

Estado del conocimiento didáctico sobre el concepto de espacio vectorial

State of the art of didactic knowledge on the concept of vector space

Angel F. Can Cabrera¹
Mario Sánchez Aguilar²
María Trigueros³

Resumen: Se presenta un estado del conocimiento sobre los avances que se han producido en el campo de la investigación en educación matemática, con respecto a la enseñanza y aprendizaje del concepto de espacio vectorial. Para organizar la revisión se utilizaron dos preguntas guía: ¿qué obstáculos para el aprendizaje del concepto de espacio vectorial se han identificado? y ¿qué sugerencias didácticas se han hecho para favorecer el aprendizaje con significado del concepto de espacio vectorial? Además de proporcionar respuesta a estas preguntas, el análisis de los resultados obtenidos ofrece una síntesis del conocimiento actual y una perspectiva acerca de posibles áreas para investigaciones futuras relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de espacio vectorial.

Palabras clave: *álgebra lineal, espacio vectorial, obstáculos de aprendizaje, propuestas de enseñanza*

Fecha de recepción: 28 de mayo de 2020. **Fecha de aceptación:** 3 de julio de 2021.

¹ Instituto Tecnológico Superior de Calkiní (ITESCAM), afcan@itescam.edu.mx, orcid.org/0000-0002-6696-9899

² Instituto Politécnico Nacional, CICATA Legaria, Programa de Matemática Educativa, mosanchez@ipn.mx, orcid.org/0000-0002-1391-9388

³ Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM), trigue@itam.mx, orcid.org/0000-0001-7527-6704

Abstract: A state of the art is presented on the advances that have taken place in the field of mathematics education research in connection to the teaching and learning of the concept of vector space. Two guiding questions were used to organize the review: what learning obstacles related to the concept of vector space have been identified? and what teaching proposals have been made to promote a meaningful learning of the concept of vector space? In addition to providing answers to these questions, the analysis of the obtained results offers a synthesis of current knowledge and a perspective on possible areas for future research related to teaching and learning of the concept of vector space.

Keywords: *lineal algebra, vector space, learning obstacles, teaching proposals.*

1. INTRODUCCIÓN

En cualquier campo de investigación es útil “mirar atrás” de manera periódica para considerar su estado de desarrollo y los resultados producidos. Esto es una manifestación de lo que algunos autores denominan *reflexividad* de una ciencia (e.g., Bourdieu, 2001). Como lo han notado Pais y Valero (2012), una primera etapa de la reflexividad de una ciencia es la que se refiere a la producción de síntesis de investigación que provean una visión general acerca de qué conoce el campo en torno a sus objetos de investigación.

Debido a que la investigación didáctica en el área del álgebra lineal ha alcanzado un cierto grado de madurez y desarrollo, consideramos pertinente adoptar una postura reflexiva, a través de la cual se organice y sintetice el conocimiento que se ha generado hasta este momento sobre el aprendizaje y enseñanza de nociones fundamentales del álgebra lineal. En este artículo presentamos un estado del conocimiento de los avances que la investigación didáctica ha producido en los últimos años, con relación al aprendizaje de un concepto central en el álgebra lineal: espacio vectorial.

Un estado del conocimiento se refiere al nivel de desarrollo que un campo de investigación ha alcanzado sobre un tema específico (Dochy, 2006). Un estado del conocimiento recupera y sintetiza el conocimiento producido en torno a un tema o concepto durante un periodo específico. Un estado del conocimiento se basa en una investigación documental sistemática que intenta describir, analizar y reflexionar sobre la literatura considerada y que puede

estimarse como una tarea que puede ser enriquecida conforme se llevan a cabo más investigaciones acerca del tema de interés. Puede, de esta manera, pensarse como una investigación sobre la investigación, en este caso, sobre el concepto de espacio vectorial.

Cuando a través del tiempo se han generado resultados importantes acerca de un tema en estudio, llevar a cabo un estado del conocimiento del mismo adquiere importancia ya que permite sistematizar información, pero ofrece también un espacio de reflexión para la comprensión del problema en cuestión. Su utilidad principal es que permite conocer de forma global el fenómeno en estudio, así como las perspectivas y tendencias de la investigación.

Si bien un estado del conocimiento se basa en una revisión de literatura, es importante no confundirlo con aquella revisión que se lleva a cabo en estudios de investigación y, en los cuales es importante situar una nueva investigación en el contexto de lo que se conoce sobre el tema a investigar, para decantar su posible contribución a la literatura.

Nuestro interés en esta revisión surge del hecho de que el espacio vectorial es un concepto unificador y generalizador (Dorier, 1995). Esto significa que el concepto de espacio vectorial representa una abstracción de objetos matemáticos que ya son abstractos en sí mismos, considerando las propiedades que tienen en común; por ejemplo, vectores, n -uplas, polinomios, series o funciones. Estas características del concepto de espacio vectorial no solo lo convierten en un concepto central de la teoría del álgebra lineal, sino en una noción difícil de comprender por parte de los estudiantes (Dorier y Sierpinska, 2001).

