EL IMAGINARISMO SEGUN REY Y HEREDIA*

JOSE JAVIER ESCRIBANO BENITO
I.E.S. "Valle del Cidacos" (Calahorra)

RESUMEN

La Teoría transcendental de las cantidades imaginarias *(1865), del filósofo José María Rey y Heredia (1818-1861) se considera la primera referencia significativa publicada en España sobre la interpretación de los números complejos. Su autor pretende desarrollar una metafísica del álgebra que aune y armonice la filosofía con las matemáticas a través de la interpretación de las cantidades imaginarias, basándose en la tabla de las categorías elaborada por Kant.*

En este artículo se exponen los fundamentos filosófico-matemáticos y los resultados matemáticos que recoge la obra de Rey y se analizan en su contexto histórico.

ABSTRACT

The philosopher José María Rey y Heredia (1818-1861) wrote in 1865 the book Teoría Transcendental de las Cantidades Imaginarias, *which is considered the first significant theory published in Spain about the way to consider complex numbers. Its author developed a metaphysical model of algebra to merge and harmonize philosophy and mathematics by means of imaginary quantities understanding, and taking as reference the Kant's table of categories.*

The contents of Rey's book are described in this article, from the philosophical and mathematical fundamentals to the mathematical results, analyzing them by taking into account their historical context.

Palabras clave: Rey y Heredia, Siglo XIX, Matemáticas, Filosofía, España, Imaginarismo.

* Este trabajo ha contado con una Ayuda a la Investigación del Instituto de Estudios Riojanos de la Consejería de Educación, Cultura y Deportes del Gobierno de la Rioja.

Recibido el 3 de noviembre de 1998

1. Introducción

La interpretación geométrica de los números complejos era ya conocida al finalizar el primer tercio del siglo XIX gracias a los trabajos de WESSEL [1799], ARGAND [1806], BUÉE [1806], WARREN [1828], MOUREY [1828], y GAUSS [1831]. En 1837 Hamilton presentó los números complejos como pares ordenados *(a, b)* de números reales, definió de forma aritmética la suma y el producto y demostró —*en palabras actuales— que los pares de números forman un cuerpo con respecto a las operaciones así definidas que es isomorfo al conjunto de los números definidos geométricamente por Gauss* [WUSSING, 1998, p. 209].

En España la primera referencia significativa sobre este tema la encontramos en la *Teoría transcendental de las cantidades imaginarias,* donde el filósofo cordobés José María Rey y Heredia[1] (1818-1861) pretende desarrollar una metafísica del álgebra que aune y armonice la filosofía con las matemáticas a través de la interpretación de las cantidades imaginarias. El resultado es una obra original cuya influencia se dejó notar en la matemática y en la filosofía españolas del siglo XIX, ya que el texto incluye la traducción de un fragmento de la *Crítica de la razón pura,* que puede considerase la *primera traducción aparecida en castellano de un texto escrito por Kant, ochenta y cuatro años después de su publicación* [PALACIOS, 1989, p. 687].

La *Teoría transcendental de las cantidades imaginarias* fue publicada en 1865 gracias al esfuerzo de Pedro Felipe Monlau y Acisclo Fernández Vallín que, tras el fallecimiento de Rey, revisaron y organizaron sus trabajos y consiguieron *a expensas y bajo los auspicios del Gobierno* su impresión[2]. El tratado consta de las siguientes partes:

- Un prólogo biográfico escrito por Monlau dedicado a ensalzar la figura y la obra de su compañero y amigo (pp. IX-XX).

- Una introducción en la que Rey expone sus ideas filosófico-matemáticas sobre las cantidades imaginarias (pp. 1-22).

- El propio texto dividido en cuatro libros dedicados, el primero de ellos a introducir las cantidades imaginarias, y los otros tres a estudiar los algoritmos de la suma, producción (multiplicación) y graduación (potenciación) respectivamente (pp. 23-291).

- La traducción ya indicada anteriormente, de un fragmento de la *Critica de la razón pura*[3] (pp. 294- 305).

- Un glosario, en forma de diccionario, de las principales voces empleadas en la exposición de su teoría. En él se incluyen nuevos argumentos y aclaraciones, por lo que debe considerarse parte integra del texto y no un apéndice del mismo (pp. 307-343).

El objeto de este artículo es exponer los fundamentos filosófico-matemáticos y los resultados matemáticos que recoge la obra del pensador cordobés, y analizarlos en su contexto histórico.

2. Fundamentación epistemológica

Rey, en su *Teoría transcendental de las cantidades imaginarias,* se propone dotar al imaginarismo de una teoría filosófica coherente:

"El imaginarismo es el *scandalum mathematicum* constituido en teoría, la derogación de la regla erigida en regla, el imposible sometido a la misma lógica que las cosas posibles, el absurdo considerado como origen de la verdad y de la realidad [...] Es necesario una teoría transcendental del imaginarismo, que salve todas las contradicciones y dé a las ciencias matemáticas aquel esplendor e integridad a que tienen derecho con mejor título que ninguna ciencia [...]" [REY, 1865, pp. 2-3].

Para conseguir este fin se basa en tres *pensamientos* que, a juicio del autor, resumen su obra:

"1° El símbolo $\sqrt{-1}$ es un signo de perpendicularidad. - BUÉE
2° Los números imitan el espacio, aunque son de naturaleza tan diferente.- PASCAL
3° El cuadro de las categorías del entendimiento indica todos los momentos de una ciencia especulativa proyectada, y da hasta su ordenación y régimen.- KANT
El primero es un pensamiento puramente matemático
El segundo es de Filosofía matemática.
El tercero es de Filosofía transcendental" [REY, 1865, p. 291].

Merece la pena detenerse para analizar históricamente cada uno de ellos ya que el interés de la obra de Rey reside en la interpretación de estas ideas y no en los resultados matemáticos que en ella se obtienen.

Sobre la $\sqrt{-1}$

La elección del primer pensamiento viene justificada por el fracaso de los métodos seguidos anteriormente:

"Mientras la generalidad de éstos [geómetras] considera que las imaginarias son la expresión pura y simple de la imposibilidad de solución de algunos problemas contradictorios, otros, siguiendo a Condillac, más ideólogos que matemáticos, llegan a considerarlos sólo como signos sin significación, voces sin sentido, términos sin ideas, como, según ellos, lo son muchas palabras de la lengua que viven en ella ociosas y sin oficio, vocablos parásitos, viciosas excrecencias del idioma que sirven tan sólo para estorbo. Otros vieron sin duda gran profundidad lógica al imaginarismo pero se contentaron con verla y no la explicaron más que dando a las imaginarias el expresivo dictado de símbolos lógicos. Otros como Wronski[4] acuden a la noción de infinito para borrar en el seno de esta idea inmensa, e informe, toda contradicción, [...] algunos en fin (y estos son los que a mi juicio aciertan), dan a las imaginarias la representación de la perpendicularidad" [REY, 1865, pp. 2-3].

