JUEGOS CON PAGOS VECTORIALES*

Fernández F. R.[1], Hinojosa M. A.[2], Mármol A. M.[3], Monroy L.[3]
y Puerto J.[1]

Resumen:

En este trabajo analizamos los diferentes aspectos de la teoría de juego con pagos vectoriales. El carácter vectorial de los pagos hace necesario revisar y redefinir los conceptos de la teoría de juegos clásica. Destacamos como los nuevos conceptos que proponemos no son una mera extensión de los clásicos, sino que tienen presente las relaciones en orden parcial que aparecen en estas situaciones, por lo que la teoria clásica es una consecuencia de estos desarrollos..

Palabras clave.- *FALTA*

---

* La investigación de estos autores está parcialmente subvencionada en el Plan I+D. Ref. nº PB97-0707

[1] Departamento de Estadística e Investigación Operativa. Universidad de Sevilla. E-mail: fernade@cica.es

[2] Departamento de Economía y Empresa. Universidad Pablo de Olavide. Sevilla. E-mail: mahinram@deeuop.es

[3] Departamento de Economía Aplicada III. Universidad de Sevilla. E-mail: amarmol@cica.es

1 Introducción

El fundamento de la teoría de juegos es la toma de decisiones multilaterales. Por ello, un juego puede considerarse como un problema de decisión múltiple, cuando los distintos decisores tienen que optimizar objetivos de forma cooperativa o no cooperativa, con estructuras de información iguales o diferentes y con un conjunto de acciones finito o infinito, entre las que tienen que elegir. Es decir, la teoría de juegos comparte con la teoría de decisión muchos aspectos, de forma que ambas teorías se complementan.

Tradicionalmente, las teorías de la decisión y de juegos estudian la forma en que los decisores pueden optimizar un único objetivo. Así, en un problema de programación matemática, un decisor tiene que escoger entre un conjunto de alternativas, aquella que le proporcione el mejor de los resultados posibles. Sin embargo, si esta elección de alternativas afecta a varios objetivos que pretenden cubrirse simultáneamente, surge un problema de decisión multicriterio. Cuando en el problema intervienen varios decisores, cada uno de ellos con una función objetivo que optimizar y cuyas preferencias sobre las distintas alternativas no coinciden, lo que da lugar a un conflicto de intereses, se tiene un juego (para un desarrollo general del caso escalar véase [29]). Si los decisores evalúan estas situaciones de conflicto con respecto a varios objetivos, el problema se convierte en un juego con pagos vectoriales. La siguiente tabla muestra la relación entre la programación matemática, la teoría de juegos y la programación multicriterio.

	Un criterio	Varios criterios
Un decisor	Programación Matemática	Programación Multiobjetivo
Varios decisores	Teoría de Juegos Escalares	Teoría de Juegos Vectoriales

El desarrollo que está teniendo la teoría de juegos multiobjetivo sigue un camino paralelo al desarrollo seguido por la teoría de juegos convencional. Por un lado se estudian los modelos correspondientes a juegos no cooperativos multiobjetivo y por otro se estudian los modelos correspondientes a juegos cooperativos multiobjetivo.

Los juegos con pagos vectoriales difieren de los juegos con pagos escalares únicamente en la dimensión del pago, pero esto es suficiente para que muchos de los resultados de la teoría de juegos escalares no tengan una generalización directa en los juegos vectoriales. La razón fundamental es la dificultad añadida que supone trabajar con estructuras de orden parcial en los pagos, en lugar del orden total que induce una única función de valoración. Por ello, para estudiar los juegos multiobjetivo es necesario establecer nuevos conceptos de solución, pues la simple extensión de los ya existentes para juegos escalares no permite realizar un análisis efectivo del juego vectorial. De hecho, los conceptos clásicos aparecen como casos particulares de los obtenidos para los juegos vectoriales. Con el desarrollo actual de las técnicas de Optimización Multicriterio se han podido soslayar algunas de las dificultades teóricas en el tratamiento de estos modelos, lo que ha permitido el avance en el campo de los juegos vectoriales. Otra razón que ha apoyado el desarrollo de este área es el convencimiento por parte de los especialistas de que este tipo de modelos refleja más fielmente las situaciones de decisión con competencia, ya que el enfoque multiobjetivo proporciona modelos más realistas y permite un número mayor de aplicaciones. De hecho, los conflictos económicos que pueden analizarse como un juego con pagos escalares, pueden extenderse a situaciones en las que las decisiones de los agentes afectan simultáneamente a más de un escenario, lo que produce de forma natural que estas situaciones se analicen con modelos de juegos con pagos vectoriales.

A continuación vamos a exponer algunos ejemplos de juegos con pagos vectoriales, para realizar posteriormente el análisis que nos permita su resolución. Los primeros corresponden a juegos no cooperativos y los últimos a juegos cooperativos.

En el primer caso que estudiamos consideramos un juego donde el conjunto de estrategias puras de los jugadores es finito, por lo que los pagos que reciben pueden representarse por una matriz cuyos elementos son vectores. Es una extensión del modelo de campaña publicitaria presentado en [36]. La publicidad es una variable de decisión estratégica importante en los modelos de oligopolio cuando la información que los consumidores tienen con respecto a preferencias, precio o características de los productos es incompleta. Cuando una empresa tiene un sólo competidor importante, su objetivo suele ser conseguir la mayor cuota de mercado posible disminuyendo los clientes de su competidor. Sin embargo, la empresa también ha de tener en cuenta la variedad de medios que puede utilizar para su publicidad con objeto de alcanzar un segmento diversificado de población.

Ejemplo 1.1 *Campaña Publicitaria*

Dos empresas tienen un millón de unidades monetarias (u.m.) cada una para gastarlo en publicidad de sus productos. Pueden utilizar radio, televisión, y prensa escrita para realizar su campaña publicitaria que va a ir dirigida a tres grupos de clientes potenciales, es decir va a tener efecto en tres escenarios distintos. El efecto esperado que producirán las distintas posibilidades de publicidad viene recogido en la siguiente matriz:

	Radio	*Televisión*	*Prensa*
Radio	*(0, -0.2 , 1)*	*(-0.5, 1, 1.2)*	*(0, 1.5, 1.5)*
Televisión	*(2, 0.5, 0.7)*	*(-0.5, 0.8, 0.7)*	*(1.5, 1.1, 0.3)*
Prensa	*(1, 1.2, -0.5)*	*(-0.5, 0.4, 0)*	*(0, 0.7, 0.2)*

Cada entrada de la matriz de pagos es un vector cuyas componentes representan el aumento en términos de cuota de mercado obtenido en cada grupo cuando cada empresa gasta su dinero en los diferentes medios.

En las ciencias sociales, al estudiar modelos en los que las variables pertenecen a conjuntos finitos con un gran número de elementos, suele considerarse que dichos conjuntos son infinitos. Esto permite aplicar las técnicas de análisis matemático a una gran variedad de problemas. Por ello, si estudiamos juegos con un gran número de estrategias para un jugador, es metodológicamente natural, a la vez que útil considerar que el conjunto de estrategias para este jugador es infinito.

El siguiente modelo corresponde a un juego en el cuadrado unidad, es decir cada jugador tiene un continuo de estrategias puras generalmente representadas como puntos del intervalo cerrado [0,1]. Por tanto, una estrategia pura para cada jugador es un numero real en este intervalo y la función de pagos del juego es una función definida en el cuadrado unidad.

Este modelo es una extensión de un juego antagónico en el cuadrado unidad presentado en [38].

Ejemplo 1.2 *Modelo de mercados competitivos*

Una empresa, jugador II, controla dos mercados de dos bienes homogéneos en dos áreas diferentes A y B. Otra empresa, Jugador I, intenta conquistar uno de estos dos mercados, simultáneamente en las dos áreas. Con este propósito, el jugador I invierte en publicidad en televisión una cantidad de una unidad monetaria que será emitida simultáneamente en las dos áreas. Si el jugador asigna la cantidad x al primero de los mercados, entonces $1-x$, es lo que asigna al segundo. Para mantener sus mercados intactos, el jugador II también emplea una unidad monetaria en publicidad, asignando la cantidad y al primer mercado y la cantidad $1-y$ al segundo.

Consideramos que el jugador I si consigue ventaja en uno de los mercados (no puede conquistar ambos a la vez), elimina a su oponente de este mercado y obtiene un vector de pagos cuyas componentes son el exceso de fondos asignado a este mercado multiplicado por un coeficiente que refleja la importancia de este mercado en cada una de las dos áreas. La función de pagos es por tanto:

$$H : [0,1]\text{x}[0,1] \longrightarrow I\!R^2$$

$$H(x,y) = (H_A(x,y), H_B(x,y))$$

donde

$$H_A(x,y) = \begin{cases} k_1(x-y) & \text{si} \quad x \geq y \\ k_2(y-x) & \text{si} \quad x \leq y \end{cases}$$

$$H_B(x,y) = \begin{cases} k_3(x-y) & \text{si} \quad x \geq y \\ k_4(y-x) & \text{si} \quad x \leq y \end{cases}$$

donde k_1 , k_2, k_3 y $k_4 \geq 0$. k_1 y k_3 reflejan la importancia del primer mercado y k_2 y k_4, la importancia del segundo mercado en las áreas A y B respectivamente.

En los siguientes ejemplos consideramos situaciones en las que la posible cooperación entre los jugadores desempeña un papel crucial en la resolución de los conflictos.

Ejemplo 1.3 *Sinergia entre empresas*

En una cierta zona coexisten una cooperativa agraria dedicada mayormente a la producción hortofrutícola, una industria agroalimentaria constituida principalmente por una conservera y una empresa de servicios que, entre otras cosas, está dedicada a la comercialización y distribución de productos alimentarios.

La cooperativa obtiene unos beneficios brutos anuales de 20.000.000Pts y 200 de sus trabajadores son subvencionados por la Administración; la industria obtiene 30.000.000Pts anuales y tiene 400 trabajadores subvencionados y la empresa de servicios obtiene anualmente 40.000.000Pts y el coste de 100 empleados es subvencionado por la Administración.

La Administración ha ideado un plan contra el paro y el desarrollo regional con la finalidad de fomentar la cooperación entre las empresas. Ha entrado en conversaciones con las tres empresas porque afirma que, si se siguen las directrices marcadas por el estudio que han realizado, una cooperación total entre las tres produciría una sustancial mejora en la zona pudiéndose llegar a alcanzar los 120.000.000Pts de beneficios y sería posible subvencionar 1.000 puestos de trabajo.

