 DOI: 10.24844/EM3103.05

Emergencia de razonamiento proto-algebraico en tareas de proporcionalidad en estudiantes de primaria

Emergency of proto-algebraic reasoning in proportionality tasks of primary school students

María Burgos[1]
Juan D. Godino[2]

Resumen: El razonamiento proporcional se considera frecuentemente como ruta de acceso al razonamiento algebraico temprano. En este trabajo mostramos el análisis de las respuestas de un grupo de estudiantes de quinto curso de primaria, que se enfrentan por primera vez a tareas de proporcionalidad, analizando con detalle los procedimientos desarrollados, representaciones, argumentos y evidencias obtenidas sobre la capacidad de generalización. Se incluyen también las tareas usadas como un primer encuentro con la proporcionalidad siguiendo un modelo didáctico mixto de tipo instructivo-investigativo. Como resultado de este estudio reconocemos rasgos de razonamiento proto-algebraico en la actividad desarrollada por los alumnos en tareas de este tipo.

Palabras clave: *Pensamiento algebraico, razonamiento proporcional, niveles de algebrización, diseño instruccional*

Abstract: Proportional reasoning is often considered as an access route to early algebraic reasoning. In this paper, we show the analysis of the answers of a group of fifth grade students, who are faced for the first time with proportionality

Fecha de recepción: 28 de marzo de 2018. **Fecha de aceptación**: 4 de septiembre de 2018.
[1] Universidad de Granada (España). mariaburgos@ugr.es, orcid.org/0000-0002-4598-7684
[2] Universidad de Granada (España). jdgodino@gmail.com, orcid.org/0000-0001-8409-0258

tasks, analyzing in detail the developed procedures, representations, arguments and evidences obtained about their generalization capacity. We also include the tasks used as a first encounter with proportionality applying a mixed instructional and investigative model. As a result of this study we recognize features of proto-algebraic reasoning in the activity developed by students in tasks of this type.

Keywords: *Algebraic thinking, proportional reasoning, algebraization level, instructional design*

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años, el desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros niveles de enseñanza ha despertado gran interés en la comunidad de investigadores en educación matemática. La introducción del álgebra temprana (early algebra) en el currículum de Educación Primaria, persigue organizar la enseñanza de la aritmética y del álgebra sin saltos ni rupturas (Cai y Knuth, 2011; Carraher y Schliemann, 2007; Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014; Molina, 2009; Radford, 2014; Socas, 2011).

La transición de la aritmética al álgebra es un paso importante para llegar a ideas más complejas dentro de las matemáticas superiores. Una visión amplia de la naturaleza del álgebra sitúa el énfasis en el desarrollo del pensamiento[3] algebraico y no en el aprendizaje de las reglas para la manipulación de símbolos (Carpenter y Levi, 2000). Si los estudiantes entienden la aritmética en un nivel que les permita explicar y justificar las propiedades que están utilizando, entonces habrán aprendido algunos fundamentos críticos de álgebra (Carpenter, Frankle y Levi, 2003). También, deberán tener en cuenta las relaciones numéricas de una situación y expresarlas explícitamente en un lenguaje sencillo y cotidiano (Warren, 2003).

[3] En este trabajo usamos las expresiones 'pensamiento algebraico' o 'razonamiento algebraico' dependiendo del uso que hacen los autores referidos. En el marco del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento matemático, que sirve de referencia para este trabajo, se prefiere hablar de razonamiento cuando se describen las prácticas operativas y discursivas que se realizan para resolver una tarea, tanto si son realizadas por un sujeto epistémico como cognitivo. En todo caso, en la realización de tales prácticas intervienen objetos no ostensivos (mentales o ideales) que reflejan el pensamiento que las acompañan de manera necesaria.

Para Kieran (2004) el razonamiento algebraico en los grados elementales involucra el desarrollo de formas de pensamiento en actividades para las que el álgebra simbólico-literal puede ser utilizada como herramienta, pero dichas representaciones no son exclusivas, ya que se puede estar inmerso en el álgebra sin usar algún símbolo literal en absoluto. Autores como Kieran (2004) identifican el razonamiento algebraico como aquel que permite analizar las relaciones entre cantidades, reconocer la estructura de una situación, estudiar el cambio, generalizar, resolver problemas, modelizar y justificar, probar o hacer predicciones sobre situaciones que involucran objetos matemáticos.

En el marco del Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007) se ha propuesto una caracterización del razonamiento algebraico para la Educación Primaria en la que se distinguen tres niveles de razonamiento (Aké, Godino, Gonzato & Wilhelmi, 2013; Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi, 2014), estableciendo criterios para identificar la actividad matemática puramente aritmética y distinguirla de niveles progresivos de algebrización. Así, la asignación a una práctica y al pensamiento que la acompaña de carácter algebraico, se establece en términos de la presencia de determinados objetos, significados y de los procesos que intervienen en la misma.

Los niveles de algebrización, vistos como categorías de formas de razonamiento algebraico elemental, están relacionados con las características principales del pensamiento algebraico que reconoce Radford (2011): indeterminación, analiticidad y designación simbólica, así como con los dos aspectos que Kaput (2008) identifica como característicos del razonamiento algebraico: a) la simbolización sistemática de generalizaciones de regularidades y restricciones (niveles proto-algebraicos); b) el razonamiento guiado sintácticamente y las acciones sobre generalizaciones expresadas en sistemas de símbolos convencionales (nivel algebraico consolidado).

A pesar de que son numerosos los trabajos y resultados acerca de la emergencia del razonamiento algebraico en estudiantes de las primeras etapas educativas, en tareas basadas en patrones (figurales, frecuentemente) (véanse los trabajos de Radford 2011, 2013, 2014 y las referencias en los mismos) se conoce poco en relación a la emergencia del pensamiento algebraico en otras tareas. Por un lado, existe la preocupación por analizar el proceso mediante el cual los alumnos de educación primaria construyen generalizaciones, y, por otro lado, elaborar propuestas didácticas que permitan promover el desarrollo del pensamiento algebraico desde la educación primaria.

Como señala Ursini (1996), una explicación posible para algunas de las dificultades que encuentran los alumnos en el inicio del álgebra, podría proceder de la falta de antecedentes en tratar numéricamente problemas matemáticos de distinta naturaleza, que les lleven hacia la necesidad y aceptación de ideas algebraicas. Carecen, usualmente, de experiencia en generalizar y expresar una generalización; en trabajar a nivel pre-algebraico nociones que subyacen a la de función, como es la idea de variación. Investigaciones como la de Ursini, describen algunas limitaciones en las capacidades innatas para pasar de lo particular a lo general y proponen estimular a los niños con tareas dirigidas; el trabajo en edades tempranas requiere la intervención del docente para que el niño pueda pensar en términos algebraicos.

Butto y Rojano (2010) proponen el razonamiento proporcional como ruta de acceso temprano al pensamiento algebraico. El razonamiento proporcional ha sido descrito por Lesh, Post y Behr (1988) como la consolidación del conocimiento aritmético en la escuela primaria y la cimentación del pensamiento algebraico en la escuela secundaria. Estos autores consideran el razonamiento proporcional como una forma de razonamiento matemático que involucra un sentido de covariación y de comparaciones múltiples en términos relativos, la habilidad para almacenar y procesar mentalmente varias piezas de información, así como también, la inferencia y predicción en situaciones de razonar, tanto de manera cualitativa como cuantitativa (Lesh, *et al.*, 1988: 93). Dado que razón y proporción versan sobre relaciones cuantitativas entre cantidades, la habilidad para razonar proporcionalmente juega un papel decisivo en el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes (Lim, 2009).

En este panorama, nuestra investigación está orientada por la siguiente pregunta:

> ¿Qué formas de *razonamiento algebraico emergen en las prácticas matemáticas desarrolladas por alumnos de quinto curso de educación primaria cuando se enfrentan por primera vez a tareas de proporcionalidad directa?*

Para responder a esta pregunta hemos realizado una experiencia de diseño con un grupo de escolares de quinto curso de primaria, siguiendo un modelo didáctico mixto instructivo-investigativo (Godino, Batanero, Cañadas y Contreras, 2016), de cuyos resultados informamos en este artículo. El trabajo está organizado en los siguientes apartados: en la sección 2 incluimos el marco teórico y los antecedentes del problema; la sección 3 resume la metodología y el diseño instruccional implementado; en la sección 4 se presentan los resultados relativos a la pregunta de investigación. La sección 5 incluye la discusión y conclusiones finales.

2. MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

Se aplicaron algunas herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007) para interpretar los datos recogidos sobre la experiencia de enseñanza implementada. En particular, consideramos útiles las categorías de objetos matemáticos que propone el EOS para analizar las prácticas matemáticas de los estudiantes, así como los niveles de algebrización de la actividad matemática, introducidos en Godino *et al.* (2014), aplicando los tipos de procesos, medios de representación y grados de generalidad de los objetos matemáticos.