Entre estos últimos Rey cita, sin entrar en detalles, a Buée, Warren, Français, Peacock, Vallés, Gergonne, Mourey...

La idea, básica en Rey, de presentar $\sqrt{-1}$ como un signo de perpendicularidad aparece, efectivamente, en la obra de BUÉE [1806]:

"$\sqrt{-1}$ no es por consiguiente el signo de una operación aritmética, ni de una operación aritmético-geométrica, sino de una operación puramente geométrica. Es un signo de perpendicularidad. Es un signo puramente descriptivo [...] que indica la dirección de una línea, abstracción hecha de su longitud" [VALLÈS, 1841, p. 187; BEMAN, 1899, p. 181].

Con anterioridad WALLIS [1685] había propuesto representar las raíces (imposibles) imaginarias de una ecuación de segundo grado fuera de la recta real sobre la cual se llevarían sus valores si fuesen reales. En 1797 Caspar Wessel presentó a la Real Academia de Dinamarca una memoria [WESSEL, 1799] que supone el primer tratado claro, preciso y científico sobre la representación geométrica de segmentos lineales dirigidos. En él se designa $\varepsilon = \sqrt{-1}$ como una unidad perpendicular a 1:

"Designamos por +1 la unidad rectilínea positiva, por $+\varepsilon$ otra unidad perpendicular a la primera con el mismo origen: entonces el ángulo de dirección +1 será igual a 0°; el de -1 a 180°; el de $+\varepsilon$ a 90° y el de $-\varepsilon$ a -90° ó 270°; y según la regla de que el ángulo de la dirección del producto es igual a la suma de los de los factores, se tiene:

$(+1)(+1)=+1 \quad \ldots \quad (+\varepsilon)(+\varepsilon)=-1$..." [BEMAN, 1899, p. 171].

Esta memoria fue publicada en 1799, y a pesar de sus méritos, pasó inadvertida hasta que un siglo después de la presentación del original en 1897, la Academia danesa publicó una traducción en francés.

Simultáneamente a la publicación de la obra de Buée, en 1806, el suizo Jean Robert Argand dio a conocer un ensayo donde introduce el concepto de *línea dirigida (lignes en direction* ou *lignes dirigées),* $\overline{AB}$, considerada a la vez en magnitud y dirección, y presenta $\sqrt{-1}$ como un signo de perpendicularidad[5]:

"[...] toute ligne parallèle à la direction primitive est exprimée par un nombre réel, que celles qui lui sont perpendiculaires sont exprimées par des nombres imaginaires ou de la forme $\pm a\sqrt{-1}$, et, enfin, que celles si sont tracées dans une direction autre que les deux précédentes appartiennent à la forme $\pm a \pm b\sqrt{-1}$, qui se compose d'une partie réelle et d'une partie imaginaire".

Aunque la obra de Argand tuvo muy poca difusión, en 1813 Jacques-Fréderic Français publicó en los *Annales de Mathématique de Gergonne* una memoria[6] donde se exponen las ideas de Argand de forma más clara y sistemática. Durante los años 1813-1815 dichos *Annales* recogieron una serie de artículos de Français, François-Joseph Servois, Joseph Diaz Gergonne y del propio Argand, que contribuyeron a difundir las ideas de este último. Con todo, no llegaron a ser realmente conocidas hasta que J. Hoüel publicó en 1874 una segunda edición de la obra de Argand, donde se incluía un apéndice con los artículos mencionados. En uno de estos [ARGAND, 1971, pp. 92-93], Argand trata de extender al espacio la representación en el plano de las cantidades imaginarias, mediante la utilización de la doblemente imaginaria $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ como una línea pérpendicular a 1 y a $\sqrt{-1}$, a pesar de que Euler había demostrado en 1746 que se trataba de una cantidad real[7].

Llama la atención el hecho de que Rey que cita a Français y Gergonne —aunque sin especificar las obras— no haga lo mismo con Argand cuando sus artículos se publicaron en la misma revista y tuvieron en algunos casos carácter de réplica y contrarréplica. En todo caso coincide con el matemático suizo en señalar que $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ representa la tercera dimensión en el espacio y hace de ello uno de sus principales resultados:

"La teoría algébrica llega aquí a un máximum de la posibilidad de la intuición geométrica. Tan imposible es una nueva forma irreducible distinta de las tres típicas

$$1 \qquad 1 \times \sqrt{-1} \qquad \text{y} \qquad 1 \times \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$$

como aumentar el número de dimensiones del espacio" [REY, 1865, pp. 288-289].

La idea de utilizar $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ para representar la tercera dirección en el espacio es compartida por diversos matemáticos a lo largo del siglo XIX sin que ello suponga, necesariamente, que desconozcan la demostración que de su realidad dio Euler. Así Argand refuta el razonamiento de Euler por considerar que la identidad

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \operatorname{sen} x \sqrt{-1}$$

no está definida para cantidades imaginarias. Más extraña resulta la interpretación de Rey que a pesar de justificar la identidad anterior —sin citar a Euler— y de admitir que las graduaciones reales e imaginarias están sometidas a las mismas reglas llega a esta conclusión por una peculiar (e innecesaria) división de las exponenciales imaginarias en dos tipos, tal y como veremos más adelante. Para otros, como Domínguez Hervella, la expresión $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ es tan sólo una (confusa) notación:

"Precisamente por eso el Sr. Domínguez se guarda bien de hacer la multiplicación de los dos exponentes, cuyo imaginarismo desaparecería en el acto, sino que prescribe conservar la forma de la exponencial como un símbolo, y desde ese momento los símbolos de Hamilton son preferibles por mas sencillos y mas generales"[8].

En 1828 se publicaron en Cambridge y París respectivamente dos memorias WARREN [1828] y MOUREY [1828], a las que Rey hace referencia en su obra. De la primera destaca la inclusión de diversos teoremas relativos a la diagonal del paralelogramo en los que emplea la *idea de inclinación* de una recta y el valor en grados que tiene la raíz cuadrada de una recta negativa. En la segunda se define el concepto de *versor* que, en palabras de Rey, es *el ángulo que expresa la inclinación de una recta respecto a otra,... equivale al argumento en nuestra Teoría, y es la expresión de la cualidad imaginaria*[9].

La idea de que el signo $\sqrt{-1}$ representa la perpendicularidad es también *le fait capital* sobre el que apoya su interpretación de los imaginarios el ingeniero francés M.F. Vallés en sus *Études philosophiques sur la sciencie du calcul* (1841). En esta obra, una de las pocas que Rey cita expresamente, el autor desarrolla el concepto de la cualidad y repasa los artículos de Buée, Argand, Servois, Gergonne y especialmente de Français, estableciendo las modificaciones necesarias para que el trabajo de este último *sinon sous le point de vue philosophique, du moins sous le point de vue de l'algèbre, être admis comme exact* [VALLÈS, 1841, p. 225].

