

TEOREMA DE CLASIFICACIÓN PARA 2-VARIEDADES

LEONARDO SOLANILLA*, ÓSCAR PALACIO**, GUSTAVO HERNÁNDEZ***

Recibido: 25 de junio de 2013 / Aceptado: 30 de agosto de 2013

RESUMEN

Estudiaremos métodos combinatorios que permitan la construcción de superficies compactas, esto con el fin de entender las mismas y así poder dar una demostración completa del teorema de clasificación topológica de superficies.

Palabras y frases clave: superficie, espacio topológico, espacio compacto, espacio conexo, superficie orientable, triangulación.

ABSTRACT

We study combinatorial methods that allow the construction of compact surfaces, in order to understand it and be able to give a complete proof of classification theorem for topological surfaces.

Keywords and phrases: surface, topological space, compact space, connected space, orientable surface, triangulation.

1. INTRODUCCIÓN

El problema de la clasificación topológica de variedades de n dimensionales consiste en generar una lista completa y sin repeticiones de n variedades. Es decir, cuando disponemos de una lista de n -variedades de manera que dos miembros de la lista no son homeomorfos, y dada una n -variedad cualquiera disponemos de un procedimiento para determinar a qué n -variedad de la lista es homeomorfa.

En este artículo se presenta la demostración completa del teorema de clasificación de las 2-variedades. Se trata de una demostración propia, aunque inspirada por algunos referentes contemporáneos. Además de la idea de la

* Doctor en Matemáticas, profesor, Universidad del Tolima. Ibagué, Colombia. Correo electrónico: leonmsolc@ut.edu.co

** Especialista en Matemáticas Avanzadas, profesor, Universidad Cooperativa de Colombia. Ibagué, Colombia. Correo electrónico: ojpalacio86@gmail.com

*** Especialista en Matemáticas Avanzadas, Estudiante de Maestría en Matemáticas, profesor Universidad de Ibagué. Ibagué, Colombia. Correo electrónico: alffergustavo@hotmail.com

combinatoria de las superficies, nos hemos basado en una generalización del célebre Teorema de la Curva de Jordan.

2. PROBLEMA DE CLASIFICACIÓN

El problema de la clasificación de las superficies consiste en definir una noción de equivalencia entre las superficies y hacer una lista completa de representantes, de tal manera que cada superficie sea equivalente a un elemento de la lista. La equivalencia es, naturalmente, la noción de homeomorfismo.

3. CONSTRUCCIÓN DE SUPERFICIES

Partimos de una familia finita de triángulos equiláteros cerrados disyuntos cuyos lados tienen igual longitud. Así, si T es uno de estos triángulos y ∂T su frontera, su interior se obtiene como $\text{int}(T) = T - \partial T$. Además, se asume que cada frontera ∂T posee una misma orientación prefijada. La idea para construir superficies consiste en pegar lados de los miembros de la familia. Como cada lado se puede recorrer en dos sentidos posibles, hay dos formas de pegar un lado sobre otro.

Formalmente, asignamos a cada lado una etiqueta y un elemento del conjunto $\{+, -\}$. Con ello, se define una relación de equivalencia en la familia de triángulos como sigue.

1. Cada punto de cada $\text{int}(T)$ es equivalente a sí mismo.
2. Dos lados con la misma etiqueta se identifican.
3. El sentido de la identificación depende de los elementos $+$ o $-$ asignados a los lados que se pegan.

Proposición 3.1. *Sean una familia de triángulos, un conjunto de etiquetas, asignaciones de etiquetas y de signos $+$, $-$ a los lados. El cociente de la familia entre la relación de equivalencia anterior es un espacio de Hausdorff compacto.*

Demostración. Llamemos X al cociente. Como la aplicación cociente es continua, X es compacto. Sabemos que la condición de Hausdorff es más delicada. Basta probar que la aplicación cociente es cerrada, *v.* Munkres ([10], Lema 73.3). Para ello, consideramos un solo triángulo T con una aplicación cociente $\pi: T \rightarrow X$. El caso con más triángulos es similar. Basta mostrar que para cada conjunto cerrado $C \subseteq T$, $\pi^{-1}(\pi(C)) = C'$ es cerrado en T . Ahora bien, C' consta

de puntos de C y de puntos de T que se pegan a puntos de C por π . Estos puntos se caracterizan sencillamente. Para cada lado L de T , $C \cap L = C_L$ es un subespacio compacto de T . Si L_i es un lado de T que se pega con L por el homeomorfismo $h_i : L_i \rightarrow L$, el conjunto $D_L = C' \cap L$ contiene al espacio $h_i(C_{L_i})$. Pero D_L es la unión de C_L con los espacios $h_i(C_{L_i})$, donde los L_i son los lados de T que se pegan a L . La unión es compacta y, por tanto, cerrada en L y en T . Finalmente C' es la unión del conjunto C y los conjuntos D_L , donde los L son los lados de T . Se concluye que C' es cerrado en T .