2.1. TIPOS DE OBJETOS MATEMÁTICOS

En el EOS se asume una concepción de la matemática de tipo antropológico, y, en consecuencia, la noción de práctica matemática ocupa un lugar central. Pero también se considera la matemática como un sistema lógicamente organizado de objetos, entendiendo por objeto matemático cualquier entidad material o inmaterial que interviene en la práctica matemática, apoyando y regulando su realización (Font, Godino y Gallardo, 2013). En el EOS se proponen los siguientes tipos de objetos primarios:

- *Situaciones-problema:* ejercicios y problemas más o menos abiertos, aplicaciones intra-matemáticas o extra-matemáticas, entendidas como las tareas que inducen la actividad matemática.
- *Lenguajes*: términos y expresiones matemáticas; notaciones, símbolos, representaciones gráficas en sus diversos registros (gestual, oral, escrito).
- *Conceptos*: entidades matemáticas que pueden ser introducidas mediante descripción o definición (número, punto, recta, media, función).
- *Proposiciones*: propiedades o atributos; enunciados sobre conceptos.
- *Procedimientos*: técnicas de cálculo, operaciones y algoritmos.

- *Argumentos*: enunciados requeridos para justificar o demostrar las proposiciones o para explicar los procedimientos.

En el EOS se dice que un objeto es *extensivo* si interviene en la práctica matemática como un caso particular, mientras que es *intensivo* si interviene como una clase o tipo de objetos; son las entidades resultantes de los correspondientes procesos de particularización y generalización, teniendo un carácter relativo a la situación que se analiza, esto es, del juego de lenguaje en que participan.

2.2. NIVELES PROTO-ALGEBRAICOS DE RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Desde el EOS se entiende el Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) como el sistema de prácticas operativas y discursivas puestas en juego en la resolución de tareas abordables en la educación primaria, en las cuales intervienen objetos y procesos algebraicos (simbolización, relación, variables, incógnitas, ecuaciones, patrones, generalización, modelación, etc.).

En Godino *et al.* (2014), se propone un modelo de razonamiento algebraico para la educación primaria basado en la distinción de tres niveles de algebrización, estableciendo criterios que permiten identificar la actividad matemática puramente aritmética (nivel 0 de algebrización) y distinguirla de progresivos niveles de algebrización. Los criterios para delimitar los distintos niveles están basados en el tipo de objetos y procesos matemáticos implicados en la actividad matemática, de acuerdo con el marco del EOS: tipos de representaciones usadas, los procesos de generalización implicados y el cálculo analítico que se pone en juego en la actividad matemática correspondiente. Los criterios para discriminar los primeros niveles de algebrización son:

> Nivel 0. Se opera con objetos intensivos de primer grado de generalidad, usando lenguajes natural, numérico, icónico, gestual.
>
> Nivel 1. Se usan objetos intensivos de segundo grado de generalidad, propiedades de la estructura algebraica de N y la igualdad como equivalencia.
>
> Nivel 2. Se usan representaciones simbólico – literales para referir a los objetos intensivos reconocidos, los cuales están ligados a la información espacial, temporal y contextual; se resuelven ecuaciones de la forma $Ax + B = C$ $(A, B, C \in \mathbb{R})$.

Nivel 3. Los símbolos se usan de manera analítica, sin referir a la información contextual. Se realizan operaciones con indeterminadas o variables; se resuelven ecuaciones de la forma $\mathrm{Ax} + B = \mathrm{Cx} + \mathrm{D}$ ($\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D} \in \mathbb{R}$).

Los niveles 1 y 2 se consideran como proto-algebraicos para distinguirlos del nivel 3, cuyos rasgos indican una actividad algebraica consolidada, mientras que el nivel 0 indica ausencia de actividad algebraica. Los niveles de algebrización están definidos en función de los objetos, significados y procesos que se requieren y emergen en la actividad matemática que realiza un determinado sujeto cuando resuelve una tarea o situación problema concreta. No se asignan a las propias tareas, que se pueden resolver de distintas maneras, pudiendo poner en juego una actividad algebraica diferente, ni a los individuos, que ante distintas situaciones pueden desarrollar soluciones que involucren objetos o procesos correspondientes a niveles de algebrización distintos.[4] Se pueden interpretar en términos de las "capas de generalidad" que describe Radford. "Las capas de generalidad se distinguen en términos de las indicaciones a que recurren los estudiantes para pensar algebraicamente" (Radford, 2011, p. 311). En este sentido, algunas características de la generalización factual y contextual que describe Radford se concretan en los niveles proto-algebraicos, mientras que la generalización simbólica es propia de un nivel consolidado de algebrización.

La aplicación de los niveles de algebrización a los sistemas de prácticas ligados a tareas relativas a proporcionalidad, aporta criterios para distinguir categorías de significados en la construcción progresiva del razonamiento proporcional.

2.3. SIGNIFICADOS DE LA PROPORCIONALIDAD

Piaget considera que el razonamiento proporcional se adquiere en el estadio de las operaciones formales y constituye uno de los ocho esquemas que

[4] La teoría de niveles de algebrización desarrollada en varios artículos por Godino y cols (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014) no se presenta como una "teoría de niveles de desarrollo cognitivo" de los sujetos, sino que tiene un carácter local, al referirse a la actividad matemática realizada ante una tarea específica. Esto no quiere decir que no sea posible completar dicha teoría con nuevos criterios e instrumentos para asignar a los sujetos un nivel de desarrollo cognitivo en el dominio del álgebra.

caracterizan el nivel de desarrollo formal de la persona (Inhelder y Piaget, 1958). Según Inheler y Piaget (1958), el razonamiento proporcional es una relación de segundo orden que implica una relación de equivalencia entre dos razones. Requiere del uso de un razonamiento hipotético deductivo que permite al sujeto utilizar una relación matemática (razón) y a partir de ésta deducir una segunda relación también matemática (proporción).

Freudenthal (1983) identifica dos tipos de razones (internas y externas) siendo la primera la que se forma dentro de un mismo sistema (en una magnitud) y la segunda aquella que se forma entre sistemas (entre dos magnitudes) y propone la utilidad que puede representar el uso de la semejanza para el aprendizaje de la razón y la proporción.

Diversos trabajos de investigación (Fernández y Llinares, 2011; Fernández y Llinares, 2012; Sánchez, 2013; Silvestre y Ponte, 2011) analizan las características del desarrollo del razonamiento proporcional desde la educación primaria hasta la educación secundaria, mostrando las dificultades que encuentran los estudiantes de distintos niveles educativos al afrontar situaciones de proporcionalidad. Según muestran varios estudios (Karplus, Pulos y Stage, 1983; Turnaire y Pulos, 1985; Van Dooren, De Bock, Gillard y Verschaffel, 2009; Fernández y Llinares, 2011) diversos factores influyen en el rendimiento o éxito en las tareas de proporcionalidad: la relación entre los números involucrados, el uso de razones enteras y no enteras, las unidades de las magnitudes que aparecen en la situación, el formato en que se presenta la tarea, la familiaridad del contenido, entre otros. Los problemas que involucran números naturales pequeños, aquellos en los que aparecen relacionados los primeros o segundos términos de una razón y en los que existe una relación de divisibilidad entre sus términos, resultan más fáciles para los alumnos. Tourniaire y Pulos (1985) sugieren que es más sencillo visualizar cantidades discretas que continuas y, por tanto, los estudiantes desarrollarán mejores tareas de proporcionalidad que involucren cantidades discretas que si éstas son continuas.

Streefland (1985), propone anticipar una aproximación informal, intuitiva y cualitativa al concepto de razón y proporción previa a su formalización y algoritmización. Otros autores como Behr, *et al.* (1992); Cramer y Post (1993), Lesh, Post y Behr (1988), Ruiz (2002), Ruiz y Valdemoros (2004) apoyan la propuesta de Streefland (1985) sobre la pertinencia de una secuencia didáctica que permita avanzar desde un conocimiento de naturaleza intuitiva y cualitativa, de estructura aditiva (pre-proporcional), hacia un conocimiento cuantitativo de estructura multiplicativa, haciendo uso de procesos que fomenten la manifestación de estrategias de construcción progresiva que permita encaminar hacia el proceso de consolidación del razonamiento proporcional.

Recientemente, Godino, Beltrán-Pellicer, Burgos, Giacomone (2017) distinguen tres tipos de significados del objeto proporcionalidad: aritmético, proto-algebraico y algebraico-funcional, que además se complementan con un significado informal-cualitativo, centrado en la comparación multiplicativa de las cantidades que intervienen en los problemas y en la comparación perceptiva, por ejemplo, de la semejanza de formas geométricas.