Hay otros autores cuya influencia no queda reflejada en la obra de Rey y Heredia y que, sin embargo, fueron muy importantes en la evolución de estos conceptos como Möbius, Gauss, Bellavitis, Cauchy, Hamilton o Grassmann. Ya nos hemos referido a Hamilton con relación a los números complejos. El mismo autor introdujo, en 1843, los cuaternios, sobre los que escribió numerosos trabajos[10] en los que aparece por primera vez un producto no conmutativo. Esta propiedad contrasta frontalmente con las ideas de Rey que presupone la conmutatividad de cualquier multiplicación algebraica:

"no comprendo —dice Rey— que haya matemáticos que se propongan seriamente esta demostración" [REY, 1865, p. 114].

De forma casi simultánea a los descubrimientos de Hamilton, Hermann Günther Grassmann desarrolla su *Teoría de la extensión* [GRASSMANN, 1844]. El concepto básico que él denomina *cantidad extensiva,* es un cierto hipernúmero de *n* componentes del que los vectores son un caso particular. Define el *producto interno* idéntico a nuestro producto escalar y un *producto exterior* que recuerda al producto vectorial y al igual que este no cumple la propiedad conmutativa. La primera edición de la obra de 1844, pasó prácticamente inadvertida para los matemáticos de la época que la consideraron confusa y excesivamente abstracta y filosófica. En 1862, cuando ya Rey había fallecido, se publicó una segunda edición que resultó algo más clara y precisa que la anterior cuya repercusión se dejó sentir en otros autores como Hankel, Clifford o Gibbs, que sientan las bases de un análisis vectorial como disciplina autónoma, independiente de los cuaterniones, y del análisis de Grassmann.

Sobre números y espacio

En el segundo de los pensamientos *—Los números imitan el espacio, aunque son de naturaleza tan diferente. (PASCAL)—* en los que Rey basa su obra, se intuye un enfoque racionalista. Para esta escuela, a la cual pertenece Pascal, el mundo es una construcción matemáticamente perfecta obra de un Dios-Geómetra que le otorga las adecuadas leyes matemáticas. Esta concepción del mundo como construcción geométrica se remonta a los pitagóricos, para los que el número revela la verdadera naturaleza de las cosas, de forma que la estructura del mundo es en realidad una relación entre números. Platón va aún más lejos y considera que el mundo perceptivo es una proyección a modo de mapa o un modelo de las estructuras matemáticas. La misma idea se mantiene con diferentes matices en otros científicos y filósofos: Galileo, Descartes, Pascal, Spinoza, Leibniz, Kant... Una tradición que también está latente en la obra de nuestro pensador:

"Hay en nuestra alma una potencia de cálculo y de mensuración oculta y misteriosa [...] de tal suerte que cuando la ciencia viene a darnos las reglas, o a demostrarnos las verdades teóricas, más parece que recordamos que lo que antes sabíamos, que no que aprendemos lo que ignorábamos. Sabemos contar y medir antes que hablar y reflexionar... Somos mas matemáticos por naturaleza de lo que nosotros creemos, y nuestra facultad de pensante se connaturaliza tanto con el cálculo y la medida, que es dable reconocer un gran fondo de verdad en aquella doctrina de los pitagóricos, de que nuestra alma es un número que cuenta (númerus numerans)" [REY, 1865, p. 9].

La imitación armónica de la naturaleza se logra a través de la interpretación de las cantidades imaginarias por medio del Algebra:

"[...] si hoy suponemos tan adelantada la ciencia algébrica en esa vía de imitación armónica, sólo porque ha realizado en las direcciones opuestas de las rectas la antítesis de lo positivo y lo negativo de los números sus progresos futuros serán incalculables cuando la veamos expresar, como si se tratase de números, las afecciones cualitativas correspondientes a las direcciones perpendiculares, paralelas y oblicuas, que son propias de las líneas" [REY, 1865, p. 16].

"[...] Y de tal manera esto es cierto, que no sólo en líneas rectas o series, sino en planos y aún en sólidos, pueden los números concebirse dispuestos, figurando entre si la misma coordinación eschêmática propia de las magnitudes que domina en la Geometría (*).

(*) Mr. Gergonne dispone de los números imaginarios combinados con los reales en una tabla que imita perfectamente la disposición de las rectas en el plano. La tabla es como sigue:

$-7+3\sqrt{-1}$		$3\sqrt{-1}$	
		$2\sqrt{-1}$	$6+2\sqrt{-1}$
		$1\sqrt{-1}$	
-9, -8, -7, -6, -5,	-4, -3, -2, -1,	0	1, 2, 3, 4, 5, 6,
		$-1\sqrt{-1}$	
	$-4-2\sqrt{-1}$	$-2\sqrt{-1}$	
		$-3\sqrt{-1}$	$5-3\sqrt{-1}$

Las expresiones binomias que hay en los ángulos son ejemplos de imaginarias afectas en que entran números reales e imaginarios: equivalen en este eschêma a las oblicuas del eschêma geométrico" [REY, 1865, p. 45].

Para conseguir esta imitación es necesario abandonar previamente *la mezquina interpretación del Algebra como una simple generalización numérica* y considerarla como un lenguaje universal de las ciencias exactas:

"[...] [el Algebra] desenvuelve un nuevo y sorprendente poder de análisis, en virtud del cual ninguna de las relaciones derivadas de una relación principal se obscurece, ni se borra por el cálculo, como sucede en la combinación de las cifras, sino que todas quedan allí vivas y patentes, pudiendo ser deducidas y presentadas separadamente por un trabajo de transformación casi manual. El pensamiento matemático de una relación dada se resuelve de un modo mas fecundo y mas fácil con todas sus relaciones elementales, bajo la notación algebraica, que bajo la aritmética [...]" [REY, 1865, p. 8].

El Algebra es por tanto el lenguaje de los números y sus relaciones, y un instrumento del pensamiento matemático, pero su verdadera *universalidad* radica en que es capaz de tratar cosas —como la interpretación de las cantidades imaginarias— *que no pueden ser objeto de la Aritmética ni de la Geometría, ni de ambas reunidas, ni separadas* [REY, 1865, p. 8].

Sobre las categorías

El tercer pensamiento deja claro cuál es la pretensión de nuestro autor en este tema, la misma que de modo general se propuso Kant para cualquier tipo de ciencia, bien fueran las Matemáticas o la Física. Para el filósofo alemán, en todo conocimiento hay un componente empírico y otro *a priori* o puro:

"No hay duda alguna de que todo nuestro conocimiento comienza con la experiencia [...]

