de área y los principios geométricos que dan soporte a dicha propiedad).

También, la fenomenología (p. e., la comparación y la reproducción de formas); de los procedimientos y sus justificaciones (p. e., ¿cómo y por qué utilizar fórmulas o procedimientos de descomposición?); los sistemas de representación que se hacen explícitos por medio de enunciados, procedimientos o justificaciones (p. e., mediante registros simbólicos). Las conexiones interconceptuales también, forman parte de este subdominio y corresponden a aquellas relaciones que se establecen entre los distintos elementos mencionados con anterioridad (Carrillo *et ál*., 2018).

Por su parte, el KSM se refiere al conocimiento del profesor sobre las relaciones entre distintos contenidos matemáticos (Montes *et ál*., 2015). Aunque en este estudio nos focalizamos solo en las conexiones auxiliares, realizamos una definición general de todas las conexiones contenidas en el KSM, a fin de poder ver las diferencias entre ellas.

El KSM distingue cuatro tipologías de conexiones: simplificación, complejización, auxiliares, y transversales. Las dos primeras se relacionan, respectivamente, con que los conocimientos elementales permiten a los profesores un tratamiento de la matemática avanzada desde una perspectiva elemental; los conocimientos avanzados, un tratamiento de la matemática elemental desde una perspectiva avanzada (Montes *et ál*, 2015).

Por ejemplo, una conexión de simplificación se puede establecer cuando los profesores utilizan el modelo de área de un rectángulo, para la enseñanza de la multiplicación de números naturales. Una conexión de complejización, cuando un educador emplea el cálculo del área de rectángulos semejantes, para introducir la comparación entre un crecimiento lineal y uno cuadrático.

Las conexiones auxiliares están relacionadas con la participación de un tema en un proceso más largo (Carrillo *et ál*., 2018). Por ejemplo, cuando un profesor utiliza el teorema de Pick para ayudar a los alumnos a diferenciar entre área y perímetro, y superar dificultades relacionadas con ambas magnitudes.

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.41
E-ISSN: 2215-3470

Finalmente, las conexiones transversales se refieren a los conocimientos que fundamentan las relaciones entre varios temas con rasgos comunes (Montes, 2015). Por ejemplo, la conexión entre la medición de una magnitud y la proporcionalidad inversa, pues cuanto mayor es la unidad de medida, menor será el valor numérico obtenido de la medición, y viceversa.

Resolución de tareas de área por EPM

La medición de superficies es algo conceptualmente más complejo que asignar un número a dichas superficies, ya que requiere del entendimiento y la reorganización del objeto a medir, además de la comprensión de las diferentes propiedades, conceptos y procedimientos involucrados en la medición (Sarama & Clements, 2009). Por lo tanto, no es de extrañar que la medición de áreas suscite dificultades tanto en alumnos como en EPM.

Son numerosas las investigaciones que ponen en evidencia las dificultades que tienen los alumnos de primaria, secundaria y primeros cursos de bachillerato al momento de resolver tareas de área (Caviedes, De Gamboa & Badillo, 2020; D'Amore & Fandiño, 2007; Kospentaris, Spyrou & Lappas, 2011; Sisman & Aksu, 2009; Zacharos, 2006). Estas se relacionan, principalmente, con escasas estrategias de resolución y con la adquisición limitada de propiedades (p. e., conservación del área).

Estas mismas dificultades se han evidenciado en los EPM, quienes muestran una tendencia generalizada hacia el uso de cálculos y fórmulas (Baturo & Nason, 1996; Caviedes, De Gamboa & Badillo, 2019; Chamberlin & Candelaria, 2018; Hong & Runnalls, 2020), aspecto que limita sus capacidades para proponer ejemplos y orientar las respuestas erróneas de alumnos (Runnalls & Hong, 2020).

Livy, Muir & Maher (2012), al entrevistar a 222 EPM en su último año de formación, evidencian que una mayoría realiza una falsa asociación área-perímetro (más perímetro, más área) y definen el área como "largo x ancho" en lugar de vincularla al concepto de superficie o espacio ocupado. Baturo & Nason (1996), luego de proponer a 18 EPM calcular el área de un rectángulo y un cuadrado, muestran que los EPM no toman en consideración las unidades cuadradas para expresar el valor numérico del área.

Además, los investigadores señalan que los EPM cometen errores de cálculo al obtener el área cuando deben operar con números decimales y, no razonan sobre si el valor obtenido puede ser correcto o no. De manera similar, Tierney, Boyd & Davis (1990) señalan que los EPM generalizan la fórmula del área del rectángulo para encontrar áreas de otras figuras que no son rectángulos, asocian los cambios de longitudes a cambios de áreas y de no tener valores numéricos asociados a una región 2D, toman como referencia el perímetro de la figura para justificar su área.

Respecto a la conservación del área, Hong & Runnalls (2020) evidencian que los EPM presentan dificultades para aceptar dicha propiedad en figuras no prototípicas; también muestran que justifican la equivalencia de triángulos, de distinta forma, mediante estimaciones visuales. Los mismos autores enfatizan que la comprensión de las ideas que subyacen a la conservación del área, permitiría a los EPM entender de mejor manera las fórmulas, a la vez que les permiten el desarrollo de una fluidez procedimental.

La propiedad de conservación del área ha sido reconocida como un paso preliminar y obligado para la comprensión de

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.41
E-ISSN: 2215-3470

los procesos de medición de áreas (Piaget, Inhelder & Szeminska, 1981). Por tal razón consideramos relevante identificar cuál es el conocimiento matemático especializado que movilizan los EPM al resolver tareas que requieren comparar superficies equivalentes y distintas en forma.

Creemos que esto implica un conocimiento amplio sobre la variedad de procedimientos que puede admitir una tarea, además del estudio y del análisis de los diferentes conceptos y propiedades involucrados en los procesos de medición (Sarama & Clements, 2009). Dichos elementos se manifiestan de manera explícita mediante el uso de representaciones diferentes (Caviedes, De Gamboa & Badillo, 2021). Por lo tanto, resulta necesario ampliar y profundizar la comprensión sobre el tipo de relaciones que se pueden establecer entre las diversas representaciones del área.