Los objetos y procesos que intervienen en las prácticas de resolución de los problemas sobre razones y proporciones dependen de los contextos de aplicación, como revelan las múltiples investigaciones realizadas sobre la naturaleza y desarrollo del razonamiento proporcional. La aplicación de los niveles de algebrización al estudio del razonamiento proporcional, no refiere a etapas de desarrollo cognitivo de los individuos, esto es, niveles de comprensión de razones y proporciones como ocurre en Karplus, *et al.* (1983), Tourniaire y Pulos (1985) o Lamon (1993). Para el EOS el significado institucional o personal de un objeto matemático se identifica con el sistema de prácticas operativas y discursivas asociado al campo de problemas de los que emerge el objeto en un momento dado. En tanto que los niveles de algebrización se definen en términos de los objetos y procesos que se requieren y emergen en la actividad matemática que realiza un determinado sujeto cuando resuelve una tarea o situación problema concreta, la aplicación de los niveles de algebrización propuestos en Godino, *et al.* (2014) a los sistemas de prácticas ligados a tareas relativas a proporcionalidad, aporta criterios para distinguir categorías de significados en la construcción progresiva del razonamiento proporcional. Además, teniendo en cuenta el papel clave que tiene la modelización algebraica de la actividad matemática en la progresión del aprendizaje, el reconocimiento del nivel de algebrización de las prácticas que pone en juego el alumno al resolver problemas de proporcionalidad es un indicador del grado de dominio del razonamiento algebraico en este contenido específico.

El significado aritmético (nivel 0 de algebrización) se caracteriza por la aplicación de procedimientos de cálculo aritméticos (multiplicación, división). En la práctica intervienen valores numéricos particulares y se aplican operaciones aritméticas sobre dichos valores; no intervienen objetos y procesos algebraicos. El significado proto-algebraico está centrado en la noción de proporción, de manera que el reconocimiento del valor unitario en un procedimiento de reducción a la unidad, y el uso de representaciones diagramáticas de soluciones se pueden calificar de proto–algebraicas de nivel 1. Por otro lado, la solución de un problema de valor faltante, basada en el uso de las razones y proporciones, involucra una incógnita y el planteamiento de una ecuación; la actividad de algebrización que se realiza en este caso es proto-algebraica de nivel 2, según el modelo de Godino *et al.* (2014), ya que la incógnita aparece despejada en un miembro de la ecuación que se establece ($Ax = B$).

2.4. INICIACIÓN AL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

El papel del profesor para promover el pensamiento proporcional en las primeras etapas educativas es de vital importancia. Miyakawa y Winslow (2009) hacen una comparación de dos modelos didácticos ampliamente usados en educación matemática, apoyados en el análisis de experiencias de enseñanza de iniciación a la proporcionalidad en el contexto de la semejanza de figuras. Silvestre y Ponte (2011) asumen en su experiencia didáctica la perspectiva de que el aprendizaje de la proporcionalidad directa en 6° año de escolaridad debe centrarse en la comprensión de la estructura multiplicativa de una relación proporcional. Esta investigación asume la perspectiva de que esa comprensión se desarrolla mediante la resolución de problemas en el contexto de la interacción social en pequeños grupos y la discusión colectiva con todo un curso. En el trabajo de Bentley y Yates (2017) se presenta un estudio comparativo de los resultados obtenidos por dos grupos de estudiantes de 12 años, cuando resolvían problemas que requerían de un razonamiento proporcional (problemas de valor faltante). En uno de los grupos los autores siguieron un modelo de instrucción basado en ejemplos resueltos paso a paso de reducción a la unidad, siendo este grupo el que mostró mejores resultados. Fielding-Wells, Dole y Makar (2014) realizan un estudio de caso con un grupo de 26 alumnos de 4º curso de primaria siguiendo un modelo didáctico investigativo (inquiry pedagogy) para estimular la emergencia de pensamiento proporcional antes de la introducción formal de la razón y proporción en el currículo.

El modelo didáctico que implementamos en esta investigación, difiere sustancialmente de los empleados por Bentley y Yates (2017), Miyakawa y Winslow (2009) o Silvestre y Ponte (2011) al situarnos en un punto intermedio entre los modelos centrados en el profesor y los modelos centrados en el estudiante. Asumimos que la optimización del aprendizaje requiere un modelo de instrucción mixto indagativo-transmisivo que trata de conjugar la indagación de situaciones problemas por parte de los estudiantes con la enseñanza explícita de conocimientos en momentos críticos del proceso de estudio por parte del profesor. Creemos que el uso de tareas introductorias sobre proporcionalidad (como las que figuran en el Anexo), por medio de tablas numéricas y el planteamiento de cuestiones dirigidas a identificar las propiedades homogénea y aditiva de la función de proporcionalidad, puede permitir que los alumnos progresen desde formas intuitivas hacia niveles superiores de razonamiento algebraico.

3. METODOLOGÍA

Empleamos una metodología específica de investigación de diseño (Cobb y Gravemeijer, 2008) o ingeniería didáctica (Artigue, 2011), basada en nuestro caso en la aplicación de herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico (Godino, Batanero, Contreras, Estepa, Lacasta y Wilhelmi, 2013). La experiencia desarrollada centra la atención en el aprendizaje en contexto, tratando de que el diseño instruccional y la investigación sean interdependientes, sobreentendiéndose que la investigación incluye no solo la fase de diseño, sino también la experimentación en contextos de clase y la evaluación de resultados.

3.1. PARTICIPANTES Y CONTEXTO

La población sobre la que se centra la investigación son estudiantes de primaria que tienen su primer encuentro con situaciones-problemas que ponen en juego la noción de proporcionalidad. Los participantes en este estudio son 23 estudiantes (13 niñas y 10 niños) de quinto curso de educación primaria (10-11 años de edad). La experiencia se llevó a cabo en un centro público de enseñanza de Educación Infantil y Primaria durante el curso 2016-2017.

Las sesiones de investigación, se desarrollaron en el tiempo (50 minutos) y la distribución habitual de la clase, durante las dos últimas semanas del curso académico. Se daba por concluido el desarrollo del temario y de forma general, se encontraban repasando los conocimientos aprendidos durante el curso, en un ambiente distendido. De manera previa a las sesiones, los alumnos no habían trabajado con problemas que involucrasen relaciones de proporcionalidad en su significado aritmético. Dentro del contexto de uso geométrico de la proporcionalidad, habían realizado lectura e interpretación de mapas a escala, sin embargo, no habían trabajado la reproducción a escala de mapas, por lo que consideramos que no se habían desarrollado actividades hasta el momento de la investigación que proporcionasen a los alumnos un concepto intuitivo de proporción, ni sirviesen de soporte en el desarrollo del razonamiento proporcional.

Tareas instruccionales

Después de presentar el contexto, la investigadora facilitó a los alumnos la hoja de trabajo con las tareas introductorias que reproducimos en el Anexo. La actividad está diseñada para estimular la indagación y la discusión por medio de cuestiones dirigidas que sirvan de acercamiento a la proporcionalidad. Al acabar cada actividad se discutieron las ideas de forma grupal, centrando la atención en el concepto de proporcionalidad y las propiedades cuya comprensión se persigue desarrollar con la tarea.

En el diseño de las tareas se han tenido en cuenta las recomendaciones de diversas investigaciones que sugieren un primer acercamiento intuitivo al concepto de proporcionalidad, recurriendo al uso de factores multiplicativos y tablas numéricas. La primera tarea introductoria, perseguía que los alumnos identificasen magnitudes directamente proporcionales y reconociesen una situación-problema que involucra una relación de proporcionalidad directa. Iniciamos el razonamiento proporcional a través de razones sencillas como doble, mitad... y el reconocimiento de la propiedad aditiva de la función de proporcionalidad, por medio del registro tabular. La siguiente situación-problema fue tomada de Mochón (2012) y perseguía que el alumno prosiguiese con la reflexión sobre si una situación es de tipo proporcional o no, movilizando el razonamiento proporcional en un nuevo contexto en el que la constante de proporcionalidad no es un número entero. En la última parte de la hoja de trabajo, retomamos la tarea inicial con la intención de introducir la reducción a la unidad, como procedimiento para resolver una situación de proporcionalidad. Autores como Ercole, Frantz y Ashline (2011) describen este procedimiento como estrategia intuitiva que puede usarse como punto de partida para la instrucción de la proporcionalidad (p. 483). Si bien las primeras tareas suponen una actividad matemática propia de un nivel 0 de algebrización, la actividad matemática realizada en la última tarea instruccional se considera de nivel 1 de algebrización.

3.2. DATOS DE LA INVESTIGACIÓN

Centramos nuestra atención en las respuestas dadas por el grupo de alumnos a una de las tareas de evaluación (las pulseras), analizadas según los tipos de objetos y procesos que se ponen en juego. Este análisis nos permite clasificar las respuestas según los niveles de razonamiento algebraico que manifiestan, distinguiendo características proto-algebraicas en sus producciones.

Irene ha hecho 6 pulseras iguales con 48 piedrecitas de colores.

a) ¿Cuántas piedrecitas necesita Irene para hacer una pulsera? Explica cómo lo has obtenido.
b) ¿Y para hacer 10 pulseras? Explica cómo lo has averiguado.
c) Irene quiere hacer una pulsera para cada una de sus amigas. Si sabes el número de amigas que tiene Irene, ¿de qué forma le explicarías cuántas piedrecitas necesitará?
d) ¿Cuántas pulseras iguales puede hacer Irene con 72 piedrecitas?
e) Si sabes el número de piedrecitas que tiene Irene, ¿cómo le explicarías cuántas pulseras puede hacer?