Pero, aunque todo nuestro conocimiento empiece con la experiencia, no por eso procede todo él de la experiencia. En efecto, podría ocurrir que nuestro mismo conocimiento empírico fuera una composición de lo que recibimos mediante impresiones y de lo que nuestra propia facultad de conocer produce (simplemente motivada por las impresiones) a partir de sí misma" [KANT, 1996, pp. 41-42].

Ambos componentes son necesarios para que pueda hablarse de conocimiento en sentido estricto, esto es de Ciencia. El primero de ellos constituye, por decirlo así, el ámbito o materia de conocimiento. En virtud del segundo nuestro conocimiento adquiere el rango de la universalidad y necesidad que se viene exigiendo a las ciencias.

Este planteamiento kantiano da al traste consecuentemente con la escisión, entonces imperante, de dos tipos de ciencias: las Matemáticas, seguras pero que no amplían el conocimiento, y las Físicas, inseguras aunque sí lo amplían. Por otra parte, siempre según Kant, nuestro conocimiento es fruto de la actuación conjunta de la sensibilidad y del entendimiento:

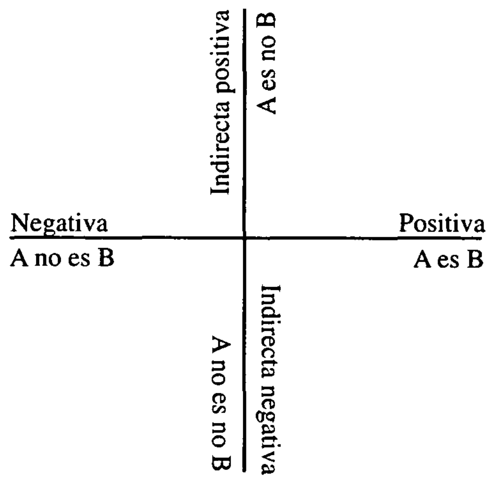
"Existen dos troncos del conocimiento humano, los cuales proceden acaso de una raíz común, pero desconocida para nosotros: la sensibilidad y el entendimiento. A través de la primera se nos dan los objetos. A través de la segunda los pensamos [...]" [KANT, 1996, pp. 60-61].

El entendimiento es una facultad que trabaja mediante conceptos y la función de éstos es juzgar de modo que *el entendimiento en general puede ser representado como la facultad de juzgar*. La clasificación de los juicios le servirá a Kant para descubrir los conceptos puros o *a priori* del entendimiento o lo que es lo mismo las *categorías*. Estos conceptos puros son condiciones *transcendentales,* necesarias, de nuestro conocimiento de los fenómenos. Esto significa que el entendimiento no puede pensar los fenómenos si no es aplicándoles estas categorías y viceversa, pues los fenómenos no pueden ser pensados si no es de acuerdo con ellas. Las categorías representan el modo en que estructuramos en pensamiento el mundo de nuestra experiencia y sirven para ordenar la materia.

Rey asume plenamente esta analítica transcendental así como la tabla de categorías[11] elaborada por Kant sobre la que fundamenta su teoría de los imaginarios:

"Las categorías de la cantidad intervienen en la formación de todas las nociones del número [...] y de la medida [...] Las de la cualidad dan un sentido y una afección a las cantidades, y juegan en todas las teorías acerca de números positivos, negativos e imaginarios" [REY, 1865, p. 29].

Estos dos grupos de categorías (cantidad y cualidad) consideradas conjuntamente le permiten dar una representación gráfica en un plano de las cantidades imaginarias de acuerdo con el siguiente esquema:



Los juicios afirmativos *(A es B)* se representan por un segmento sobre una semirrecta positiva, el juicio *(A no es B)* por el segmento opuesto. El grado en que el concepto *A* está incluido en el concepto *B* se representa por un segmento sobre una semirrecta secante, de forma que la perpendicularidad indica el grado máximo de incorrección (indiferencia de los conceptos *A* y *B).* Las longitudes de los distintos segmentos dependerán de la magnitud o cantidad de los conceptos *A* y *B* [REY, 1865, p. 36].

En su momento la influencia de Kant en el mundo matemático fue muy importante. Sin embargo, avances como el descubrimiento de las geometrías no euclídeas —Lovacheswsky, Bolyai, Gauss, Riemann,...— apartaron a los matemáticos del apriorismo kantiano e hicieron que el texto de Rey resultara desfasado con relación a las nuevas ideas que ya imperaban en Europa[12].

3. Contenidos matemáticos

La *Teoría transcendental de las cantidades imaginarias* se divide en cuatro libros:

- *De la naturaleza e interpretación de las cantidades imaginarias,* pp. 29-84.
- *De las imaginarias en el algoritmo de la suma,* pp. 85-111.
- *De las cantidades imaginarias en el algoritmo de la producción,* pp. 113-158.

- *De las cantidades imaginarias en el algoritmo de la graduación*, pp. 159-291.

En el primero de ellos se introducen las cantidades imaginarias —según el esquema geométrico ya indicado— y se muestra que estas pueden *imitarse* mediante expresiones numéricas del tipo $A \pm B\sqrt{-1}$. A cada una de estas imaginarias se le asocia un módulo *(la expresión radical* $\sqrt{A^2+B^2}$ *que expresa su valor cuantitativo)* y un argumento, α *(coeficiente de cualidad necesario cofactor del módulo de una imaginaria)* y se establece la identidad[13]:

$$A \pm B\sqrt{-1} = \alpha\sqrt{A^2+B^2}$$

El libro recoge también diferentes interpretaciones del imaginarismo (aritmética, geométrica, interpretación del imaginarismo en la ecuación de segundo grado, las imaginarias en las secciones cónicas...) en las que prevalece la fundamentación filosófica sobre las argumentaciones matemáticas.

Los tres últimos libros presentan una estructura similar, en primer lugar justifica el algoritmo correspondiente dentro del cuadro de categorías de Kant, define la operación y la expresa geométricamente. La escasa concreción matemática de estas definiciones hace necesaria su interpretación posterior en numerosos casos particulares. Así el contenido matemático del segundo libro se reduce a definir la suma algebraica (considerada bajo el doble aspecto de la cualidad y la causalidad) y a establecer su expresión general:

$$A+\left(b+\varepsilon\sqrt{-1}\right)+\left(c+\gamma\sqrt{-1}\right)+\ldots=(A+b+c+\ldots)+(\varepsilon+\gamma+\ldots)\sqrt{-1}$$

y su interpretación geométrica: *una recta que une los extremos libres de los sumandos extremos.*

El algoritmo de la multiplicación, objeto del tercer libro, corresponde al concepto de reciprocidad:

> "[...] mediador entre el de substancia y el de causa, correspondientes, el primero al algoritmo de la suma, y el segundo al de la graduación o elevación a potencias [...] La sumación yuxtapone unidades, la graduación determina la posición de un número (potencia) respecto de otro (raíz) por la relación que este otro tiene con la unidad. La multiplicación abraza ambos conceptos y los hace recíprocos en los factores, de manera que uno de ellos, cualquiera, es sumado consigo mismo según la relación que el otro guarda respecto de la unidad" [REY, 1865, p. 114].