Los órganos de dirección y gestión de las tres empresas han estudiado a fondo el plan de desarrollo regional ideado por la Administración y están estimando los resultados que se producirían si la cooperación se produjera entre dos de las tres empresas. La cooperativa y la industria podrían mejorar la suma de sus beneficios totales en 10.000.000Pts y tendrían derecho a 100 trabajadores subvencionados más que los que reunían entre las dos; la cooperación entre la cooperativa y la empresa de servicios no mejoraría sustancialmente los resultados ni en términos de beneficios totales ni en términos de subvención de puestos de trabajo; la industria y la empresa de servicios si que mejorarían la suma de sus beneficios totales en 20.000.000Pts pero sería a costa de perder 100 subvenciones.

En este ejemplo de sinergia entre empresas hay tres jugadores, $N = \{1,2,3\}$, que son la cooperativa, la industria y la empresa de servicios. Hay dos objetivos, $K = \{1,2\}$, que son beneficios totales brutos, que vamos a medir en decenas de millones de Pesetas y empleo subvencionado que vamos a medir en cientos de puestos de trabajo con coste a cargo de la Administración.

Así, llamando S a las coaliciones y $v(S)$ a los pagos que cada empresa o coalición puede conseguir por si misma, tenemos:

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	N
$v(S)$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix}$

El problema es encontrar repartos de la utilidad vectorial total de forma que ningún jugador o coalición tenga motivos para estar en desacuerdo con el reparto.

Un modelo muy estudiado debido de aplicación real del desarrollo de la programación lineal es el problema de la producción. Consiste en obtener la producción óptima, medida por varios criterios, bajo hipótesis de una estructura lineal. Es interesante estudiar cómo repartir beneficios en aquellas situaciones frecuentes en que los factores productivos son controlados por varios agentes.

Ejemplo 1.4 *El juego de la producción*

El problema económico de la producción puede formularse como un juego cooperativo con N jugadores, en el que cada jugador proporciona al proceso de producción una determinada cantidad de recurso con el fin de producir unos productos que pueden venderse a un determinado precio de mercado. Cada jugador dispone de unas cantidades dadas de cada recurso representadas por el vector:

$$b^i = \left(b_1^i, b_2^i, \ldots, b_q^i\right)^t \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Supondremos que el modelo de producción es lineal y que la obtención de cada unidad del k-ésimo producto, $(k = 1, 2, \ldots, p)$, requiere a_{lk} unidades del l-ésimo recurso, $(l = 1, 2, \ldots, q)$. No hay una demanda primaria de los recursos, pero si hay una demanda secundaria de ellos porque los recursos se usan para obtener unos productos que se venden a un precio de mercado dado. La coalición S dispone de una cantidad total de cada uno de los recursos que denotaremos por:

$$b_l^S = \sum_{i \in S} b_l^i \quad l = 1, 2, \ldots, q.$$

Con estos recursos la coalición es capaz de producir una cantidad x_k del k-ésimo producto $(k = 1, 2, \ldots, p)$. Si la coalición S quiere optimizar la utilización de sus recursos, buscará un vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)^t$ que maximice la utilidad total de su producción. Así, el máximo beneficio que obtiene la coalición S es:

$$\begin{array}{rll} v(S) = & max & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_px_p \\ & s.a: & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p \leq b_1^S \\ & & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p \leq b_2^S \\ & & \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ & & a_{q1}x_1 + a_{q2}x_2 + \ldots + a_{qp}x_p \leq b_q^S \\ & & x_1, x_2, \ldots, x_p \geqq 0 \end{array}$$

que matricialmente puede escribirse:

$$\begin{array}{rll} v(S) = & max & C\mathbf{x} \\ & s.a: & A\mathbf{x} \leqq B^S \\ & & \mathbf{x} \in I\!R^p_{\geqq} \end{array}$$

donde $C \in I\!R^p$ es el vector de precios de los productos en el mercado, $A \in \mathcal{M}_{qxp}$ es la matriz de las restricciones y $B^S = \left(b_1^S, b_2^S, \ldots, b_q^S\right)^t$ es el vector de recursos de la coalición S.

La función v, definida en el conjunto de las coaliciones no vacías y con valores reales, puede ser considerada como la función característica de un juego cooperativo n-personal escalar $(N, v) \in g^v$. Dicho juego es equilibrado y, por lo tanto, tiene núcleo no vacío. Para encontrar repartos de dicho núcleo se considera el problema dual del problema anterior:

$$
\begin{array}{ll}
min & b_1^S y_1 + b_2^S y_2 + \ldots + b_q^S y_q \\
s.a: & a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \ldots + a_{q1} y_q \geq c_1 \\
 & a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{q2} y_p \geq c_2 \\
 & \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
 & a_{1p} y_1 + a_{2p} y_2 + \ldots + a_{qp} y_p \geq c_p \\
 & y_1, y_2, \ldots, y_q \geq 0
\end{array}
$$

es decir:

$$
\begin{array}{ll}
min & \mathbf{y} B^S \\
s.a: & \mathbf{y} A^t \geqq C \\
 & \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}
\end{array}
$$

donde $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_q) \in I\!R^q$.

El valor de la función característica, $v(S)$, puede obtenerse, como es sabido, resolviendo el problema dual de minimizar.

Obsérvese que la región factible en el problema dual es independiente de la coalición, aunque la solución del problema, $\mathbf{y}$, sí depende de S. En particular, si $\mathbf{y}^*$ es una solución del problema dual para la totalidad de los agentes, N, entonces $v(N) = \mathbf{y}^* B^N$, mientras que para cualquier coalición S, $v(S) \leq \mathbf{y}^* B^S$, porque $v(S)$ es el mínimo en toda la región factible.

Consideremos ahora el vector $\mathbf{u} = \left(u^1, u^2, \ldots, u^n\right) \in I\!R^n$ definido por $u^i = \mathbf{y}^* B^i$.

Dicho vector es una preimputación del juego escalar $(N, v) \in g^v$ pues cumple que $\mathbf{u}^N = v(N)$. Además, el vector $\mathbf{u}$ es una asignación del núcleo del juego puesto que $\mathbf{u}^S = \mathbf{y}^* B^S \geq v(S)$, para cualquier S.

Tenemos, por tanto un método para obtener un elemento del núcleo de este juego cooperativo n-personal escalar: se calcula $\mathbf{y}^*$, resolviendo el problema dual del problema de la producción para la gran coalición N y se multiplica cada una de sus componentes por los recursos respectivos que cada jugador posee. Estamos considerando así que el vector $\mathbf{y}^*$ es el vector de precios de equilibrio de los recursos. A cada jugador se le paga por los recursos que aporta según dicho vector de precios de equilibrio y resulta así un reparto del núcleo del juego.

Desgraciadamente, no todas las asignaciones correspondientes al núcleo del juego pueden obtenerse por este procedimiento, aunque, en algunos juegos especiales todos los repartos del núcleo del juego se obtienen resolviendo el problema dual, como por ejemplo en el juego de asignación tratado por Shapley y Shubik en [35].

Si consideramos este modelo de producción en ambiente multiobjetivo, el problema de la producción anterior puede formularse de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll}
max & z_1(x) = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1p}x_p \\
max & z_2(x) = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2p}x_p \\
\vdots & \qquad\qquad \vdots \\
max & z_m(x) = c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \ldots + c_{mp}x_p \\
s.a: & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p \leq b_1^S \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p \leq b_2^S \\
 & \qquad\qquad \vdots \\
 & a_{q1}x_1 + a_{q2}x_2 + \ldots + a_{qp}x_p \leq b_q^S \\
 & x_1, x_2, \ldots, x_p \geqq 0
\end{array}$$

que matricialmente puede escribirse:

$$\begin{array}{ll}
max & z(\mathbf{x}) = C\mathbf{x} \\
s.a: & A\mathbf{x} \leqq B^S \\
 & \mathbf{x} \in I\!R^p_{\geqq}
\end{array}$$

donde "max" indica maximización vectorial, $C \in \mathcal{M}_{mxp}$ es la matriz de valoración de los productos, $A \in \mathcal{M}_{qxp}$ es la matriz que proporciona las restricciones y $B^S = \left(b_1^S, b_2^S, \ldots, b_q^S\right)^t$ es el vector de recursos de la coalición S.

Si al conjunto de las producciones factibles para la coalición S lo denotamos por:

$$F_S = \left\{ \mathbf{x} \in I\!R^p \,/\, A\mathbf{x} \leqq B^S,\, \mathbf{x} \in I\!R^p_{\geqq} \right\},$$

puede construirse un juego cooperativo vectorial multicriterio que denotaremos por (N, V) donde V se llama conjunto característico y representa el conjunto de pagos que la coalición S puede obtener (ver [12] y [18]):

$$V_S = \{ \mathbf{z} \in I\!R^m \,/\, \mathbf{z} = C\mathbf{x} \quad \forall\, \mathbf{x} \in F_S \}.$$

El juego cooperativo vectorial definido de esta forma lo llamaremos el juego de la producción lineal multiobjetivo.

Se trata de repartir la utilidad vectorial total, obtenida cuando todos los agentes económicos aportan todos sus recursos, entre cada uno de ellos de forma que ninguno tenga motivos para estar en desacuerdo con el reparto.

El objetivo de este trabajo es presentar una visión actualizada de los planteamientos y resultados referentes a juegos con pagos vectoriales. En la sección 2 nos ocupamos de los juegos no cooperativos que usualmente se estudian en forma normal o estratégica. En la sección 3 analizamos los juegos cooperativos a partir de su función característica. El trabajo termina con una sección dedicada a las conclusiones.

2 Juegos no cooperativos

Representaremos un juego n-personal multiobjetivo en forma normal como

$$\Gamma = \{N, \{X^i\}_{i \in N}, \{v^i\}_{i \in N}\},$$

donde $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ es el conjunto de jugadores, X^i es el conjunto no vacío de estrategias para el jugador i ($X^i \subseteq I\!R^{L_i}$), $v^i : X = \prod_{i=1}^n X^i \longrightarrow I\!R^k$ es la función vectorial de pagos del jugador i con k criterios de evaluación. Una estrategia conjunta de todos los jugadores la denotaremos por $x \in X = \prod_{i=1}^n X^i$, $x = \{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$ donde $x^i \in X^i$, y el vector de pagos conjunto lo denotaremos por $v \in I\!R(N) = \prod_{i=1}^n I\!R^k$, $v = \{v^1, v^2, \ldots, v^n\}$.