3.3. ANÁLISIS DE LOS DATOS

Para evaluar el grado de aprendizaje logrado por los estudiantes se definieron dos variables cuantitativas y variables cualitativas. Las variables cuantitativas refieren al grado de corrección de la respuesta y al grado de corrección de las explicaciones dadas por los estudiantes en las tareas de evaluación. En ambos casos se ha asignado una puntuación de 0, 1, o 2 puntos si la respuesta es incorrecta (o el alumno no responde), parcialmente correcta o correcta, respectivamente. Las variables cualitativas refieren, con base a nuestro marco teórico, a la presencia en la práctica matemática de determinados tipos de objetos, como son, argumentos, tipos de lenguaje y representaciones, así como el grado de generalidad logrado:

- *Grado de corrección de la solución*: incorrecta, parcialmente correcta o incompleta (cuando incluye la operación aritmética pero no identifica el resultado de la misma como solución) y correcta.
- *Grado de corrección de la explicación*: incorrecta, parcialmente correcta (cuando no explicita la relación de proporcionalidad o recurre a un caso

particular en los ítems c y e), correcta (cuando la argumentación se basa en la relación de proporcionalidad).

- *Tipo de argumento*: informal (cuando la justificación es del tipo “multiplicando” o “dividiendo”), de orientación aritmética (cuando incluye la operación aritmética como justificación sin identificar su significado), formal (si recae en la relación de proporcionalidad)
- *Lenguajes*: natural, numérico, diagramático/tabular, simbólico
- *Grado de generalidad*: trabaja con números particulares, elabora una tabla, expresa la regla general.

4. RESULTADOS

En esta sección presentamos los resultados obtenidos tras el análisis de las respuestas dadas por el grupo de alumnos a la tarea de evaluación presentada en la sección 3.2. Las categorías establecidas para el grado de corrección de la respuesta o de la explicación, y el tipo de argumento empleado miden la menor o mayor presencia de razonamiento proporcional en las producciones de los alumnos. Por otro lado, el procedimiento empleado, lenguaje y grado de generalidad, nos permite determinar el nivel de algebrización de la actividad desarrollada por cada alumno, y de esta forma categorizar las formas de razonamiento algebraico emergentes.

4.1. GRADO DE CORRECCIÓN

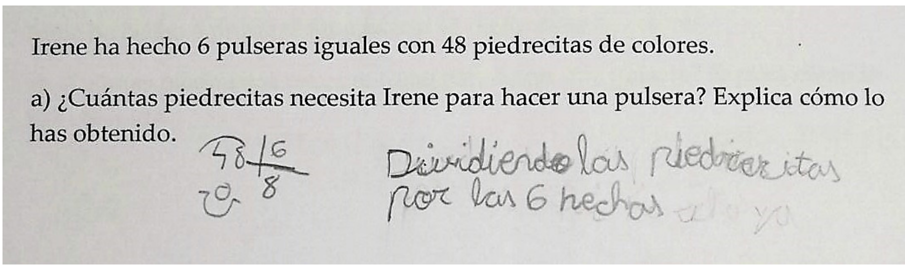
En la tabla 1 se resumen los resultados obtenidos por los estudiantes respecto al grado de corrección de sus soluciones. Sólo dos alumnos no explicaron su respuesta en el ítem a (E18 y E20), dos no lo hicieron en los ítems b y c (E15 y E21 en ambas) y cuatro alumnos dejaron en blanco el apartado e (E6, E12, E18 y E21). Los ítems a) y b) incluyen dos columnas; la primera de ellas hace referencia al nivel de pertinencia de la respuesta y la segunda al grado de corrección de la justificación. Los apartados c) y e) responden a prácticas argumentativas, de manera que la pertinencia de la respuesta es la de su justificación. El apartado d) requiere una práctica operativa y no se pide a los alumnos que justifiquen su respuesta. En tal caso, la corrección de la misma corresponde únicamente a la pertinencia de la solución.

Tabla 1 Frecuencias absolutas y porcentajes de las variables vinculadas al grado de corrección.

Grado de corrección	Ítems						
	a1	a2	b1	b2	c	d	e
No contesta	0 (0)	2 (8,69)	0 (0)	2 (8,69)	2 (8,69)	1 (4,34)	4 (17,39)
Incorrecta	0 (0)	1 (4,34)	1 (4,34)	1 (4,34)	3 (13,04)	0 (0)	3 (13,04)
Parcialmente correcta	0 (0)	17 (73,91)	0 (0)	15 (65,21)	5 (21,74)	2 (8,69)	10 (43,48)
Correcta	23 (100)	3 (13,04)	22 (95,65)	5 (21,74)	13 (56,52)	20 (86,95)	6 (26,08)

Todos los estudiantes respondieron de manera correcta a la primera pregunta: *¿Cuántas piedrecitas necesita Irene para hacer una pulsera?* Salvo dos alumnos que no justificaron de ninguna manera su respuesta y uno que lo hizo de forma incorrecta (lo que puntúa en ambos casos como 0 a efectos de valoración), 17 de los 23 alumnos (73,91%) explicaron de forma parcialmente correcta la solución que ofrecían (véase la figura 1) y tres de ellos podemos considerar que lo hicieron de forma correcta (véase la figura 2).

Figura 1. Explicación parcialmente correcta de E7 al ítem a)

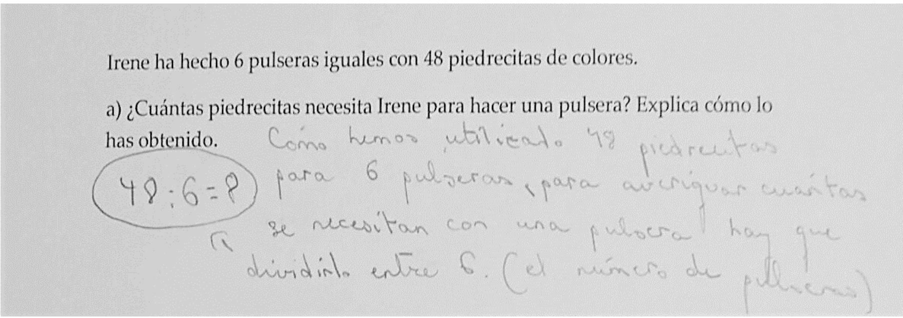

Irene ha hecho 6 pulseras iguales con 48 piedrecitas de colores.

a) ¿Cuántas piedrecitas necesita Irene para hacer una pulsera? Explica cómo lo has obtenido.

48 | 6
0 8

Dividiendo las piedrecitas por las 6 hechas

Figura 2. Explicación correcta dada por E10 al ítem a)


Irene ha hecho 6 pulseras iguales con 48 piedrecitas de colores.

a) ¿Cuántas piedrecitas necesita Irene para hacer una pulsera? Explica cómo lo has obtenido.

48 : 6 = 8

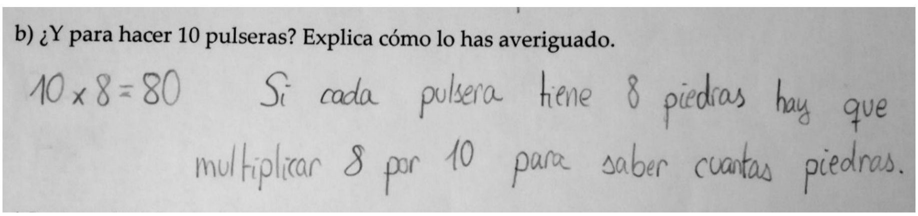
Cómo hemos utilizado 48 piedrecitas para 6 pulseras, para averiguar cuántas se necesitan con una pulsera hay que dividirlo entre 6. (el número de pulseras)

El tipo de explicación más frecuente (52% de los casos) incluye la división como argumento sin identificar el significado de ésta.

En la segunda pregunta: ¿Y para hacer 10 pulseras?, sólo un estudiante no respondió de manera correcta a la tarea. En cuanto a la justificación presentada, 15 alumnos lo hicieron de forma parcialmente correcta o incompleta y 5 alumnos lo hicieron de manera correcta. Las justificaciones ofrecidas en su mayoría hacían referencia a “multiplicar por 8”, sin embargo, seis alumnos, basaron su explicación en el valor unitario, es decir, el número de piedrecitas necesarias para elaborar una pulsera, como factor para conocer el número de piedras necesarias en el caso de querer fabricar 10 pulseras.

Consideramos una explicación correcta, cuando en la secuencia argumentativa se reconoce de forma explícita la relación de proporcionalidad, frecuentemente por medio del valor unitario (cantidad de piedras precisas para hacer una pulsera). Tal es el caso de la justificación dada por un alumno recogida en la figura 3.