Nuestra revisión contribuye a la organización del conocimiento que se ha desarrollado en los últimos años sobre el aprendizaje y enseñanza del álgebra lineal. Esto se logra, por una parte, centrándonos en los obstáculos de aprendizaje asociados al concepto de espacio vectorial que se han identificado y, por otra, enfocándonos en las sugerencias didácticas para mejorar la comprensión de los estudiantes que, como se discutirá más adelante, han surgido de los trabajos de investigación de diversos autores.

El artículo está dividido en cuatro secciones. Posterior a esta introducción sigue una explicación del método que implementamos para localizar y analizar la literatura en la que se basa nuestra revisión. Después de clarificar el método se presentan los resultados encontrados, los cuales se dividen en las secciones: “¿qué obstáculos para el aprendizaje del concepto de espacio vectorial se han identificado?” y “¿qué sugerencias didácticas se han formulado para fomentar el aprendizaje del concepto de espacio vectorial?”. Finalmente presentamos una

discusión de los resultados obtenidos en la cual enfatizamos aquellos aspectos en los que se ha centrado la investigación sobre espacio vectorial, e identificamos aspectos de la investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza del concepto de espacio vectorial que requieren aún de atención.

2. MÉTODO

Nuestra intención al hacer este trabajo fue el producir un estado del conocimiento basado en una revisión bibliográfica rigurosa y actualizada sobre la investigación educativa desarrollada alrededor de la enseñanza y aprendizaje del concepto de espacio vectorial. Para dar rumbo y precisión a esta indagación, definimos las siguientes preguntas guía (PG1 y PG2) que tratamos de responder con nuestra investigación:

PG1. ¿Qué obstáculos para el aprendizaje del concepto de espacio vectorial se han identificado?

PG2. ¿Qué sugerencias didácticas se han hecho para favorecer el aprendizaje con significado del concepto de espacio vectorial?

Las anteriores preguntas guía nos ayudaron a definir el *foco* de esta revisión bibliográfica. En lo que sigue clarificamos el *alcance* de la revisión; esto es, definimos los límites temporales que cubre la revisión de literatura, y también esclarecemos a qué fuentes de información recurrimos y cuáles excluimos y la razón para hacerlo.

2.1 ALCANCE DE LA REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

La revisión bibliográfica que presentamos cubre el periodo de tiempo comprendido entre los años 2001 y 2019. Tomamos como punto de partida el año 2001, debido a que fue alrededor de ese año que se publicaron dos trabajos clásicos que de alguna manera sintetizan el conocimiento que se tenía en ese momento sobre el aprendizaje y la enseñanza del álgebra lineal, incluidos los espacios vectoriales. Nos referimos a los trabajos de Dorier (2000) y de Dorier y Sierpinska (2001).

Sobre las fuentes consultadas, nuestra revisión de literatura se centró únicamente en artículos publicados en revistas de investigación y, en libros o capítulos de libro especializados publicados en editoriales de prestigio. Estamos conscientes de que puede haber literatura relacionada con el concepto de espacio vectorial que ha sido publicada en memorias de congreso o en trabajos de tesis; sin embargo, decidimos centrarnos en revistas de investigación y capítulos de libro especializados para tratar de asegurar que las investigaciones en las que se basa nuestra revisión hayan sido sometidas a un proceso riguroso de evaluación por pares. Esta selectividad en las fuentes de información dota de confiabilidad a los resultados de esta revisión.

Las fuentes consultadas pueden ser organizadas en tres niveles: (1) revistas de investigación, (2) libros y capítulos de libro, y (3) fuentes citadas y conocimiento propio de la literatura. Enseguida describimos con más detalle cada uno de estos niveles.

2.1.1 Revistas de investigación

En el primer nivel consultamos las revistas de investigación mejor posicionadas en nuestra disciplina, de acuerdo a distintos rankings elaborados durante los últimos años por Toerner y Arzarello (2012) y Williams y Leatham (2017) que agrupan revistas de investigación que principalmente publican en inglés; y el desarrollado por Andrade-Molina *et al.* (2020) enfocado en revistas de investigación iberoamericanas que publican principalmente en español y portugués. De manera particular, buscamos en las diez revistas mejor posicionadas en cada ranking, excluyendo los títulos repetidos. Adicionalmente, en nuestra búsqueda incluimos dos revistas de investigación que, aunque no figuran en los rankings anteriores, suelen publicar artículos de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal; nos estamos refiriendo a las revistas *Enseñanza de las Ciencias* y *Linear Algebra and its Applications*. Nuestra selección dio como resultado una muestra de 23 títulos (ver tabla 1).