Registros de representación semiótica

Los registros de representación semiótica (Duval, 1995; 1999) permiten realizar un análisis de las diferentes representaciones externas que son utilizadas en la resolución de determinadas tareas matemáticas. De acuerdo con Duval (2017), las representaciones semióticas están presentes en todas las formas que pueda tener una determinada actividad matemática (p. e. resolver problemas, demostrar conjeturas).

Así, el desarrollo de la actividad matemática depende de dos factores. Primero, la variedad de representaciones semióticas que pueden ser utilizadas; y segundo, la necesidad de producir y considerar (alternativa o paralelamente) dos tipos de representaciones diferentes para un mismo objeto.

De esta manera, la complejidad cognitiva que subyace a los procesos de pensamiento en matemáticas se relaciona con la existencia de dos formas específicas de transformación: la conversión y el tratamiento (Duval, 2006). Mientras que las conversiones se dan entre registros diferentes, los tratamientos se producen dentro de un mismo registro.

Duval (2017) señala que la comprensión de las figuras geométricas se relaciona con la coordinación de dos registros de representación semiótica: el discursivo (oral o escrito, en lenguaje natural o simbólico) y el no discursivo (dibujos, bocetos, gráficos, figuras y configuraciones geométricas).

Para el caso de las figuras geométricas (registro no discursivo), la visualización no icónica (Duval, 2017) adquiere un papel relevante, ya que es necesario realizar una deconstrucción visual de las unidades figurales que se imponen a primera vista, a fin de obtener una reconfiguración.

En este sentido, el trazado suplementario se presenta como uno de los principales problemas, pues el cómo dividir una figura no es algo obvio. Duval (2017) señala que existen dos maneras de descomponer una figura en unidades figurales: la división mereológica y la deconstrucción dimensional.

La primera consiste en la división de un todo en partes que se pueden yuxtaponer o superponer y, se hace siempre para reconstruir, con las partes obtenidas, una figura a menudo muy diferente visualmente, pero en la misma dimensión. Por su parte, la desconstrucción dimensional permite analizar la transformación de una forma dada en otra forma, en la misma o en distinta dimensión.

La deconstrucción dimensional debe ser entrenada y la organización de tareas que permiten el desarrollo de dicha habilidad es compleja (Duval, 2017). Proponer tareas de las que se excluyan todas las actividades de medición y cálculo, es solo un primer paso (por sí solo insuficiente), pero es útil para

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.41
E-ISSN: 2215-3470

interiorizar las operaciones figurales, condición necesaria para poder realizar tareas de numeración o aplicar las fórmulas de cálculo de áreas (Duval, 2017).

Debido a que no se han organizado las tareas para desarrollar la habilidad de deconstruir dimensionalmente una figura, ni tampoco los EPM han tenido instrucción que permita su desarrollo, en este estudio se pone énfasis en la división mereológica; la cual constituye una de las heurísticas principales en las transformaciones de las figuras geométricas (Duval, 2017).

La división mereológica admite tres tipos de descomposiciones: (1) estrictamente homogénea, descomposiciones en unidades figurales de la misma forma que la figura de partida; (2) homogénea, descomposiciones en unidades figurales diferentes de la figura de partida, pero todas de la misma forma; y (3) heterogénea: descomposiciones en unidades figurales de formas diferentes entre ellas.

Todas estas descomposiciones permiten la exploración puramente visual de una figura de partida, a fin de detectar las propiedades geométricas que se van a utilizar para resolver una tarea y, para obtener una reconfiguración que haga aparecer nuevas formas no reconocibles en la figura de partida (Duval, 2017). En este sentido, consideramos que la división mereológica permite una caracterización más detallada del conocimiento matemático especializado que pueden movilizar los EPM al resolver tareas que involucran la comparación de áreas.

Metodología

El estudio se sitúa en un paradigma interpretativo, con un enfoque cualitativo (Cohen, Manion & Morrison, 2000), y forma parte de una investigación más amplia que busca caracterizar el conocimiento matemático especializado que movilizan los EPM en la resolución de tareas de área.

Se realiza un análisis de contenido (Krippendorff, 2004), siendo las categorías de análisis las que corresponden a los subdominios del KoT y el KSM. En el caso de KoT se encuentra la fenomenología, las representaciones, los procedimientos y las justificaciones, las propiedades y los principios, y las conexiones intraconceptuales (Carrillo *et ál*., 2018). En el caso del KSM, las conexiones auxiliares.

Para cada categoría se construyen indicadores de conocimiento, y para facilitar el proceso de asignación de estos a las respuestas de los EPM se utiliza el programa informático MAXQDA plus. La recolección de datos se realizó en el primer trimestre del curso escolar 2020-2021; y participaron 70 EPM que cursaban el tercer curso del grado de Educación Primaria en la Universidad Autónoma de Barcelona. Los estudiantes, como parte de su programa de estudios, habían tenido instrucción previa sobre diferentes procedimientos para medir áreas.

Instrumento y procedimiento

Se diseñó un cuestionario semiestructurado de respuesta abierta (Bailey, 2007), divido en ocho tareas, para ser resuelto de forma individual y por escrito; los EPM podían utilizar material anexo (recortables) e instrumentos de medición; pero en las primeras tareas se prohibió el uso de regla.

Este instrumento se estructuró de la siguiente manera: tres tareas que responden a contextos de reparto equitativo o comparación y reproducción de formas, y donde el uso de cálculos estaba prohibido (tareas 1, 2 y 3); dos tareas de medición (tareas 4 y 5); una de clasificación de enunciados y otra de definición del concepto de área (tareas 6 y 7); y, otra de análisis de respuestas de alumnos (tarea 8).

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.41
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

El cuestionario fue aplicado por la profesora a cargo de la asignatura, en formato *online*, debido a la contingencia sanitaria derivada de la COVID-19, y los EPM tuvieron una semana para responderlo. Debido al objetivo de este estudio, caracterizar el KoT y el KSM que movilizan los EPM cuando resuelven tareas de comparación de áreas de figuras planas, se presentan evidencias de las resoluciones a la tarea 2 y 3 del cuestionario (tabla 1).

