

# Formación Inicial de Maestros de Primaria. Aritmética

Enrique Castro Martínez  
Depto. Didáctica de la Matemática  
Universidad de Granada

## Resumen

*En este trabajo recogemos las ideas que fundamentan el contenido de Aritmética en la asignatura Matemáticas y su Didáctica para la Formación Inicial de Maestros de Educación Primaria. Así mismo, y dentro de esa asignatura, se expone la metodología, tipo de actividades y de evaluación que rigen el desarrollo de esta materia. Le damos un protagonismo especial a los Organizadores del Currículo, a la idea del conocimiento profesional del profesor, al principio de múltiples metodologías, a las investigaciones de laboratorio de matemáticas, a los trabajos individuales y en grupo de los alumnos, así como a la evaluación desde diversas perspectivas.*

## 1. El contexto

El contenido de este trabajo está referido a un ámbito territorial muy específico: la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, y está inmerso en un Plan de Estudios muy concreto. Por ello creo necesaria la presentación preliminar del Plan de Estudios vigente en la actualidad en dicha Facultad para la Formación Inicial de Maestros de Primaria.

Siguiendo con el proceso de implantación curricular de los nuevos planes de estudio, el Plan de Estudios de Maestro de la especialidad de Educación Primaria, que se imparte desde el curso 1984-85 en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, fue aprobado el 28 de mayo de 1994 por el Consejo de Universidades y publicado en el BOE número 202 de 24 de julio de ese mismo año.

Al Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada se le han asignado en este Plan la impartición de las siguientes materias: Matemáticas y su Didáctica (troncal), Currículo de Matemáticas en Educación Primaria (obligatoria de universidad), Enseñanza y Resolución de Problemas en Matemáticas (optativa) y una parte del Prácticum. La propuesta que hacemos se refiere exclusivamente a la asignatura troncal de este Plan para formación inicial de maestros de Primaria, titulada *Matemáticas y su Didáctica*.

La asignatura **Matemática y su Didáctica**, tiene asignados 8 créditos está ubicada en el primer curso y la descripción del contenido es como sigue: *Conocimiento de las Matemáticas. Contenidos, recursos didácticos y materiales para la enseñanza de las matemáticas.*

## 2. Programa de la Asignatura

El programa que desarrollamos en la asignatura troncal Matemáticas y su Didáctica para profesores de Primaria está elaborado teniendo en cuenta dos aspectos: uno lo constituyen los bloques de contenidos marcados en los decretos del Ministerio de Educación Ministerio de Educación a través del *Decreto de Enseñanzas Mínimas* (1991) y del Gobierno de la Comunidad Autónoma Andaluza a través del *Decreto de*

*Educación Primaria de la Junta de Andalucía* (1992), y el segundo es la formación del estudiante de magisterio en esos contenidos y en aspectos profesionales de enseñanza-aprendizaje que son pertinentes para el maestro que trata de desarrollar el currículo escolar de Primaria de acorde con los contenidos anteriores.

### **Contenidos**

Concebimos el currículo de formación de profesores desde una perspectiva profesional. Esta idea ya ha quedado plasmada en los dos aspectos citados, y los contenidos los hemos seleccionado con la condición que concurran y faciliten esta labor profesionalizadora.

Nuestra opinión en este sentido es clara: Debemos incluir contenidos que proporcionen al futuro profesor conocimiento válido para el desempeño de su futura profesión. Fennema y Loef (1992) señalan cuatro componentes en el conocimiento de los profesores:

- a) El conocimiento de las matemáticas,
- b) El conocimiento de las representaciones matemáticas,
- c) El conocimiento de los aprendices y el aprendizaje, y
- d) El conocimiento pedagógico.

Para articular todo este conocimiento que debe adquirir el futuro profesor hemos tomado como referencia más general, o punto de partida, el conocimiento matemático. ¿Cuál es el conocimiento matemático al que debemos referirnos?. Los otros componentes citados por Fennema y Loef (1992) no dejan lugar a dudas: el futuro profesor de Educación Primaria debe conocer representaciones mentales, cómo se aprende y cómo se enseña el conocimiento matemático que forma parte del currículo de Educación Primaria. Pero para nosotros los tres últimos componentes están condicionados al primero. En consecuencia son los bloques de contenidos del Decreto de Educación Primaria del Ministerio los que deben determinar qué estudiar, y esa ha sido nuestra opción.

Los contenidos de nuestro programa se enmarcan en los cuatro grandes bloques de contenidos propuestos por el Ministerio (MEC, 1991):

- Números y operaciones.
- La medida
- Formas geométricas y situación el espacio
- Organización de la información.

Cada uno de estos bloques temáticos los hemos subdividido en un número variable de temas, en función de la relevancia que a cada uno se le otorga en nuestro sistema educativo. El primer bloque temático, *Números y operaciones*, tiene 8 temas. El segundo, *Organización de la información*, y el cuarto, *La medida*, tienen 2 temas cada uno. El tercero, formas geométricas y situación en el espacio, 3 temas. El orden en el que se presentan a continuación corresponde a su secuenciación en el aula.