Tabla 1. Revistas de investigación consultadas para la revisión bibliográfica

Revistas anglosajonas	Revistas Iberoamericanas
<i>Educational Studies in Mathematics</i>	<i>Boletim de Educação Matemática. BOLEMA</i>
<i>Journal for Research in Mathematics Education</i>	<i>Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. RELIME</i>
<i>For the Learning of Mathematics</i>	<i>Educación Matemática</i>
<i>The Journal of Mathematical Behavior</i>	<i>Revista Latinoamericana de Etnomatemática</i>
<i>Journal of Mathematics Teacher Education</i>	<i>ZETETIKÉ. Revista de Educação Matemática</i>
<i>Mathematical Thinking and Learning</i>	<i>UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática</i>
<i>ZDM Mathematics Education</i>	<i>QUADRANTE. Revista de Investigação em Educação Matemática</i>
<i>International Journal of Mathematical Education in Science and Technology</i>	<i>Educação Matemática Pesquisa</i>
<i>International Journal of Science and Mathematics Education Research Journal</i>	<i>UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas</i>
<i>School Science and Mathematics</i>	<i>NÚMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas</i>
<i>Linear Algebra and its Applications</i>	<i>Enseñanza de las Ciencias</i>

Para identificar los artículos de investigación que de manera específica abordaran el tema de espacio vectorial, buscamos ya sea en el título, resumen, o palabras clave, el término “espacio vectorial” o su traducción al inglés (*vector space*) o al portugués (*espaço vetorial*). Cuando era posible, esta búsqueda se realizaba utilizando el buscador de cada revista; si este buscador no estaba disponible entonces se realizaba la búsqueda de manera manual, artículo por artículo. Esto nos permitió discriminar trabajos que, aunque abordaran conceptos relacionados con los espacios vectoriales (bases, combinaciones lineales, dependencia e independencia lineal, etc.), no tenían como interés principal dicho concepto.

2.1.2 Libros y capítulos de libro

En este segundo nivel revisamos libros especializados en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal. También incluimos en este nivel fuentes bibliográficas que reportan revisiones de investigaciones asociadas a la investigación didáctica sobre el álgebra lineal, o a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el nivel superior. La tabla 2 indica las fuentes particulares que se consultaron en este nivel.

Tabla 2. Libros y capítulos de libro consultados para la revisión bibliográfica

Libros y capítulos de libro
Artigue, Batanero y Kent (2007)
Biza, Giraldo, Hochmuth, Khakbaz y Rasmussen (2016)
Rasmussen y Wawro (2018)
Lerman (2014)
Stewart, Andrews-Larson, Berman y Zandieh (2018)

2.1.3 Fuentes citadas y conocimiento propio de la literatura

Finalmente, en este nivel revisamos meticulosamente las listas de referencias bibliográficas de cada uno de los trabajos localizados en los dos niveles previos. A través de esta revisión localizamos aquellas referencias que cumplieran con los criterios de selección que establecimos, y en tal caso las incluimos en nuestra propia revisión. En este nivel también incluimos aquellas referencias relacionadas con el concepto de espacio vectorial que nosotros mismos conocíamos, que cumplieran con los criterios de inclusión, pero que no fueron detectadas a través de los dos niveles de revisión previamente aplicados. Es importante notar que no en todas las fuentes consultadas se localizó información relacionada con el concepto de espacio vectorial. En la siguiente sección se especifican las referencias bibliográficas localizadas que sí están asociadas a este concepto, y las cuales se usaron como base para producir el estado del conocimiento.

2.2 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS LOCALIZADAS

La aplicación de nuestro método nos permitió identificar trece artículos de investigación relacionados con el aprendizaje y enseñanza del concepto de espacio vectorial (ver tabla 3).

Tabla 3. Conjunto de artículos de investigación en los que se basa el estado del conocimiento

Referencias bibliográficas localizadas (autores y fuente)

- Caglayan (2019). *ZDM Mathematics Education*
- Jara, González y Trigueros-Gaisman (2018). *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*.
- Mutambara y Bansilal (2018). *Challenges and strategies in teaching linear algebra. ICME-13 monographs*.
- Andía y Repetto (2015). *Conceptos y lenguajes en ciencia y tecnología*.
- Rosso y Barros (2013). *Revista Iberoamericana de Educación*.
- Parraguez (2013). *Educación Matemática*.
- Parraguez y Okaç (2012). *Paradigma*.
- Parraguez y Okaç (2010). *Linear Algebra and its Applications*.
- Okaç y Trigueros (2010). *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*.
- Maracci (2008). *ZDM Mathematics Education*.
- Kú, Trigueros y Okaç (2008). *Educación Matemática*.
- Konyalıoğlu, İpek y Işık (2003). *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education*.
- Redondo (2001). *SUMA*.
-

Este conjunto de referencias se tomó como base para hacer un análisis y clasificación de los hallazgos de investigación relacionados con el concepto de espacio vectorial. El análisis de las referencias consistió en leer cada una de ellas, identificando la información que diera respuesta a las preguntas guía PG1 y PG2; es decir, se determinaba si la referencia analizada: (1) reportaba algún obstáculo para el aprendizaje del concepto de espacio vectorial o (2) contenía alguna propuesta didáctica para fomentar su aprendizaje.

3. RESULTADOS

En esta sección se presentan los resultados del análisis, organizados de acuerdo a las preguntas guía: primero se presentan los obstáculos para el aprendizaje que se han identificado, posteriormente se reportan las sugerencias didácticas que se han hecho.

3.1 ¿QUÉ OBSTÁCULOS PARA EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE ESPACIO VECTORIAL SE HAN IDENTIFICADO?

Este estado de conocimiento contribuye a la organización del saber que se ha desarrollado en los últimos años sobre el aprendizaje y enseñanza del álgebra lineal centrándonos, por una parte, en los obstáculos tanto epistemológicos como didácticos (Bachelard, 1948) asociados al concepto de espacio vectorial que se han identificado y, por otra, en las sugerencias didácticas que se han hecho para mejorar su entendimiento entre los estudiantes.