La definición de multiplicación —necesariamente conmutativa— de dos cantidades: *hallar una tercera cantidad que sea respecto de una de ellas lo que es la otra respecto de la unidad*, nace de la idea de reciprocidad, que consiste en una cierta contraposición cuya expresión geométrica se realiza por la *constitución en ángulo recto de los factores*. En esta ocasión no llega a obtener una expresión general para el producto binario, $\left(a+b\sqrt{-1}\right)\left(c+d\sqrt{-1}\right)$, aunque esta puede deducirse de los numerosos casos particulares propuestos[14].

Capítulo aparte merece la multiplicación ternaria que el autor considera diferente de la anterior puesto que diferentes son sus resultados: en el primer caso una superficie y en el segundo *un sólido paralelepípedo determinado por la antítesis normal y recíproca de tres líneas que hacen de aristas.*

Esta intuición geométrica —que podríamos considerar más cercana a la matemática griega que a la *Géométrie* de Descartes— desaparece como es obvio cuando el número de factores es superior a tres:

"De todos modos las multiplicaciones cuaternarias, lo mismo que las ulteriores, no tienen más realización que la que da la Aritmética [...] En estas regiones superiores, donde la Aritmética ejercita su poder sintético y combinatorio, no puede tener lugar aquel notable dicho de Pascal de que: los números imitan al espacio aunque son de naturaleza tan diferente" [REY, 1865, p. 157].

Desde el punto de vista matemático el libro IV es el más interesante por la cantidad de resultados que en él se recogen, aunque algunos de ellos contengan errores o contradicciones. Los más importantes son:

- $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$

El autor concede mucha importancia, y así lo indica expresamente, al hecho de justificar que la expresión anterior *no puede ser un producto,* pues en ese caso deberíamos admitir una solución doble:

$$\left(\pm\sqrt{-1}\right) \times \left(\pm\sqrt{-1}\right) = \sqrt{(-1) \times (-1)} = \sqrt{+1} = \pm 1,$$

sino una potencia segunda $\left(\sqrt{-1}\right)^2$ *que neutraliza el efecto de la raíz segunda y deja con su propio signo la cantidad subradical* [REY, 1865, pp. 169-171].

Aunque esta argumentación puede resultarnos en la actualidad sorprendente es perfectamente coherente con la distinción que Rey establece entre los algoritmos del producto y de la graduación.

• *Raíces de* $\sqrt{-1}$

Para calcular $\left(\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{m}}$, Rey utiliza el desarrollo del binomio de Newton:

$$\left(\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{m}} = \left(1-\left(1-\sqrt{-1}\right)\right)^{\frac{1}{m}} = 1 - \frac{1}{m}\left(1-\sqrt{-1}\right) + \frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)}{1.2}\left(1-\sqrt{-1}\right)^2 \ldots \&c.$$

sustituyendo cada uno de los términos $\left(1-\sqrt{-1}\right)^p$ por su correspondiente desarrollo obtiene una expresión del tipo:

$$\left(\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{m}} = A+B\sqrt{-1}$$

Resultado algebraico que nos dice que una raíz cualquiera de $\sqrt{-1}$ *tiene siempre la forma binómica* $A+B\sqrt{-1}$ *y es imaginaria*[15]. Como considera que toda imaginaria afecta (es decir distinta de la pura o típica $\pm\sqrt{-1}$) puede escribirse de la forma:

$$\sqrt[2m]{-1} = \left(\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{m}}$$

el desarrollo anterior le sirve para demostrar algebraicamente que todas las imaginarias afectas pueden expresarse en forma binómica.

La graduación de las imaginarias se completa del siguiente modo:

$$\left(\sqrt{-1}\right)^{\frac{n}{m}} = \left(A+B\sqrt{-1}\right)^n = \alpha + \beta\sqrt{-1}$$

en este caso tanto α como β pueden ser cero por lo que establece: *Todas las raíces de las imaginarias afectas son imaginarias; pero no lo son todas las potencias.*

• *Raíces de la unidad 1 y -1*

Es la parte más completa y mejor desarrollada del texto, en ella calcula las raíces de la unidad factorizando las ecuaciones $y^m - 1 = 0$, $y^m + 1 = 0$.

En este caso considera todas las soluciones posibles y realiza un completo estudio de sus propiedades, representación gráfica y aplicaciones a la mecánica[16]. Introduce la representación trigonométrica de las imaginarias

$$R\,(\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \sqrt{-1}\,)$$

y la utiliza para obtener la expresión general de las raíces de la unidad y deducir algunas fórmulas trigonométricas, entre ellas la de De Moivre.

• *Graduación infinita*

El desarrollo

$$a = \left(1+\frac{\mu}{\infty}\right)^{\infty} = 1 + \frac{\mu}{1} + \frac{\mu^2}{1.2} + \frac{\mu^3}{1.2.3} \ldots \&c.$$

que toma el valor e para $\mu=1$ le permite afirmar[17]:

"[...] que un número cualquiera a puede tener dos generaciones conceptuales

$$\left(1+\frac{\mu}{\infty}\right)^{\infty} = e^{\infty} = a$$

la primera directa e infinita [...]; la segunda es indirecta, supone el número e engendrado infinitesimalmente, y la nueva evolución finita a que se somete tiene por exponente el mismo número μ que engendraría la potencia a directa e infinitamente" [REY, 1865, pp. 261-262].

La creencia de que el número e es el único que cumple esta propiedad le induce a definir un nuevo número *e cualitativo*:

$$\varepsilon = \left(1+\frac{\sqrt{-1}}{\infty}\right)^{\infty}$$

Estos dos números e y ε le llevan a considerar que existen dos clases de imaginarias exponenciales: *unas que tiene base real, a las que llamo exponenciales planas, cuya forma es;* $e^{x\sqrt{-1}}$ *otras cuya base es imaginaria, y que pueden llamarse esféricas; estas tienen la forma* $\varepsilon^{x\sqrt{-1}}$ [REY, 1865, pp. 272].

En realidad ambas exponenciales son planas ya que $\varepsilon = e^{\sqrt{-1}}$. Esta identidad puede deducirse de los desarrollos que el propio Rey da para ε y para[18] $e^{x\sqrt{-1}}$.

Estudia posteriormente las exponenciales planas deduciendo algunas fórmulas relacionadas con la trigonometría y los logaritmos[19], por ejemplo:

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \operatorname{sen} x \sqrt{-1}$$

y las exponenciales esféricas donde introduce la *polar* $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$, representación de la tercera dirección en el espacio a la que ya hemos hecho referencia.