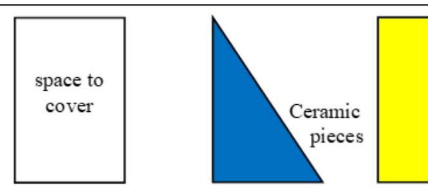
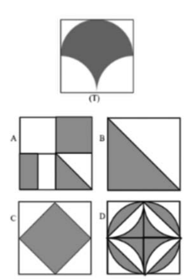
Análisis

Los indicadores que constituyen las categorías del subdominio del KoT se construyen *a priori* y surgen de una *configuración epistémica* sobre los procesos de medición de áreas (Caviedes, De Gamboa & Badillo, 2021). Los elementos de dicha configuración se adaptan a las categorías que el MTSK propone para el KoT y permiten una *codificación deductiva* de las respuestas de los EPM.

Se hace especial énfasis en las representaciones, tomando en consideración las aportaciones de Duval (2006, 2017). Los indicadores correspondientes al subdominio de las conexiones auxiliares (KSM) emergen del propio análisis de las respuestas de los EPM, pues la configuración epistémica elaborada no presentaba elementos que pudiesen adaptarse a las categorías de dicho subdominio.

En la tabla 2 se muestran las categorías de conocimiento, y sus respectivos indicadores, en concordancia con la conceptualización del modelo MTSK. Las figuras 1, 2 y 3 muestran ejemplos de resoluciones de dos EPM, quienes movilizan categorías de conocimiento matemático especializado en los subdominios del KoT y KSM. Dichas resoluciones se consideran representativas del conjunto de EPM que evidencia movilización de las categorías de conocimiento especializado.

Tabla 1
Tareas propuestas al grupo de estudiantes

Enunciado de cada tarea	Gráfica de las tareas
TAREA 2: Camila está haciendo un **mosaico** de **cerámica** con distintos colores. Para terminar su **mosaico** le falta cubrir un espacio rectangular, pero no tiene ningún **trozo** de **cerámica** con esa **forma**. Solo le queda un **trozo** con **forma** rectangular, y otro con **forma** triangular. **¿Qué puede hacer Camila para cubrir el espacio que falta en su mosaico? *Justifica tu respuesta.***	 Adaptado de Puig & Guillén. (1983).
TAREA 3: Tomando como referencia la **superficie sombreada** de la **figura** (T): **¿cuál o cuáles de las siguientes figuras tienen una superficie sombreada equivalente a la figura (T)? ¿Por qué? *Justifica tu respuesta.***	 *Nota*: fuente propia de la investigación.

Nota: fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.41
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Tabla 2

Categorías de conocimiento matemático especializado.

Categorías del KoT y KSM	Indicadores
Representaciones (R)	(R1) *Escrita*: utilizando adjetivos como: "igual", "más delgada" "más ancha", "el doble", "la mitad" "la cuarta parte" en relación con las superficies. Se utiliza en los conceptos, términos, proposiciones y propiedades sobre el área. En el enunciado de las tareas, en la justificación de los procesos y en la explicación de los resultados. (R2) *Manipulativa:* utilizando objetos físicos. Se muestra a través de elementos físicos como Tangram, recortables; o bien, por medios tecnológicos como Geogebra, Cabri u otro. (R3) *Geométrica:* utilizando descomposiciones convenientes para comparar o estimar cantidades de superficies; utilizando cuadrículas y particiones en figuras congruentes (cuadrados o triángulos) de las unidades de medida y de las superficies. Permite visualizar el proceso efectuado para, por ejemplo, la descomposición de superficies, el trazado de líneas y elementos auxiliares y las posibles reconfiguraciones. (R4) *Simbólica:* conjunto de los R^+ para comparar dos o más superficies; conjunto de los R^+ para el conteo de unidades o suma de áreas.
Procedimientos (P) y justificaciones (J)	(P1) Comparar dos o más superficies de manera directa por superposición total o parcial. (P2) Comparar dos o más superficies de manera indirecta por recorte y pegado. (P3) Descomponer de forma conveniente, gráfica o mentalmente, dos o más superficies. (P4) Realizar movimientos de rotación, traslación y superposición de figuras. (P5) Medir áreas como proceso aditivo contando unidades y subunidades que recubren la superficie. (J1) Comparar dos o más superficies colocando una forma sobre otra, resulta útil para establecer relaciones de equivalencia o inclusión. (J2) El acto mental de cortar el espacio bidimensional en partes de igual área sirve como base para comparar áreas, pues permite establecer relaciones en función de las partes que componen la superficie, considerando sus longitudes. (J3) Al cambiar la forma de una superficie no se producen cambios en el área de esta, ya que, las figuras pueden ser descompuestas y reorganizadas conservando las mismas "partes".
Propiedades (Pp) y principios (Pr)	(Pp1) Conservación (Pp2) Acumulación y aditividad (Pp3) Transitividad (Pr1) Un paralelogramo que tiene la misma base que un triángulo, ambos colocados entre las mismas paralelas, es el doble del triángulo. (Pr2) Los triángulos colocados sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales. (Pr3) Dos polígonos son congruentes si tienen sus lados y ángulos respectivamente iguales o congruentes. (Pr4) Todo polígono puede descomponerse en triángulos. (Pr5) Todo triángulo es equidescomponible a un paralelogramo.
Conexiones auxiliares (Cau)	(Cau1) Uso de un procedimiento o concepto para introducir un nuevo procedimiento o concepto.

Nota: fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.41
E-ISSN: 2215-3470

La figura 1 muestra la resolución de la EPM 2 a la tarea 2, y esto evidencia movilización de indicadores de conocimiento del KoT. La EPM utiliza representaciones en sus registros discursivo (R1), y no discursivo. Respecto al (R1), la EPM utiliza el lenguaje natural para explicar sus procedimientos. A partir de este, se evidencia un uso implícito de justificaciones (J1 y J2), ya que la EPM superpone las superficies, además de partirlas, a fin de realizar una comparación. Además, al partir las superficies y reorganizar sus partes, la EPM hace un uso implícito de (J3).