#### **Bloque temático 1: Números y Operaciones**

Temas: 1. Números naturales. Primeros conceptos numéricos.

2. Números de varias cifras. Numeración.
3. La estructura aditiva.
4. Algoritmos de sumar y restar.
5. La estructura multiplicativa.
6. Algoritmos de multiplicar y dividir.

7. Las fracciones.
8. Los decimales.

Bloque temático 2: Organización de la información

- Temas: 9. Probabilidad.  
10. Estadística.

Bloque temático 3: Formas geométricas y situación en el espacio.

- Temas: 11. Elementos geométricos y formas planas.  
12. Elementos geométricos y formas espaciales.  
13. Transformaciones geométricas.

Bloque temático 4: Medida

- Temas: 14. Magnitudes y medida.  
15. Superficie y volumen.

Los contenidos de cada uno de estos temas los desarrollamos de acuerdo con el esquema de guión elaborado por Rico (1992). El desarrollo del tema está hecho en base a unos **Elementos Organizadores**, que nos permiten buscar, seleccionar y organizar información para poder realizar el desarrollo curricular de cada tópico.

### 3. Los Organizadores

Rico (1982) hace intervenir una serie de elementos en la elaboración y desarrollo de unidades didáctica a los que llama Organizadores. En concreto, considera los siguientes:

1. Ubicación y tratamiento en el Decreto de enseñanzas mínimas del Ministerio y en el Decreto de Educación Primaria de la Junta de Andalucía.
2. Contenidos.
  - Conceptos
  - Procedimientos
  - Actitudes
3. Fenomenología: Terminología, usos y contextos.
4. Modelos, representaciones, materiales y recursos.
5. Cognición y aprendizaje. Errores y dificultades.
6. Aspectos históricos del tópico.
7. Bibliografía.

El primer organizador, **Ubicación y tratamiento en el Decreto de enseñanzas mínimas del Ministerio y en el Decreto de Educación Primaria de la Junta de Andalucía**, trata de ubicar cada uno de los temas dentro de las orientaciones oficiales vigentes, tanto a nivel estatal como de comunidad autónoma andaluza.

Los documentos que disponemos para desarrollar este organizador son:  
Junta de Andalucía (1992). Currículum de Educación Primaria. Área de Matemáticas. En Decreto 105/92 de 9 de Junio de 1992 por el que se establecen las enseñanzas correspondientes a la educación primaria en Andalucía. Anexo II. *BOJA*, 56, 4086-4104.

Ministerio de Educación y Ciencia (1991). Educación Primaria. Matemáticas. En, - Real Decreto 1344/1991, de 6 de septiembre, por el que se establece el currículo de la Educación Primaria. *BOE*, 220, Suplemento, 31-35.

El segundo organizador que utilizamos: **Conceptos, procedimientos y actitudes** incluye la organización curricular de **los contenidos** que ha adoptado el Ministerio en los documentos oficiales sobre Primaria: Decreto Curricular Base y Decreto de Enseñanzas Mínimas.

El tercer organizador: **Fenomenología**, se refiere a la terminología que está asociada al tema, a los usos que se hace y a las situaciones, contextos y fenómenos cuya comprensión y dominio contribuyen a desarrollar los conocimientos matemáticos del tema en estudio.

El cuarto organizador: **Modelos, representaciones, materiales y recursos**, En el contexto de la formación de profesores entendemos por *modelo* una representación simplificada de un concepto matemático o de una operación diseñado con la finalidad de comunicar esta idea al aprendiz. Los modelos son utilizados en muchos ámbitos de nuestra sociedad. La maqueta que realiza el arquitecto de un edificio es un modelo que le permite a él y a otras personas hacerse una idea de cómo es (o será) en la realidad. El modelo del sistema solar es una representación que permite comunicar al estudiante o al investigador ideas del mundo en que vivimos. En este sentido empleamos la palabra modelo.

En educación matemática, los modelos tienen también una amplia tradición. Puig Adam hablando del papel de los modelos en la enseñanza de la matemática dice:

*Entendemos aquí por «modelo matemático» todo aquel material capaz de «traducir» o de «sugerir» ideas matemáticas.*

*En un sentido más amplio, un «modelo» es toda imagen que traduce concretamente una idea abstracta. Ahora bien: concreto y abstracto no son términos absolutos. En una jerarquía de abstracciones matemáticas donde se estratificasen las nociones según planos de abstracción creciente, un «modelo» es en suma toda particularización obtenida por «concreción» de una idea más o menos abstracta, es decir, mediante un descenso sobre un plano más concreto (Puig Adam, 1967, p.192).*

Los modelos pueden ser físicos o pictóricos. Los modelos físicos son representaciones construidas con objetos que pueden ser manipulados para ilustrar ciertos aspectos o ideas matemáticas; por ello, también se les llama "materiales manipulativos". Por ejemplo, los bloques multibase de Dienes es un material manipulativo que sirve para modelizar o representar los números y las operaciones en los sistemas de numeración posicionales.