Figura 3. Respuesta de E5 correcta al apartado b) (identifica el valor unitario)

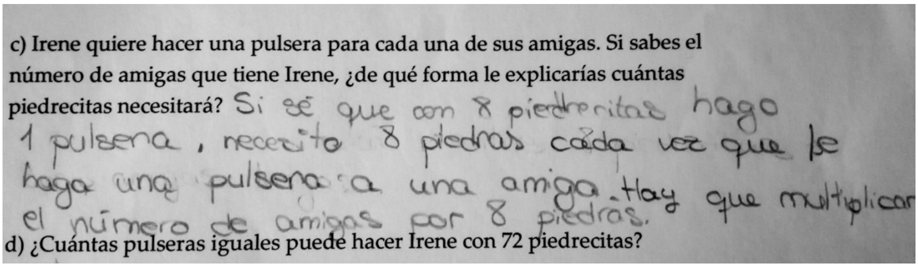

b) ¿Y para hacer 10 pulseras? Explica cómo lo has averiguado.

10 x 8 = 80 Si cada pulsera tiene 8 piedras hay que multiplicar 8 por 10 para saber cuantas piedras.

La próxima tarea perseguía que los alumnos generalizasen la situación anterior a una cantidad de pulseras dada en términos del número de amigas de Irene. Debían explicar a Irene cuántas piedrecitas necesitaría para hacer una pulsera para cada una de sus amigas. En tal caso, el número de amigas de Irene actúa como parámetro. En su mayoría, trece alumnos, de los veintiuno que respondieron a este apartado, recurrieron al significado de la constante de proporcionalidad en su respuesta. Cinco en cambio desarrollaron una explicación que hemos considerado parcialmente correcta, de tendencia aritmética y tan sólo tres, recurrieron a un caso particular en su explicación.

En la figura 4, se muestra la solución dada por una alumna en la que establece un proceso de generalización verbal con el que se precisa la correspondencia o regla general que permite determinar el número de piedras necesarias, a partir del número de piedras usadas para hacer una pulsera.

Figura 4. Respuesta de E1 basada en el significado del valor unitario.


c) Irene quiere hacer una pulsera para cada una de sus amigas. Si sabes el número de amigas que tiene Irene, ¿de qué forma le explicarías cuántas piedrecitas necesitará? Si sé que con 8 piedrecitas hago 1 pulsera, necesito 8 piedras cada vez que le haga una pulsera a una amiga. Hay que multiplicar el número de amigas por 8 piedras.

d) ¿Cuántas pulseras iguales puede hacer Irene con 72 piedrecitas?

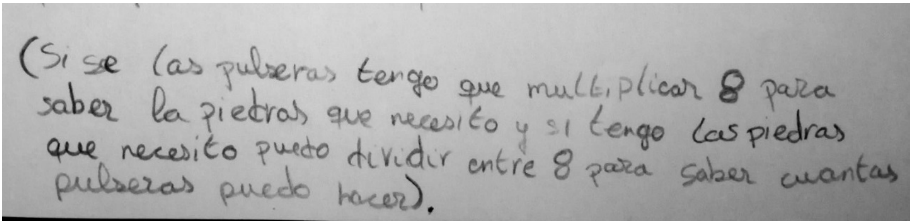
En los siguientes ítems de la tarea, se pone en juego el carácter simétrico de la relación de proporcionalidad, de forma que ahora el dato es el número de piedrecitas y el valor faltante viene dado por la cantidad de pulseras que se pueden elaborar.

Veinte alumnos respondieron de forma correcta a la pregunta ¿Cuántas pulseras iguales puede hacer Irene con 72 piedrecitas? Además, dos alumnos, lo hicieron de forma incompleta al incluir la operación, pero no expresar mediante ningún registro la solución. El otro estudiante no respondió a la tarea. Es de mencionar que, aunque en el enunciado no se les pedía expresamente que explicaran cómo habían obtenido el resultado, diez alumnos lo hicieron de forma natural.

En la última tarea: *si sabes el número de piedrecitas que tiene Irene ¿cómo le explicarías cuántas pulseras puede hacer?,* dieciséis alumnos respondieron de forma parcial o totalmente correcta, tres lo hicieron de forma incorrecta y cuatro no contestaron.

En la figura 5, aparece la respuesta de un alumno a esta tarea, en la que reconoce la propiedad simétrica de la relación de proporcionalidad entre las magnitudes número de piedras y número de pulseras.

Figura 5. Respuesta de E21 al ítem e)


(Si se las pulseras tengo que multiplicar 8 para saber la piedras que necesito y si tengo las piedras que necesito puedo dividir entre 8 para saber cuantas pulseras puedo hacer).

Se han considerado parcialmente correctas (un total de diez respuestas) aquellas descripciones similares a "dividiendo por 8". Las respuestas incorrectas lo fueron porque adoptaron un valor particular del número de piedras (usualmente 48 o 72) o bien multiplicaron por 8 el número de piedras, no reconociendo así el factor inverso de proporcionalidad.

4.2. ARGUMENTOS, LENGUAJES Y GRADO DE GENERALIDAD

Resumimos en la tabla 2 las frecuencias de los distintos tipos de argumentación en las producciones de los alumnos. Como puede observarse en dicha tabla no aparece el apartado d ya que en dicho ítem no se les requería a los alumnos que explicasen su respuesta.

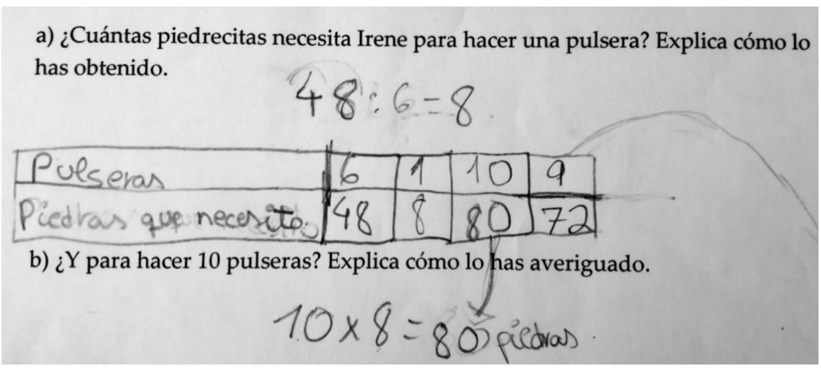
Tabla 2. Frecuencias absolutas y relativas (porcentajes) de los tipos de argumentación

Tipos de justificación	Items			
	a	b	c	e
Informal	4 (21,05)	2 (9,09)	3 (14,29)	3 (15,79)
Aritmética	12 (63,16)	14 (63,64)	5 (23,81)	10 (52,63)
Basada en la relación de proporcionalidad/valor unitario	3 (15,79)	6 (27,27)	13 (61,90)	6 (31,58)
Total de respuestas	19 (100)	22 (100)	21 (100)	19 (100)

Vemos que en los ítems a), b) y e) predominan las explicaciones de tendencia aritmética, centradas en la operación (presente en registro numérico o lenguaje natural). Sin embargo, en el ítem c) hay una mayor frecuencia de explicaciones que podemos considerar más formales, en las que se hace evidente la relación de proporcionalidad o el significado del valor unitario.

Además de éstas, dos alumnos (una de cuyas aportaciones se pueden ver en la figura 6) incluyen tablas como justificación a los resultados de los distintos ítems de la tarea.

Figura 6 Justificación tabular de E22 a distintos apartados de la tarea.



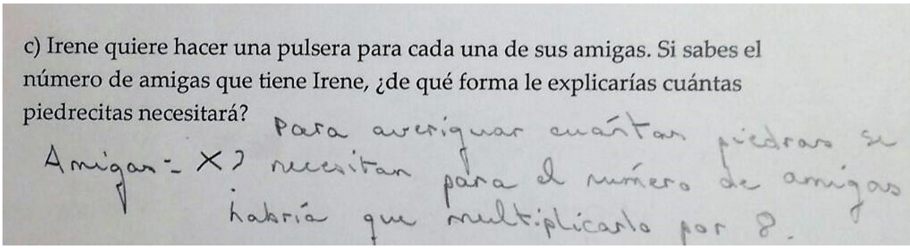
Respecto a los tipos de lenguajes empleados por los alumnos (ver tabla 3) los registros más habituales son el natural y el numérico, si bien en algunas de las respuestas se incluyen diagramas o tablas para comunicar la solución (13,04% en el ítem a), 8,7% en el ítem b, 9,52% en el ítem c), 4,52% en el ítem d y 15,79% en el ítem e). En los ítems a), b) y d), los registros predominantes son el natural y numérico conjuntamente. En cambio, en las tareas de tipo argumentativo (ítems c y e) el registro predominante es el natural de manera exclusiva (alrededor del 80%).