La literatura identificada reporta varios obstáculos para el aprendizaje del concepto de espacio vectorial, muchos de los cuales, comparten características comunes, lo que nos permitió agruparlos en tres categorías que se presentan a continuación. Sin embargo, es importante notar que estas categorías no son mutuamente excluyentes, debido a que se incluyen en ellas tanto obstáculos didácticos como epistemológicos. Seguramente el lector podrá identificar intersecciones entre algunas de ellas. Nuestra intención con respecto a las categorías propuestas es presentar en forma organizada los resultados de investigación producidos en los últimos años, partiendo de las similitudes y las relaciones que observamos en dichos resultados.

3.1.1 *Obstáculos que se atribuyen a la naturaleza abstracta del álgebra lineal*

Un primer obstáculo al que se enfrentan los estudiantes proviene del nivel de formalismo inherente al álgebra lineal. Este obstáculo se relaciona con el proceso de axiomatización al que se vio sometida la teoría de álgebra lineal y que la proveyó de herramientas que le permitieron generalizar y unificar resultados (Dorier, 1998). Como consecuencia de este proceso de axiomatización, esta rama de las matemáticas quedó constituida por una amplia colección de definiciones, axiomas y teoremas complejos que se van entrelazando poco a poco para construir el andamiaje que conforma su naturaleza conceptual y abstracta. Esta característica particular de la teoría de espacios vectoriales ha llevado a los investigadores a descubrir obstáculos específicos que produce dicho formalismo.

Dorier y Sierpinski (2001) se apoyan en un análisis epistemológico de la historia del álgebra lineal para proponer que la necesidad de relacionar los conceptos formales con conocimientos previos puede presentar dificultades en el aprendizaje de los espacios vectoriales:

Las dificultades de los estudiantes con el aspecto formal de la teoría de los espacios vectoriales no son solo un problema general del formalismo, sino sobre todo una dificultad para comprender el uso específico del formalismo dentro de la teoría de los espacios vectoriales y la interpretación de los conceptos formales en relación con contextos más intuitivos, como la geometría o los sistemas de ecuaciones lineales, en los que históricamente surgieron (Dorier y Sierpinska, 2001, p. 259).

Parraguez y Oktaç (2010), también señalan la necesidad de formalizar conceptos previos (conjuntos, funciones y operaciones binarias), como un requisito para el aprendizaje del concepto de espacio vectorial, y concluyen que la falta de formalización de dichos conceptos previos genera un obstáculo que dificulta el desarrollo de un esquema coherente de espacio vectorial, en términos de la teoría APOE.

El obstáculo del formalismo también aparece en los trabajos de argumentación: cuando el estudiante necesita elaborar una prueba para verificar si un conjunto es o no un espacio vectorial, encuentra dificultades en comprender lo que un argumento demostrativo representa o bien el papel que juega un contraejemplo en este proceso de verificación (Mutambara y Bansilal, 2018). El alumno inclusive puede conocer las propiedades que un espacio vectorial concreto debe cumplir, pero llega a confundir los elementos de los conjuntos que definen al espacio vectorial (Oktaç y Trigueros, 2010).

Otras dificultades que experimentan los estudiantes han sido identificadas por Maracci (2008). Él encontró que las hipótesis incorrectas que hacen los estudiantes sobre el espacio vectorial, obstaculizan su proceso de aprendizaje ya que no las cuestionan durante la actividad de resolución de un problema. Por el contrario, los estudiantes utilizan dichas hipótesis como guía –y en algunos casos como último criterio– para resolver los problemas que se les proponen, a pesar de estar empleadas incorrectamente o limitadas en el alcance de su aplicación. Un ejemplo de esta situación ocurre cuando el alumno supone que todo vector tiene una única representación como combinación lineal de vectores linealmente independientes, basándose en la propiedad de que la representación de un vector como combinación lineal de un conjunto de vectores linealmente independientes dados es única. Este fenómeno influye en las concepciones limitadas que se construyen los estudiantes con respecto a la teoría y la forma en que la adoptan para emplearla en la resolución de tareas. Esto también puede relacionarse con las dificultades que encuentran al trabajar procesos demostrativos y argumentativos que se han asociado con los obstáculos del formalismo en los trabajos de investigación que mencionamos anteriormente.

3.1.2 Obstáculos didácticos relacionados con las distintas representaciones semióticas de las nociones del álgebra lineal

Rosso y Barros (2013) identifican como un problema de aprendizaje el que el alumno manifieste dificultades para identificar un mismo objeto matemático a través de diferentes representaciones semióticas (Duval, 2006). Esto provoca que algunos conceptos del álgebra lineal que se podrían interpretar como un mismo objeto de estas diferentes representaciones, –por ejemplo, el caso de los vectores– permanezcan como definiciones formales carentes de contenido y no les sea posible a los estudiantes establecer relaciones con sus conocimientos previos o bien con argumentos geométricos o físicos. Una consecuencia de este obstáculo didáctico es que conceptos como el de espacio vectorial se reducen a una mera memorización de los axiomas que lo definen. Esto puede ocasionar que el estudiante sea capaz de citar dichos axiomas, pero sin mostrar la capacidad de demostrar o discernir si un conjunto es o no un espacio vectorial (Mutambara y Bansilal, 2018).