El registro no discursivo se hace evidente de tres maneras. Primero, cuando la EPM utiliza representaciones manipulativas (R2) para hacer visible las descomposiciones y las reorganizaciones de las figuras. Segundo, cuando la EPM utiliza representaciones geométricas (R3) para comparar superficies de manera indirecta (P2) y, descomponer la superficie de forma conveniente (P3). Tercero, cuando la EPM realiza movimientos de traslación y rotación de las partes de la figura (P4), a fin de comprobar que tanto el triángulo azul, como el rectángulo amarillo, corresponden a la mitad del trozo que se requiere cubrir.

El registro no discursivo utilizado por la EPM se hace explícito mediante los procedimientos que son usados para responder la tarea. Los cuales corresponden a descomposiciones estrictamente homogéneas (rectángulo amarillo en otros rectángulos) y heterogéneas (rectángulo azul en trapecio y triángulo; y rectángulo amarillo en triángulos y rectángulo).

Las descomposiciones estrictamente homogéneas y heterogéneas permiten a la EPM hacer un uso implícito de la propiedad de transitividad (Pp3), ya que realiza una comparación entre la superficie a cubrir y aquellas que representan los trozos. Además, permiten a la EPM hacer un uso implícito de las propiedades de acumulación y aditividad (Pp2) y conservación (Pp1); de esta manera, la EPM reconoce que las figuras pueden ser descompuestas y recompuestas en otras figuras, conservando las mismas "partes" y el mismo "espacio".

Las descomposiciones señaladas permiten inferir que la EPM reconoce que un triángulo es equidescomponible a un paralelogramo (Pr5), es decir, que un triángulo puede descomponerse en un número finito de polígonos y formar un paralelogramo (y viceversa), conservando el área. De manera

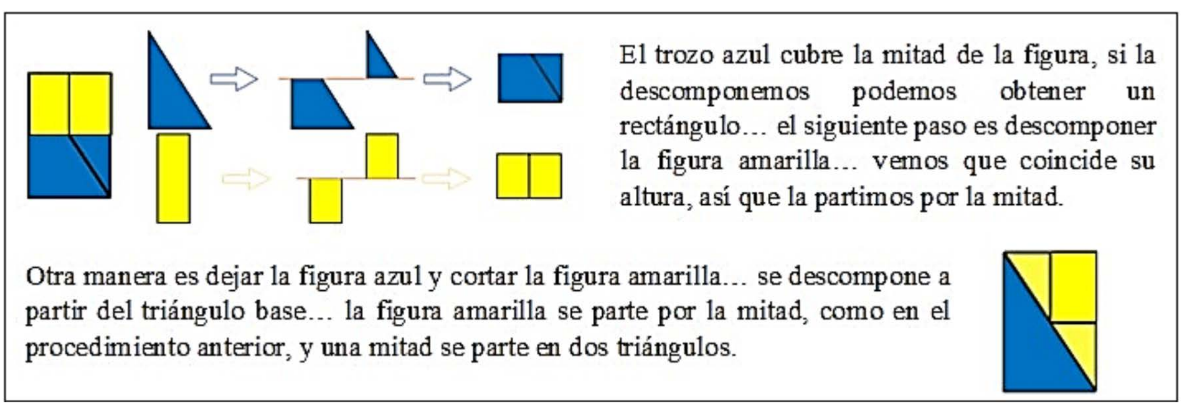


Figura 1. *Resolución de la EPM 2.*
Nota: fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.41
E-ISSN: 2215-3470

similar, las descomposiciones permiten inferir que la EPM reconoce, implícitamente, que un paralelogramo de igual base y altura que un triángulo, ambos colocados entre las mismas paralelas, es el doble que este (Pr1).

El análisis anterior permite inferir que la EPM realiza un tratamiento visual, que está guiado por las líneas angulares de las representaciones gráficas de las figuras geométricas, y por los trazos suplementarios que permiten realizar descomposiciones estrictamente homogéneas y heterogéneas sobre las figuras. En este sentido, las líneas angulares tienen un valor operatorio, ya que sugieren de manera implícita que, tanto el rectángulo amarillo como el triángulo azul, pueden ser descompuestos en unidades figurales que, reorganizadas, encajen en el rectángulo que representa el "espacio por cubrir".

La figura 2 muestra la resolución de la EPM 2 a la tarea 2; la cual evidencia movilización de indicadores de conocimiento del KoT. Se observa que la EPM utiliza representaciones en sus registros discursivo y no discursivo. El discursivo se manifiesta mediante el lenguaje natural (R1), a partir de aquí, se infiere que la EPM reconoce que el acto mental de cortar el espacio bidimensional, en partes de igual área, sirve como base para comparar áreas (J2); y que la EPM reconoce que al cambiar la forma de una superficie no se producen cambios en el área de esta (J3).

El registro no discursivo se manifiesta mediante representaciones manipulativas (R2) y geométricas (R1). La EPM descompone cada una de las figuras de manera conveniente (P3) y realiza movimientos de rotación y traslación (P4), a fin de comprobar e ilustrar manipulativamente, que cada una de las figuras es equivalente a la figura modelo.

El registro no discursivo utilizado por la EPM se hace explícito mediante los procedimientos mencionados anteriormente, los que corresponden a descomposiciones estrictamente homogéneas (de cuadrados en cuadrados más pequeños), descomposiciones homogéneas (de cuadrados en triángulos) y heterogéneas (de la figura modelo en figuras cóncavas y convexas).