Tabla 3. Frecuencias absolutas y relativas (porcentajes) de los tipos de lenguaje

Tipos de lenguaje	Items				
	a	b	c	d	e
Sólo natural	2 (8,70)	2 (8,70)	17 (80,96)	6 (27,27)	15 (78,95)
Sólo numérico	0 (0)	1 (4,35)	1 (4,76)	2 (9,09)	0 (0)
Natural y numérico	18 (78,26)	18 (78,26)	0 (0)	13 (59,09)	0 (0)
Natural y diagramático	0 (0)	0 (0)	2 (9,52)	0 (0)	3 (15,79)
Numérico y diagramático	3 (13,04)	2 (8,70)	0 (0)	1 (4,54)	0 (0)
Natural y simbólico	0 (0)	0 (0)	1 (4,76)	0 (0)	1 (5,26)
Total de respuestas	23 (100)	23 (100)	21 (100)	22 (100)	19 (100)

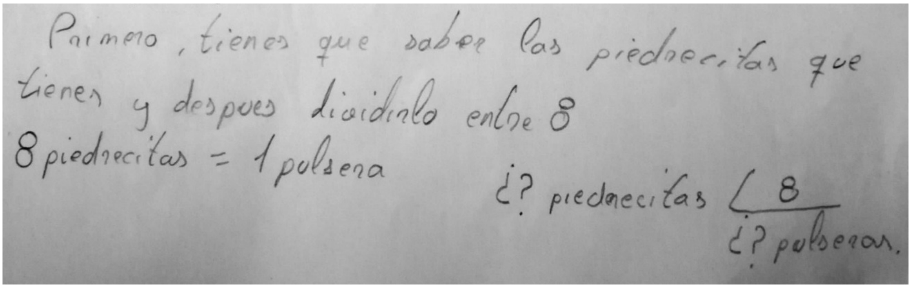
Las figuras 7 y 8 muestran las producciones de dos alumnos a las tareas c) y e), respectivamente, en las que recurren a un lenguaje más simbólico para hacer referencia a las incógnitas o parámetros.

Figura 7. E10 usa el símbolo literal para incógnita


c) Irene quiere hacer una pulsera para cada una de sus amigas. Si sabes el número de amigas que tiene Irene, ¿de qué forma le explicarías cuántas piedrecitas necesitará?

Amigas - X? Para averiguar cuántas piedras se necesitan para el número de amigas habría que multiplicarlo por 8.

Figura 8. Uso del símbolo ¿? por E11 para denotar cantidades desconocidas


Primero, tienes que saber las piedrecitas que tienes y despues dividirlo entre 8

8 piedrecitas = 1 pulsera

¿? piedrecitas | 8

¿? pulseras.

El valor unitario, “piedras por pulsera”, es representado por varios alumnos como se percibe en la imagen anterior, a través de la identidad “8 piedrecitas=1pulsera”.

Las tareas a), b) y d) sólo involucran números particulares (objetos con un primer grado de generalidad). Como hemos mencionado, en estos apartados o de manera conjunta a todos ellos, algunos alumnos elaboran tablas (objetos con un segundo grado de generalidad), donde las filas son los números de piedrecitas y los números de pulseras, y el número de columnas es variable.

Responder de manera correcta a los apartados c) y e) requiere un proceso de generalización: expresar la regla para hallar el número de piedrecitas a partir del número de pulseras (ítem c), o el número de pulseras a partir del número de piedrecitas disponibles (ítem e), cuando éstas son variables. En términos de Radford (2003), se produce una generalización contextual: los estudiantes objetivan un esquema operacional que actúa sobre objetos abstractos pero conceptual, espacial y temporalmente situados.

Diecinueve alumnos, de veintiuno que respondieron al ítem c), y diecisiete alumnos de diecinueve que respondieron al ítem e), lograron este mayor grado de generalidad en la resolución de la tarea.

Resumimos en la tabla 4 los resultados relativos a los grados de generalidad descritos.

Tabla 4. Frecuencias relativas y porcentajes de los grados de generalidad obtenidos.

Grado de generalidad	Ítems				
	a	b	c	d	e
Números particulares	21 (91,30)	22 (95,65)	2 (9,52)	22 (100)	2 (10,53)
Elabora una tabla	2 (8,70)	1 (4,35)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
Expresa regla general	0 (0)	0 (0)	19 (90,48)	0 (0)	17 (89,47)
Total de respuestas	23 (100)	23 (100)	21 (100)	22 (100)	19 (100)

4.3. NIVEL DE ALGEBRIZACIÓN

En el estudio de los niveles de algebrización de la situación de las pulseras, y pensando en el proceso de generalización y las transformaciones implicadas, distinguimos dos partes en la tarea. Por un lado, los ítems a), b) y c) que preguntaban sobre el número de piedrecitas a partir de una cantidad (conocida o desconocida) de pulseras, y por otro lado los ítems d) y e) que preguntaban sobre el número de pulseras a partir de una cantidad (conocida o desconocida) de piedrecitas.

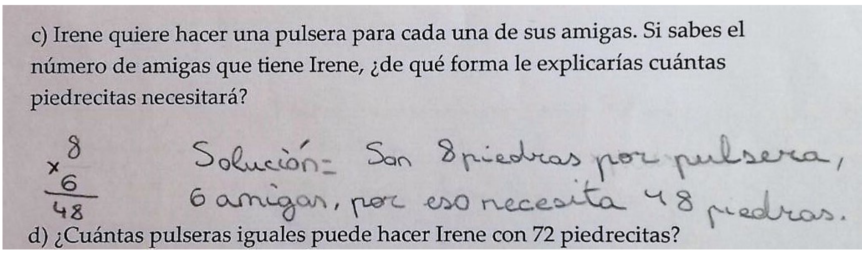
Los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas requeridas son números particulares, tablas en algunos casos o bien la clase de posibles soluciones fijado el número de amigas (apartado c) o el número de piedras (ítem e). El lenguaje es natural, numérico o icónico y aunque puedan intervenir símbolos para referirse a datos desconocidos, no se opera con ellos.

Casi todos los alumnos, respondieron a la tarea por medio de reducción a la unidad y la mayoría expresaron la regla general en base a ésta. Cuando se reconoce la generalidad, se hace en lenguaje natural. Así concluimos que la actividad matemática desarrollada por la mayoría de los alumnos (diecinueve de los 23 en la primera parte, y dieciocho de los 23) en la segunda se puede considerar proto-algebraica (nivel 1 de algebrización). Cinco estudiantes tuvieron un nivel de algebrización distinto en la primera parte y la segunda; concretamente, para tres de ellos la actividad de la primera parte fue de nivel 1 de algebrización y nivel 0 (aritmética) en la segunda, y para dos de ellos el tratamiento de la primera parte fue aritmético y en la segunda parte proto-algebraico de nivel 1.

En la siguiente captura (figura 9) se puede ver la diferencia de niveles con que la alumna E9 responde a dos tareas: la actividad en el primer apartado se considera de nivel 0, ya que opera sobre números particulares, en un lenguaje natural y numérico; en el segundo apartado se considera de nivel 1, ya que explicita el criterio para obtener el número de piedras a partir del valor unitario.

Figura 9. Soluciones con niveles de algebrización distinta

Práctica de nivel 0 de algebrización



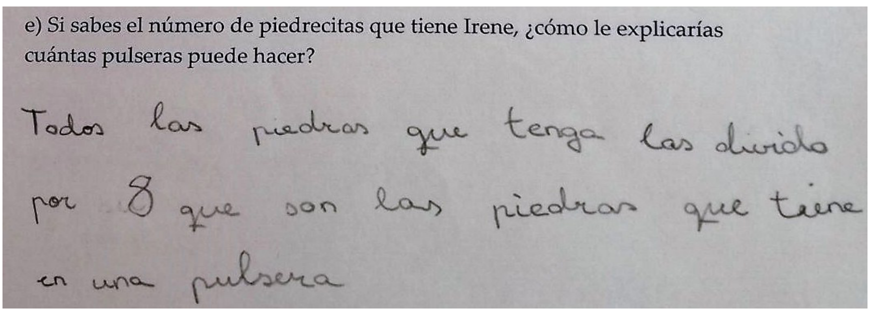
c) Irene quiere hacer una pulsera para cada una de sus amigas. Si sabes el número de amigas que tiene Irene, ¿de qué forma le explicarías cuántas piedrecitas necesitará?

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times\ 6 \\ \hline 48 \end{array}$$

Solución= Son 8 piedras por pulsera, 6 amigas, por eso necesita 48 piedras.

d) ¿Cuántas pulseras iguales puede hacer Irene con 72 piedrecitas?

Práctica de nivel 1 de algebrización



e) Si sabes el número de piedrecitas que tiene Irene, ¿cómo le explicarías cuántas pulseras puede hacer?

Todos las piedras que tenga las divido por 8 que son las piedras que tiene en una pulsera

La alumna llega en el ítem e) a una generalización contextual, por medio de la cual es capaz de establecer, verbalmente, una relación funcional entre el número de piedras y el número de pulseras, reconociendo la indeterminación de la primera cantidad.