Desde el trabajo de Harel (2000) se señala que el uso de referencias geométricas como introducción a los espacios vectoriales puede resultar en un obstáculo didáctico debido a su limitación a espacios de dos y tres dimensiones, así como la imposibilidad de los estudiantes de generalizar, a partir de la interpretación geométrica, conceptos como rango o independencia lineal. Sin embargo, también se ha reportado que el empleo de referencias geométricas facilita la conexión entre el conocimiento previo de los alumnos y su intuición, además de que se promueve la motivación de los estudiantes (Konyalıoğlu *et al.*, 2003), particularmente resulta útil al momento de estudiar estructuras concretas de la teoría de espacios vectoriales, aprovechando sus aspectos aritméticos, algebraicos y geométricos (Jara *et al.*, 2018).

3.1.3 Obstáculos didácticos observados al trabajar con espacios vectoriales no usuales

Frecuentemente durante el proceso de enseñanza del concepto de espacio vectorial se recurre a ejemplos basados en espacios de tipo \mathbb{R}^n como punto de partida, y posteriormente se procede a proponer una generalización de los resultados obtenidos sobre este espacio vectorial para introducir espacios vectoriales “tradicionales” como: matrices, polinomios, funciones reales continuas en un

intervalo, etc. Estos son los espacios vectoriales que usualmente se abordan en los libros de texto de álgebra lineal (Andía y Repetto, 2015).

Sin embargo, se ha encontrado que para algunos estudiantes es difícil trabajar con otro tipo de espacios vectoriales cuyos elementos no son n -adas de números, y donde los algoritmos preestablecidos en forma tradicional son insuficientes para lidiar con vectores de espacios no tradicionales y sus operaciones (Kú *et al.*, 2008; Parraguez y Oktaç, 2010). Este obstáculo se origina por el hecho de que muchas veces el proceso de enseñanza que recibe el alumno se enfoca principalmente en el trabajo con conjuntos de tipo \mathbb{R}^n y con las operaciones usuales en estos conjuntos y se pretende que esto sea suficiente para generalizar los resultados a otros tipos de conjuntos que forman espacios vectoriales. Este obstáculo didáctico también se observa cuando se solicita a los estudiantes construir un espacio vectorial a partir de ciertas propiedades sobre los vectores que conformarán el espacio vectorial; o cuando se les propone trabajar con operaciones binarias que no corresponden a una generalización de la suma y multiplicación por escalar que usualmente se definen en \mathbb{R}^n (Parraguez y Oktaç, 2012, Parraguez, 2013).

3.2 ¿QUÉ PROPUESTAS SE HAN HECHO PARA DISEÑAR ACERCAMIENTOS DIDÁCTICOS QUE FOMENTEN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE ESPACIO VECTORIAL?

A partir de las investigaciones revisadas podemos identificar una serie de recomendaciones pedagógicas que podrían servir para atender los obstáculos identificados y favorecer situaciones de aprendizaje, por ejemplo, Redondo (2001) propone el uso de analogías entre los conceptos asociados a los espacios vectoriales y trabajar con mezclas de pinturas como una estrategia para introducir al alumno a conceptos más abstractos.

A partir del análisis de la literatura podemos subrayar la necesidad de desarrollar los esquemas de operación binaria, de conjunto, de axiomas y de función para dar a los estudiantes la oportunidad de trabajar con diferentes tipos de conjuntos y operaciones binarias de tal forma que desarrollen flexibilidad en la posibilidad de identificar las características que comparten aquellos que conforman espacios vectoriales. De esta manera reconocerán el carácter unificador y generalizador del espacio vectorial y las similitudes involucradas en la forma de pensar sobre las distintas estructuras que pueden conformar espacios vectoriales (Parraguez y Oktaç, 2010). Estas mismas autoras sugieren que además de

estos esquemas, también es necesaria la coordinación de los procesos determinados por cada una de las operaciones definidas sobre un espacio vectorial; como se mencionó anteriormente, estas coordinaciones tienen lugar a través de las leyes distributivas que involucran a ambas operaciones junto con la verificación de los axiomas en cada caso. Generalmente en los procesos de enseñanza no se hace hincapié en esta coordinación lo que provoca que los estudiantes no lleguen a darse cuenta de las relaciones entre las operaciones y sus propiedades (Oktaç y Trigueros, 2010).

Otro elemento de enseñanza a considerar dentro de los procesos de verificación de axiomas es la producción de contraejemplos. Se sugiere utilizar contraejemplos, ya que esto requiere de la desencapsulación del objeto estudiado por parte del estudiante para recuperar el proceso que le dio origen. Estos contraejemplos juegan un rol importante en el proceso de verificación de los axiomas que definen a un subespacio y sus propiedades (Parraguez y Oktaç, 2012; Mutambara y Bansilal, 2018).