• *Imaginarias esféricas*

El libro termina con la introducción de las imaginarias esféricas:

$$A + B\sqrt{-1} + C\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$$

para las que tan sólo define el módulo $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. Desconocemos, por tanto, como hubiera planteado el producto de forma que cumpliese la propiedad conmutativa y cual sería su interpretación geométrica.

4. La influencia del libro de Rey y Heredia

La influencia de este libro queda reflejada en el artículo que García de Galdeano publicó en *L'Enseignement Mathématique* [GARCIA DE G., 1899], fundamental para conocer la situación de la matemática española a finales del siglo XIX, donde se da gran importancia a la obra de Rey y se incide en la repercusión de la misma en autores como ROCHANO [1870], NAVARRO [1874 y 1883] y DOMINGUEZ[20] [1879].

Modesto Domínguez Hervella se manifiesta de acuerdo con la representación de los imaginarios en el plano, introducida por Rey, y se fija como objetivo *hacerla llegar al mayor número posible de inteligencias utilizando un lenguaje más claro y sencillo.* Para ello distingue, de una forma puramente intuitiva, los conceptos de cantidad y entidad (magnitudes escalares y vectoriales en el lenguaje actual) e introduce una de las primeras definiciones de vector publicadas en España:

"[...] cualquier entidad debe considerarse bajo el doble punto de vista de su magnitud y de su manera de ser, o sea de su tendencia... [éstas] se pueden representar por rectas, que en distintas direcciones parten de un punto fijo que llamaremos origen; la longitud de cada recta representará la magnitud, y la dirección su tendencia [...]" [DOMINGUEZ, 1879, pp. 2-3].

"Llamaremos vector a la entidad A que tiene una dirección cualquiera, y argumento el ángulo α que forma con el eje, de modo que un vector situado en un plano queda determinado por su módulo y su argumento" [DOMINGUEZ, 1879, p. 13].

La introducción de estos conceptos habría representado sin duda un avance en la claridad buscada, pero desgraciadamente y *a fin de introducir las menos variaciones posibles en el lenguaje* el autor pasa seguidamente a designar las entidades con el nombre de cantidades y sus vectores se identifican en la práctica con los números complejos expresados en forma módulo-argumental. Así, por ejemplo, escribe:

"El producto del vector A por el vector B será $A \times B = a_\alpha \times b_\beta = ab_{(\alpha+\beta)}$" [p. 16].

En la segunda parte del libro, dedicada a la geometría en el espacio, utiliza la doblemente imaginaria para expresar la tercera dirección coordenada tal como lo hiciera Rey y Heredia.

La *Teoría transcendental de las cantidades imaginarias* es también el modelo que sirve al académico y oficial del cuerpo de carabineros Apolinar Fola para escribir sus *Investigaciones Filosófico-Matemáticas sobre las cantidades imaginarias,* de la que publicó dos ediciones la primera en 1881 y la segunda en 1891 después de haber esperado inútilmente desde 1884, en que la había terminado de escribir, una ayuda del Ministerio de Fomento. Esta última edición incluye una *Reseña histórico-crítica de las cantidades imaginarias*, con numerosas y precisas citas bibliográficas[21].

A pesar del tiempo transcurrido, la influencia de Rey seguía reflejándose en las obras de Atanasio LASALA [1894, 1896 y 1903] y en el tratamiento que de los números complejos se hace en algunos libros de análisis, como el *Tratado de análisis matemático (Algebra superior)* (1904), de José Mª Villafañe y las *Lecciones de Cálculo infinitesimal,* que en 1908 publicó J. Lubelza [PACHECO, 1990].

Entre las opiniones suscitadas por la obra de Rey recojo las más significativas:

"[...] A concederle DIOS algunos años más de vida, REY Y HEREDIA hubiera sacado a las Matemáticas del seno del empirismo en que generalmente yacen, y el orbe científico le habría sin duda aclamado como restaurador, si no el creador o reformador, de la Filosofía de las Matemáticas, señalándole en la historia del saber humano un puesto análogo al que ocupan NEWTON, DESCARTES o BACON"[22].

García de Galdeano alude en numerosas ocasiones a la obra de Rey, pero tal vez el párrafo que mejor refleje su opinión sea el siguiente:

"[...] En el dominio puramente matemático Rey y Heredia no ha creado, ni ha sido su propósito el de acumular nuevos hechos a los ya presentados en las obras de los matemáticos que contribuyeron a aumentar las proporciones de su admirable edificación; pero ha dado solidez al conjunto, ha eslabonado los detalles entre sí, realizando una grandiosa síntesis, ha unido sólidamente por el razonamiento lógico las dades acá y allá esparcidas y no asentadas sobre una base común, de ver los descubrimientos matemáticos" [GARCIA DE GALDEANO, 1891, p. 260].

Rey Pastor, en su famoso discurso de 1915 *España y el progreso de las matemáticas*, incide en el carácter pionero y divulgativo de la obra de Rey:

"Digna de elogio es también, por haber contribuido a este renacimiento, la obra de Rey Heredia, sobre las cantidades imaginarias, la cual, aunque filosófica y no matemática, y de índole muy elemental, sirvió al menos para vulgarizar entre nosotros estos estudios [...]" [REY PASTOR, 1915, p. 16].

5. Conclusión

La *Teoría transcendental de las cantidades imaginarias* de Rey y Heredia es una obra interesante por la originalidad de sus planteamientos filosóficos y por haber servido para introducir en España las ideas de Kant y la teoría matemática del imaginarismo. Su valor matemático, sin embargo, queda mermado por lo elemental de sus resultados, los errores cometidos, la oscuridad de su lenguaje y el desfase en los métodos con relación a la matemática europea de su época.

NOTAS

1 Rey y Heredia (Córdoba, 1818 - Córdoba, 1861) fue catedrático de Lógica del Instituto de Ciudad Real y del Instituto Noviciado de Madrid donde coincidió con Acisclo Fernández Vallín y Bustillo, catedrático de Matemáticas, que le inició en el imaginarismo y le animó a escribir esta obra. Anteriormente había escrito un *Curso de psicología y lógica* —en colaboración con Pedro Felipe Monlau— publicado en 1849 y, en 1853, los *Elementos de ética o tratado de filosofía moral,* que reeditados en numerosas ocasiones, sirvieron de texto durante muchos años en la mayoría de los institutos de España. Según Lutoslawski —ver PALACIOS [1989,

p. 685]— la orientación de estos dos últimos libros es considerada por muchos kantiana aunque en ellos no se cita nunca al filósofo alemán.

2 Real Orden de 21 de noviembre de 1861, reproducida en la obra de Rey.

3 Esta traducción corresponde a un fragmento de la Lógica Transcendental y al capítulo I (Guía para el descubrimiento de todos los conceptos puros del entendimiento) de la Analítica Transcendental.