Los modelos pictóricos son representaciones bidimensionales de ideas matemáticas. En general, los modelos pictóricos no se pueden manipular. Un ejemplo de material pictórico son las representaciones de los números mediante configuraciones puntuales. En geometría, los dibujos de las formas geométricas son modelos pictóricos de los conceptos geométricos correspondientes.

Los **Materiales y recursos** se refiere a los conjuntos de materiales, funcionales y técnicos, que facilitan o median en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Incluimos como materiales las distintas versiones que las casas comerciales han hecho de los materiales manipulativos con los que se pueden construir modelos concretos (por ejemplo, regletas de Cuisenaire), materiales tecnológicos que utilizan los especialistas (por ejemplo, el pantógrafo), los materiales del entorno natural del niño

(tales como fichas, bolas, palillos, etc.) y los juegos. El juego es un importante recurso para el aprendizaje en los niños. Hay casas comerciales dedicadas a la fabricación de juegos para usarlos en primaria en la clase de matemáticas. Es conveniente incluir en cada tema los juegos que resulten adecuados.

También incluimos en este apartado todos los materiales que suelen llamarse "medios", es decir, todo aquello que no constituye propiamente hablando un material, sino más bien un auxiliar. Según esto, la pizarra es un material de clase, como lo son las nuevas tecnologías: ordenador, vídeo, retroproyector, televisión, proyector de diapositivas, etc.

El quinto organizador: **Cognición y aprendizaje. Errores y dificultades**, recoge los resultados de las investigaciones realizadas sobre aspectos cognitivos y sobre el aprendizaje de los contenidos del tema a nivel de primaria. En esta apartado incluimos los errores y dificultades que tienen los niños en el aprendizaje del tema correspondiente.

El séptimo organizador: **Aspectos históricos del tópico**, tiene por finalidad señalar momentos puntuales a lo largo de la historia de la matemática en el que el contenido matemático del tema experimentó algún cambio significativo, tuvo algún desarrollo especial, superó algún obstáculo histórico o se concebía de alguna manera en especial.

#### 4. Ejemplo de Contenidos de un tema según los Organizadores

Para ejemplificar la selección de los contenidos de los temas a partir de los organizadores hemos elegido el tema: *Multiplicación y división de números naturales*.

##### **Organizador 1. Ubicación y tratamiento en el Decreto de enseñanzas mínimas del Ministerio y en el Decreto de Educación Primaria de la Junta de Andalucía.**

En el Decreto de enseñanzas mínimas del Ministerio este tema se encuentra recogido en el bloque de contenidos número 1 titulado "*Números y Operaciones*".

El Decreto de Educación Primaria de la Junta de Andalucía titula el tercer bloque de contenidos: "*Operaciones*".

##### **Organizador 2. Contenidos.**

CONCEPTOS	PROCEDIMIENTOS	ACTITUDES
Multiplicación de números naturales: -La multiplicación como: -adición repetida. -producto cartesiano. -comparación de aumento. -Términos de la multiplicación. -Propiedades de la multiplicación de números naturales. -Modelización de las	-Interpretación y utilización de la multiplicación y división en diferentes contextos y con diferentes significados. -Búsqueda y expresión de propiedades de la multiplicación y de la división. -Comprobación de las propiedades de la	-Curiosidad por indagar y explorar sobre el significado de las operaciones de multiplicación y división. -Gusto por el descubrimiento y formulación de propiedades de las operaciones. -Actitud crítica ante la posibilidad de admitir "a priori" que una relación formulada sea verdadera.

propiedades. -División de números naturales: División partitiva. División cuotitiva. La comparación de disminución. -El modelo de factor desconocido. -La división como inversa de la multiplicación. -Términos de la división. Propiedades. -La división entera o inexacta.	multiplicación y división utilizando modelos físicos, gráficos y simbólicos. - Invención de problemas aritméticos y decisión de qué operaciones son adecuadas para su resolución.	-Desarrollo de la predisposición a justificar las propiedades de las operaciones con el nivel de rigor adecuado. -Sensibilidad e interés por los mensajes de naturaleza numérica apreciando la utilidad de las operaciones en la vida cotidiana.
--	--	---

### **Organizador 3. Fenomenología: Terminología, usos y contextos.**

#### *Vocabulario.*

Según Freudenthal (1983), términos similares a "doble" y "veces" preceden a la multiplicación como operación aritmética. La expresiones lingüísticas con estos términos se traducen fácilmente en adiciones repetidas por lo que constituye un modo natural de introducir la multiplicación en la escuela.

En el lenguaje castellano hay una serie de palabras que son sinónimos de multiplicar: acrecentar, aumentar, crecer, proliferar, reproducir.