Por otro lado, es importante que en los cursos de álgebra lineal se trabaje con espacios vectoriales diversos (Kú *et al.*, 2008). En particular se debe considerar el rol que juega la generalización del vector nulo para aceptar vectores nulos e inversos aditivos distintos a los usuales, así como operaciones binarias distintas a las que se definen normalmente en \mathbb{R} para apoyar la evolución del esquema de espacio vectorial. Esto favorecerá que los estudiantes encuentren situaciones en las cuales los algoritmos preestablecidos no son suficientes para la resolución de problemas además del trabajo con el concepto de espacio vectorial bajo diferentes circunstancias (Parraguez y Oktaç, 2012; Parraguez, 2013).

Finalmente, se ha sugerido que la construcción cognitiva del espacio vectorial \mathbb{R}^2 se puede favorecer considerando los aspectos aritméticos, algebraicos y geométricos para ejemplificar conceptos específicos como combinaciones lineales, base y conjunto generador, entre otros. Esta estrategia fue planteada por Jara *et al.* (2001), quienes a través de una modelización cognitiva del espacio vectorial \mathbb{R}^2 , plantearon actividades relacionadas con los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos para promover el aprendizaje de este espacio vectorial particular.

4. DISCUSIÓN

Cerramos este artículo con una reflexión sobre el estado del conocimiento y las oportunidades de investigación relacionadas con el aprendizaje y la enseñanza del concepto de espacio vectorial. Esto es, con base en los resultados encontrados identificamos en qué aspectos se ha centrado la investigación sobre espacio vectorial y señalamos algunas de las implicaciones de esta centración. Por otro lado, identificamos aspectos de la investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza del concepto de espacio vectorial no han sido estudiados con suficiente profundidad, y cuyo estudio consideramos podría ayudar a avanzar nuestro entendimiento de cómo aprender y enseñar dicho concepto.

4.1 AVANCES SOBRE LOS OBSTÁCULOS PARA EL APRENDIZAJE DE ESPACIO VECTORIAL

Sin duda las preguntas guía PG1 y PG2 moldean el rumbo que toman los resultados de este estado del conocimiento. Sin embargo, aún dentro de esa delimitación es posible identificar algunas tendencias y resultados principales dentro de la investigación didáctica sobre el concepto de espacio vectorial.

En relación con la investigación sobre los obstáculos para el aprendizaje del concepto, se han identificado dos grupos de obstáculos: primero, un grupo de obstáculos que parecen ser inherentes al concepto de espacio vectorial, y que se atribuyen a su naturaleza abstracta y a las distintas representaciones semióticas que puede tener este concepto. Por otro lado, existe un segundo grupo de obstáculos de tipo didáctico que parecen ser producidos por la enseñanza misma. Por ejemplo, en la literatura se reporta el problema de trabajar en clase con espacios vectoriales usuales y específicos que pueden ser útiles para ilustrar el concepto a los estudiantes, pero que posteriormente pueden producir dificultades para hacer generalizaciones a espacios vectoriales de dimensión mayor a los usuales o a aquellos que se definen sobre conjuntos con elementos no usuales.

Notamos que se ha avanzado en la identificación de obstáculos de aprendizaje en los estudiantes y sus posibles causas, pero hace falta identificar más maneras o estrategias para abordarlos y superarlos –regresaremos a este punto en la siguiente sección–. Además, debido a que la investigación se ha centrado en la identificación de obstáculos de aprendizaje en los estudiantes, y en la manera en que estos logran construir un entendimiento del concepto, se ha dejado de lado el estudio de otros actores y elementos que pueden jugar un rol

importante en el proceso de enseñar y aprender el concepto de espacio vectorial. Retomaremos esta idea más adelante.

4.2 AVANCES SOBRE SUGERENCIAS DIDÁCTICAS PARA FOMENTAR EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE ESPACIO VECTORIAL

Se ha avanzado en nuestro conocimiento acerca del cómo se puede aprender el concepto de espacio vectorial. Prueba de ello son las descomposiciones genéticas que se han desarrollado alrededor de este concepto (e.g., Parraguez y Oktaç, 2010). Podemos también considerar los principios de enseñanza propuestos por Harel (2000) que se presentan en referencia al álgebra lineal en general. Estos principios pueden ser aplicados a la enseñanza específica de los espacios vectoriales. Nos referimos al principio de concreción, al principio de necesidad y al principio de generalidad. Estos principios pueden servir como guía para evitar obstáculos didácticos a los que se puede enfrentar un alumno durante el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de espacio vectorial.

No obstante, más allá de estas descomposiciones genéticas específicas para el concepto de espacio vectorial (e.g., Parraguez y Oktaç, 2010) mencionadas anteriormente, o los principios generales de Harel (2000), no existen más que sugerencias y consejos didácticos aislados, que pretenden fomentar el aprendizaje de este concepto. Es evidente la falta de propuestas de enseñanza con un respaldo empírico sólido, aparte de las anteriormente citadas, que ayuden a los estudiantes a superar los obstáculos de aprendizaje comúnmente asociados al concepto de espacio vectorial. Es además necesario, contar con propuestas de enseñanza que logren diferenciar entre las necesidades de aprendizaje del concepto que distintos grupos de estudiantes –matemáticos, ingenieros, economistas, etc.– pueden tener: mientras algunos estudiantes pueden requerir de una aproximación de enseñanza orientada a un entendimiento abstracto, otros estudiantes pueden necesitar de una instrucción más cercana al entendimiento procedimental y práctico.