4 Rey debe referirse a la *Introduction á la Philosophie des Mathématiques* (París, 1811), donde Wronski utiliza la expresión $(-1)^{\infty'} = -1$ designando por ∞' un número impar infinitamente grande, para investigar la naturaleza del imaginarismo.

5 *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques.* Esta memoria fue publicada sin indicar el nombre del autor y está reproducida en ARGAND [1971].

La cita está extraída de ARGAND [1971, p. 12].

6 "Nouveaux principes de Géometrie de position, et interpretation géométrique des symboles imaginaires", reproducida en ARGAND [1971].

7 Y así se lo recuerda Servois al propio Argand en una carta publicada en los *Annales* en 1813. La carta se publica acompañada de una nota de Gergonne:

"On a, en effet,

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \cos x\sqrt{-1}$$

d'où

$$e^{-x} = (\cos x + \sqrt{-1}\, sen\, x)^{\sqrt{-1}},$$

qui, en faissant $x = \frac{\pi}{2}$, devient

$$e^{-\frac{\pi}{2}} = (\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$$ " [ARGAND, 1971, p. 105].

De hecho $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ tiene infinitos valores reales, tal como había demostrado el propio Euler, dados por

$$e^{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}, \quad k = 0, 1, 2\ldots .$$

8 Véase ARGAND [1971, pp. 113-114]; REY [1865, pp. 273-274] y DOMINGUEZ [1879, p. IX]; respectivamente. La cita corresponde al Informe de la Real Academia de Ciencias sobre el texto de Domínguez.

Para más información sobre este tema puede consultarse FOLA [1881, pp. 152-176].

9 Mourey utiliza como Français la notación a_r, por lo que el versor r puede considerarse —salvo en la unidad de medida— equivalente a nuestro argumento. Más discutible es su equivalencia con el argumento de Rey como veremos posteriormente.

10 Los principales: *Lectures on quaternions,* de 1853; y *Elements of quaternions,* 1866.

Según REY PASTOR [1915] y TORRES QUEVEDO [1901] la divulgación de los cuaternios en España se debe a los trabajos del ingeniero Alberto Bosch y Fustegueras, el primero de ellos [BOSCH, 1873] se publicó en 1873 y es, por tanto, muy posterior a la obra de Rey y Heredia.

11 Las categorías se clasifican en cuatro grupos según la cantidad, cualidad, relación y modalidad, cada una de las cuales incluye a su vez tres momentos:

De la cantidad	*De la cualidad*	*De la relación*	*De la modalidad*
Unidad	Realidad	Inherencia y subsistencia (sustancia y accidente)	Posibilidad-Imposibili.
Pluralidad	Negación	Causalidad y dependencia (causa y efecto)	Existencia-No existenc.
Totalidad	Limitación	Comunidad (reciprocidad entre agente y paciente)	Necesidad-Contingencia

KANT: *Crítica de la razón pura,* A 79, B 106. Reproducido en REY [1865, p. 29 y p. 303].

12 La evolución está perfectamente reflejada en Gauss, quien, tras haber intentado en su juventud probar el quinto postulado (axioma de las paralelas) de Euclides, acaba escribiendo lo siguiente:

"Pero me parece que, a pesar de la verborrea, que ignora todo, de los filósofos, sabemos muy poco, o casi nada, de la naturaleza real del espacio, para considerar un absolutamente imposible lo que nos parece como natural." (Carta a Taurinus, 1824)

"Es mi íntima convicción que la ciencia del espacio se encuentra en una situación distinta a la ciencia de la cantidad en relación con nuestros conocimientos a priori; no podemos tener de la primera un conocimiento con aquella completa convicción de su necesidad (y consiguientemente también de su absoluta verdad) que es propia de la última; debemos conceder con humildad, que aun cuando el número sea un puro producto de nuestro espíritu, el espacio tiene también una realidad fuera de nuestro espíritu cuyas leyes no podemos a priori prescribir completamente". (Carta a Bessel, 1830).

Véase MONTESINOS [1992, p. 87] y DOU [1974, p. 43].

Pudiera ser que Rey desconociera la existencia de geometrías no euclideas ya que la primera referencia escrita en España sobre ellas data de 1878. Véase LLOMBART [1990, p. 343].

13 Este argumento debe identificarse, por tanto, con el factor $e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \operatorname{sen} x \sqrt{-1}$, y no con el versor de Mourey —ver cita 9— como erróneamente indica Rey [p. 337].

14 Otros autores de la época, como su compañero A. Fernández Vallín, sí incluían en sus textos las fórmulas generales para operar con cantidades imaginarias. Por ejemplo en FERNANDEZ [1857, p. 55] se lee:

$$(A + B\sqrt{-1}) \times (C + D\sqrt{-1}) = (AC - BD) + (BC + AD)\sqrt{-1}\,.$$

15 Es importante señalar que Rey no sugiere la posibilidad de varias raíces ni justifica los desarrollos que utiliza.

16 Según GARCIA DE GALDEANO [1891, p. 260] en la representación de las raíces de la unidad sigue a Faure *(Essai sur la thérorie et l'interpretation des quantités dites imaginaires,* 1845), y en la aplicación de los imaginarios a la mecánica utiliza los conceptos de *suma dinámica* y de *paralelogramo sumatorio* como hiciera Saint-Venant.

17 Rey introduce el número *e* fundamental en su obra, del siguiente modo:

"Potencia finita obtenida por la evolución infinita de la unidad estéril, fecundada por la adición de un elemento infinitesimal, expresa el máximo desarrollo a que puede aspirar la unidad con el mínimum de aptitud evolutiva, con una evolubilidad cuantitativa infinitamente pequeña. Aunque encerrada en el abismo infinitesimal que media entre los números 2 y 3..." REY [1865, p. 261].

18 $\varepsilon = \left(1 + \frac{\sqrt{-1}}{\infty}\right)^{\infty} = 1 + \frac{\sqrt{-1}}{1} - \frac{1}{1.2} - \frac{\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} - \&c$ [p. 264].

$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} \ldots \&c$ [p. 273].

Tomando $x = 1$ el segundo desarrollo coincide con el primero, lo que ya fue observado por FOLA [1891, p. 273].

19 Hay que señalar que en estas fórmulas el valor de π es 6,2831853..., aunque anteriormente había venido utilizando su valor habitual.

20 Véase GARCIA DE GALDEANO [1899]; REY PASTOR [1915] y PACHECO [1982 y 1990].

21 Véase la recensión que sobre este libro publicó GARCIA DE GALDEANO [1891].

22 Monlau en REY [1865, p. XIII].

BIBLIOGRAFIA

ARGAND, J.R. (1806) *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques.* París.