Una lista de verbos que son palabras clave para la multiplicación y la división son (Grupo de EGB de la APMA, 1987):

<b>¡Error! Marcador no definido.</b> Verbos de multiplicar		Verbos de dividir	
Bisar	Rebinar	Bifurcar	Exfoliar
Centuplicar	Redoblar	Bisecar	Fraccionar
Cuadruplicar	Reduplicar	Compartir	Fragmentar
Decuplicar	Reiterar	Capolar	Partir
Doblegar	Repetir	Demediar	Repartir
Duplicar	Reproducir-se	Desmenuzar	Romper
Iterar	Sextuplicar	Despedazar	Seguetar
Multiplicar-se	Triplicar	Diezmar	Seleccionar
Quintar	Tresdoblar	Distribuir	Tripartir
Quintuplicar		Dividir	Trocear
		Dosificar	Trozar
		Escindir	

#### *Contextos.*

La variedad de situaciones en las que se encuentra la multiplicación y la división es muy amplia. Los investigadores han realizado clasificaciones de las mismas que responden a distintos criterios. En un trabajo previo (Castro, 1994) esta diversidad de situaciones las hemos sintetizado en tres tipos de contextos:

- a) Contextos de proporcionalidad simple.
- b) Contextos de comparación.
- c) Contextos de producto cartesiano.

Los problemas verbales de estructura multiplicativa de proporcionalidad simple los hemos identificado en función de tres características:

- 1ª) forma de conceptualizar o expresar verbalmente la proporcionalidad,
- 2ª) tipo de magnitud cuantificada (discreta o continua), y
- 3ª) cantidad desconocida en el esquema de proporcionalidad simple.

Hemos utilizado además dos formas de conceptualizar la proporcionalidad. La expresión "*cada uno*" para caracterizar a los problemas de reiteración de cantidades y la expresión "*por*" para caracterizar a los problemas de tasa.

Los tipos de magnitudes empleadas han sido dos: discreta y continua con cantidades discretizadas.

La consideración conjunta de estas dos variables da lugar a cuatro tipos de situaciones:

- X<sub>1</sub> = reiteración de cantidades discretas
- X<sub>2</sub> = tasa de cantidades discretas
- X<sub>3</sub> = reiteración de cantidades continuas discretizadas
- X<sub>4</sub> = tasa de cantidades continuas discretizadas

La tercera característica diferenciadora que hemos utilizado para identificar las situaciones de proporcionalidad simple es la cantidad desconocida en el esquema multiplicativo. Para definirla, partimos del esquema de proporcionalidad

$$\begin{array}{l} 1 \text{ ----- } f(1) \\ x \text{ ----- } f(x) \end{array}$$

del que surgen tres tipos de situaciones según cuales sean los dos valores conocidos y cuál el valor desconocido.

- Q<sub>1</sub> = desconocido f(x) (multiplicación)
- Q<sub>2</sub> = desconocido f(1) (división partitiva)
- Q<sub>3</sub> = desconocido x (división cuotitiva)

Las situaciones de comparación pueden ser identificadas en función de tres características distintas:

- 1ª) en el tipo de comparación: *aumento o disminución*,
- 2ª) en la forma de expresar verbalmente cada tipo de comparación, y
  - R<sub>1</sub> = "n veces más que"
  - R<sub>2</sub> = "n veces menos que"
  - R<sub>3</sub> = "n veces tanto como"
  - R<sub>4</sub> = "tantas como una de las n partes iguales"
- 3ª) en cuál es la cantidad desconocida en el esquema de comparación: el *comparado*, el *escalar* o el *referente*. Puesto que no hay solapamiento entre el tipo de comparación y su expresión verbal, ya que la comparación de aumento se

expresa verbalmente con términos distintos  
 De la combinación de estas variables surgen 12 situaciones distintas de comparación de multiplicar o dividir.

En las situaciones de producto cartesiano dos conjuntos  $M_1$  y  $M_2$  se componen para dar un tercero  $M_3$ . Esta estructura puede ser representada con una tabla de doble entrada en la que  $M_1$  son las filas,  $M_2$  las columnas y  $M_3$  las celdas o cruces de filas y columnas.

El primero de ellos corresponde al esquema

	M2
	a
M1	x
b	M3

en el que se conocen los valores de las cantidades que se componen y se desconoce el valor de la cantidad compuesta.

En el segundo tipo de situaciones de producto cartesiano se conoce la cantidad compuesta y el valor de una de las componentes. Se trata de hallar la otra componente

	M2
	a
M1	c
x	M3

**Organizador 4. Modelos, representaciones, materiales y recursos.**

**Modelos para el producto y división**

Son muchos los modelos posibles para estudiar la multiplicación y división. Cada uno de los modelos enfatiza un contexto particular del número.

**Modelos lineales**

En primer lugar podemos considerar modelos de recuento, en los que se utiliza la línea numérica. Si la línea numérica tiene un soporte gráfico, el producto  $n \times a$  ("n veces a") se modeliza formando un intervalo de longitud a-unidades y contándolo n-veces.

Cuando la recta no tiene soporte material se cuenta sobre la sucesión numérica de a en a, hasta hacer n veces ese recuento. Esta destreza se ha estimulado con trabajo previo sobre recuentos en la recta de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4, etc.