Notemos que, si el número total de lados de la familia de triángulos es n , este cociente queda determinado por un símbolo de la forma

$$e_1 s_1 e_2 s_2 \dots e_n s_n$$

donde e_i es la etiqueta asignada al lado i y $s_i \in \{+, -\}$ es el signo asignado a dicho lado. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 3.1 (Banda de Möbius). Consideremos los pares de triángulos de la Figura 1 junto con los símbolos $a - e + c - c + b - f -$ y $b + g + d - d + a - h -$ respectivamente. Con estos dos paralelogramos y el símbolo $f - a - e + b - b + g + a - h -$ se obtiene la banda de Möbius.

Para garantizar que el cociente sea efectivamente una superficie, necesitamos precisar aún algunos puntos.

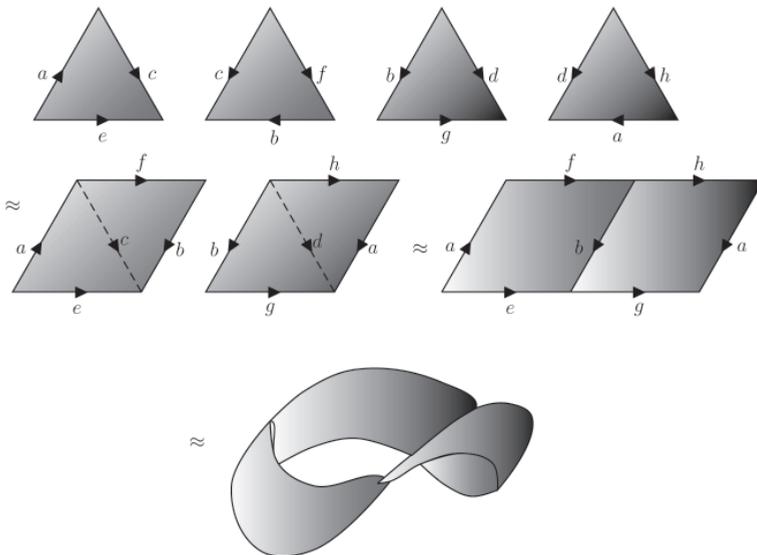


Figura 1. Banda de Möbius.

Proposición 3.2. *El espacio cociente obtenido en la Proposición 3.1 es una superficie si y solamente si se cumplen las condiciones adicionales siguientes.*

1. A cada etiqueta le corresponden exactamente dos lados (de triángulos distintos o del mismo triángulo).
2. Cada vértice en dicho cociente posee una vecindad homeomorfa a un abierto de \mathbb{R}^2 .
3. El cociente es conexo.

La demostración de esta proposición se puede encontrar en [14] Antes de proseguir, veamos algunos ejemplos de superficies.

Ejemplo 3.2 (Plano proyectivo). *También se pueden obtener superficies no orientables. Los triángulos de la Figura 2 y el símbolo $b + a + c - c + b + a +$ ilustran una manera de obtener el plano proyectivo. La confección de un "bonnet croisé", cf. Fréchet y Fan ([4], p. 48), en una esfera es tal vez la manera más sencilla entender esta superficie.*

Los ejemplos presentados ilustran dos técnicas geométricas básicas, a saber: el *pegado de triángulos* y el *corte de polígonos*. Iniciemos con el pegado de triángulos. Supongamos que tenemos dos triángulos equiláteros disjuntos

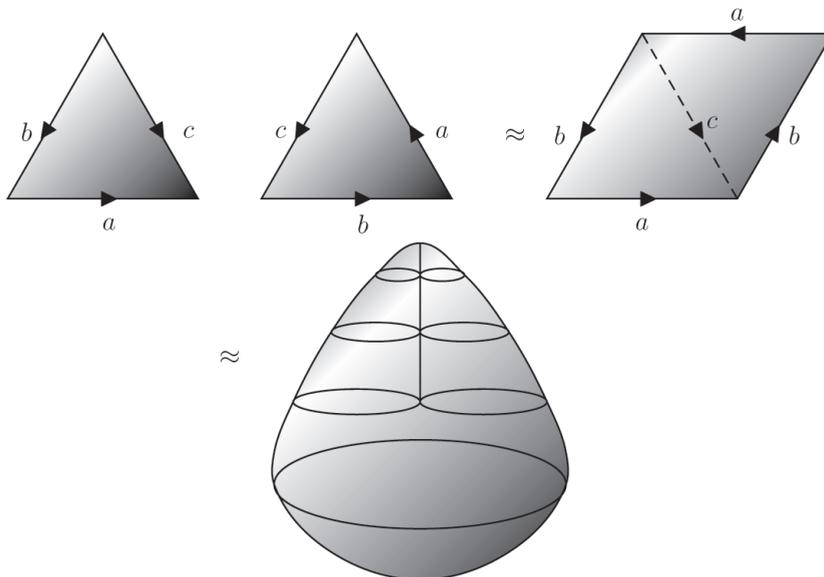


Figura 2. Plano proyectivo.

T_1 y T_2 , con vértices sucesivos (orientación usual) $\{v_1, v_2, v_3\}$ y $\{u_1, u_2, u_3\}$ respectivamente. Construyamos el espacio cociente pegando la arista v_1v_3 de T_1 con la arista u_1u_3 de T_2 . De esta forma, obtenemos un espacio de Hausdorff compacto homeomorfo a un cuadrado. El proceso se puede generalizar a cualquier familia de triángulos equiláteros para construir cualquier polígono regular. Pasemos al proceso inverso. Sea P un polígono regular con vértices sucesivos $p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1} = p_1$ y centro c . Sean $\{T_k : 1 \leq k : \leq n\}$ los triángulos de vértices sucesivos $cp_1, p_2, cp_2, p_3, \dots, cp_n, p_1$ respectivamente. Ellos constituyen una división o corte de P en triángulos equiláteros. Por lo tanto, podemos cambiar los triángulos por polígonos regulares. Esta práctica es común en los textos sobre el tema, *v.e.g.* Munkres [10].

Se sigue del párrafo anterior que es posible obtener nuevas superficies a partir de cuadrados y demás polígonos regulares. En particular, esto agiliza la construcción de las sumas conexas. Por ejemplo, es posible pegar dos toros por los huecos que dejan partes conexas en cada uno de ellos. El detalle de la suma se presenta en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 3.3 (2-toro). *Los polígonos de la Figura 3 con el símbolo $b - a + b + a - f - f + c - d - c + d$ producen la suma conexas de dos toros, una superficie que también se conoce con el nombre de 2-Toro.*

El procedimiento se puede generalizar inductivamente para obtener la suma conexas de un número finito cualquiera de toros.

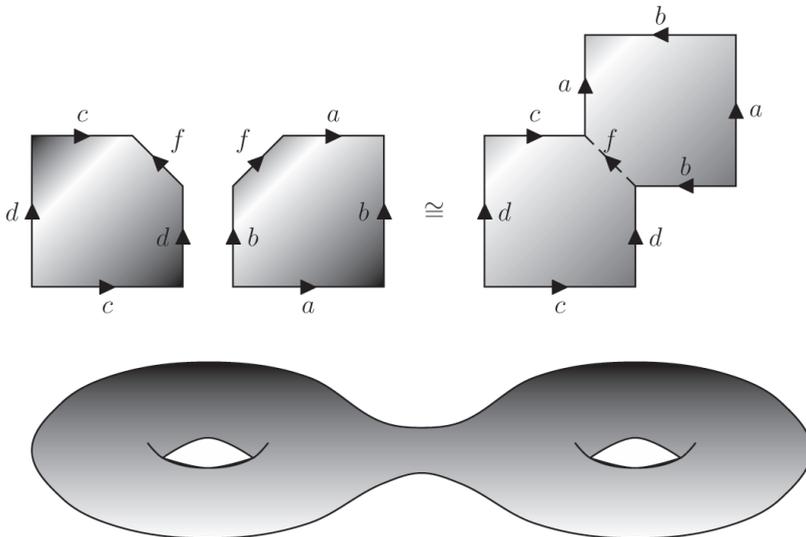


Figura 3. 2-Toro.

También es posible realizar sumas conexas de planos proyectivos.

Lo encontrado hasta el momento prueba que algunas superficies pueden construirse a partir de familias finitas de polígonos regulares y ciertos símbolos. En seguida, emprenderemos la labor de demostrar que todas las superficies se pueden obtener por este procedimiento.

4. TRIANGULACIONES

La última proposición coincide, además, con la definición de triangulación de la geometría elemental, *v.e.g.* Stoker ([11], p. 212). Como alternativa, podemos caracterizar esta noción a partir de los fundamentos de la teoría de los grafos no dirigidos. Para ver la relación, notemos que la forma de pegar familias de triángulos en la Proposición 3.2 determina un grafo conexo cuyos vértices y lados coinciden con los de los triángulos. También se puede decir que el grafo se encaja topológicamente en la superficie. En este caso, decimos que este grafo es un triangulación de la superficie y que ella está triangulada. Asumiremos que la familia tiene al menos cuatro triángulos y que los lados del grafo no son múltiples.

Lema 4.1. *Si G es un grafo 2-conexo y H es un subgrafo 2-conexo de G , entonces G se puede obtener a partir de H por adiciones sucesivas de caminos de tal manera que cada uno de estos caminos junte 2 vértices distintos en el grafo intermedio y tenga todos los otros vértices fuera de dicho grafo.*

El ingrediente más importante para la demostración que nos ocupa es, sin embargo, la siguiente versión fuerte del Teorema de la Curva de Jordan, *v.* Thomassen ([12], p. 123).

Teorema 4.1 (Jordan-Schönflies). *Si $f: C \rightarrow C'$ es un homeomorfismo entre dos curvas cerradas simples C y C' en el plano, entonces f puede extenderse a un homeomorfismo de todo el plano.*

Un grafo plano es un grafo encajado topológicamente en el plano euclidiano. También usaremos lo siguiente.

Lema 4.2. *Sean G, G' grafos planos 2-conexos, g un homeomorfismo e isomorfismo de grafos de G sobre G' . Entonces g puede extenderse a un homeomorfismo del plano.*

Con lo anterior enfrentamos el resultado central de esta sección.

Teorema 4.2. *Toda superficie es triangulable.*

Demostración. Hemos adaptado la prueba de Thomassen [12] a nuestra presentación, con mayor despliegue de detalles. Sea S una superficie. Sabemos que para cada $p \in S$, existe un disco abierto D del plano que es homeomorfo a una vecindad abierta U de p en S mediante una parametrización $\psi : D \rightarrow U$. En D es posible dibujar dos triángulos (cerrados) T_1 y T_2 tales que

$$p \in \text{int}(\psi(T_1)) \subset \text{int}(\psi(T_2)).$$

Como S es compacta, existen un conjunto finito $\{p_1, \dots, p_n\}$ de puntos para los que se puede repetir la construcción anterior de tal suerte que

$$S = \bigcup_{k=1}^n \text{int}(\psi_k(T_{1k})).$$

No hay inconveniente alguno en suponer que los dominios D_1, \dots, D_n son fijos y disjuntos dos a dos en el plano. Lo que sí cambiaremos según convenga serán los homeomorfismos $\psi_k, 1 \leq k \leq n$, sus correspondientes recorridos $U_k \subset S$ y los triángulos T_{1k} . En concreto, vamos a probar que los T_{11}, \dots, T_{1n} , resultantes de cierto procedimiento, producen el grafo buscado.

Basta con mostrar que cada subconjunto de dos elementos de

$$\left\{ \partial\psi_1(T_{11}), \dots, \partial\psi_n(T_{1n}) \right\},$$

tiene intersección finita. En este caso, el grafo $G = \cup_{j=1}^n \partial\psi_j(T_{1j})$ tiene la propiedad de que cada componente conexo de $S - G$ está encerrado por un cierto camino cerrado (o ciclo) en G . Para cada ciclo C de estos se puede construir un polígono regular convexo plano P cuyos vértices se correspondan con los vértices de C . Luego de dividir los polígonos en triángulos equiláteros e identificar los lados que correspondan, se obtiene una superficie S' . En virtud del Teorema 4.1, S y S' son homeomorfas. La Figura 4 puede ayudar a comprender este proceso.

El argumento se realiza por inducción suponiendo que $T_{11}, \dots, T_{1(k-1)}$ han sido ya elegidos de tal forma que cada par de elementos de $\{\partial\psi_j(T_{1j}) : 1 \leq j \leq k-1\}$ tengan intersección finita en S . Si $\partial\psi_k(T_{1k})$ sigue teniendo intersección finita con aquellos, no hay nada que probar. Si no, tiene infinitos puntos en común con alguno de ellos. Consideremos la relación de $\psi_k(T_{2k})$ con las imágenes respectivas de $T_{11}, \dots, T_{1(k-1)}$. Para ello, introducimos algunos conceptos útiles.

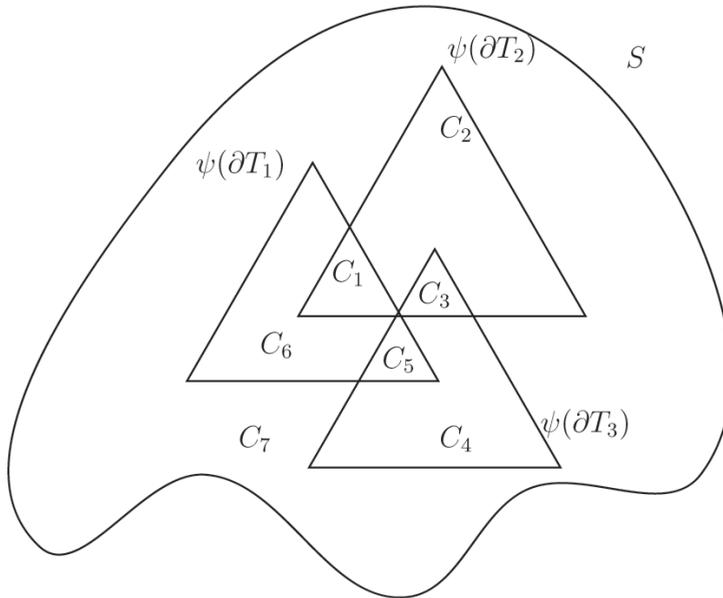


Figura 4. Las fronteras de los triángulos tienen intersección finita.

Un segmento *malo* (en el sentido de Thomassen) de $\psi_j(T_{1j})$, $1 \leq j \leq k - 1$ fijo, es

- un segmento de $\psi_j(T_{1j})$ (es decir, la imagen bajo ψ_j de un segmento recto que une dos puntos de T_{1j}) que, además,
- une dos puntos de $\psi_k(\partial T_{2k})$ de tal suerte que todos los puntos restantes yacen en $\text{int}(\psi_k(T_{2k}))$.

Un segmento *pésimo* (en el sentido de Thomassen) de $\psi_j(T_{1j})$, $1 \leq j \leq k - 1$ fijo, es

- un segmento malo de $\psi_j(T_{1j})$, tal que
- existe un triángulo $\psi_k(T_{3k})$ entre $\psi_k(T_{1k})$ y $\psi_k(T_{2k})$ que lo interseca, pero no interseca a ningún otro segmento malo de $\psi_j(T_{1j})$.

La Figura 5 sugiere la situación; en ella, los segmentos son rectos para facilitar el entendimiento. Al recorrer $1 \leq j \leq k - 1$, se encuentra que el conjunto total de segmentos malos puede ser infinito, mientras que el conjunto de segmentos pésimos es siempre finito. También, luego de recorrer los triángulos $T_{11}, \dots, T_{1(k-1)}$, se halla una región $\psi_k(V_{3k})$, encerrada por una curva poligonal cerrada simple, en $\text{int}(\psi_k(T_{2k}))$ tal que $\text{int}(\psi_k(T_{1k})) \subseteq \text{int}(\psi_k(V_{3k}))$.

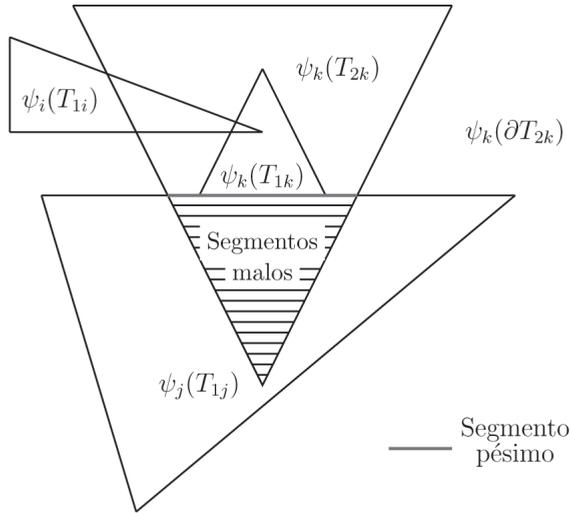


Figura 5. Segmentos malos y pésimos.

Dicha curva $\partial\psi_k(V_{3k})$ interseca los segmentos pésimos pero no interseca los demás segmentos malos.

La unión de los segmentos pésimos con $\partial\psi_k(T_{2k})$ forma un grafo 2-conexo Γ . Por el Lema 4.1, podemos reconstruir copias de Γ dentro de $\psi_k(T_{2k})$ para obtener grafos Γ' (isomorfos planos con Γ , cuyos lados son arcos poligonales simples). Ahora aplicamos el Lema 4.2 para extender el isomorfismo plano de Γ sobre cierto Γ' en un homeomorfismo de $\psi_k(T_{2k})$ que deja fijo a $\partial\psi_k(T_{2k})$, v . Figura 6.

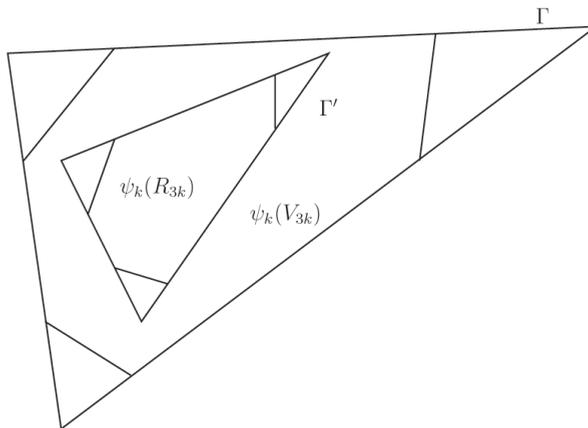


Figura 6. Remoción de los segmentos pésimos.

Mediante este homeomorfismo, $\psi_k(T_{1k})$ y $\psi_k(V_{3k})$ se convierten en regiones $\psi_k(R_{1k})$ y $\psi_k(R_{3k})$, encerradas por curvas cerradas simples. También, se tiene que $p_k \in \text{int}(\psi_k(R_{1k})) \subseteq \text{int}(\psi_k(R_{3k}))$. Para terminar el proceso inductivo, se toma (una parte triangular de) $\psi_k(R_{3k})$ en lugar de $\psi_k(T_{1k})$. Con esto, los subconjuntos binarios de $\{\psi_1(\partial T_{11}), \dots, \psi_k(\partial T_{1k})\}$ tienen intersección finita.

5. CLASIFICACIÓN

Con lo anterior queda claro que toda superficie es homeomorfa a una obtenida como un cociente de un conjunto finito de triángulos según un símbolo, de acuerdo con las normas explicadas antes. De esta forma, el problema de clasificación de todas las superficies se reduce a la clasificación de las superficies trianguladas. Veamos.

Proposición 5.1. *Sea S la superficie obtenida de una familia de m polígonos según el símbolo inicial $t_0 + t_1 + w_2 + \dots + w_m$. Si e es una nueva etiqueta y t_0^+ , t_1^+ constan de al menos dos segmentos, entonces S se puede reconstruir a partir de los de $m+1$ polígonos según el nuevo símbolo $t_0 + e - e + t_1 + w_2 + \dots + w_m$. Recíprocamente, si S se obtiene como el cociente de $m + 1$ polígonos por el nuevo símbolo, también se puede obtener de m polígonos mediante el símbolo inicial, donde e es una etiqueta diferente a las que aparecen en dicho símbolo inicial.*

Esta proposición muestra solamente una de las operaciones básicas que se pueden realizar en una familia de polígonos y que no cambian la superficie resultante S . Tal como uno quisiera, ellas se pueden definir por medio de los símbolos. He aquí la lista de dichas operaciones. Todas ellas son reversibles.

1. *Cortar.* El símbolo $w_1 + = t_0 + t_1 +$ se puede remplazar por $t_0 + e - e + t_1 +$ siempre y cuando e sea una nueva etiqueta y t_0^+ y t_1^+ contengan al menos dos segmentos.
2. *Pegar.* El símbolo $t_0 + e - e + t_1 +$ se pueden cambiar por $t_0 + t_1 +$ cuando e no aparezca en ningún otro símbolo.
3. *Reetiquetar.* Se pueden cambiar todas la apariciones de una etiqueta por otra etiqueta y viceversa.
4. *Reorientar.* Se puede sustituir $+$ por $-$ y viceversa en todas las apariciones de una etiqueta.
5. *Permutar (cíclicamente).* Cualquier $w_i +$ se puede remplazar por una de las permutaciones cíclicas de sus elementos.

6. *Invertir.* $w_i^+ = a_{i1} + \dots a_{in}^+$ se puede cambiar por su inverso $w_i^- = a_{in} - \dots a_{i1}^-$.

Lo anterior nos conduce a establecer algunas nociones clave. Dos símbolos sobre familias de polígonos son equivalentes si uno de ellos se puede obtener a partir del otro por medio de una sucesión finita de las operaciones básicas 1 a 7. No es difícil ver que se trata efectivamente de una relación de equivalencia en el conjunto de símbolos de superficies. También, dos superficies son homeomorfas si y sólo si las clases de equivalencia de sus símbolos coinciden. La siguiente proposición muestra la utilidad de este resultado.

Proposición 5.2. *La botella de Klein es homeomorfa al 2-plano proyectivo.*

Demostración. Es suficiente mostrar que el símbolo $a + b + a - b^+$ de la botella de Klein es equivalente al símbolo $a + a + b + b^+$ del 2-plano proyectivo.

Un símbolo $w^+ = w_1 + w_2 + \dots w_m^+$ para una familia de polígonos P_1, P_2, \dots, P_m es propio si cada etiqueta aparece solamente dos veces en él. Claramente, los símbolos que estamos considerando son propios, pues producen superficies. Después de mirar en detalle los ejemplos realizados hasta ahora, se puede llegar a clasificar los símbolos de las superficies orientables y no orientables según sus símbolos, tal como se explica en breve. Además, es suficiente con considerar un único polígono P , en lugar de una familia.

Definición 5.1. *Sea w^+ un símbolo propio para un polígono P . Decimos que w^+ es tórico si cada etiqueta aparece una vez junto al signo $+$ y una vez junto al signo $-$. Decimos w^+ que es proyectivo, si no es tórico.*

Estas dos opciones son excluyentes y cubren todos los casos posibles en la construcción de superficies. Una primera explicación de lo que pasa en el segundo caso queda resuelta por lo que sigue.

Lema 5.1. *Si w^+ es un símbolo proyectivo para un polígono P , entonces equivale a uno del mismo número de elementos y de la forma*

$$(a_1 + a_1^+) (a_2 + a_2^+) \dots (a_k + a_k^+) w_1^+,$$

para cierto $k \geq 1$, donde w_1^+ es vacío o tórico. Los paréntesis son una ayuda para la vista.

De esta manera, un símbolo que produce una superficie es ya tórico, ya de la forma $(a_1 + a_1^+) (a_2 + a_2^+) \dots (a_k + a_k^+)$ o ya de la forma $(a_1 + a_1^+) (a_2 + a_2^+) \dots (a_k + a_k^+) w_1^+$, w_1^+ tórico. Claramente, el segundo caso es una suma conexa de planos proyectivos. El primer caso (puramente tórico) y el tercero se resuelven

respectivamente por medio de los siguientes lemas, cuyas demostraciones son del mismo talante de la anterior. Diremos que un símbolo tórico está reducido cuando todas las ocurrencias $x - x^+$, para cierta etiqueta x , han sido eliminadas por la operación de pegado.

Lema 5.2. Si w^+ es propio de la forma $w_0 + w_1^+$, donde w_1^+ es tórico reducido, entonces w^+ es equivalente a un símbolo de la forma $w_0 + a + b + a - b - w_2^+$, donde w_2^+ es vacío o tórico. Además, $a + b + a - b - w_2^+$ tiene tantos elementos como w_1^+ .

Lema 5.3. Si w^+ es un símbolo propio de la forma $w_0 + c + c + a + b + a - b - w_1^+$, entonces w^+ es equivalente a uno de la forma $w_0 + a + a + b + b + c + c + w_1^+$.

Con esto, tenemos a la mano todos los elementos para culminar nuestro propósito.

6. CONCLUSIÓN

Teorema 6.1 (de Clasificación). Sea S una superficie cociente obtenida pegando lados de un polígono regular. Entonces, S es homeomorfa bien sea a la esfera, bien a un n -toro, bien al plano proyectivo, bien a un m -plano proyectivo.

Demostración. Sea w^+ el símbolo de al menos cuatro etiquetas que produce S . Probaremos que w^+ pertenece a una de las clases de equivalencia siguientes.

1. $a + a - b + b^-$ (esfera),
2. $a + b + a + b^+$ (plano proyectivo),
3. $(a_1 + a_1^+) (a_2 + a_2^+) \dots (a_m + a_m^+)$, $m \geq 2$ (m -plano proyectivo),
4. $(a_1 + b_1 + a_1 - b_1^-) (a_2 + b_2 + a_2 - b_2^-) \dots (a_n + b_n + a_n - b_n^-)$, $n \geq 1$ (n -toro).

Supongamos que w^+ es tórico. Si w^+ tiene cuatro etiquetas, es de la forma $a + a - b + b^-$ o de la forma $a + b + a - b^-$. El primero es de la forma (1) y el segundo de la forma (4). Continuemos ahora por inducción sobre el número de etiquetas. Supongamos que w^+ tiene más de cuatro etiquetas y está reducido. El Lema 5.2, con $w_0^+ = \emptyset$, implica que w^+ es equivalente a un símbolo igual de largo de la forma $w_2 = a + b + a - b - w_3^+$. Además, w_3^+ es diferente de vacío (w^+ tiene más de cuatro etiquetas) y es tórico reducido. Aplicando reiteradas veces el mismo procedimiento obtenemos un símbolo de la forma (4).

Si w^+ es proyectivo y contiene cuatro etiquetas, el Lema 5.1 asegura que w^+ se puede escribir como $a + a + b + b^+$ o como $a + a + b - b^+$. El primero es de la forma (3). El segundo, mediante $t_1^+ = t_2^+ = b^+$, se vuelve $a + a + t_1 - t_2^+$. Por los argumentos usados en la demostración del Lema 5.1, el símbolo se convierte

en $a + t_1 + a + t_2 + = a + b + a + b +$. Es decir, es de la forma (2). Si $w +$ tiene más de cuatro etiquetas, el Lema 5.1 garantiza que $w +$ es equivalente a cierto $w' + = a_1 + a_1 + \dots a_k + a_k + w_1 +$ con $k > 1$ y $w_1 +$ tórico. Si éste último es vacío, logramos la forma (3). Si no es vacío, puede tener términos adyacentes con la misma etiqueta. Así, $w' +$ es equivalente a un símbolo proyectivo más corto y simplemente usamos la hipótesis de inducción. Si $w' +$ ya está reducido, el Lema 5.2 arroja que es equivalente a cierto $w'' + = a_1 + a_1 + \dots a_k + a_k + a + b + a - b - w_2 +$, donde $w_2 +$ es vacío o tórico. Luego, por el Lema 5.3, $w'' +$ es equivalente a algún $a_1 + a_1 + \dots a_k + a_k + a + a + b + b + w_2$.

Aplicando varias veces este procedimiento se consigue un símbolo de la forma (3).

REFERENCIAS

- 1 BREDON, G.E. *Topology and Geometry*. Springer, New York, 1993.
- 2 Euclides. *The Thirteen Books of the Elements, Vol. 1 (Books I and II)*. Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath. Second Edition Unabridged. Dover Publications, Inc. New York, 1956.
- 3 FRALEIGH, J. B. *Álgebra abstracta, primer curso*. Addison-Wesley Iberoamericana, México, D. F., 1988.
- 4 FRÉCHET, M. et FAN, K. *Introduction à la Topologie Combinatoire, I Initiation*. Librairie Vuibert, Paris, 1946.
- 5 HATCHER, A. *Notes on Basic 3-Manifold Topology*. Cornell University, USA, 2000.
- 6 HAYEK, H. y RIVERA, J.G. *Cálculo cuaterniónico*. Trabajo de Grado, Matemáticas con énfasis en Estadística, Facultad de Ciencias, Universidad del Tolima, 2010.
- 7 MALLIAVIN, P. *Géométrie différentielle intrinsèque*. Hermann, Paris, 1972.
- 8 MASSEY, W.S. *A Basic Course in Algebraic Topology*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- 9 MIRANDA, E. *Grupos finitos, ecuaciones algebraicas*. Notas de clase, 2010/2011.
- 10 MUNKRES, J.R. *Topología*. Segunda edición. Prentice-Hall, Madrid, 2002. Traducida de *Topology*. 2nd ed. Prentice-Hall, Inc., 2000.
- 11 STOKER, J.J. *Differential Geometry*. Wiley-Interscience, New York, 1969.
- 12 THOMASSEN, C. *The Jordan-Schönflies Theorem and the Classification of Surfaces*. American Mathematical Monthly, 99 (2), 116-131, 1992.

- 13 TRIMARCO, G. R. *Estructura delta y homología de algunas variedades compactas de dimensión 3*. Seminario para acceder al título de Licenciado en Matemáticas, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, Universidad Nacional de Tucumán, 2009.
- 14 HERNÁNDEZ, Gustavo y PALACIO, Oscar J. *Hacia la clasificación de la 3-variedad*. Ibagué, Colombia. Trabajo de Grado, Especialización en Matemáticas Avanzadas, Facultad de Ciencias, Universidad del Tolima, 2012.