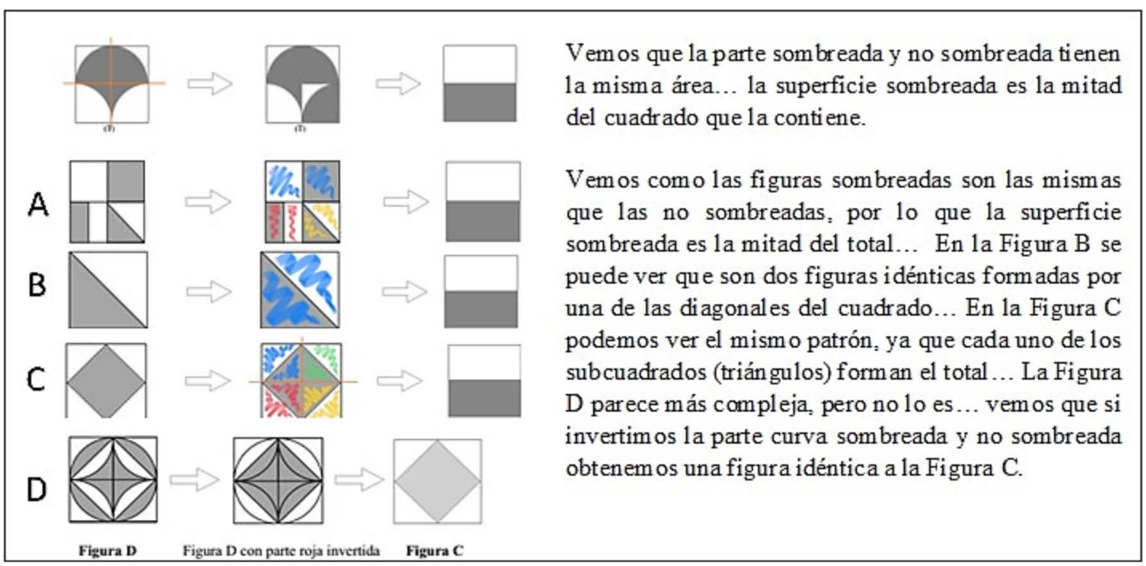


Figura 2. *Resolución de la EPM 2 a la tarea 3.*
Nota: fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.41
E-ISSN: 2215-3470

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

Las descomposiciones estrictamente homogéneas, homogéneas y heterogéneas permiten inferir que la EPM reconoce que los triángulos colocados sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales (Pr2) y, que todo polígono puede descomponerse en triángulos (P4).

Así mismo, permiten inferir que la EPM realiza un uso implícito de las propiedades de acumulación, aditividad (Pp2) y conservación (Pp1), pues reorganiza las superficies sombreadas en rectángulos que representan la mitad del cuadrado que los contiene. La propiedad de transitividad (Pp3) se hace explícita cuando la EPM dice que "si la Figura D es igual que la Figura C, y la Figura C es igual al modelo, entonces la Figura D es equivalente al modelo.

El análisis anterior permite inferir que la EPM realiza un tratamiento visual, el que está guiado por las líneas angulares de las representaciones gráficas de las figuras geométricas, y los trazos suplementarios que permiten realizar descomposiciones estrictamente homogéneas, homogéneas y heterogéneas sobre tales figuras (y sus unidades figurales).

En este sentido, las líneas angulares de la figura modelo, y las figuras A, B, C y D, tienen un valor operatorio, ya que sugieren de manera implícita que estas, y sus respectivas unidades figurales, pueden ser descompuestas y reorganizadas en una figura diferente, conservando el área. Lo que permite concluir que todas las figuras poseen un área sombreada equivalente.

La figura 3 muestra la resolución de la EPM 39 a la tarea 3. Dicha resolución evidencia movilización de algunos indicadores de conocimiento del KoT y KSM.

La EPM utiliza representaciones en su registro discursivo, mediante un lenguaje simbólico (R4); también usa las fracciones para comparar el área sombreada de cada una de las figuras, y establece la fracción sombreada, respecto de la superficie total. La EPM muestra conocimiento sobre la adición de fracciones, con distinto denominador, y simplificación de estas, poniendo en evidencia una conexión auxiliar con este concepto (Cau1).

Aunque el registro no discursivo no aparece de manera explícita, es posible inferir que la EPM realiza algún tipo de descomposición, pues dice lo siguiente en relación con la figura modelo: "podemos reorganizar las partes de abajo y encajarlas en la esquina superior". Al respecto, se infiere un uso implícito de justificaciones, ya que la EPM reconoce la utilidad de cortar el espacio bidimensional (J2).

T= $\frac{1}{2}$ de la figura. Podemos reorganizar las partes de abajo y encajarlas en las esquinas superiores.

A= $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

B= $\frac{1}{2}$ de la figura

C= $\frac{1}{2}$ de la figura

D= $\frac{1}{2}$ de la Figura. D = C

Figura 3. *Resolución de la EPM 39 a la tarea 3.*
Nota: fuente propia de la investigación.

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.41
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Al reorganizar las partes, se infiere que la EPM pone en práctica los procedimientos de descomposición de superficies (P3); movimientos de rotación y traslación (P4); y de medición de áreas como proceso aditivo (P5). Sin embargo, no es posible determinar si corresponden a descomposiciones estrictamente homogéneas, homogéneas o heterogéneas.

Los procedimientos utilizados, permiten inferir que la EPM reconoce las propiedades de conservación (Pp1) y acumulación y aditividad (Pp2). A su vez, las comparaciones realizadas entre las figuras llevan asociado el uso de la propiedad de transitividad (Pp3).

El análisis anterior permite inferir (ya que el registro no discursivo no es explícito) un tratamiento visual donde las líneas angulares de la figura modelo, y de las figuras A, B, C y D, tienen un valor operatorio, ya que sugieren de manera implícita que estas y sus respectivas unidades figurales, pueden ser descompuestas y reorganizadas en una diferente, conservando el área.

La EPM realiza un tratamiento, en un registro simbólico, mediante cálculos que involucran simplificación y adición de fracciones con distinto denominador. Esto permite que la EPM pueda concluir que todas las figuras tienen un área sombreada equivalente. Se infiere que las descomposiciones y las reorganizaciones de las unidades figurales se ponen en correspondencia con un proceso aditivo que permite determinar la equivalencia de las figuras. Se trata de una conversión no explícita entre un registro discursivo (lenguaje simbólico) y no discursivo (descomposición no explícita).