------ (1874) *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques, par [...].* París, Gauthier-Villars. [Incluye un prefacio de H. Hoüel y un apéndice con los artículos publicados en los *Annales de Gergonne* relativos a las cuestiones de imaginarios].

------ (1971) *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques, par [...].* París, Albert Blanchard. [Reimpresión de la edición de 1874].

BEMAN, M.. (1899) "Un chapitre de l'historie des Mathématiques". *L'Enseignement Mathématique, I,* 162-184.

BOSCH Y FUSTEGUERAS, A. (1873) "Juicio crítico acerca de los cuadrinomios de Rowan Hamilton". *Revista Universitaria de Madrid, 1873,* 562.

BUÉE, A. (1806) "Mémorie sur les quantités imaginaires". *Transactions of the Royal Society of London, 96,* 23-88. [Leída el 20 de junio de 1805].

DOMINGUEZ HERVELLA, M. (1879) *Elementos de Geometría analítica.* Madrid, Establecimiento Tipográfico E. Cuesta.

DOU, A. (1970) *Fundamentos de la matemática,* 2ª ed. Barcelona, Labor.

FERNANDEZ VALLIN, A. (1857) *Elementos de matemáticas, por [...]. Aritmética y Algebra.* Madrid, Imprenta del Colegio de Sordomudos y de Ciegos.

FOLA, A. (1881) *Investigaciones Filosófico-Matemáticas sobre las cantidades imaginarias por [...].* Valencia, Imprenta de Manuel Alufre.

------ (1891) *Investigaciones Filosófico-Matemáticas sobre las cantidades imaginarias por [...].* Segunda Sección. Alicante, Imprenta de Manuel y Vicente Guijarro.

GARCIA DE GALDEANO, Z. (1891) Recensión de "Investigaciones filosófico-matemáticas sobre las cantidades imaginarias, por D. Apolinar Fola, Oficial del Cuerpo de Carabineros". *El Progreso Matemático, I,* 258-262, 308-315.

------ (1899) "Les mathématiques en Espagne". *L'Enseignement Mathématique, I,* 1-21.

GAUSS, C.F. (1831) "Theoria residuorum bicuadraticorum. Commentatio secunda". *Gottingische gelehrte Anzaigen, 1831.*

GRASSMANN, H.G. (1844-1862) *Die lineale Ausdeshnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erlautert.* Berlín.

------ (1947) *Teoría de la extensión.* Buenos Aires, Espasa-Calpe. [Traducida por Emilio Oscar Roxi].

KANT, I. (1996) *Crítica de la razón pura,* 12ª ed. Madrid, Editorial Alfaguara. [Prólogo, traducción, notas e índices de Pedro Ribas].

LASALA, A. (1894) *Teoría de las cantidades imaginarias (primera parte).* Bilbao, Vda. de Delmas.

------ (1896) *Generación de las cantidades imaginarias por graduación infinita y estudio de un genero de curvas llamado Hetoide.* Bilbao.

------ (1903) "Consecuencias notables del cálculo de las cantidades imaginarias". *Gaceta de Matemáticas Elementales, 1903,* 8-10,43-45.

LUBELZA, J. (1908) *Lecciones de Cálculo infinitesimal.* Madrid, Establecimiento Tipográfico de Jaime Ratés.

LLOMBART, J. (1990) "El estudio de las geometrías no euclídeas a comienzos del siglo XX en España. La obra de José María Bartrina y Capella (1861-1946). En: L. Español (Ed.), *Estudios sobre Julio Rey Pastor (1888-1962).* Logroño, Instituto de Estudios Riojanos, 341-353.

MONTESINOS AMILIBIA, J.M. (1992) "Las Geometrías no euclídeas: Gauss, Lobachevsky y Bolyai". *Historia de la Matemática en el siglo XIX (1ª parte).* Madrid, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 65-114.

MOUREY, C.V. (1828) *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires.* París.

------ (1861) *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires,* 2ª ed. París.

NAVARRO IZQUIERDO, L. (1874) *Geometría elemental.* Salamanca, Imprenta de V. Oliva.

------ (1883) *Tratado de Geometría elemental,* 2ª ed. Salamanca, Imprenta de V. Oliva.

PACHECO, J.M. (1982) "La introducción de los complejos en la geometría elemental en España". *Actas IX Jornadas Matemáticas Hispano-Lusas,* Vol. 2, Universidad de Salamanca, 967-970.

------ (1990) "Crisis de fundamentos en la Matemáticas españolas a finales del siglo XIX". *Suma, 7,* 75-78.

PALACIOS, J.M. (1989) "La filosofía de Kant en la España del siglo XIX". En: J. Muguerza y R. Rodríguez (Eds.), *Kant después de Kant.* Madrid, Instituto de Filosofía del C.S.I.C. Tecnos, 673-707.

REY Y HEREDIA, J. (1865) *Teoría transcendental de las cantidades imaginarias.* Madrid, Imprenta Nacional.

REY PASTOR, J. (1915) "Discurso inaugural de la Sección 1ª, Ciencias Matemáticas", *Actas de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias. Quinto Congreso celebrado en Valladolid del 17 al 22 de octubre de 1915.* Madrid, Imprenta de Eduardo Arias, Tomo I (2ª parte), 7-25. Este discurso esta recogido en REY PASTOR, J. (1993) *Escritos de las dos orillas.* Edición a cargo de L. Español. Logroño, Gobierno de la Rioja.

ROCHANO, J. (1870) *Elementos de álgebra.* Granada, Imprenta de D. Indalecio Ventura.

TORRES QUEVEDO, L. (1901) Discursos leídos ante la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales en la recepción pública de [...] el día 19 de mayo de 1901. Madrid, Imprenta de L. Aguado.

VALLÈS, M.F. (1841) *Études philosophiques sur la sciencie du calcul par [...]. Première Partie.* París, Carilian-Goeury et Vor Dalmont.

------ (1869) *Des formes imaginaires en algèbre; leur interprétation en abstrait et en concret, par [...].* París, Gauthier-Villars.

------ (1910) *Estudios filosóficos sobre la ciencia del cálculo.* 2ª ed. Madrid, Mariano Nuñez Samper. [Traducción de Eduardo Benot].

VILLAFAÑE, J. M. (1904) *Tratado de análisis matemático (Algebra superior).- Primera parte: teorías fundamentales.* Madrid.

WALLIS, J. (1685) *Treatise of Algebra.*

WARREN (1828} *A Treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities.* Cambridge.

WESSEL, C. (1799) "Om Directionens analytiske Betegning". *Nye Samling af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter.* [Leída el 10 de mayo de 1797].

------ (1897) *Essai sur la representation anlytique de la direction.* H. Valentinier y T. N. Thiele (Eds.), Copenhague.

WUSSING, H. (1998) *Lecciones de Historia de las Matemáticas.* Madrid, Siglo XXI.