En juegos no cooperativos, caracterizados por el principio de racionalidad individual y por un comportamiento estratégico de sus jugadores, el concepto clásico de solución es el de equilibrio de Nash, en el que, dadas las estrategias de los demás jugadores, cada jugador elige como mejor respuesta una solución eficiente del problema de maximización vectorial de su función de pagos. Sin embargo, suponer fijadas las estrategias de los oponentes hace que el cálculo de las estrategias de equilibrio entrañe gran dificultad. No obstante, algunos autores han caracterizado los puntos de equilibrios de los juegos vectoriales bipersonales,(ver [34] y [5]), y de los juegos vectoriales n-personales, (ver [40] y [39]).

Además, los inconvenientes que estos equilibrios presentan en los juegos escalares, ver [33] y [24], se heredan al caso vectorial. Es decir, un juego puede tener muchos equilibrios y éstos no ser equivalentes ni intercambiables, lo que hace difícil que un jugador pueda elegir entre ellos. Estas dificultades hacen que, en juegos multiobjetivo, un concepto de solución basado en puntos de equilibrio no sea suficiente.

Por otra parte, una mejor respuesta de un jugador ante las actuaciones de los contrarios puede también establecerse como una solución maximin del problema. En este caso no es necesario conocer las estrategias de los demás porque el jugador actúa en seguridad, suponiendo que, en todo momento, los jugadores contrarios siempre van a considerar la mejor de sus estrategias, cualquiera que sea la estrategia que se juegue. Sin embargo, es difícil establecer una extensión natural del concepto de estrategia minimax en los juegos con pagos vectoriales. Aunque en algunos casos es posible demostrar la existencia de tales estrategias, suele ser complicado obtenerlas y, en general, los pagos que proporcionan forman un conjunto de vectores por lo que el jugador no puede determinar previamente cuál de estos vectores va a corresponderle.

Los inconvenientes que presentan las extensiones de las soluciones clásicas de los juegos escalares a los vectoriales, hacen que sea necesario introducir nuevos conceptos de solución para estos juegos. Diversos autores como [28], [14], [15],[1], [30] y [7], [9] han propuesto nuevos conceptos de solución para los juegos multicriterio de suma nula, y en [31], se proponen para los juegos n-personales multicriterio en forma normal, generalizando al caso en que exista una estructura de coaliciones prefijada. De estos conceptos, destaca el de estrategia de seguridad Pareto-óptima que es importante para la resolución de juegos con pagos múltiples cuando se aborda desde un punto de vista conservador. Además, es independiente de la noción de equilibrio, pues cada jugador sólo tiene en cuenta a sus oponentes para establecer sus niveles de seguridad.

Para introducir este concepto consideramos, en primer lugar, un juego finito vectorial bipersonal de suma nula en forma normal.

2.1 Juegos matriciales

Los juegos matriciales son juegos bipersonales, en que los jugadores tienen un número finito de estrategias puras. En el caso vectorial, un juego bipersonal de suma nula viene dado por una única matriz de valores vectoriales que generaliza los clásicos juegos bipersonales de suma nula escalares.

Sea $A = (a_{ij})$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$, la matriz de pago del juego. Cada elemento a_{ij} de la matriz es un vector, $a_{ij} = (a_{ij}(1), a_{ij}(2), \ldots, a_{ij}(k)) \in I\!R^k$, que determina k matrices de orden nxm de la forma:

$$A(s) = (a_{ij}(s)) \quad 1 \le s \le k, \quad 1 \le i \le n, \quad 1 \le j \le m$$

En el caso vectorial es más difícil que existan estrategias puras en equilibrio, por lo que debemos de considerar los conjuntos de estrategias mixtas como en el caso escalar. Los espacios de estrategias mixtas para los jugadores I y II son respectivamente

$$X = \{x \in I\!R^n, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \ge 0, i = 1, \ldots, n\}$$

$$Y = \{y \in I\!R^m, \sum_{j=1}^{m} y_j = 1, y_j \ge 0, j = 1, \ldots, m\}$$

Definición 2.1 *El pago esperado del juego cuando los jugadores escogen sus estrategias mixtas $x \in X$ e $y \in Y$, respectivamente, viene dado por:*

$$v(x, y) = x^t A y = (v_1(x, y), \ldots, v_k(x, y))$$

donde

$$v_s(x, y) = x^t A(s) y \quad s = 1, \ldots, k$$

Dado que una estrategia debe ser valorada por un conjunto de vectores, podemos dar una única valoración, al considerar que el oponente puede actuar en cada coordenada de la matriz A de modo independiente, y ofrecer el vector que se asegura el jugador, aunque realmente obtenga valores superiores.

Definición 2.2 *Para cada estrategia $x \in X$ del jugador I, el vector de nivel de seguridad para dicho jugador es el pago que puede garantizarse, con esa estrategia, en cada juego escalar inducido por el juego vectorial. Análogamente para el jugador II.*

Los vectores de niveles de seguridad de los jugadores I y II son respectivamente:

$$\underline{v}(x) = (\underline{v}_1(x), \ldots, \underline{v}_k(x))$$

$$\overline{v}(y) = (\overline{v}_1(y), \ldots, \overline{v}_k(y))$$

donde

$$\underline{v}_s(x) = \min_{y \in Y} v_s(x, y) = \min_{y \in Y} x^t A(s) y$$

$$\overline{v}_s(y) = \max_{x \in X} v_s(x, y) = \max_{x \in X} x^t A(s) y$$

Obsérvese que dada una estrategia $x \in X$ del jugador I, cada componente del vector de nivel de seguridad $\underline{v}_s(x)$, $s = 1, \ldots, k$ pueden obtenerse con distintas estrategias $y \in Y$ del jugador II.

En [14], se establece la definición de estrategia de seguridad Pareto-óptima que en nuestra notación es como sigue:

Definición 2.3 *Una estrategia $x^* \in X$ es una estrategia de seguridad Pareto-óptima para el jugador I si no existe $x \in X$, tal que $\underline{v}(x^*) \le \underline{v}(x), \underline{v}(x^*) \ne \underline{v}(x)$. Una estrategia $y^* \in Y$ es una estrategia de seguridad Pareto-óptima para el jugador II si no existe $y \in Y$ tal que $\overline{v}(y^*) \ge \overline{v}(y), \overline{v}(y^*) \ne \overline{v}(y)$.*

A continuación introducimos el siguiente problema de programación lineal multiobjetivo que llamamos el problema lineal del juego multicriterio, $(PLJM)$. En [7] se demuestra que las soluciones eficientes de este problema coinciden con las estrategias de seguridad Pareto-óptimas.

$$\begin{array}{lll} (PLJM): & \text{máx} & v_1, ..., v_k \\ & \text{s.a.} & x^t A(s) \geq (v_s, ..., v_s) \quad s = 1, \dots, k \\ & & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & & x \geq 0 \end{array}$$

Teorema 2.1 *Una estrategia $x^* \in X$ es una estrategia de seguridad Pareto-óptima y $v^* = (v_1^*, \dots, v_k^*)$ su vector de nivel de seguridad asociado si y sólo si (v^*, x^*) es una solución eficiente del problema $(PLJM)$.*

Este resultado es importante pues pone de manifiesto que, al igual que la programación lineal se utiliza para obtener las estrategias óptimas y el valor de los juegos escalares bipersonales de suma nula, de la misma forma puede utilizarse la programación lineal multiobjetivo para resolver los juegos bipersonales de suma nula con pagos vectoriales, siempre que se considere el concepto de estrategia de seguridad Pareto-óptima como solución de los mismos.

Ejemplo 2.1 *Consideremos el juego bipersonal del ejemplo 1.1. Este modelo puede analizarse como un juego matricial vectorial, donde la matriz de pagos vectoriales se descompone en tres matrices escalares $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$:*

$$A(1) = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 2 & -0.5 & 1.5 \\ 1 & -0.5 & 0 \end{pmatrix} \quad A(2) = \begin{pmatrix} -0.2 & 1 & 1.5 \\ 0.5 & 0.8 & 1.1 \\ 1.2 & 0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \quad A(3) = \begin{pmatrix} 1 & 1.2 & 1.5 \\ 0.7 & 0.7 & 0.3 \\ -0.5 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Como es usual, los espacios de estrategias mixtas de cada jugador son

$$X = \{x \in R^3 / \sum_{i=1}^{3} x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, 2, 3\}$$

$$Y = \{y \in R^3 / \sum_{j=1}^{3} y_j = 1, y_j \geq 0, j = 1, 2, 3\}$$

y la función de pagos del juego viene dada por el vector de tres componentes

$$v(x, y) = x^t A y = (v_1(x, y), v_2(x, y), v_3(x, y))$$

donde $v_k(x, y) = x^t A(k) y, \quad k = 1, 2, 3.$

Para resolver este juego consideramos el concepto de estrategia de seguridad Pareto-óptima para el jugador I, que consiste en maximizar (en sentido vectorial), el vector de nivel de seguridad del jugador I, es decir, el jugador I desde un punto de vista conservador, busca estrategias $x \in X$ cuyo vector de nivel de seguridad no pueda ser mejorado componente a componente.

El conjunto de estas estrategias y los correspondientes vectores de nivel de seguridad asociados, viene dado por el conjunto de soluciones eficientes del problema lineal multiobjetivo asociado al juego vectorial

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & v_1, v_2, v_3 \\ \textit{s.a.} & x^t A(1) \geq (v_1, v_1, v_1) \\ & x^t A(2) \geq (v_2, v_2, v_2) \\ & x^t A(3) \geq (v_3, v_3, v_3) \\ & \sum_{i=1}^{3} x_i = 1 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Resolviendo $(PLJM)$ mediante el software ADBASE (ver [37]) hemos obtenido las soluciones eficientes extremas

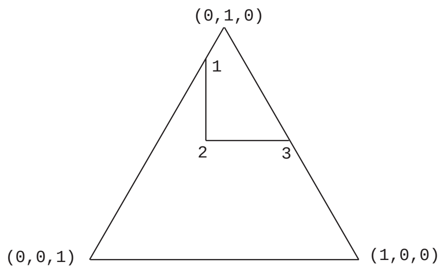
$$(x^1, v^1) = (0, 8/11, 3/11; -1/2, 342/495, 3/11)$$

$$(x^2, v^2) = (1/18, 62/99, 7/22; -1/2, 677/990, 663/1980)$$

$$(x^3, v^3) = (4/9, 5/9, 0; -1/2, 17/90, 75/90)$$

$$(x^4, v^4) = (1, 0, 0; -1/2, -1/5, 1)$$

La figura 1 representa le espacio de estrategias mixtas del jugador I, donde los vértices de este triángulo corresponden a las tres estrategias puras. El jugador I debe utilizar alguna de las estrategias que esté en la línea poligonal que une los puntos 1 y 4.