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

De manera general, podemos considerar que los alumnos han resuelto con éxito la tarea propuesta. Como mínimo 95% de los alumnos realizaron de forma correcta las prácticas operativas. En el caso de las discursivas, 78,26% respondieron de forma apropiada al ítem c) y 69,56% lo hicieron adecuadamente al ítem d). En los ítems a) y b), la argumentación empleada para justificar la respuesta es de índole aritmética, mientras que en el apartado c) en el que se espera que los alumnos identifiquen la regla general para obtener el número de piedrecitas a partir del número de amigas, el argumento usado de forma mayoritaria recae en el valor unitario. En el ítem e), en el que se pregunta por la relación inversa, la explicación más frecuente vuelve a ser de tipo aritmético. Observamos en este hecho que, si bien la relación de proporcionalidad entre magnitudes o series de números es una relación simétrica, la constante de proporcionalidad depende del orden en que las magnitudes o series de números sean consideradas. Algunas investigaciones (Dupuis y Pluvinage, 1981; Bezuk, 1986) sostienen que el orden en que se presentan los datos en un problema de valor faltante, determina el grado de dificultad en su resolución, de manera que, a los ítems d) y e) en la tarea de las pulseras se les presupone una mayor dificultad que a los apartados a), b) y c). Los resultados obtenidos en dicha tarea, muestran que la mayoría de los alumnos (86,95%), no tuvieron dificultades en responder adecuadamente cuando se preguntaba de manera inversa por las pulseras y no por el número de piedras. Sin embargo, como hemos mencionado, explicar de forma correcta esta relación recíproca supuso mayor dificultad.

El análisis retrospectivo sobre la experiencia pone de manifiesto que el uso de tareas introductorias sobre proporcionalidad, por medio de tablas numéricas y el planteamiento de cuestiones dirigidas a identificar las propiedades aditiva y homogénea de la función de proporcionalidad, puede permitir que los alumnos progresen hacia niveles superiores de razonamiento algebraico, evitando el uso incorrecto de estrategias de composición y descomposición que involucraba relaciones aditivas o aditivas y multiplicativas a la vez (Fernández-Lajusticia, 2001; Misailidou y Williams, 2003; Silvestre y Ponte, 2012).

Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014) proponen el modelo teórico de los niveles de algebrización para describir el tipo de razonamiento algebraico que se pone en juego en la resolución de tareas matemáticas específicas por un sujeto epistémico, en términos de la presencia gradual, en la actividad matemática, de objetos y procesos algebraicos, así como el desarrollo progresivo de las formas del lenguaje y de los procesos de generalización. Dicho modelo ha sido aplicado en la formación de profesores (Godino, et al., 2017; Burgos, Giacomone, Beltrán-Pellicer y Godino, 2017; Burgos, Beltrán- Pellicer, Giacomone y Godino, 2018) a fin de capacitar a futuros maestros del grado de primaria y futuros profesores de secundaria para identificar los objetos y procesos que determinan los distintos niveles de algebrización, así como para transformar las tareas matemáticas escolares hacia el logro de niveles progresivos de razonamiento algebraico en tareas de proporcionalidad. En este trabajo, hemos aplicado los niveles de algebrización para describir el trabajo matemático de los propios estudiantes cuando resuelven situaciones de problema de proporcionalidad.

Hemos constatado que más del 78% de los alumnos respondieron con un nivel 1 de algebrización a las tareas. De hecho, algunos alumnos habían puesto en práctica de forma intuitiva la estrategia de reducción a la unidad en la primera tarea introductoria para completar la tabla. Los alumnos que desarrollaron un nivel 0 de algebrización en los apartados a), b), c), respondieron de forma incorrecta a los ítem b) y c) y tres de los alumnos que desarrollaron una actividad de nivel 0 en los apartados d), e), respondieron de forma incorrecta al último ítem. Parece deducirse de este hecho, cierta relación entre el grado de éxito en la respuesta y el carácter proto-algebraico de la actividad desarrollada.

Podemos concluir en relación a nuestra pregunta de investigación, que la mayoría de los alumnos que participaron en nuestro estudio exhibieron una forma de razonamiento proto-algebraico incipiente cuando se enfrentaron por primera vez a tareas de proporcionalidad. En el siguiente encuentro con la proporcionalidad, programado para el sexto curso, será posible proponer tareas y consignas que lleven a incrementar el nivel de algebrización de la actividad matemática realizada por los alumnos, siempre que se aplique un modelo didáctico mixto en el que el profesor y los alumnos trabajan juntos en la solución de las tareas. El dominio progresivo del razonamiento algebraico, ligado a la proporcionalidad, es un objetivo educativo deseable que no se logrará de manera espontánea.

En este trabajo hemos centrado la atención en investigar las relaciones entre el razonamiento proporcional y el algebraico, aplicando los criterios de caracterización de los niveles proto-algebraicos de razonamiento algebraico. El crecimiento del razonamiento proporcional se conecta con la aplicación de objetos y procesos algebraicos, los cuales aportan significados progresivamente más elaborados para la proporcionalidad. Por otra parte, la experimentación con los alumnos de 5º curso primaria se realiza bajo un modelo didáctico de tipo mixto, instructivo – investigativo, en el que se propone un primer encuentro con la proporcionalidad con ejemplos introductorios, en cuya resolución tanto el docente como los estudiantes tienen papeles protagonistas.

La creciente demanda en la comunidad de investigadores en educación matemática por la posibilidad de potenciar formas de razonamiento algebraico en los primeros años de escolaridad, requiere del desarrollo de una perspectiva más amplia sobre la naturaleza del álgebra escolar y del pensamiento algebraico en edades tempranas. En particular, precisa la búsqueda de modelos didácticos que motiven la interacción entre los alumnos y entre alumnos – profesor, y ofrezcan la posibilidad a los estudiantes para promover el razonamiento algebraico. Compartimos las ideas de Radford (2011, p. 308) de que "el pensamiento algebraico no aparece en la ontogenia por casualidad, ni tampoco aparece como una consecuencia necesaria de la maduración cognitiva. Para conseguir que aparezca el pensamiento algebraico y hacerlo accesible a los estudiantes, algunas condiciones didácticas deben ser creadas".

El carácter algebraico de una práctica matemática no se reduce al uso del simbolismo algebraico, sino a ciertas formas de razonamiento. Los estudiantes de los primeros niveles educativos pueden expresar tipos de objetos y procesos algebraicos a través de medios de expresión distintos del simbólico, en particular, pueden recurrir al lenguaje ordinario, gráfico, tabular o incluso gestual (Radford, 2003).

Uno de los objetivos que hemos perseguido con la investigación en la que se enmarca este trabajo, ha sido buscar condiciones didácticas, a través de un modelo mixto instructivo – investigativo, que permitan reconocer y promover formas de razonamiento proto-algebraico. La identificación de los objetos, procedimientos y significados vinculados a los distintos niveles de algebrización, nos ha permitido constatar formas de razonamiento algebraico temprano emergentes en las prácticas desarrolladas por alumnos de quinto curso de educación primaria, cuando se enfrentan por primera vez a tareas de proporcionalidad directa.

Desarrollar un razonamiento proporcional no es lo mismo que ser capaz de aplicar una regla o algoritmo (reducción a la unidad, o regla de tres) para resolver un problema de proporcionalidad. Creemos que es importante desde el inicio de la instrucción, dar oportunidades a los estudiantes de desarrollar una comprensión conceptual de la proporcionalidad, y de pensar, comunicar y generalizar las relaciones de forma que resolver problemas de proporcionalidad no se reduzca únicamente a la aplicación memorística de una técnica o procedimiento.

En la construcción progresiva del razonamiento proporcional, es posible promover niveles mayores de algebrización aprovechando la variedad de significados presentes en los contenidos matemáticos de educación primaria. Se requiere diseñar y experimentar nuevas situaciones que relacionen la construcción de tablas de proporcionalidad y la técnica de reducción a la unidad, propias de un primer nivel proto-algebraico, con actividades características de niveles superiores de algebrización como serían el procedimiento de la regla de tres (nivel 2 de algebrización) o la representación de la función lineal en lenguaje formal (nivel 3 de algebrización). La aplicación de la noción de proporción y la solución de un problema de valor faltante, basado en el uso de razones, tiene asociado un nivel 2 de algebrización; mientras que el significado propiamente algebraico (nivel 3) se caracteriza por la aplicación de la noción de función lineal y de técnicas de resolución basadas en las propiedades de dichas funciones (Godino *et al.*, 2017).

RECONOCIMIENTOS

Investigación realizada como parte del proyecto de investigación, EDU2016-74848-P (FEDER, AEI) y con apoyo del Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía, España).

REFERENCIAS

Artigue, M. (2011). L'ingénierie didactique: un essai de synthèse. En C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 225-237). Grenoble: La pensée Sauvage.

Bezuk, N. (1986). *Variables affecting seventh grade students' performance and solution strategies on proportional reasoning word problems*. Doctoral Dissertation, University of Minnesota, 1986). Digital Dissertations, 321. (AAT 8625870).

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Godino, J. D. (2018). Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. *Educação e Pesquisa*, *44*, 1-22.

Burgos, M., Giacomone, B., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2017). Reconocimiento de niveles de algebrización en una tarea de proporcionalidad por futuros profesores de matemáticas de secundaria. En J.M. Muñoz-Escolano, A. ArnalBailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* XXI (pp. 177-186). Zaragoza: SEIEM.

Butto, C. y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: el papel del entorno Logo. *Educación Matemática*, *22*(31), pp. 55-86.

Bentley, B. y Yates, G. (2017). Facilitating proportional reasoning through worked examples: Two classroom-based experiments. *Cogent Education*, *4*(1), pp. 1-14.
https://doi.org/10.1080/2331186X.2017.1297213

Cai, J. y Knuth, E. (2011) (Ed.). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. Berlin: Springer-Verlag.