4.3 OPORTUNIDADES DE INVESTIGACIÓN AÚN NO RECLAMADAS

Después de desarrollar este estado del conocimiento, es evidente, para nosotros, que existen elementos asociados a la enseñanza y el aprendizaje del espacio

vectorial que deberían ser estudiados con más detalle. Esto, con la finalidad de ampliar nuestro conocimiento acerca de la manera en que este concepto se enseña y se aprende, pero también con el propósito de mejorar la instrucción matemática que reciben al respecto nuestros estudiantes. Sin embargo, la revisión sistemática que hemos desarrollado nos hace notar que el interés en desarrollar estudios relacionados con la enseñanza y el aprendizaje del espacio vectorial ha disminuido durante los años recientes. Esta observación se confirma en la entrada de la *Enciclopedia de Educación Matemática* dedicada a la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal:

Los espacios vectoriales no han recibido mucha atención por parte de los investigadores, probablemente porque el currículo basado en aplicaciones pone menos atención a este concepto que ha, por otro lado, sido señalado como central en el entendimiento de la estructura del álgebra lineal debido a su rol integrador descrito en la investigación sobre álgebra lineal desde los años noventa (Trigueros y Wawro, 2020, p. 476).

Como hemos señalado, la investigación didáctica sobre el concepto de espacio vectorial se ha centrado en gran parte en la comprensión por parte de los estudiantes. Esta centración en los estudiantes ha dejado de lado el estudio del entendimiento de este concepto entre profesores y futuros profesores de matemáticas, y las prácticas docentes asociadas a su enseñanza. Es necesario conocer más acerca de las concepciones y obstáculos de aprendizaje que los mismos docentes pudieran experimentar, así como las prácticas de enseñanza que regulan la instrucción de este concepto en las aulas de matemáticas.

Es igualmente importante conocer la manera en que los materiales instruccionales representan e introducen el concepto de espacio vectorial. Por ejemplo, la investigación sobre la manera en que los libros de texto introducen este concepto es muy escasa. Salvo contadas excepciones (por ejemplo, Andía y Repetto, 2015), la manera en que el concepto de espacio vectorial aparece en los libros de texto universitarios es un tema muy poco explorado. La investigación en esta área nos permitiría hacer evaluaciones críticas acerca de la idoneidad de los materiales instruccionales que acompañan a los jóvenes en su estudio del concepto de espacio vectorial.

Es probable que, debido la naturaleza abstracta del concepto de espacio vectorial, el uso de tecnología digital para su representación e instrucción ha sido escasamente considerado. Existen algunos antecedentes en el trabajo de Weller

et al. (2002) en el que se sugiere el uso de programación computacional para favorecer el aprendizaje con significado de este concepto por los estudiantes. Sin embargo, esta idea no ha sido retomada y explorada con suficiente profundidad; una excepción es el trabajo de Caglayan (2019) donde se promueve el entendimiento de subespacios de espacios vectoriales apoyándose en un ambiente de aprendizaje en el que se hace uso de software de geometría dinámica y MATLAB. Pensamos que las tecnologías digitales podrían apoyar a los estudiantes a reforzar algunos de los conocimientos previos necesarios para la construcción del concepto de espacio vectorial; si embargo, es necesario explorar empíricamente el potencial de estas herramientas.

5. CONCLUSIÓN

El concepto de espacio vectorial es una especie de “metaconcepto” que unifica varios otros conceptos del álgebra lineal. Es una de las nociones del álgebra lineal más demandantes en términos de pensamiento abstracto. No obstante, la investigación educativa alrededor de este concepto aún tiene que avanzar y expandirse para moverse más allá de la identificación de obstáculos de aprendizaje y estar en posición de hacer propuestas de enseñanza sólidas, basadas en los resultados de la investigación, que apoyen la labor del profesor y el aprendizaje de los estudiantes. Esperamos que este estado del conocimiento proporcione una guía de las direcciones en las que valdría la pena desarrollar futuras investigaciones.

REFERENCIAS

- Andía, S., y Repetto, L. (2015). El lenguaje relacionado con el aprendizaje del concepto de base de un espacio vectorial utilizando textos. Una mirada desde la teoría APOE. En G. Cuadrado, J. Redmon y R. López (Eds.), *Conceptos y lenguajes en ciencia y tecnología* (pp 235–250). Universidad de Valparaíso.
- Andrade-Molina, M., Montecino, A., y Aguilar, M. S. (2020). Beyond quality metrics: defying journal rankings as the philosopher’s stone of mathematics education research. *Educational Studies in Mathematics*, 103(3), 359–374. <http://doi.org/10.1007/s10649-020-09932-9>