El esquema de la división es similar; consiste en contar hacia atrás desde el dividendo, y de tanto en tanto, según indique el divisor. El número de pasos dados es el cociente. En este caso se cambia el modelo usual de la división, ya que el divisor no es ahora el número de partes que se hacen, sino la cantidad igual a que toca cada parte.



Si el divisor es pequeño, 2 ó 3, puede intentarse con el modelo de la línea numérica, su división en las partes iguales correspondientes, sin cambiar así los papeles del divisor y cociente. Pero la utilización más sencilla de este modelo es como resta reiterada y contando hacia atrás, y no tanteando los puntos en los que la longitud total del dividendo queda partida en partes iguales.

### **Modelos cardinales**

La segunda familia de modelos utiliza el contexto cardinal para representar uno o los dos factores. Entre los tipos más utilizados tenemos:

1. La unión repetida de conjuntos cardinales, usualmente con los mismos objetos.

2. La distribución de objetos en un esquema rectangular. Para ello se hace una fila con tantos objetos como nos indica el multiplicando y se forman tantas filas como dice el multiplicador. En este modelo cada uno de los factores se puede reconocer en la representación.

3. Más formalizado que el caso anterior es la representación mediante producto cartesiano de dos conjuntos. Así, el producto  $2 \times 3$  se puede representar tomando un conjunto de 2 blusas y otro de tres pantalones, y formar todos los pares ordenados de blusa/pantalón, normalmente mediante un cuadro de doble entrada. El total de pares ordenados nos da el resultado del producto  $2 \times 3$ .

4. La otra forma convencional de representar un producto utilizando conjuntos es mediante diagrama de flechas: tantas flechas como puedan trazarse desde un conjunto de 2 elementos a otro de 3 elementos nos da el producto  $2 \times 3$ .

En el caso de la división el modelo más usual es el de repartir en partes iguales. Se tiene un conjunto con 12 elementos y se abren a partir de él 3 subconjuntos. Hay que repartir los elementos iniciales a partes iguales entre los tres subconjuntos, lo que toca a cada parte es el cociente. También se puede utilizar el modelo inverso: sobre el conjunto de 12 elementos, se van haciendo subconjuntos de 3 elementos hasta que todos quedan distribuidos. En este caso el divisor es la cantidad que toca a cada parte y el cociente el número de partes. Este modelo y el anterior son iguales de sencillos de realizar, e incluso en este segundo caso se necesita una representación menos complicada. Sin embargo la idea intuitiva de reparto en partes iguales parece quedar mejor expresada en el primer caso que en el segundo.

La distribución rectangular de un total de elementos, dados por el dividendo, en tantas filas (o columnas) iguales como indique el divisor es otro modelo adecuado. El cociente se determina contando el número de columnas (o filas) obtenidas. En cada uno de estos casos los elementos sobrantes en el reparto o distribución dan el resto de la división.

### **Modelos de medida.**

Las regletas de Cuisenaire nos proporcionan un modelo adecuado del número como longitud. Para realizar un producto con regletas  $2 \times 3$ , p. ej., se toman las regletas 2 y 3 respectivamente y se colocan en cruz: A continuación se toman tantas regletas abajo como indique la longitud de arriba, en este caso se toman dos regletas de tres, y ya podemos prescindir de la regleta superior cuya función era indicar cuantas de tres había que tomar. El resto del proceso es el conocido: realizar la suma de las dos regletas

de tres.

Con la balanza utilizamos el contexto número/medida/peso. Realizar un producto consiste en colocar tantas veces una unidad de peso indicada (multiplicando) como veces nos indique otro número (multiplicador). El resultado es el peso global en el otro platillo para equilibrar la balanza.

La división con estos dos materiales resulta muy sencilla. Consiste en establecer la equivalencia entre una longitud o peso global (dividendo) y otro más pequeño (divisor) que hay que reiterar varias veces hasta conseguir dicho equilibrio. El número de veces en ambos casos se obtiene contando y nos da el cociente.

### Modelos numéricos

Un cuarto tipo de modelos aparece cuando se considera en contexto estrictamente simbólico, y los números aparecen únicamente simbolizados. En este caso el producto es una suma reiterada  $3 \times 4 = 3 \text{ veces } 4 = 4 + 4 + 4$ . Esta idea subyace a muchos de los modelos en los que se emplea material o representaciones gráficas.

La división se interpreta como una resta reiterada  $12:4$  consiste en ver cuantas veces puede restarse 4 de 12, hasta llegar a 0.

### Modelos de razón aritmética

Hay un quinto tipo de modelos en los que se abre un amplio campo de aplicaciones a la estructura multiplicativa. Se trata de los modelos de razón o comparación. En ellos hay que realizar la comparación de dos conjuntos, o dos cantidades, en términos de "cuantas veces más". El caso más sencillo se da al comparar dos conjuntos disjuntos de objetos discretos. Una técnica usual de comparación es establecer una correspondencia de varios a uno que nos da el factor de conversión o comparación.