Carpenter, T. P., Frankle, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically. Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, T. P. y Levi, L. (2000). *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades*. (Res.Rep.00-2). Madison, WI: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science (NCISLA).

Cramer, K. y Post, T. (1993). Connecting research to teaching proportional reasoning. *Mathematics Teacher*, *86*(5), pp. 404-407.

Carraher, D.W., y Schliemann, A.D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F.K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 669-706). Reston, Virginia: NCTM e IAP.

Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. In A.E. Kelly, R.A. Lesh y J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education. Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching* (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Dupuis, C. y Pluvinage, F. (1981). La proportionnalité et son utilisation, *Recherches en didactique des mathématiques*, *2*(2), pp. 165-212.

Ercole, L.K., Frantz, M., y Ashline, G. (2011). Multiple ways to solve proportions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *16*(8), pp. 482-490.

Fernández-Lajusticia, A. (2001). *Precursores del racionamiento proporcional: un estudio con alumnos de primaria.* Tesis doctoral. Universitat de València. Recuperado de http://roderic.uv.es/handle/10550/38017

Fernández, C. y Llinares, S. (2011). De la estructura aditiva a la multiplicativa: Efecto de dos variables en el desarrollo del razonamiento proporcional. *Infancia y Aprendizaje, 34*(1), pp. 67-80.

Fernandez, C. y Llinares, S. (2012) Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la Educación Primaria y Secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(1), pp. 129-142.

Fielding-Wells, J., Dole, S. y Makar, K. (2014). Inquiry pedagogy to promote emerging proportional reasoning in primary students. *Mathematics Education Research Journal, 26*, 47-77.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht, Holland: Reidel Publishing.

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencia*s, *32*(1), pp. 199-219.

Godino, J. D., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2016). Linking inquiry and transmission in teaching and learning mathematics and experimental sciences. *Acta Scientiae, 18*(4), pp. 29-47.

Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A., Lacasta, E. y Wilhelmi M.R. (2013). Didactic engineering as design-based research in mathematics education. *CERME 8*, Turquía.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* 39(1-2), pp. 127-135.

Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M. y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (pp. 1-13). Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Inhelder, B. y Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence.* New York: Basic Books.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York: Routledge.

Karplus, R., Pulos, S. y Stage, E. (1983). Early adolescents proportional reasoning on "rate" problems. *Educational Studies in Mathematics, 14*, pp. 219-233.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator, 18*(1), pp. 139-151.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: connecting content and Children's thinking, *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(1), pp. 41-61.

Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1988). Proportional reasoning. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations for the middle grades* (pp. 93-118). Reston, VA: NCTM.

Lim, K.H. (2009). Burning the candle at just one end: Using nonproportional examples helps students determine when proportional strategies apply. *Mathematics Teaching in the Middle School, 14*(8), pp. 492-500.

Misailidou, C. y Williams, J. (2003). Diagnostic assessment of children's proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, pp. 335-368.

Miyakawa, T. y Winsløw, C. (2009). Didactical designs for students' proportional reasoning: an "open approach" lesson and a "fundamental situation". *Educational Studies in Mathematics*, *72*(2), pp. 199–218.

Mochón Cohen, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres, *Educación Matemática*, *24*(1), pp. 133-155.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, *3*(3), pp. 135-156.

Obando, G., Vasco, C. E. y Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(1), pp. 59-81.

Radford, L. (1996). The Role of Geometry and Arithmetic in the Development of Algebra: Historical Remarks from a Didactic Perspective. En N. Bernardz, C. Kieran y L. Lee (eds.) *Approaches to Algebra Perspectives for Research and Teaching* (pp. 39-53). Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), pp. 37-70.

Radford, L. (2011). Grade 2 Students´ Non-Symbolic Algebraic Thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), Early Algebraization. A global dialogue from multiple perspectives. (pp. 303-322) Berlin: Springer-Verlag.

Radford, L. (2013). Three key concepts of the theory of objectification: knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, *2*(1), pp. 7-44.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal, 26*, pp. 257-277.

Ruiz, E. F. y Valdemoros, M. (2004). Connections between qualitative and quantitative thinking about proportion: The case of Paulina. En M. J. Hoines y A. B. Flugestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3*, 201–208. Bergen, Noruega: PME.

Sánchez, E. A. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: Una mirada desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 16*(1), pp. 65-97.

Silvestre, A. I. y Ponte, J. P. (2011) Una experiencia de enseñanza dirigida al desarrollo del razonamiento proporcional. *Revista Educación y Pedagogía*, *23*(59), pp.137-158.

Socas, M. (2011). La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números,* 77, pp. 5-34.

Streefland, L. (1985). Search for roots of ratio: some thoughts on the long term learning process (towards... a theory) part II: the outline of the long term learning process. *Educational Studies in Mathematics, 16*(1), pp. 75-94.

Tourniaire, F., Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, *16*, pp. 181-204.

Ursini, S. (1996). Experiencias pre-algebraicas. *Educación matemática, 8*(2), pp. 33-40.

Van Dooren, W., De Bock, D. Gillard, E. y Verschaffel, L. (2009). Add? Or Multiply? A study on the development of primary school students' proportional reasoning skills. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y C. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 5*, pp. 281-288. Thessalonika, Grecia: PME.

Warren, E. (2003). The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. *Mathematics Education Research Journal*, *15*(2), 122-137.

María Burgos Navarro

Dirección: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (UGR), España. Facultad de Ciencias de la Educación. Campus Universitario de Cartuja C.P. 18071 (Granada, España).

Teléfono: 958 243949

ANEXO. TAREAS INTRODUCTORIAS

Tarea 1: Laura visita a su tío

Es la fiesta fin de curso y las clases de quinto quieren encargar tartas para celebrarlo. El tío de Laura es pastelero, ¡hace unas tartas deliciosas! Así que Laura ha ido a visitarlo. Esa mañana usó 3 litros de leche para hacer 18 tartas iguales. Laura quiere saber cuántas tartas puede elaborar con 6, 2 y 5 litros de leche.

Laura, que es una chica muy lista, razona de la siguiente manera para formar una tabla como la mostrada a continuación.

- Primero, 6 es el doble de 3 (el número de litros de leche que necesitó para 18 tartas). Coloca tú en la tabla el número de tartas que puede hacer con 6 litros de leche.
- Luego piensa que 2 litros es la tercera parte de 6 litros. Pon el siguiente número de tartas en la tabla.
- Por último 5 litros de leche son 2 litros más los 3 litros iniciales.

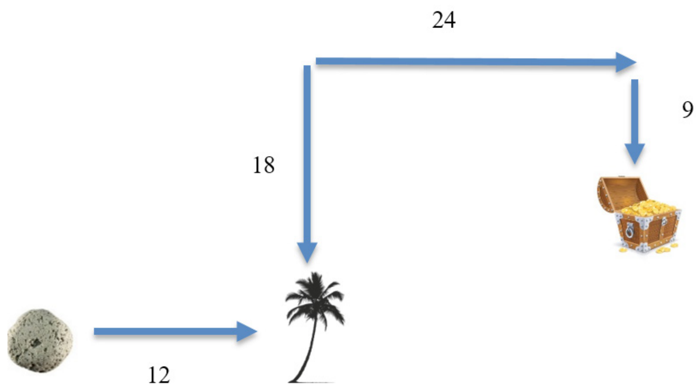
Termina de llenar la tabla siguiendo estas tres ideas.

Litros de leche	3	6	2	5
Tartas	18			

¿Se te ocurre alguna forma distinta a como lo hizo Laura para completar la tabla?

Tarea 2: El Pirata (El mapa del tesoro; adaptado de Mochón, 2012)

Un pirata encuentra un mapa con medidas raras en el que se indica dónde fue enterrado un tesoro. El diagrama grabado es el siguiente.



El pirata localiza la piedra y la palmera y al caminar entre ellos, cuenta 30 de sus pasos. Ayúdale a saber cuántos de sus pasos corresponden a cada una de las medidas dadas en el mapa.

Tarea 3: Laura sigue pensando

Regresemos a la situación anterior en la que Laura estaba tratando de calcular los litros de leche que necesita su tío para hacer varias tartas. A Laura se le ocurre una idea genial (¡ya hemos dicho que es muy lista!): si puedo calcular el número de tartas que hace mi tío con un solo litro de leche, el cálculo para los otros litros de leche es más fácil. Para esto incluyó el 1 extra en la fila de los litros de leche:

Litros de leche	3	1	6	2	5
Tartas	18				

Ahora, intenta responder a estas preguntas:

a) Si sabes el número de litros de leche de que dispone el pastelero, ¿de qué forma explicarías a un amigo cuantas tartas puede hacer?
b) ¿Cuántos litros de leche necesita el pastelero para hacer 4 tartas?
c) Si sabes el número de tartas que le han encargado hacer al pastelero, ¿cómo le explicarías al pastelero cuántos litros de leche necesita comprar?