Resultados

En análisis anterior muestra que los EPM resuelven las tareas 2 y 3 utilizando, mayoritariamente, representaciones en un registro no discursivo (R3), las que se materializan por medio de procedimientos de descomposición conveniente de la superficie (P3), o bien, por el uso de movimientos de rotación, traslación y superposición de figuras (P4).

Estos procedimientos se ven sustentados por un registro discursivo (lenguaje natural) en donde los EPM muestran un uso implícito de justificaciones de tipo geométrico, por ejemplo, que el acto mental de cortar el espacio bidimensional en partes de igual área sirve como base para comparar áreas (J2); o que al cambiar la forma de una superficie no se producen cambios en el área de esta, ya que, las figuras pueden ser descompuestas y reorganizadas conservando las mismas "partes" (J3).

Los procedimientos utilizados por los EPM muestran descomposiciones estrictamente

Tabla 3
Categorías de conocimiento especializado que movilizan los EPM (N=70).

Código	Frecuencia	Código	Frecuencia
P3	57	P2	11
Pp3	57	Cau1 fracciones	11
Pp2	57	R2	6
Pp1	57	P5	3
P4	56	J1	3
R3	56	No responde	3
J3	56	Pr4	3
Pr5	56	Pr3	2
J2	53	P1	2
Pr2	51		
R4	13		
P2	11		

Nota: fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.41
E-ISSN: 2215-3470

homogéneas, homogéneas y heterogéneas, las que tienen como finalidad realizar reconfiguraciones que muestren nuevas formas, no reconocibles en la figura de partida, pero que permitan reconocer la conservación del área y dar respuesta a ambas tareas.

Respecto a las conexiones auxiliares (KSM), algunos EPM muestran uso de ellas vinculadas al KoT y asociadas a un conocimiento sobre fracciones; y estas se asocian a un contexto que requiere establecer relaciones de equivalencia o inclusión entre distintas superficies. En este sentido, las conexiones auxiliares se asocian, mayoritariamente, a las propiedades de conservación (Pp1), transitividad (Pp2), acumulación y aditividad (Pp3), las que se infieren a partir de un registro de representación discursivo y no discursivo. Así, las propiedades antes mencionadas, se hacen explícitas mediante el uso de los procedimientos de descomposición conveniente de la superficie (P3), el uso de movimientos de rotación, traslación y superposición de figuras (P4), o medición de áreas como proceso aditivo (P5).

Las representaciones, en sus registros discursivo y no discursivo, permiten poner en relación los distintos indicadores que conforman el subdominio del KoT (procedimientos y justificaciones, propiedades y principios), quedando en evidencia las conexiones intraconceptuales que se ponen en juego en la resolución de ambas tareas.

Ambos registros, discursivo y no discursivo, al materializarse en justificaciones y procedimientos, permiten identificar las conexiones auxiliares que se movilizan en la resolución de la tarea 3, ya que dichas conexiones llevan asociado el uso de procedimientos relacionados con cálculos, descomposición y reorganización de las figuras.

En este sentido, consideramos que las representaciones juegan un papel fundamental, tanto dentro del KoT como del KSM, ya que permiten la identificación de otras categorías e indicadores de conocimiento, y de otros contenidos matemáticos, en este caso las fracciones. La figura 4 muestra las relaciones entre las representaciones y las categorías del KoT y KSM presentes en el análisis de ambas tareas.

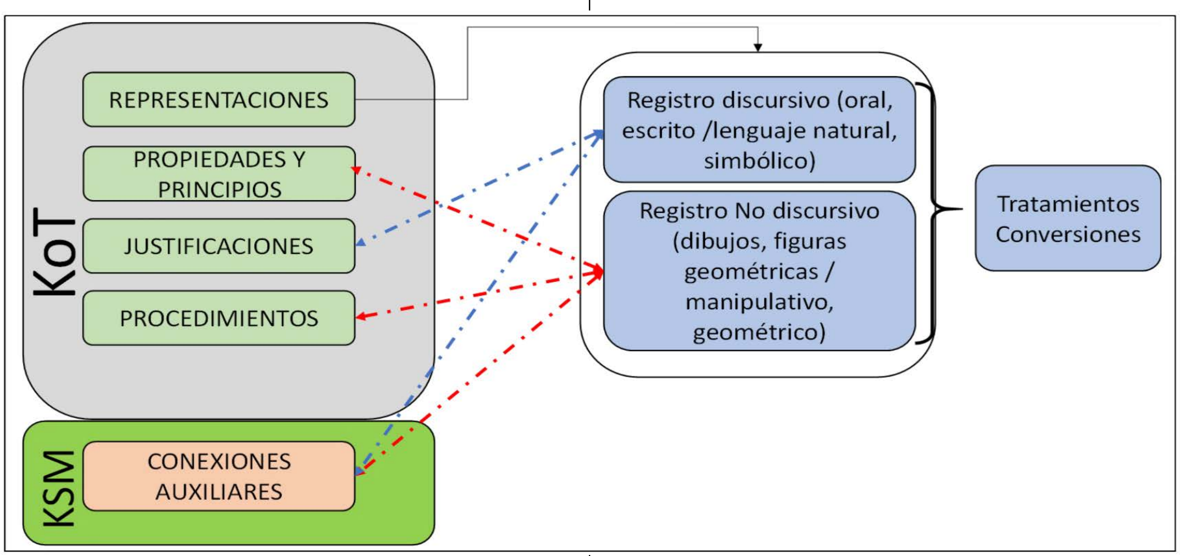


Figura 4. *Relaciones entre representaciones e indicadores KoT y KSM.*
Nota: fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.41
E-ISSN: 2215-3470

Específicamente, la figura 4 muestra la manera en que las representaciones, en su registro discursivo, se materializan por medio de las justificaciones. De manera recíproca, esta categoría del KoT se infiere a partir de dicho registro. Es posible que lo mismo suceda con las definiciones y los conceptos, pero dado que no han sido parte de nuestro análisis, no es posible asumirlo.