- Artigue, M., Batanero, C., y Kent, P. (2007). Mathematics thinking and learning at post-secondary level. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1011–1050). Information Age Publishing.
- Bachelard, G. (1948). *La formación del espíritu científico*. Argos.
- Bianchini, B. L., de Lima, G. L., y Gomes, E. (2019). Linear algebra in engineering: an analysis of Latin American studies. *ZDM Mathematics Education*, 51(7), 1097–1110. <http://doi.org/10.1007/s11858-019-01081-5>
- Biza, I., Giraldo, V., Hochmuth, R., Khakbaz, A., y Rasmussen, C. (2016). *Research on teaching and learning mathematics at the tertiary level: State-of-the-art and looking ahead. ICME-13 Topical Surveys*. Springer. <http://doi.org/10.1007/978-3-319-41814-8>
- Bourdieu, P. (2001). *Science of science and reflexivity*. University of Chicago Press.
- Caglayan, G. (2019). Is it a subspace or not? Making sense of subspaces of vector spaces in a technology-assisted learning environment. *ZDM Mathematics Education*, 51(7), 1215–1237. <http://doi.org/10.1007/s11858-019-01101-4>
- Dochy, F. (2006). A guide for writing scholarly articles or reviews for the Educational Research Review. *Educational Research Review*. <http://www.journals.elsevier.com/educational-research-review/>
- Dorier, J.-L. (1995). Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 29(2), 175–197. <http://doi.org/10.1007/BF01274212>
- Dorier, J.-L. (1998). The role of formalism in the teaching of the theory of vector spaces. *Linear Algebra and its Applications*, 275–276, 141–160. [http://doi.org/10.1016/S0024-3795\(97\)10061-1](http://doi.org/10.1016/S0024-3795(97)10061-1)
- Dorier, J.-L. (Ed.). (2000). On the teaching of linear algebra. Kluwer. <http://doi.org/10.1007/0-306-47224-4>
- Dorier, J.-L., y Sierpinska A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. En D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp. 255–273). Kluwer. http://doi.org/10.1007/0-306-47231-7_24
- Dubinsky, E., y Leron, U. (1994). *Learning abstract algebra with ISETL*. Springer. <http://doi.org/10.1007/978-1-4612-2602-4>
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103–131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Harel G. (2000). Three principles of learning and teaching mathematics. Particular reference to the learning and teaching of linear algebra - Old and new observations. En J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (177–189). Springer. http://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_6

- Jara, M. R., González, M. P., y Trigueros-Gaisman, M. (2018). Construcción cognitiva del espacio vectorial R2. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 21(1), 57–86. <http://doi.org/10.12802/relime.18.2113>
- Konyalioglu, A. C., İpek, A. S., y Işık, A. (2003). On the teaching of linear algebra at the university level: The role of visualization in the teaching of vector spaces. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education*, 7(1), 59–67.
- Kú, D., Trigueros, M., y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática*, 20(2), 65–89.
- Lerman, (Ed.) (2014). *Encyclopedia of mathematics education*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8>
- Maracci, M. (2008). Combining different theoretical perspectives for analyzing students' difficulties in vector spaces theory. *ZDM Mathematics Education*, 40(2), 265–276. <https://doi.org/10.1007/s11858-008-0078-z>
- Mutambara, L. H. M., y Bansilal, S. (2018). Dealing with the abstraction of vector space concepts. En S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman y M. Zandieh (Eds.), *Challenges and strategies in teaching linear algebra. ICME-13 monographs* (147–173). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66811-6_7
- Oktaç, A., y Trigueros, M. (2010) ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4), 373–385.
- Pais, A., y Valero, P. (2012). Researching research: mathematics education in the Political. *Educational Studies in Mathematics*, 80(1-2), 9–24. <http://doi.org/10.1007/s10649-012-9399-5>
- Parraguez, M. (2013). El rol del cuerpo en la construcción del concepto espacio vectorial. *Educación Matemática*, 25(1), 133–154.
- Parraguez, M., y Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and its Applications*, 432(8), 2112–2124. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.06.034>
- Parraguez, M., y Oktaç, A. (2012). Desarrollo de un esquema del concepto espacio vectorial. *Paradigma*, 33(1), 103–134.
- Rasmussen, C., y Wawro, M. (2018). Post-calculus research in undergraduate mathematics education. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 551–582). National Council of Teachers of Mathematics.
- Redondo, M. A. M. (2001). Los espacios vectoriales, el amarillo, el rojo y el azul. *SUMA*, 37, 75–81.
- Rosso, A., y Barros, J. (2013). Una taxonomía de errores en el aprendizaje de espacios vectoriales. *Revista Iberoamericana de Educación*, 63(2), 1–9.

- Stewart, S., Andrews-Larson, C., Berman, A., y Zandieh, M. (Eds). (2018). *Challenges and strategies in teaching linear algebra*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-66811-6>
- Toerner, G., y Arzarello, F. (2012). Grading mathematics education research journals. *Newsletter of the European Mathematical Society*, 86, 52–54.
- Trigueros, M., y Wawro, M. (2020). Linear algebra teaching and learning. En Lerman, S. (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (2da ed., pp. 474–478). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100021
- Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., Trigueros, M., Arnon, I., y Dubinsky, E. (2002). *Learning linear algebra with ISETL*. Research in Undergraduate Mathematics Education Community.
- Williams, S. R., y Leatham, K. R. (2017). Journal quality in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 48(4), 369–396. <https://doi.org/10.5951/jres-matheduc.48.4.0369>

ANGEL F. CAN CABRERA

Dirección: Av. Ah Canul S/N por Carretera Federal. C.P. 24900.

Calkiní, Campeche, México.

afcan@itescam.edu.mx

Teléfono: (+52) 996-8134870