Dentro de esta misma clase de modelos de razón podemos considerar el que se fundamenta en la semejanza de triángulos y que puede utilizarse con dos líneas numéricas convergentes:

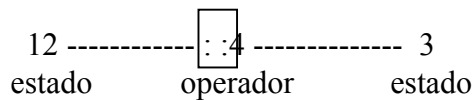
Si queremos realizar el producto  $3 \times 4$  tomamos sobre una de las rectas, por ejemplo la horizontal, el valor 3. Sobre la otra señalamos el punto 1, que unimos mediante trazo con el 3 anterior. Sobre la segunda recta señalamos también el punto 4 y trazamos por él una paralela a la que se trazó.

El punto de corte con la recta horizontal señala el resultado del producto. El Teorema de Thales justifica este resultado.

### Modelos funcionales

Finalmente, nos queda una quinta familia de modelos: se trata de todos aquellos casos en los que el producto aparece con carácter de función u operador. De nuevo el caso más sencillo consiste en considerar cada operación como una máquina-operador que transforma números-estados en números-estados. Así:

3 -----  $\boxed{\times 4}$  ----- 12    o bien  
estado            operador            estado



Se suele decir que cada máquina es inversa de la otra.

### Organizador 5. Cognición y aprendizaje. Errores y dificultades

#### *Propiedad conmutativa.*

De los experimentos de Willington (Dickson y otros, 1991) se desprende que el uso funcional de la conmutatividad de la multiplicación no empieza a darse, por lo general, hasta los últimos años de primaria (10 años o más). Sin embargo, puede ocurrir que los niños sean capaces de resolver correctamente ejemplos escritos del tipo  $3 \times 4 = 4 \times 3$  a edades más tempranas.

Brown (Hart, 1981) sugiere que una de las dificultades asociadas con la propiedad conmutativa está en que los niños no sólo llegan a aceptar la conmutatividad de la multiplicación sino que suponen también que esta propiedad es cierta para la división. Por ejemplo, cuando se les propuso un problema verbal de división y se les pidió que eligiesen la "cuenta" que mejor correspondiese al problema, fueron mayoría los niños de 12 años que seleccionaron 26:286 en vez de la respuesta correcta 286:26. En una entrevista posterior, casi todos los niños pensaban que las dos expresiones anteriores eran intercambiables.

#### *Errores y dificultades.*

Entre los errores asociados con la multiplicación y la división (Castro, 1994) reseñamos:

- Que la multiplicación siempre hace más grande y la división siempre más pequeño.
- El cambio de estructura.
- La inversión de la operación.
- El error de doble estructura.

### Organizador 6. Aspectos históricos del tópico

Los aspectos históricos de la multiplicación y división que incluimos se refieren a las vicisitudes que han tenido las operaciones multiplicación y división. El aspecto clave es el desarrollo histórico del concepto de operación aritmética. Puesto que va parejo al desarrollo histórico del concepto de número natural, se hace un tratamiento paralelo de las operaciones en consonancia con las distintas definiciones que históricamente se han dado del número natural.

Señalamos:

1. La multiplicación y la división como *duplicación y mediación* en el antiguo Egipto.
2. La multiplicación y división de razones de segmentos en la matemática griega.
3. Los significados de la multiplicación y división que le dan los escritores de la Edad Media y en las aritméticas impresas en el Renacimiento.
4. La multiplicación y la división en la teoría de los cardinales.
5. La multiplicación y la división en la axiomática de Peano.

## **Organizador 7. Bibliografía**

Castro, E. (1994) ; Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1987) ; Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1995) ; Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991) ; Grupo de EGB de la APMA (1987); Hart (Ed.), K.M. (1981) ; Junta de Andalucía (1992) ; Ministerio de Educación y Ciencia (1991) ; Puig, L. y Cerdán, F. (1988) ; Smith, D. E.(1958) ; Torra Bitlloch, M., y Quintana Albalat, J. (1992).

## **5. Metodología**

La metodología que utilizamos se apoya en una serie de principios metodológicos generales que pensamos deberían de presidir la acción docente. Seguimos una pauta organizativa y metodológica para la formación inicial de maestros que tiene en cuenta:

*-El pluralismo metodológico*, tal como sostienen las corrientes pedagógicas y de psicología de la instrucción más actuales. Si el método de descubrimiento del conocimiento por parte del alumno justifica su validez en las aportaciones de autores como Dewey, Bruner, Piaget, etc., la validez de la enseñanza directa es reconocida hoy también por la psicología cognitiva.

Compartimos la opinión de que: *ningún método de enseñanza tiene un valor absoluto, relativo a los objetivos, la materia, las circunstancias, los medios, etc. Por tanto, ningún método empleado con exclusividad tiene justificación y la variabilidad metodológica es un principio válido en toda labor instructiva.*

Como se afirma en Rodríguez (1995), este principio tiene especial importancia en el caso de la formación de profesores, porque la metodología actúa como "currículo oculto" de modo que existe una gran probabilidad de que los futuros profesores enseñen a sus alumnos conformen a ellos les enseñaron.