Las representaciones, en su registro no discursivo, se materializan mediante procedimientos, propiedades y principios geométricos. Recíprocamente, dichas categorías se infieren por medio del registro no discursivo.

Los registros discursivo y no discursivo permiten identificar la manera en que las distintas categorías de conocimiento (del KoT y KSM) se ponen en juego produciendo transformaciones de tratamiento y conversión en un proceso de resolución. Por su parte, las conexiones auxiliares se infieren desde el uso de registros discursivos y no discursivos y en relación con los indicadores del KoT.

Conclusiones

Los resultados muestran una relación entre aquellas respuestas de tipo descriptiva, es decir, que no justifican lo que se hace o por qué se hace, con la falta de adquisición de ciertos principios geométricos. Como se puede observar en los ejemplos presentados en la sección anterior (figuras 1, 2 y 3), la EPM 2 y la EPM 39 justificaron, y apoyaron sus procedimientos, con base en algunos de los principios geométricos, tales como: dos polígonos son congruentes si sus lados y ángulos son respectivamente iguales o congruentes (Pr3); todo polígono puede descomponerse en triángulos (Pr4); y un paralelogramo que tiene la misma base que un triángulo, ambos colocados entre las paralelos, tiene el doble de área que el triángulo (Pr1).

Sin embargo, estos principios no estuvieron presentes en la mayor parte de las resoluciones y justificaciones escritas proporcionadas por los EPM. Esto permite inferir la existencia de un vacío en el conocimiento matemático especializado de los EPM, además de la relación entre la falta de este tipo de conocimientos y las respuestas descriptivas.

Las representaciones, en su registro discursivo y no discursivo, permiten identificar que las transformaciones de tratamiento y conversión se ven sustentadas por la coordinación estratégica de las diferentes categorías de conocimiento de los subdominios del KoT y KSM.

En este sentido, dichas transformaciones llevan asociado un conocimiento especializado sobre el área de figuras planas, y se presentan como una condición necesaria para que los EPM puedan coordinar distintas categorías e indicadores de conocimiento de ambos subdominios.

El análisis de las categorías del KoT y KSM, presentes en las resoluciones de los EPM, permiten inferir que las representaciones se presentan como una categoría clave, ya que permiten hacer explícitos los procedimientos que son utilizados por los EPM y, a partir de estos, las justificaciones, las propiedades y los principios geométricos (Caviedes, De Gamboa & Badillo, 2021).

Así, las representaciones utilizadas, en sus registros discursivo y no discursivo, pueden condicionar la movilización de distintas categorías e indicadores de conocimiento, pues permiten poner en juego distintos procedimientos, propiedades, principios y justificaciones, al momento de resolver tareas de comparación de áreas.

Por su parte, las descomposiciones estrictamente homogéneas, homogéneas y heterogéneas permiten a los EPM realizar una exploración visual de las figuras presentadas

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.41
E-ISSN: 2215-3470

en las tareas, aspecto que facilita la identificación de las propiedades geométricas que se pueden utilizar (como la conservación del área), y la obtención de reconfiguraciones que permiten resolver ambas tareas (Duval, 2017).

Aunque algunas investigaciones ponen en evidencia las dificultades de los EPM para aceptar la conservación del área (Hong & Runnalls, 2020), en el presente estudio el uso de dicha propiedad se encuentra implícito en las justificaciones y los procedimientos utilizados, y los EPM no presentan mayores dificultades.

Esto puede deberse al tiempo que tuvieron los EPM para resolver el cuestionario, o bien, a la naturaleza de las tareas, ya que, al restringir el uso de cálculos e instrumentos de medición, los EPM se ven obligados a utilizar procedimientos alternativos al uso de fórmulas.

Entendemos que el uso de tareas que restringen los elementos antes mencionados no es suficiente. Sin embargo, sirven de apoyo para que los EPM puedan utilizar operaciones figurales (Duval, 2017). Además, es posible que puedan brindar indicios de cómo proponer tareas para promover la movilización de categorías de conocimiento matemático especializado.

Las categorías de conocimiento propuestas para el subdominio del KoT sirven como un referente del conocimiento que los EPM deberían tener para su futura práctica (Liñan, Barrera e Infante, 2014), pues permiten detallar diferentes representaciones, procedimientos, justificaciones, propiedades y principios, que forman parte del conocimiento especializado sobre el área de figuras planas.

Consideramos que esto podría tener implicaciones en el diseño y la secuenciación estratégica de tareas para los formadores de EPM, quienes podrían ir aumentando, de forma gradual, las categorías y los indicadores de conocimiento matemático especializado que se quieren desarrollar.

Financiamiento

Estudio financiado por ANID PFCHA/DOCTORADO BECAS CHILE/2018-72190032, PID2019-104964GB-I00 (MINECO-España) y GIPEAM, SGR-2017-101, AGAUR. Estudio realizado en el Programa de Doctorado en Educación de la Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener algún conflicto de interés.

Declaración de la contribución de los autores

Todos los autores afirmamos que se leyó y aprobó la versión final de este artículo.

El porcentaje total de contribución para la conceptualización, la preparación y la corrección de este artículo fue el siguiente: S. C. B. 60 %, G. D. R. 30 % y E. B. J. 10 %.

Declaración de disponibilidad de los datos

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el autor correspondiente [S. C. B.], previa solicitud razonable.

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.41
E-ISSN: 2215-3470

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

Referencias

Aguilar-González, Á., Muñoz-Catalán, M. C. & Carrillo, J. (2018). An example of connections between the mathematics teacher's conceptions and specialised knowledge. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *15*(2), 1-15. https://doi.org/10.29333/ejmste/101598

Aslan-Tutak, F. & Adams, T. (2017). A study of geometry content knowledge of elementary preservice teachers. *International Electronic Journal of Elementary Education*, *7*(3), 301-318. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1068059.pdf

Bailey, K. (2007). *Methods of Social Research.* New York: The free press.