Por ejemplo, la estrategia $x^3 = (4/9, 5/9, 0)$ indica que utilizando la radio y televisión en proporción 4/5, se asegura una pérdida de cuota de mercado de no más de 1/2 en el primer segmento de la población y un aumento de cuota de al menos 17/90 y 75/90 en el segundo y el tercero respectivamente, y estos niveles no son mejorables conjuntamente.

En [8] proponemos otro concepto de solución para juegos matriciales, estrategia utópico eficiente, que está basado en la distancia de los pagos a unos determinados niveles ideales. Además, estudiamos la relación de este concepto con el de estrategia de seguridad Pareto-óptima y se propone un criterio de decisión para elegir una determinada estrategia utópico eficiente.

2.2 Juegos continuos

El concepto de estrategia de seguridad Pareto-óptima puede extenderse a juegos bipersonales continuos multiobjetivo. En estos problemas los espacios de estrategias para los jugadores I y II vienen dados por:

$$\Gamma^1 = \{x \in C_1 / p_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, r\}$$

$$\Gamma^2 = \{y \in C_2 / g_j(y) \leq 0, j = 1, \ldots, t\}$$

donde $C_1 \subseteq I\!R^n$ y $C_2 \subseteq I\!R^m$ son conjuntos convexos y $p_i, i = 1, \ldots, r$ y $g_j, j = 1, \ldots, t$ son funciones convexas.

En [30] se demuestra que el conjunto de las estrategias de seguridad Pareto-óptimas para el jugador I coincide con el conjunto de las soluciones propiamente eficientes de un problema multiobjetivo no lineal.

Ejemplo 2.2 *Consideremos el juego bipersonal del ejemplo 1.2. Lo resolvemos bajo el punto de vista del jugador II. Buscamos las estrategias de seguridad Pareto-óptimas para este jugador, es decir, el jugador II quiere determinar la cantidad, y, de forma que minimize el máximo del vector de pagos en ambas áreas.*

En este caso, para cada $y \in [0, 1]$ los niveles de seguridad en cada mercado son:

$$\overline{H}_A(y) = \max_{x \in [0,1]} H_A(x, y) \quad \overline{H}_B(y) = \max_{x \in [0,1]} H_B(x, y)$$

y el vector de nivel de seguridad $\overline{H}(y) = (\overline{H}_A(y), \overline{H}_B(y))$, representa el pago que el jugador II puede garantizarse en cada mercado. Entonces el conjunto de estrategias de seguridad Pareto-óptimas y los niveles de seguridad asociados vienen dados por el conjunto de soluciones eficientes del problema bicriterio

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \overline{H}_A(y), \overline{H}_B(y) \\ \textit{s.a.} & 0 \leq y \leq 1 \end{array}$$

Las componentes del vector de nivel de seguridad en este modelo son:

$$\overline{H}_A(y) = \max_{0 \leq x \leq 1} H_A(x, y) =$$

$$= \max\{\max_{y \leq x \leq 1} k_1(x - y), \max_{0 \leq x \leq y} k_2(y - x)\} = \max\{k_1(1 - y), k_2 y\}$$

$$\overline{H}_B(y) = \max_{0 \leq x \leq 1} H_B(x, y) =$$

$$= \max\{\max_{y \leq x \leq 1} k_3(x - y), \max_{0 \leq x \leq y} k_4(y - x)\} = \max\{k_3(1 - y), k_4 y\}$$

Por tanto

$$\overline{H}_A(y) = \begin{cases} k_1(1 - y) & \text{si} \quad 0 \leq y \leq \frac{k_1}{k_1 + k_2} \\ k_2 y & \text{si} \quad \frac{k_1}{k_1 + k_2} \leq y \leq 1 \end{cases}$$

$$\overline{H}_B(y) = \begin{cases} k_3(1 - y) & \text{si} \quad 0 \leq y \leq \frac{k_3}{k_3 + k_4} \\ k_4 y & \text{si} \quad \frac{k_3}{k_3 + k_4} \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Según los resultados obtenidos en [11], el conjunto de todas las estrategias de seguridad Pareto-óptimas para el jugador II en el juego bicriterio es, o bien el intervalo cerrado $[k_1/(k_1 + k_2), k_3/(k_3 + k_4)]$ o el intervalo cerrado $[k_3/(k_3 + k_4), k_1/(k_1 + k_2)]$.

Así, si $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 3$, $k_4 = 2$, el jugador II deberá asignar una cantidad $y \in [2/5, 3/5]$ al primer mercado y una cantidad $y - 1$ al segundo, pudiendo garantizarse unos niveles de seguridad, $\overline{H}_A(y) = 3y$, $\quad \overline{H}_B(y) = 3(1 - y)$, en los mercados A y B respectivamente, que no son mejorables conjuntamente.

2.3 Juegos por objetivos

En esta sección, proponemos otra metodología para estudiar los juegos vectoriales, que ya fue expuesta en [3] para juegos escalares. A partir de unos objetivos o metas especificados previamente, consideramos como solución no sólo la estrategia que utilizará el jugador sino también la probabilidad de obtener al menos dichos objetivos. Este concepto se basa en dos principios básicos de racionalidad como son, la seguridad en cada criterio ante un cambio de estrategia del oponente y la medida de la actitud ante el riesgo en estrategias mixtas.

Sea $P = (P_1, \ldots, P_k)$ un vector de objetivos o niveles de satisfacción, uno por cada juego escalar, establecido por el jugador I. Consideremos que dicho jugador desea escoger una estrategia de forma que en cada juego escalar obtenga un pago de al menos P_s.

Definición 2.4 *Para cada par de estrategias mixtas $x \in X$ and $y \in Y$, la función de pagos del juego vectorial por objetivos viene dada por:*

$$v(x, y) = x^t A_P y = (v_1(x, y), \ldots, v_k(x, y))$$

donde

$$v_s(x, y) = x^t A_P(s) y \quad s = 1, \ldots, k$$

$$A_P(s) = (\delta_{ij}^s) \quad 1 \le s \le k, \quad 1 \le i \le n, \quad 1 \le j \le m$$

$$\delta_{ij}^s = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{ij}(s) \ge P_s \\ 0 & \text{si } a_{ij}(s) < P_s \end{cases} \qquad \forall\, s = 1, \ldots, s.$$

Asociado con cada estrategia del jugador I, existe un nivel de seguridad por objetivos en cada juego escalar de los que forman el juego vectorial.

Definición 2.5 *Para cada estrategia $x \in X$, el nivel de seguridad por objetivos de cada juego escalar inducido por el juego vectorial es la probabilidad que puede garantizarse el jugador de alcanzar al menos el nivel P_s con esa estrategia en dicho juego.*

Dado $x \in X$ el vector de nivel de seguridad para los objetivos P es

$$v^P(x) = (v_1^P(x), \ldots, v_k^P(x))$$

siendo

$$v_s^P(x) = \min_{y \in Y} v_s^P(x, y) = \min_{y \in Y} x^t A_P(s) y = \min_{1 \le j \le m} \sum_{i=1}^{n} x_i \delta_{ij}^s \quad s = 1, \ldots, k$$

$v_s^P(x)$, s = 1,...,k, es la probabilidad de alcanzar al menos el nivel P_s en el juego escalar de matriz $A(s), s = 1, \ldots, k$ cuando el jugador I utiliza la estrategia x. Obsérvese que dada una estrategia $x \in X$ del jugador I, los niveles de seguridad $v_s^P(x)$, $s = 1, \ldots, k$, pueden obtenerse con distintas estrategias $y \in Y$ del jugador II.

De forma análoga puede determinarse el vector de nivel de seguridad por objetivos para el jugador II, a partir de los objetivos que éste considere. Vamos a establecer el concepto de solución para juegos vectoriales, basado en el nivel de seguridad por objetivos.

Definición 2.6 *Una estrategia $x^* \in X$ es una estrategia de seguridad de nivel P para el jugador I, si no existe $x \in X$, tal que $v^P(x^*) \le v^P(x), v^P(x^*) \ne v^P(x)$.*

Debido a que estamos estudiando juegos con pagos vectoriales, el concepto de solución anterior se basa en la optimalidad de Pareto, es decir, una componente de $v^P(x^*)$ tomará un valor mejor sólo si otra toma un valor peor.

Consideremos el siguiente problema de programación lineal multiobjetivo que llamamos problema lineal del juego multicriterio por objetivos, $(JMO)_P$.

$$
\begin{array}{lll}
(JMO)_P: & \text{máx} & v_1, ..., v_k \\
 & \text{s.a.} & x^t A_P(s) \geq (v_s, ..., v_s) \quad s = 1, \ldots, k \\
 & & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\
 & & x \geq 0
\end{array}
$$

En [9] se demuestra que el conjunto de estrategias de seguridad de nivel P se determina como el conjunto de soluciones eficientes del problema $(JMO)_P$.

Teorema 2.2 *Una estrategia $x^* \in X$ es una estrategia de seguridad de nivel P y $v^* = (v_1^*, \ldots, v_k^*)$ su vector de nivel de seguridad asociado si y sólo si (v^*, x^*) es una solución eficiente del problema $(JMO)_P$.*

Ejemplo 2.3 *En el juego del ejemplo 1.1, supongamos que el jugador I ha establecido los objetivos $P = (1, 0.8, 0.7)$. Para cada par de estrategias $x \in X$, $y \in Y$ la función de pagos es*

$$v^P(x, y) = x^t A_P y = (v_1^P(x, y), v_2^P(x, y), v_3^P(x, y))$$

donde

$$v_k^P(x, y) = x^t A_P(k) y, \quad k = 1, 2, 3$$

$$A_P(1) = (\delta_{ij}^1) \quad \delta_{ij}^1 = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a_{ij} \geq 1 \\ 0 & \text{si} \quad a_{ij} < 1 \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, 3$$

$$A_P(2) = (\delta_{ij}^2) \quad \delta_{ij}^2 = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a_{ij} \geq 0.8 \\ 0 & \text{si} \quad a_{ij} < 0.8 \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, 3$$

$$A_P(3) = (\delta_{ij}^3) \quad \delta_{ij}^3 = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a_{ij} \geq 0.7 \\ 0 & \text{si} \quad a_{ij} < 0.7 \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, 3$$

Tenemos

$$A_P(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_P(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_P(3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para cada estrategia $x \in X$ los niveles de seguridad en cada juego vienen dados por

$$v_P^k(x) = \min_{y \in Y} v_k^P(x, y) \quad k = 1, 2, 3$$

de donde el vector de seguridad de nivel P para el jugador I es

$$v^P = (v_1^P(x), v_2^P(x), v_3^P(x))$$

siendo $v_k^P(x)$ la probabilidad de conseguir al menos P_k en cada juego escalar cuando el jugador I juega la estrategia x.

La forma de obtener el conjunto de estrategias de seguridad de nivel P y los correspondientes vectores de nivel de seguridad, es resolviendo el problema lineal multiobjetivo:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & v_1, v_2, v_3 \\ \textit{s.a.} & x^t A_P(1) \geq (v_1, v_1, v_1) \\ & x^t A_P(2) \geq (v_2, v_2, v_2) \\ & x^t A_P(3) \geq (v_3, v_3, v_3) \\ & \sum_{i=1}^{3} x_i = 1 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

La solución de este problema viene dada, en este caso, por la envolvente convexa de las soluciones eficientes extremas del mismo, que son:

$$(x^1, v^1) = (1/2, 0, 1/2; 0, 1/2, 1/2)$$

$$(x^2, v^2) = (1, 0, 0; 0, 0, 1)$$

Si el jugador I utiliza la estrategia $x^1 = (1/2, 0, 1/2)$ consigue no menos de $P_1 = 1$ con una probabilidad de al menos 1/2, $P_2 = 0.8$ con probabilidad 0 y no menos de $P_3 = 0.7$ con probabilidad no menor de 1/2.

2.4 Juegos escalares de suma no nula como juegos vectoriales

Un procedimiento análogo al propuesto, para resolver los juegos vectoriales de suma nula por medio de la programación multiobjetivo puede utilizarse para estudiar los juegos bipersonales escalares de suma no nula desde la óptica de uno de los jugadores. Vamos a estudiar un planteamiento que se basa en los juicios que puede hacer un jugador de modo aislado. En este caso, el jugador siempre buscará lo mejor para sí, pero como sus acciones repercuten en el resultado del otro jugador, el estudio puede realizarse bajo dos aspectos diferentes. En uno de ellos, el jugador trata de obtener lo mejor para ambos, situación que denominamos de ”actitud positiva”, mientras que en el otro, un jugador intenta conseguir lo mejor para sí, pero perjudicando al contrario, situación que denominamos de ”actitud negativa”. Veamos cada uno de ellos.

Situación de actitud positiva:

Sea un juego bipersonal escalar, donde f_1 y f_2 son las funciones de pago y X^1 y X^2 los espacios de estrategias de los jugadores I y II respectivamente. Supongamos que el jugador I quiere determinar la estrategia que le proporcione el mejor de los peores resultados, tanto para él como para el jugador II. Para ello, hay que considerar los pagos más desfavorables que el jugador I puede obtener con una estrategia $\overline{x} \in X^1$, y que son:

$$v_1(\overline{x}) = \inf_{y \in X^2} f_1(\overline{x}, y) \quad v_2(\overline{x}) = \inf_{y \in X^2} f_2(\overline{x}, y)$$

.

Ante esta situación, el jugador I debe considerar sólo aquellas estrategias que sean eficientes, pues en $v_1(\overline{x})$ y $v_2(\overline{x})$ solamente se considera al jugador II a través de su mejor respuesta ante la estrategia propuesta $\overline{x}$. Tendremos que $\overline{x}$ es una estrategia eficiente del jugador I, si no existe $x \in X^1$ tal que $v_1(x) \geq v_2(\overline{x})$ y $v_2(x) \geq v_2(\overline{x})$ con alguna desigualdad estricta. Estas estrategias eficientes las llamaremos estrategias de seguridad por la forma de ser valoradas.

Situación de actitud negativa:

En este caso el jugador busca su máximo beneficio y al mismo tiempo el mayor perjuicio de su oponente. Es decir, desde esta perspectiva del jugador I quiere determinar una estrategia que le proporcione el mejor de los peores pagos para él y el peor de los mejores pagos para el jugador II. En este caso tiene que considerar una estrategia $\overline{x} \in X^1$ tal que:

$$v_1(\overline{x}) = \inf_{y \in X^2} f_1(\overline{x}, y) \quad v_2(\overline{x}) = \sup_{y \in X^2} f_2(\overline{x}, y)$$

$\overline{x}$ es una estrategia eficiente del jugador I si no existe $x \in X^1$ tal que $v_1(x) \geq v_2(\overline{x})$ y $v_2(x) \leq v_2(\overline{x})$ con alguna desigualdad estricta.

De lo expuesto se deduce que el análisis de los juegos bajo la actitud positiva o bajo la actitud negativa, se realiza por el mismo procedimiento sin más que invertir el signo de una de las funciones de pago de los jugadores.

Este planteamiento puede hacerse también desde el punto de vista del jugador II.

Cuando los pagos de los jugadores vienen determinados por las matrices de pagos A y B respectivamente, el conjunto de estrategias de seguridad del jugador I y el conjunto de estrategias de seguridad del jugador II, son los conjuntos de soluciones eficientes de ciertos problemas lineales múltiples. En el caso en que el jugador I trate de obtener lo mejor para ambos el problema lineal múltiple se obtiene de la siguiente forma:

Para cada $x \in X$, se consideran los valores

$$v_1(x) = \min_{y \in Y} x^t A y \quad \text{y} \quad v_2(x) = \min_{y \in Y} x^t B y,$$

y se busca la estrategia $x \in X$, que haga máximos esos valores, es decir hay que resolver el problema:

$$\begin{array}{ll} \max & v_1, v_2 \\ \text{s.a.} & x^t A \geq (v_1, \ldots, v_1) \\ & x^t B \geq (v_2, \ldots, v_2) \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Obsérvese que el planteamiento anterior es similar a considerar el juego desde el punto de vista del jugador I, como un juego múltiple de suma nula con matriz de pagos (A, B).

Cuando uno de los jugadores trata de obtener lo mejor para sí, pero perjudicando al contrario, el problema lineal múltiple que representa esta situación para el jugador I es:

$$\begin{array}{ll} \max & v_1, -v_2 \\ \text{s.a.} & x^t A \geq (v_1, \ldots, v_1) \\ & x^t B \leq (v_2, \ldots, v_2) \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

En este caso, el planteamiento corresponde a considerar el juego desde el punto de vista del jugador I, como un juego múltiple de suma nula con matriz de pagos $(A, -B)$.

Obsérvese que este resultado puede considerarse como una generalización del concepto introducido por Owen, (ver [29]), para determinar una estrategia de amenaza óptima en un juego bimatricial (A, B). Owen las obtiene resolviendo el juego de suma nula de matriz $A - B$, que en nuestra metodología está relacionado con el caso en que se resuelve el juego múltiple de matriz $(A, -B)$ con pesos unidad.

Vamos a aplicar estas ideas para analizar un duopolio en el que las variables estratégicas son los precios y las dos empresas rivales intentan establecer un precio menor que el de la otra con el fin de aumentar su cuota de mercado.

Ejemplo 2.4 *Dos empresas venden cada una un bien que, en el mercado, son sustitutos el uno del otro. Por ello, un cambio en el precio de un bien tiene un gran impacto en la demanda del otro. Las funciones de demanda de cada empresa son respectivamente,* $d_1(p_1, p_2) = 10 - p_1 + 0.5p_2/p_1 \quad d_2(p_1, p_2) = 20 - 2p_1 + p_2/p_1$*, donde* p_1 *y* p_2 *denotan los precios de la empresa 1 y de la empresa 2 respectivamente.*

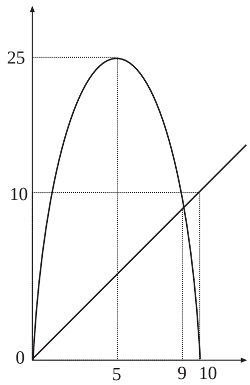
Supongamos por simplicidad de cálculo, que ambas firmas tienen costes de producción nulos y tratan de maximizar beneficios estableciendo los precios.

Este problema puede modelizarse como un juego bipersonal en forma estratégica donde el conjunto de estrategias para ambos jugadores son respectivamente $S_1 = [0, 10]$ *y* $S_2 = [0, 10]$ *y las funciones de pagos* $F_1(p_1, p_2) = 10p_1 - p_1^2 + 0.5p_2 \quad F_2(p_1, p_2) = 20p_2 - 2p_2^2 + p_1$.

Sin pérdida de generalidad se consideran los precios en el intervalo $[0, 10]$ *porque para precios mayores que 10 la función de demanda de ambos bienes puede ser cero. Las funciones de pagos son simplemente la funciones de beneficios obtenidas multiplicando las funciones de demanda por los precios respectivos.*

Actitud Positiva: *Considerando una actitud positiva del jugador I, el vector de nivel de seguridad para una estrategia* $p_1 \in [0, 10]$ *viene dado por* $F(p_1) = (F_1(p_1), F_2(p_1))$*, donde* $F_1(p_1) = \min_{0 \leq p_2 \leq 10} F_1(p_1, p_2) \quad F_2(p_1) = \min_{0 \leq p_2 \leq 10} F_2(p_1, p_2)$.

Este vector representa el resultado que el jugador I se asegura para él y para el jugador II cuando juega la estrategia p_1 *. La expresión analítica de los niveles de seguridad son* $F_1(p_1) = 10p_1 - p_1^2 \quad F_2(p_1) = p_1$*. En la siguiente figura se representan estas funciones:*



Para maximizar el vector de nivel de seguridad hemos de resolver el problema biobjetivo

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & F_1(p_1), F_2(p_1) \\ \textit{s.a.} & 0 \leq p_1 \leq 10 \end{array}$$

Las funciones $F_1(p_1), F_2(p_1)$ *son cóncavas en* $I\!R$ *y sus valores máximos, en el intervalo* $[0, 10]$*, se alcanzan en los puntos* $p^1 = 5$ *y* $p^2 = 10$ *respectivamente. De los resultados obtenidos en [11],tenemos que el conjunto de estrategias de seguridad Pareto-óptimas para el jugador I es el intervalo cerrado* $[5, 10]$*. En este caso el precio* $p_1 = 9$ *es una estrategia de seguridad Pareto-óptima equitativa, en el sentido que cuando el jugador I establece este precio, se asegura un beneficio de 9 unidades para él y para el otro jugador, con independencia del precio que establezca el otro jugador.*

Actitud Negativa: *Considerando una actitud negativa, el jugador I está interesado en maximizar su beneficio mínimo a la vez que minimiza el beneficio máximo que el jugador II pueda obtener. Para una estrategia* $p_1 \in [0, 10]$ *el vector de nivel de seguridad viene dado por*

$$F(p_1) = (F_1(p_1), F_2(p_1))$$

donde

$$F_1(p_1) = \min_{0 \le p_2 \le 10} F_1(p_1, p_2) \quad F_2(p_1) = \max_{0 \le p_2 \le 10} F_2(p_1, p_2)$$

La expresión analítica de los niveles de seguridad son

$$F_1(p_1) = 10p_1 - p_1^2 \quad F_2(p_1) = p_1 + 50$$

En este caso, el jugador I quiere maximizar $F_1(p_1)$ y minimizar $F_2(p_1)$. Para encontrar las estrategias no dominadas resolvemos el problema biobjetivo

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & F_1(p_1), -F_2(p_1) \\ \textit{s.a.} & 0 \le p_1 \le 10 \end{array}$$

Al ser $F_1(p_1), -F_2(p_1)$ funciones cóncavas en $[0, 10]$ cuyos valores máximos, en el intervalo $[0, 10]$, se alcanzan en los puntos $p^1 = 5$ y $p^2 = 0$ respectivamente, el conjunto de estrategias de seguridad Pareto-óptimas para el jugador I es el intervalo cerrado $[0, 5]$. En este caso no existe una estrategia de seguridad Pareto-óptima equitativa.

Ejemplo 2.5 *Si en el ejemplo anterior consideramos que hay un número finito de estrategias puras, este juego puede representarse por dos matrices de pagos. Supongamos que ambos precios toman los valores $p_1, p_2 = 2, 4, 6, 8, 10$. Las matrices de pago A y B que se obtienen para los jugadores 1 y 2 respectivamente son:*

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 25 & 26 & 27 & 28 & 29 \\ 25 & 26 & 27 & 28 & 29 \\ 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 34 & 50 & 50 & 34 & 2 \\ 36 & 52 & 52 & 36 & 4 \\ 38 & 54 & 54 & 38 & 6 \\ 40 & 56 & 56 & 40 & 0 \\ 42 & 58 & 58 & 42 & 10 \end{pmatrix}$$

Los espacios de estrategias mixtas para cada jugador en este caso vienen dados por

$$X = \{x \in R^5 / \sum_{i=1}^{5} x_i = 1, x_i \ge 0, i = 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$Y = \{y \in R^5 / \sum_{j=1}^{5} y_j = 1, y_j \ge 0, j = 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Así, para $x \in X$, $y \in Y$, las funciones son:

$$F_1(x, y) = x^t A y \quad F_2(x, y) = x^t B y$$

En esta situación el juego bimatricial puede analizarse como un juego matricial bicriterio. En el caso de actitud positiva, la matriz del pagos del juego bicriterio es (A, B), y en el caso de actitud negativa la matriz del juego bicriterio es $(A, -B)$.

Actitud Positiva: *Considerando una actitud positiva del jugador I, el vector de nivel de seguridad para una estrategia $x \in X$ es*

$$v_1(x) = \min_{y \in Y} x^t A y \quad v_2(x) = \min_{y \in Y} x^t B y$$

Para obtener las estrategias de seguridad Pareto-óptimas del jugador I resolvemos el problema lineal biobjetivo:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & v_1, v_2 \\ \textit{s.a.} & x^t A \geq (v_1, \ldots, v_1) \\ & x^t B \geq (v_2, \ldots, v_2) \\ & x \in X \end{array}$$

cuyas soluciones extremas eficientes son:

$$(x^1, v^1) = (0, 0, 1, 0, 0; 25, 6)$$

$$(x^2, v^2) = (0, 0, 0, 1, 0; 17, 8)$$

$$(x^3, v^3) = (0, 0, 0, 0, 1; 1, 10)$$

y el conjunto de estrategias de seguridad Pareto-óptimas es el intervalo cerrado $[6, 10]$.

Por ejemplo, si el jugador I establece el precio $p_1 = 6$*, se garantiza un beneficio al menos de 25 para él y un beneficio al menos de 6 para el jugador II independientemente del precio que establezca este último.*

Actitud Negativa: *Considerando una actitud negativa del jugador I, el vector de nivel de seguridad para una estrategia* $x \in X$ *es*

$$v_1(x) = \min_{y \in Y} x^t A y \quad v_2(x) = \max_{y \in Y} x^t B y$$

El problema lineal biobjetivo asociado es

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & v_1, -v_2 \\ \textit{s.a.} & x^t A \geq (v_1, \ldots, v_1) \\ & x^t B \leq (v_2, \ldots, v_2) \\ & x \in X \end{array}$$

cuyas soluciones extremas eficientes son:

$$(x^1, v^1) = (0, 1, 0, 0, 0; 25, 52)$$

$$(x^2, v^2) = (1, 0, 0, 0, 0; 17, 50)$$

y el conjunto de estrategias de seguridad Pareto-óptimas es el intervalo cerrado $[2, 4]$.

Obsérvese que los conjuntos de estrategias de seguridad Pareto-óptimas que se obtienen en el caso discreto son subconjuntos de los correspondientes conjuntos obtenidos en el caso continuo.

Otra metodología para el tratamiento de los juegos bimatriciales no cooperativos se propone en [10], donde se estudian a través de los juegos por objetivos introducidos en la sección 2.3. Con este nuevo enfoque, el jugador puede además conocer la probabilidad de conseguir aquellos objetivos que se ha marcado.

3 Juegos Cooperativos

Un juego cooperativo multicriterio de valoración vectorial única es un par (N, v) donde $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ es el conjunto de jugadores y v es una correspondencia que asocia a cada coalición un único vector de $I\!R^m$, cumpliendo que $v(\emptyset) = \mathbf{0}$. A la correspondencia v se le denomina función característica y a la familia de todos los juegos cooperativos multicriterio de valoración vectorial única la denotaremos por G^v.

En un juego cooperativo, cada posible coalición tiene asignado un valor, que representa su fuerza en el juego. El objetivo del estudio de los juegos cooperativos es buscar modos de reparto racionales del valor total del juego, $v(N)$, que se obtiene si todos los jugadores cooperan. Uno de los conceptos de solución más empleados en juegos cooperativos escalares es el de núcleo del juego, que es un reparto que mejora las valoración de todas las coaliciones, ver [29]. Cuando la valoración de las coaliciones es vectorial, para establecer el concepto de núcleo hay que extender los principios de racionalidad individual y colectiva al caso vectorial, y dependiendo de la interpretación que se de a la idea de mejora surgen dos teorías diferentes. No obstante, el considerar las áreas comunes que comparten ambas teorías nos permite proponer un concepto de solución análogo al núcleo de los juegos cooperativos escalares.

A continuación analizamos los distintos conceptos de núcleo para juegos cooperativos con pagos vectoriales que surgen al considerar dos relaciones: $\geqq$ a la que nos referiremos como relación de preferencia, y $\not\leqq$ a la que nos referiremos como relación de no dominacia.

Denotemos por Λ al conjunto:

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in I\!R^m \;/\; \lambda \geq 0, \; \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1 \right\}.$$

Definición 3.1 *Dado el juego $(N, v) \in G^v$ el juego ponderado por el peso $\lambda \in \Lambda$ es el juego escalar $(N, \lambda^t v)$ en el que para cada coalición S se verifica:*

$$\lambda^t v(S) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j(S).$$

Interpretaremos que un subconjunto poliédrico de Λ representa los pesos que los jugadores están dispuestos a aplicar a los objetivos, es decir, las preferencias de los jugadores (ver [22, 23]). Los juegos escalares ponderados por los puntos extremos de Λ se denominan juegos componentes. Consideraremos como posibles todos los pesos $\lambda \in \Lambda$, que corresponde al caso en que los jugadores no proporcionan información sobre sus preferencias en los criterios, pero todo el desarrollo es igualmente posible considerando un subconjunto poliédrico de Λ de información sobre las preferencias en los criterios (véase[18]).

La extensión de la idea de reparto del caso escalar para juegos con objetivos múltiples consiste en una matriz con tantas filas como criterios se valoren y tantas columnas como jugadores participan en el juego.

Definición 3.2 *Una asignación o preimputación del juego es una matriz $X = \left(x_j^i\right) \in \mathcal{M}_{mxn}$ tal que $X_j^N = \sum_{i=1}^n x_j^i = v_j(N) \quad \forall\, j = 1, 2, \ldots, m$, es decir, $X^N = v(N)$.*

Al conjunto de preimputaciones del juego $(N, v) \in G^v$ lo denotaremos por $I^*(N, v)$. Una columna X^i de la matriz asignación representa los pagos para el jugador i. Asímismo denotaremos por $X^S = \sum_{i \in S} X^i$ a los pagos para la coalición S.

En primer lugar, teniendo en cuenta el principio de racionalidad individual, se exige que el pago que recibe cada jugador no sea peor que lo que puede garantizarse por sí mismo.

Definición 3.3 *La preimputación $X \in I^*(N,v)$ es una imputación si se verifica*
$X^i \underset{=}{\not\leq} v(\{i\}) \quad \forall\, i \in N.$

Al conjunto de todas la imputaciones del juego lo denotamos por $I(N,v)$.

Ejemplo 3.1 *Consideremos el modelo de sinergia de empresas, propuesto en el ejemplo 1.3. La matriz*

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2x3}$$

es una imputación, pues es una matriz de pagos que reparte entre las tres empresas los 120.000.000 u.m. y los 1.000 trabajadores subvencionados de forma que individualmente ninguna de ellas tiene motivos para estar en desacuerdo con el reparto porque:

$$X^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \underset{=}{\geq} v(\{1\})\ ;\ X^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \underset{=}{\geq} v(\{2\})\ ;\ X^3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \underset{=}{\geq} v(\{3\})$$

Ahora consideramos el principio de racionalidad colectiva y exigimos que ninguna coalición tenga motivos para estar en desacuerdo con el pago que recibe. Establecemos esta condición a través del siguiente concepto de dominancia que depende de la relación $\mathcal{R} \in \{\underset{=}{\geq}, \underset{=}{\not\leq}\}$.

Definición 3.4 *Dadas $X,\ Y \in I^*(N,v)$ y la coalición $S \in \mathcal{N}$, diremos que Y domina a X a través de S de acuerdo con $\mathcal{R}$ ($Y \overset{S}{dom_{\mathcal{R}}} X$) si $Y^S \geq X^S$ y $v(S)\ \mathcal{R}\ Y^S$.*

En juegos cooperativos escalares, el concepto de imputación no dominada se ha estudiado ampliamente (ver [6]) y es la base del concepto de núcleo. Sin embargo en juegos cooperativos vectoriales el concepto que juega el papel central es el de imputación no dominada por asignaciones.

Definición 3.5 *Una imputación $X \in I(N,v)$ del juego $(N,v) \in G^v$ es no dominada por asignaciones si ninguna coalición $S \in \mathcal{N}$ puede encontrar otra asignación $Y \in I^*(N,v)$ tal que $Y \overset{S}{dom_{\mathcal{R}}} X$.*

$$INDA(N,v;\mathcal{R}) = \left\{ X \in I(N,v)\ /\ \nexists\, S \in \mathcal{N}\ ,\ Y \in I^*(N,v), \quad Y \overset{S}{dom_{\mathcal{R}}} X \right\}$$

Nótese que hay dos conjuntos INDA dependiendo de la relación $\mathcal{R}$ que se use en la definición: $\underset{=}{\geq}$ o $\underset{=}{\not\leq}$. A la relación $\underset{=}{\geq}$ le corresponde un conjunto INDA mayor que a la relación $\underset{=}{\not\leq}$, es decir, $INDA(N,v;\underset{=}{\not\leq}) \subseteq INDA(N,v;\underset{=}{\geq})$.

Ejemplo 3.2 *En el juego del ejemplo 1.3, colectivamente ninguna coalición tiene nada que reprochar al reparto proporcionado por la imputación X porque:*

$$X^{\{1,2\}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \underset{=}{\geq} v(\{1,2\});\ X^{\{1,3\}} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} \underset{=}{\geq} v(\{1,3\});\ X^{\{2,3\}} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix} \underset{=}{\geq} v(\{2,3\}).$$

Por lo tanto, en el ejemplo de la sinergia entre empresas la asignación proporcionada por la imputación X es una INDA del conjunto $INDA(N,v;\underset{=}{\not\leq})$.

Consideremos ahora el reparto dado por la imputación:

$$Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2x3}$$

Esta es otra matriz de pagos que reparte los 120.000.000 u.m. entre las tres empresas y los 1.000 trabajadores subvencionados, pero en este caso ni individualmente ni colectivamente el reparto supone una mejora componente a componente respecto a lo que cada jugador o coalición puede garantizarse porque tanto para el jugador 2 como para la coalición $S = \{1,2\}$ *se tiene que:*

$$Y^2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \not\geqq v(\{2\}) \, ; \quad Y^{\{1,2\}} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \not\geqq v(\{1,2\})$$

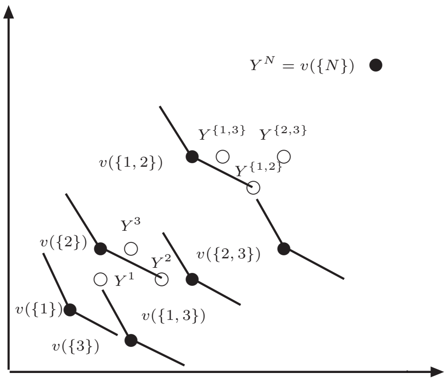
Sin embargo, si interpretamos el concepto de mejora en el sentido de no empeorar, ningún jugador o coalición tendrá motivos para estar en desacuerdo con los pagos que le proporciona la matriz de pagos Y*, porque cada jugador o coalición obtiene, mediante* Y*, unos pagos que no empeoran los que pueden garantizarse por sí mismos. Por lo tanto, la asignación proporcionada por la imputación* Y *es una INDA del conjunto* $INDA(N, v; \geqq)$*.*

Obsérvese que en este ejemplo estamos utilizando el orden natural porque los jugadores no han proporcionado ninguna información sobre sus preferencias en los criterios. Por tanto el concepto de mejora que se induce es mejora componente a componente, en el primer caso, y no dominancia en el segundo caso. Ningún jugador o coalición tiene motivos para estar en desacuerdo con el reparto que proporciona la matriz X *porque en dicho reparto todas las coaliciones mejoran componente a componente los valores de la función característica. Esto no es así en el reparto que proporciona la matriz* Y *pues, por ejemplo, lo que recibe el segundo jugador no mejora componente a componente el valor de la función característica y lo mismo ocurre con la coalición* $\{1,2\}$*; no obstante, en este caso, los pagos proporcionados por la matriz* Y *no empeoran lo que cada jugador o coalición se garantiza.*

Ejemplo 3.3 *Supongamos ahora que en el ejemplo anterior, los jugadores han llegado a un cierto acuerdo sobre los pesos que van a aplicar a los criterios y desean que ninguno de los criterios tenga un peso excesivamente grande en relación al otro, proporcionando información suficiente para determinar el siguiente poliedro de pesos:*

$$\Lambda = \left\{ \lambda = (\alpha, 1-\alpha) \in \Lambda^2_{\geqq} \, / \, \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\}$$

que tiene como puntos extremos $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ *y* $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$*.*



En la figura se representan en el espacio de pagos, las valoraciones de las coaliciones del juego, el cono de preferencia para cada coalición con la relación de preferencia que induce

Λ, y los pagos cada coalición con el reparto Y. En esta situación de información sobre los pesos, con la relación de preferencia, ningún jugador o coalición tiene motivos para estar en desacuerdo con el reparto proporcionado por la matriz de pagos X y tampoco tiene motivos para estar en desacuerdo con el reparto proporcionado por la matriz de pagos Y.

Siguiendo el desarrollo de la teoría de juegos convencional, el siguiente paso es imponer el principio de racionalidad colectiva a aquellas imputaciones consideradas como buenas asignaciones. Esta idea fue introducida en [16] y luego formalizada para juegos escalares con el nombre de núcleo del juego, pues son asignaciones en las que ninguna coalición tiene motivos para estar en desacuerdo con el reparto.

Definición 3.6 *El núcleo de un juego cooperativo vectorial $(N, v) \in G^v$ se define como el conjunto de los asignaciones en los que X^S no está dominado por $v(S)$, cualquiera que sea la coalición S elegida.*

$$C(N, v; \mathcal{R}) = \left\{ X \in I^*(N, v) \,/\, X^S \mathcal{R} v(S) \right\}.$$

Esta definición da lugar a dos conceptos de núcleo. Si usamos la relación $\geqq$, $C(N, v; \geqq)$ lo llamaremos núcleo de preferencia y si utilizamos la relación $\not\leqq$, $C(N, v; \not\leqq)$ lo llamaremos núcleo de no dominancia. Estos conjuntos están relacionados de la siguiente manera: $C(N, v; \geqq) \subseteq C(N, v; \not\leqq)$.

3.1 Caracterizaciones del Núcleo

Es importante que estas asignaciones del núcleo no se dominen entre sí ni individual ni colectivamente. En el siguiente teorema se establece la relación entre los conjuntos de imputaciones no dominadas por asignaciones y los dos conceptos de núcleo definidos.

Teorema 3.1 *Se verifica:*

1. $INDA(N, v; \not\leqq) = C(N, v; \geqq)$.
2. $INDA(N, v; \geqq) = C(N, v; \not\leqq)$.

Vemos, por tanto, que ambos tipos de núcleo están formados por clases consistentes internamente en relación a la dominancia.

Como sabemos del caso escalar el núcleo puede ser vacío, por lo que es muy importante establecer condiciones para la existencia de las soluciones que acabamos de proponer. En [18] se demuestra el siguiente resultado.

Teorema 3.2 *Una condición necesaria y suficiente para que el núcleo de preferencia, $C(N, v; \geqq)$, sea no vacío es que los p juegos escalares Λ-componentes, $(N, v_j) \in g^v \quad j = 1, 2, \ldots, m$ sean equilibrados.*

Por tanto, el núcleo de preferencia, que se denomina núcleo producto cartesiano, y se denota $C(N, v; \geqq)$, coincide con el producto cartesiano de los núcleos de los juegos escalares componentes, es decir:

$$X \in C(N, v; \geqq) \Leftrightarrow X_j \in C(N, v_j) \quad \forall\, j \in K$$

Nótese que la condición de estabilidad que subyace en el concepto de núcleo producto cartesiano es bastante fuerte. Ninguna coalición es capaz, por sí misma, de mejorar los pagos que le corresponden mediante una imputación $X \in C(N, v; \geqq)$ si X_j se utiliza para repartir $v_j(N)$.

A medida que el poliedro de pesos se hace más pequeño esta condición de estabilidad se relaja permitiéndose un empeoramiento del pago en alguno de los criterios a cambio de una mejora en otro criterio. Por tanto estamos ampliando el conjunto de las imputaciones del núcleo producto cartesiano al reducir el poliedro de pesos.

En [13] se establece una condición suficiente para que el núcleo de no dominancia sea no vacío. Consiste en exigir que $\exists\, \hat{\lambda}$ del interior relativo de Λ tal que el juego escalar ponderado $(N, \hat{\lambda}^t v) \in g^v$ sea equilibrado.

Teorema 3.3 *Dado $(N, v) \in G^v$, si existe $\hat{\lambda} \in \Lambda_>$ tal que se verifica:*

1. $\hat{\lambda}^t v(N) \neq 0$
2. $(N, \hat{\lambda} v) \in g^v$ *es equilibrado,*

entonces $C(N, v; \not\leqq) \neq \emptyset$.

El recíproco no es cierto, es decir, de que $C(N, v; \overset{\Lambda}{\succsim}) \neq \emptyset$ no se deduce que exista necesariamente un juego ponderado equilibrado, como se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.4 *Consideremos el juego $(N, v) \in G^v$, con $N = \{1, 2, 3, 4\}$, y con dos objetivos, $K = \{1, 2\}$,*

S	$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$ $\{1,3\}, \{2,4\}$	$\{1,2\}, \{3,4\}$ $\{1,2,3\}$ $\{1,2,4\}, \{1,3,4\}$	$\{1,4\}, \{2,3\}$	$\{2,3,4\}$	N
$v(S)$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

consideremos la matriz:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\text{x}4}.$$

$X \in C(N, v; \not\leqq)$, pues $X^S \not\leqq v(S) \quad \forall\, S \in \mathcal{N}$. Sin embargo, $\nexists\, \lambda = (\alpha, 1-\alpha) \in \Lambda^2_{\geqq}$ tal que el juego escalar ponderado correspondiente sea equilibrado, pues el juego escalar ponderado tiene como función característica:

S	$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$ $\{1,3\}, \{2,4\}$	$\{1,2\}, \{3,4\}$ $\{1,2,3\}$ $\{1,2,4\}, \{1,3,4\}$	$\{1,4\}, \{2,3\}$	$\{2,3,4\}$	N
$\lambda^t v(S)$	1	2	$3-3\alpha$	$1+3\alpha$	3

y si consideramos la colección equilibrada formada por las coaliciones unitarias $\beta = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$, con pesos de equilibrio unitarios comprobamos que:

$$\sum_{S \in \beta} \alpha_S \lambda^t v(S) = 4 \not\leqq 3 = v(N),$$

y, por tanto, independientemente del peso λ que apliquemos, el juego equilibrado no puede ser equilibrado.

Terminamos esta sección insistiendo en la mayor complejidad que presenta el modelo vectorial. Para ello, recordemos que, por ejemplo, en el caso escalar, todo juego esencial de suma constante tiene núcleo vacío. Sin embargo, esto no ocurre en el caso vectorial como se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.5 *Consideremos un juego de tres jugadores,* $N = \{1, 2, 3\}$*, y dos objetivos:*

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	N
$v(S)$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix}$

Este juego es esencial pues $\sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) \leqq v(N)$ *y de suma constante pues para cualquier coalición* S*,* $v(S) + v(\bar{S}) = v(N)$*.*

Sin embargo, el núcleo de no dominancia del juego es no vacío porque la matriz:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2x3} \in C(N, v; \nleq)$$

4 Conclusiones

La teoría de juegos multicriterio permite modelizar y analizar situaciones en las que se presentan conflictos de intereses, no sólo entre los jugadores sino también entre los distintos criterios de cada jugador. De esta forma puede extenderse el estudio a un rango más amplio de situaciones conflictivas que las que analiza la teoría de juegos convencional.

Debido a la dificultad adicional que implica trabajar con múltiples criterios, muchos de los resultados de los juegos escalares pueden no ser válidos en el caso vectorial. Esta circunstancia pone de manifiesto que la teoría de juegos multicriterio no es una generalización de la teoría clásica, sino que los conceptos clásicos aparecen como casos particulares de los que establecemos para juegos vectoriales.

El planteamiento multiobjetivo que se realiza en el desarrollo de esta teoría, hace innecesario definir funciones de pago que escalaricen los criterios. Esto representa una gran ventaja, ya que la existencia de tales funciones impone ciertas restricciones a las estructura de preferencia de los jugadores. Por otra parte, el reciente avance de las herramientas propias de la optimización multicriterio ha hecho también posible un avance significativo en el campo de los juegos multicriterio.

Referencias

[1] Anand L., Shashishekhar N., Ghose D., Prasad U.R. (1995) *A Survey of Solution Concepts In Multicriteria Games.* Journal of the Indian Institute of Science, Vol 75, pp. 141-174.

[2] Bergstresser K., Yu P.L. (1977) *Domination Structures and Multicriteria Problems in n-Person Games.* Theory and Decision, n. 8, pp. 5-48.

[3] Bilbao J.M., Fernández F.R. (1999) *Avances en Teoría de Juegos con Aplicaciones Económicas y Sociales.* Universidad de Sevilla. Secretariado de publicaciones.

[4] Blackwell O.(1956) *An Analog of the Minimax Theorem for Vector Payoff.* Pacific Journal of Mathematics, Vol 6, n.1, pp. 1-8.

[5] Corley S.C.(1985) *Games with Vector Payoffs.* Journal of Optimization Theory and Applications, Vol 47, pp. 491-498.

[6] Driessen T.S.H.(1988) *Cooperative Games, Solutions and Applications.* Kluwer Academic Publishers. London.

[7] Fernández F.R., Puerto J. (1996) *Vector Linear Programming in Zero-sum Multicriteria Matrix Games.* Journal of Optimization Theory and Applications, Vol 89, pp. 115-127.

[8] Fernández F.R., Mármol A.M., Monroy L., Puerto J. (2000) *Utopian Efficient Strategies in Multicriteria Matrix Games.* Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 455, pp.245-254. Springer Verlag.

[9] Fernández F.R., Monroy L., Puerto J. (1998) *Multicriteria Goal Games.* Journal of Optimization Theory and Applications, Vol 99, n.2, pp. 403-421.

[10] Fernández F.R., Puerto J., Monroy L. (1998) *Two-person Non-zero Sum Games as Multicriteria Goal Games.* Annals of Operations Research, Vol 84, pp. 195-208.

[11] Fernández F.R., Mármol A.M., Monroy L., Puerto J., (2000) *Multiple Scenario Competitive Markets.* Game Theory and Applications V. Nova Science Publishers, Inc., New York.

[12] Fernández F.R., Hinojosa M.A., Mármol A.M., Puerto J., (2000) *Solution Concepts in Multiple Criteria Linear Production Games.* Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer Verlag.

[13] Fernández F.R., Hinojosa M., Puerto J. (2001) *Core solutions in Vector-Valued Games.* Aceptado en Journal of Optimization Theory and Applications.

[14] Ghose D., Prasad R. (1989) *Solution Concepts in Two-person Multicriteria Games.* Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 63, n.2, pp. 167-189.

[15] GHOSE D. (1991) *A Necessary and Sufficient Condition for Pareto-optimal Security Strategies in Multicriteria Matrix Games.* Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 68, pp. 463-480.

[16] Gillies D.B (1959) *Solutions to general non-zero-zum Games.* In Contributions to the Theory of Games Vol IV pp. 47-85, Annals of Mathematics Studies num. 40. Princeton University Press. Princeton. New Jersey.

[17] Hannan E.L. (1982) *On Games with Multiple Payoff.* International Journal of Game Theory, Vol. 11, n.1, pp. 13-15.

[18] Hinojosa M.A. (2000) *Juegos Cooperativos Vectoriales con Información Adicional.* Tesis Doctoral. Edición Digital @ Tres, S.L.L.

[19] Hwang C.L., Lin M.J. (1987) *Group Decision Making Under Multiple Criteria.* Lecture Notes in Economics and Mathematical Sciences n.281, Springer-Verlag, Berlin.

[20] Jörnsten K., Lind M. (1996) *Core Concepts for Multiple Criteria Games.* Publication No. 96/5, Department of Operations Research, University of Aarhus, Arhus, Demmark.

[21] Jörnsten K., Lind M., Tind J. (1995) *Stable Payment Schemes of TU-Games with Multiple Criteria.* Revised version of Publication No. 93/3, Department of Operations Research, University of Aarhus, Arhus, Demmark.

[22] Mármol A.M., Puerto J., Fernández F.R. (1998) *The Use of Partial Information on Weights in Multicriteria Decision Problems.* Journal of Multicriteria Decision Analysis, 7, pp. 322-329.

[23] Mármol A.M., Puerto J., Fernández F.R. (2001) *Sequential Incorporation of Imprecise Information in Multiple Criteria Decision Processes.* Aceptado en European Journal of Operational Research.

[24] Myerson R.B. (1978) *Refinement of the Nash Equilibrium Concept.* International Journal of Game Theory, Vol.7, pp. 73-78.

[25] Nash J.F. (1950) *Equilibrium Points of n-person Games.* Proccedings of the National Academy of Sciences, n.36, pp. 48-49.

[26] Nash J.F. (1950) *The Bargaining Problem.* Econometrica, n.28, pp. 155-162.

[27] Nash J.F. (1951) *Non-cooperative Games.* Annals of Mathematics, Vol 54, pp. 286-295.

[28] Nieuwenhuis J.W. (1983) *Some Minimax Theorems in Vector-valued Functions.* Journal of Optimization Theory and Applications, Vol 40, n.3, pp. 463-475.

[29] Owen G. (1995) *Game Theory.* Academic Press. San Diego, California.

[30] Puerto J., Fernández F.R. (1995) *Solution Concepts Based on Security Levels in Constrained Multicriteria Concave-convex Games.* Opsearch, Vol 32, pp. 16-30.

[31] Puerto J., Hinojosa M.A., Mármol A.M., Monroy L., Fernández F.R. (1999) *Solution Concepts for Multiple Objective n-person Games.* Investigaçao Operacional, Vol 19, pp. 193-209.

[32] Roubens M., Vincke P. (1985) *Preference Modelling.* Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer.

[33] Selten R. (1975) *Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games.* International Journal of Game Theory, Vol 4, pp. 25-55.

[34] Shapley L.S. (1959) *Equilibrium Points in Games with Vector Payoff.* Naval Research Logistics Quarterly, Vol 6, n.1, pp. 57-61.

[35] Shapley L.S., Shubik M. (1972) *The Assignement Game: the Core.* International Journal of Game Theory. Vol 1, pp. 111-130.

[36] Shubik M. (1955) *The Uses of Game Theory in Mangement Science.* Management Science. n.2, pp. 40-54.

[37] Steuer R.E. (1995) *Manual for the ADBASE. Multiple Objective Linear Programming Package.* University of Georgia, Athens, Georgia.

[38] Vorovev N.N. (1977) *Game Theory, Lectures for Economists and Systems Scientists.* Springer Verlag, New York.

[39] Wang S.Y. (1993) *Existence of a Pareto Equilibrium.* Journal of Optimization Theory and Applications, Vol 79 pp. 373-384.

[40] Zhao J. (1991) *The Equilibria of a Multiple Objective Game.* International Journal of Game Theory, Vol 20, pp. 171-182.