*-El principio de actividad*, entendido como interacción continua entre la actividad práctica, la reflexión y la indagación. En la construcción del conocimiento, actividad significa "actividad interna" y que cuando el profesor explica, si los alumnos reflexionan, critican, formulan preguntas, etc., acerca de lo que están escuchando, están activos. Por ello no nos proponemos desterrar totalmente la lección magistral, cuyos valores de apertura de horizontes, introducción y ambientación reconocemos plenamente. Afirmamos con Brown y Atkins (1988, citado en Rodríguez, 1995) que la exposición magistral tiene un papel que cumplir en la enseñanza superior, pero no puede ser la técnica exclusiva. Deben utilizarse también diversos procesos de investigación para adquirir conocimiento.

Todo ello se concreta en una amplia gama de técnicas activas de enseñanza universitaria: estudio de temas en forma de *dossier* escrito, investigaciones personales o en pequeño grupo; elaboración y realización de proyectos; seminarios monográficos; mesas redondas; dinámica de grupos para el fomento de los procesos de comunicación y relaciones interpersonales positivas; recogida y análisis de material en situación real; situaciones problemáticas reales o simuladas; trabajos bibliográficos, etc.

*-La integración de los principios de individualización y socialización*, en cuanto que concebimos la formación del maestro como un proceso social y dinámico en el que influyen las características de los sujetos (preconcepciones, teorías, creencias,

características personales, etc. ) el contexto en el que se desarrolla (ambiente físico, tiempo, lugar) y la interacción social de los participantes.

*-La participación* no sólo en orden de favorecer el establecimiento de un mejor clima en el aula, sino también en cuanto que si deseamos que la escuela de Enseñanza Primaria sea una escuela de participación, la formación de maestros debe contemplar la participación real de los alumnos, y por tanto la metodología de trabajo en el aula debe estar abierta a la participación.

En resumen:

Trataremos de desarrollar una metodología que sirva de ejemplo al alumno para el posterior desarrollo de su trabajo, esto es, que aprenda metodología a la vez que realiza otros aprendizajes matemáticos; ello nos obligará a conseguir una participación activa, comprometida y crítica del alumno en su proceso de formación.

En nuestra labor como profesor utilizamos la lección magistral para exponer aquellos aspectos de los temas que se consideren difíciles de elaborar por parte de los alumnos, acompañado de un debate en los puntos que lo requieran. También es labor del profesor asignar las tareas para el trabajo en pequeños grupos (4 o 5), preparar el material, proporcionar a los alumnos un guión de referencia para que lo desarrollen en grupo.

Los alumnos trabajarán en grupos utilizando los guiones de trabajo y material impreso preparado por el profesor. El trabajo de los grupos una vez consistirá en estudio de aspectos teóricos, otras de tipo práctico, tratando de dar sentido a los análisis teóricos realizados; regularmente plantearemos problemas, los cuales tienen como objetivo que el alumno construya su conocimiento a través de la resolución de los mismos y actividades de laboratorio que se llevarán a cabo en grupo.

Por lo que se refiere a la funciones del profesor de la asignatura señalamos además las siguientes tareas: coordinar las actividades de los diferentes grupos, proponer la realización de actividades, detectar dificultades y ayudar a los alumnos a superarlas, supervisar la realización de los trabajos, moderar las intervenciones y debates y evaluar a los alumnos.

## **6. Las actividades**

Las actividades que proponemos para los alumnos son de dos tipos: en grupo e individuales. Las actividades en grupo van encaminadas a la preparación del tema en base al guión orientador facilitado por el profesor. Entre ellas señalamos:

1. *Localizar la documentación y referencias* necesarias para el diseño del tema, elaborar un documento resumen de las lecturas realizadas.

2. *Confeccionar un documento teórico* para el desarrollo del tema a nivel de primaria que se expone en clase para su análisis, discusión y valoración.

3. *Actividades de laboratorio*

Realizadas preferentemente en grupo, aunque también pueden realizarse de forma individual según las circunstancias. Consiste en el estudio de las posibilidades didácticas de un modelo o material manipulativo en relación con algún contenido específico. En muchos casos el material es difícil de construir por el alumno y está disponible en el Seminario de Didáctica de la Matemática, pero en los casos en que no

está o que sea fácil de construir, es aconsejable que cada grupo de alumnos fabrique su propio material manipulativo. Por ejemplo, en el caso de las fracciones es fácil preparar un dominó o una baraja de fracciones, en cartulina o panel.

En el caso, de la multiplicación y división, una actividad de laboratorio puede consistir en construir un material que permita representar estas operaciones con números. Por ejemplo, la construcción de regletas de Cuisenaire, utilizando tiras de cartulina y pidiéndoles a los alumnos que representen algunos productos y divisiones con ellas.

#### *4. Actividades de resolución de problemas*

La importancia de la resolución de problemas en la enseñanza de la matemática está hoy día fuera de toda duda. Aprender técnicas de resolución de problemas forma parte de la formación de los futuros profesores de matemáticas. Tratamos con este tipo de actividades que los alumnos desarrollen estrategias de resolución de problemas y que sean conscientes de su uso.

#### *5. Actividades de reflexión y debate*

Son actividades individuales que tratan de completar el trabajo del grupo y que afectan a más de un tema. Tratan de promover una reflexión transversal de la materia. Muchas de ellas son cuestiones que han sido polémicas -como lo fue la introducción de las calculadoras en el aula- y en algunos casos lo siguen siendo hoy día.

## **7. Evaluación**

Entendemos que la evaluación debe desempeñar una función dinamizadora del proceso didáctico con el fin de optimizarlo. En este sentido afecta a todos los componentes (alumnos, profesores, organización, materiales, etc.) a fin de obtener información que, debidamente interpretada, permita adoptar las decisiones más oportunas para la calidad de la enseñanza y el aprendizaje.

Respecto a la evaluación de los alumnos, y para ser consecuentes con los objetivos, contenidos y metodología que hemos propuesto, destacamos que no es una evaluación simple, sino que consta de varias facetas:

### **1) Evaluación de los trabajos en grupo**

Esta evaluación se realiza en base a la estructuración y preparación del trabajo realizado sobre un tema o aspecto concreto, y a la participación y responsabilidad de cada miembro. Se tendrá en cuenta para ello los siguientes criterios:

- Autoevaluación de cada miembro del grupo
- Evaluación del resto de los compañeros por el trabajo realizado y la exposición del mismo.
- Evaluación por el profesor del trabajo realizado en grupo. La valoración se realiza en tres momentos. En primer lugar, se valorará el documento previo en el que se diseña el tema. Antes de su exposición se celebra una sesión de trabajo con el profesor para comprobar su grado de ejecución. En segundo lugar, se valora la fase de exposición antes sus compañeros: motivación, capacidad de comunicación, etc. En tercer lugar se valora la actitud en el debate posterior con sus compañeros.

### **2) Participación del alumno en el aula**

Una parte del tiempo en el desarrollo de los temas está dedicado a coloquios, discusiones dirigidas, resolución de problemas, etc., y por tanto es necesario evaluar la participación del alumno.

### **3) Evaluación de los progresos individuales de los alumnos**

La evaluación de los progresos individuales de los alumnos las realizamos desde dos ópticas:

Por una parte hacemos un seguimiento y observación constante del trabajo que los alumnos desarrollan en clase, las participaciones en los debates nos proporcionan conocimiento de su capacidad crítica, del grado de profundización que consigue al analizar el trabajo de sus compañeros.

Por otro lado, una prueba individual, escrita u oral, en la que se aprecie el grado de madurez alcanzado por cada uno de los individuos.

Con estos dos elementos más la evaluación de los trabajos en grupo, tenemos tres elementos de valoración y con ello consideramos tener una visión amplia del trabajo realizado y preparación adquirida por nuestros alumnos.

En cuanto a técnicas específicas de evaluación pensamos que en la formación de maestros se pueden utilizar cualquiera de ellas siempre que se adapte a lo que pretendemos evaluar y a las posibilidades organizativas de nuestro centro.

## **Bibliografía**

Castro, E. (1991). *Resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa*. Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Castro, E. (1994). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Castro, E. (1995). Proyecto docente. (Plaza de titularidad de Universidad). Universidad de Granada.

Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1987). *Números y operaciones. Fundamentos para una aritmética escolar*. Madrid: Síntesis.

Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*. Bogotá: "Una empresa docente" & Grupo Editorial Iberoamérica.

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: MEC-Labor.

Fennema y Loef (1992). Teachers' knowledge and its impact. En D.A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.

Grupo de EGB de la APMA (1987). Aritmética elemental para la resolución de problemas en el Tercer Ciclo de la EGB (Segunda Parte). *Epsilon*, 6/7, 55-72.

Hart (Ed.), K.M. (1981). *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*. London: John Murray.

Junta de Andalucía (1992). Currículum de Educación Primaria. Área de Matemáticas.

En Decreto 105/92 de 9 de Junio de 1992 por el que se establecen las enseñanzas correspondientes a la educación primaria en Andalucía. Anexo II. *BOJA*, 56, 4086-4104.

Ministerio de Educación y Ciencia (1991). Educación Primaria. Matemáticas. En, Real Decreto 1344/1991, de 6 de septiembre, por el que se establece el currículo de la Educación Primaria. *BOE*, 220, Suplemento, 31-35.

Puig Adam, P. (1967). Modelos preparados y modelos realizados. En C. Gattegno y otros, *El Material para la Enseñanza de las Matemáticas*. Madrid: Aguilar.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Rico (1992). Proyecto docente. Universidad de Granada.

Rodríguez, A. (Coord.) (1995). Un enfoque interdisciplinar en la formación de los maestros. Madrid: Narcea.

Smith, D.E.(1958). *History of Mathematics*. New York: Dover. (Dos volúmenes).

Torra Bitlloch, M., y Quintana i Albalat, J. (1992). *Propuestas de Secuencia. Matemáticas*. Madrid: MEC-Editorial Escuela Española.