Ball, D. L., Thames, M. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Baturo, A. & Nason, R. (1996). Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational studies in mathematics*, *31*(3), 235-268. https://doi.org/10.1007/BF00376322

Carpenter, T. P., Fennema, E., Peterson, P. & Carey, D. (1988). Teachers' pedagogical content knowledge of students' problem solving in elementary arithmetic. *Journal for research in mathematics education*, *19*(5), 385-401. https://web.phys.ksu.edu/current/seminar/f10/pckcarpenter.pdf

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., ... & Ribeiro, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Caviedes, S., De Gamboa, G. & Badillo, E. (2019). Conexiones matemáticas que establecen maestros en formación al resolver tareas de medida y comparación de áreas. *Praxis*, 15(1), 69-87. https://doi.org/10.21676/23897856.2984

Caviedes, S., De Gamboa, G. & Badillo, E. (2020). Procedimientos utilizados por estudiantes de 13-14 años en la resolución de tareas que involucran el área de figuras planas. *Bolema, 34*(68). https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n68a09

Caviedes, S., De Gamboa, G. & Badillo, E. (2021). Mathematical objects that configure the partial area meanings mobilized in task-solving. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-20. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1991019

Chamberlin, M. & Candelaria, M. (2018). Learning from Teaching Teachers: A Lesson Experiment in Area and Volume with Prospective Teachers. *Mathematics Teacher Education and Development*, *20*(1), 86-111. https://eric.ed.gov/?id=EJ1173370

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2000). *Research methods in education,* 5th ed, Routledge falmer, London.

D'Amore, B. & Fandiño, M. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*(1), 39-68.

Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. In *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Berlin: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-57771-0_10

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (M. Vega, Trad.). *Cali,* Colombia: Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, *61*(1-2), 103-131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking – The registers of semiotic representations.* Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: Reidel.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2019). The Onto-Semiotic Approach: Implications for the Prescriptive Character of Didactics. *For the Learning of Mathematics*, *39*(1), 38-43. https://eric.ed.gov/?id=EJ1211459

Godino, J. D., Giacomone, B., Font, V. & Pino-Fan. (2018). Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos: análisis con herramientas del modelo CCDM. *Avances de investigación en*

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.41
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Educación Matemática. (13), 63-83. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.224

Hill, H. C., Schilling, S. & Ball, D. L. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *The elementary school journal*, *105*(1), 11-30. https://doi.org/10.1086/428763

Hong, D. & Runnalls, C. (2020). Examining pre-service teachers' responses to area conservation tasks. *School Science and Mathematics, 120*(5), 262-272. https://doi.org/10.1111/ssm.12409

Kospentaris, G., Spyrou, P. & Lappas, D. (2011). Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(1), 105-127. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9303-8

Krauss, S., y Blum, W. (2012). The conceptualisation and measurement of pedagogical content knowledge and content knowledge in the COACTIV study and their impact on student learning. *Journal of Education*, (56), 45-66. http://doi.org/10.5283/epub.34256

Krippendorff, K. (2004). *Content Analysis: An Introduction to its Methodology*. California: Sage.

Liñan, M., Barrera, V. & Infante, J. (2014). Conocimiento especializado de los estudiantes para maestro: la resolución de un problema con división de fracciones. *Escuela Abierta*, *17*(1), 41-63. https://doi.org/10.29257/EA17.2014.04

Livy, S., Muir, T. & Maher, N. (2012). How do they measure up? Primary pre-service teachers' mathematical knowledge of area and perimeter. *Mathematics Teacher Education and Development*, *14*(2), 91-112. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1018652.pdf

Llinares, S. (2012). Formación de profesores de matemáticas. Caracterización y desarrollo de competencias docentes. *Cuadernos*, *10*, 53-62. http://funes.uniandes.edu.co/21400/1/Llinares2012Formacion.pdf

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. https://doi.org/10.4324/9780203856345

Montes, M., Aguilar, A., Carrillo, J. & Muñoz-Catalán, M. (2015, febrero). MTSK: From Common and Horizon Knowledge to Knowledge of Topics and Structures. En B. Ubuz, C. Haser, y M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3185-3194). Antalya: ERME. http://www.mathematik.tu-dortmund.de/~erme/doc/CERME8/CERME8_2013_Proceedings.pdf

Piaget, J., Inhelder, B. & Szeminska, A. (1981). *The Child's Conception of Geometry.* New York: Norton and Company.

Policastro, M., Mellone, M., Ribeiro, M. & Fiorentini, D. (2019, febrero). Conceptualising tasks for teacher education: from a research methodology to teachers' knowledge development. En *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Utrecht: ERME. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02430487

Puig, L. & Guillén, G. (1983). Necesidad y experimentación de un nuevo modelo para el estudio de la geometría en la EGB y Escuelas de Magisterio. *Memoria de Investigación*. https://redined.educacion.gob.es/xmlui/handle/11162/83753

Rowland, T., Huckstep, P. & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of mathematics teacher education*, *8*(3), 255-281. https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5

Runnalls, C. & Hong, D. (2020). "Well, they understand the concept of area": Pre-service teachers' responses to student area misconceptions. Mathematics Education Research Journal, 32(4), 629-651. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00274-1

Sarama, J. & Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York: Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203883785

Scheiner, T., Montes, M., Godino, J. D., Carrillo, J. & Pino-Fan, L. R. (2017). What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*(1), 153-172. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, *15*(2), 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.41
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Simon, M. & Blume, G. (1994). Building and understanding multiplicative relationships: A study of prospective elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(5), 472-494. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.25.5.0472

Sisman, G. T. & Aksu, M. (2009). Seventh grade student's success on the topics of area and perimeter. *Elementary Education Online*, *8*(1), 243-253. https://doi.org/10.16986/huje.2018045388

Tierney, C., Boyd, C. & Davis, G. (1990). Prospective primary teachers' conceptions of area. In *Proceedings of the 14th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *2,* 307-314. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED411138.pdf

Zacharos, K. (2006). Prevailing educational practices for area measurement and students' failure in measuring areas. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(3), 224-239. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.09.003

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr