Llull, vol. 8, 1985, 149-173

SOBRE LA INVENCION GRIEGA DE LA IDEA DE DEMOSTRACION

LUIS VEGA
Dpto. de Lógica. UNED. Madrid

RESUMEN

Los primeros pasos de este legado griego parecen marcados por una interacción entre motivos dialécticos, filosóficos y matemáticos. Su desarrollo condujo a un uso consciente de dos tipos de demostración: la indirecta, por reducción ad impossibile, y la directa, que incluye una primicia del método axiomático clásico. La contribución griega a este respecto también es doble: un programa lógico y metodológico, la teoría aristotélica de la demostración, y un paradigma real, la práctica euclidiana de la demostración geométrica. Los dos modelos son relativamente dispares e independientes; de ahí que, probablemente, los griegos aprendan de hecho a demostrar no tanto en filosofía o en lógica como en matemáticas.

ABSTRACT

The early moves of this Greek legacy seem to be marked by an interaction of dialectical, philosophical, and mathematical grounds. Their development led to a conscious use of two tipes of proof: the indirect one by reduction ad impossibile, and the direct one which encloses a first attempt of classical axiomatic method. In this respect, the Greek contribution is also two-faced: a logical and methodological programme, the Aristotle's theory of demonstration, and an effective paradigm, the Euclid's practice of geometrical proof. Both models are relatively different and self-contained; hence, the Greeks very likely did not learn in fact to prove so much in philosophy or logic as in mathematics.

Palabras Clave: demostración indirecta, demostración directa, axiomatización clásica, teoría aristotélica de la demostración, demostración geométrica.

1. Los orígenes no son a veces el mejor principio

Hay que apañarse con palabras y cosas antes de parar mientes en cuál puede ser la mejor manera o el método adecuado para tratar con ellas. Luego, con la experiencia y el aprendizaje, algunos de estos métodos pueden convertirse en hábitos de pensamiento, en una especie de segunda naturaleza que manifiesta casi espontáneamente la gente bien entrenada. Así: la familiaridad con las teorías deductivas o la práctica profesional de ciertas disciplinas -lógica, matemática, física teórica- llegan a hacer de la demostración algo perfectamente natural. Sin embargo, toda noción o pauta metodológica mantiene visos de artificiosa y, en realidad, pocas lo serán tanto como la idea misma de demostración.

Quizás por ello la génesis y el desarrollo de este legado griego representan cuestiones fascinantes para muchos interesados en la historia del pensamiento y del método científicos. Lo cierto es que los orígenes del método deductivo y de la idea de demostración entre los griegos han suscitado frecuentes discusiones desde las primeras décadas del presente siglo. Aún siguen concitándolas. Bastará recordar el debate en curso de dos problemas un tanto conexos: el problema de la raíz dialéctica o filosófica o matemática de la idea de demostración; el problema de su forma súbita o gradual de aparición[1].

Es difícil sustraerse al embrujo de las cuestiones de origen. No digo que éstas constituyan, indefectiblemente, una mala tentación historiográfica. Pero creo que rendirse a sus encantos no siempre resulta provechoso[2]. Y lo es tanto menos cuanto mayor sea la falta de indicios inequívocos y la vaguedad o el sesgo de las nociones empleadas en su interpretación. Los dos problemas antes mencionados pueden ilustrar el peso de ambas circunstancias, por un lado la inopia documental y la indeterminación textual, por otro lado la precipitación hermeneútica. De modo que, para empezar, conviene dejar esas cuestiones en un segundo plano. Parece más rentable ocuparse en principio no tanto de los orígenes de la demostración como de sus formas de implantación y de las condiciones que hicieron de ella una buena idea. Cuando menos, estas etapas de su desarrollo son más accesibles, están mejor documentadas.

Consideremos, sin ir más lejos, los términos que denotaban *demostrar* en la antigua Grecia: 'deíknymi' y 'apodeíknymi'. 'Deíknymi' tenía tres significados característicos: (*i*) mostrar, hacer ver, poner ante los ojos; (*ii*) dar a conocer, explicar, hacer saber por medio del lenguaje; (*iii*) probar, demostrar. Todo parece indicar que los significados (*i*) y (*ii*) fueron primigenios. También hay indicios de su uso entremezclado, ambiguo, y de una noción promiscua de la prueba matemática. En el pasaje del *Menón* platónico (82b-85e), donde se plantea la duplicación de una figura cuadrada, Sócrates conduce el diálogo con la intención de *a*) hacer ver a su interlocutor las vías fallidas de solución del problema; *b*) mostrarle intuitivamente y a la vez traerle a la memoria, mediante el uso común de un lenguaje discursivo, la construcción correcta; *c*) probar así la exactitud de la verdadera solución. Pues bien, ignoramos cuándo y cómo adquirió 'deíknymi' su connotación demostrativa. Ignoramos cuándo y dónde se dio el paso decisivo desde la prueba visual o gráfica, empírica o concreta, hasta la demostración propiamente dicha. (Lo cual no quiere decir que andemos precisamente escasos de conjeturas y adivinaciones al respecto). En cambio, sí conocemos otras cosas. La metodología aristotélica, en el s. IV, y la lógica estoica del s. III ya recurren al uso de 'apodeíknymi' para significar la argumentación lógicamente concluyente y estrictamente demostrativa[3]. Entre los matemáticos del s. III, el uso de 'deíknymi' también cuenta con un sentido parejo de demostración estricta –e.g., en la cláusula final "hóper édei deîxai" equivalente a "quod erat demostrandum"–; incluso, en determinados contextos, aparece una especie de oposición entre 'deíknymi' y 'apodeíknymi' para señalar la diferencia entre la argumentación plausible y la demostración –e.g., en la prop. 12 de la carta de Arquímedes a Eratóstenes sobre el *Método*–. En suma, nuestras noticias acerca de una relativa acotación metodológica y de una relativa institucionalización matemática de la idea de demostración contrastan con la falta de evidencias sobre las cuestiones de origen. Y, en general, nuestras fuentes actuales no permiten una reconstrucción lineal y unitaria o una visión cabalmente comprensiva de lo que ocurrió o pudo ocurrir antes del s. IV en este sentido.

En lo que sigue, intentaré precisar algunas de las formas y de las condiciones que animaron el desarrollo de la idea de demostración hasta lograr una relativa institucionalización entre los matemáticos alejandrinos.

2. No estará de más recordar unas nociones preliminares

Como decía más arriba, las cuestiones de origen suelen estar empañadas por dificultades primarias, la falta de documentación decisiva, y por complicaciones secundarias, la precipitación o la vaguedad conceptual aplicadas a su interpretación. Para paliar algo éstas últimas, adelantaré algunas precisiones sobre la idea de demostración y de método axiomático.

Comparto la opinión generalizada de que esta idea es una invención griega. También creo que la primera muestra fehaciente de una demostración cabal es matemática: la prueba, por reducción al absurdo, de que la diagonal del cuadrado no es conmensurable con el lado en los términos que recoge Aristóteles (*APr.* I 23, 41a26-30): de la suposición de su conmensurabilidad se sigue la contradicción de que un número sea a la vez par e impar.

Ahora bien, si por demostración se entiende el uso de una argumentación concluyente, no faltan muestras matemáticas anteriores a esta reducción al absurdo y ajenas a la matemática griega. Asimismo abundan las aplicaciones más o menos afortunadas del patrón reductivo en otros ámbitos de la cultura griega del s. V, en medios filosóficos, dialécticos, forenses y retóricos; es decir, abundan los argumentos dirigidos a mostrar la falsedad de un supuesto a la luz de sus consecuencias e, incluso, a establecer sobre esta base la tesis contraria al supuesto inicial. De esta familiaridad con el uso crítico de la reducción provienen posiblemente algunos atisbos de su valor como pauta metódica "heurística" o "dialéctica". Los megáricos de finales del s. V y principios del s. IV –e.g., Euclides de Megara– ya tomaron por norma el impugnar un argumento atacando no las premisas sino la conclusión. Pero aquí, al referirme a la idea de demostración, no pienso en los usos más o menos felices de un argumento convincente, sea con propósitos de prueba o sea con miras a una refutación, sino en el reconocimiento justo de su capacidad demostrativa. Este reconocimiento supone tener conciencia de aspectos como los siguientes:

A. Una demostración consiste en una argumentación, en una serie ordenada de proposiciones que aspiran sustancialmente a dar cuenta y razón de algo. (En consecuencia, las pruebas gráficas o empíricas no implican por sí mismas la idea de demostración).

B. Una demostración es un argumento lógicamente concluyente: la conclusión se sigue con necesidad de las premisas pertinentes y tiene vigencia universal, vale en todo caso formulable en los mismos términos.

C. La demostración puede revestir la forma *indirecta* de una prueba por reducción al absurdo de la suposición de partida, o la forma *directa* de la deducción de una consecuencia verdadera a partir de verdades previamente asumidas o conocidas (véase, por ejemplo, *APr.* II 14, 62b 29-32).

i) En la demostración indirecta se procede a refutar la posibilidad de que algo sea (o no sea) el caso. De la suposición de tal posibilidad se sigue algún absurdo: o bien una contradicción lógica –e.g. que un número sea par e impar–, y entonces se trata de una reducción propiamente dicha a lo imposible (apagogé eis tò adýnaton, apódeixis dià toû adynátou); o bien una proposición incongruente con el conocimiento aceptado –e.g., que la Tierra no ocupe el centro del universo, en el marco de la cosmología normal griega–. En suma, la demostración indirecta remite a consecuencias que no son de recibo en el contexto deductivo dado; y en este sentido podría considerarse un desarrollo especializado de un patrón más general de refutación, el llamado *modus tollens.* Pero es obvio que la validez de la reducción al absurdo propiamente dicha descansa además en un uso efectivo del concepto de contradicción.

ii) La demostración directa (deíxis, apódeixis –deiktiké–) se funda a su vez en una distinción primordial entre las asunciones primitivas o iniciales, no demostradas, y todas las demás tesis que se puedan demostrar o derivar como consecuencias suyas inequívocamente verdaderas. No cabe una demostración directa de todo aquello que asumimos como cierto en el curso de la deducción, pues el empeño en demostrar cada premisa llevaría a un regreso infinito o a un círculo vicioso; por ende, la cogencia de un cuerpo deductivo de demostraciones directas radica, en última instancia, en la existencia de algunas premisas o de algunos supuestos indemostrables en este contexto.

iii) El método de la demostración directa conduce así a una suerte de axiomatización del cuerpo deductivo: a una acotación de los supuestos primitivos, tesis iniciales, y a una disposición ordenada y coherente de las tesis restantes como proposiciones derivadas. Esta discriminación y esta organización suponen cierto grado de desarrollo previo –tanto conceptual como teórico– del dominio de conocimientos axiomatizados.

Un cuerpo de conocimientos está axiomatizado sólo si *a*) constituye un conjunto de proposiciones, digamos el conjunto T; *b*) hay en T un subconjunto finito T' de proposiciones primitivas; *c*) cualquier otra proposición del conjunto diferencia T-T' es una consecuencia lógica de T'. Nos encontraremos con una axiomatización *clásica* cuando T cumpla, además de las condiciones *a)-c)*, los requisitos: *d)* toda proposición de T tiene un valor de verdad determinado por referencia a un sistema de objetos (en el seno de una interpretación monosemántica), y *e*) toda proposición de T' es una verdad mejor conocida que cualquier otra proposición de T-T'. Por lo que concierne a la idea griega de demostración axiomática conviene hablar de "axiomatización", entre comillas, a fin de resaltar sus peculiaridades de mera primicia de una axiomatización clásica. Por ejemplo: el hecho de no trazar una divisoria clara entre términos o conceptos primitivos y proposiciones primitivas; la circunstancia de que las diversas clases de principios o supuestos primitivos no tengan una caracterización uniforme y unívoca; la limitación –a veces expresa– de que el conjunto de proposiciones T sea un conjunto finito. De todo ello hay constancia en los *Analíticos* aristotélicos.

3. Un perfil del desarrollo de la idea clásica de demostración

Las nociones apuntadas permiten aventurar unas observaciones generales sobre el desarrollo de la idea de demostración. La idea de demostración así entendida es, por lo que sabemos, una invención griega. Como ya he indicado, la primera muestra inequívoca de una demostración cabal es la reducción al absurdo de la inconmensurabilidad de la diagonal del cuadrado con el lado en los términos transmitidos por Aristóteles. Por lo demás, fue Aristóteles el primero en establecer un lenguaje lógico de las relaciones de oposición y el primero en analizar los supuestos de la relación de contradicción exigidos por la idea de reducción o demostración indirecta propiamente dicha[4].

La idea de demostración directa y las primicias de una "axiomatización" son asimismo una contribución originariamente aristotélica –aunque luego fueran conocidas por los lógicos estoicos de modo independiente y en otro plano de análisis de la argumentación demostrativa–. Por ello es un tópico atribuir a Aristóteles el primer modelo de una ciencia demostrativa. Con todo, la atribución suele pecar de equívoca. Pues lo que ofrece el modelo aristotélico es un programa metodológico, un ideal más fecundo desde el punto de vista de la razón filosófica, lógica y metodológica, que desde el punto de vista de la argumentación efectivamente practicada en la ciencia griega o helenística. No se sabe de ningún heleno, incluido el propio Aristóteles, que siguiera la pauta canónica de la demostración silogística en el curso de su investigación filosófica y científica, o en orden a la exposición racional y convincente de sus resultados. Para hallar algo parecido a un modelo real de organización "axiomática" y una práctica definida de la demostración habremos de esperar a los *Elementos* de Euclides. Hay indicios de que, a lo largo del s. III, cuando menos en el área de influencia de la matemática alejandrina, los *Elementos* de Euclides constituyen el primer paradigma efectivo de demostración de que tenemos noticia.

En este sentido, no sólo cabría hablar de la invención, sino de la fundación griega de nuestra idea clásica de demostración. En palabras de Leibniz: "Es necesario reconocer que los griegos han razonado con enorme precisión en matemáticas, y que han legado al género humano los modelos del arte de demostrar" (*Nuevos ensayos sobre el entendimiento humano* IV, c. II, 13)[5]. Ahora bien, según es –o debería ser– de dominio público, la práctica deductiva geométrica no cuadra perfectamente con la teoría aristotélica de la demostración. A finales del s. XVI empieza a extenderse la conciencia de las diferencias entre una y otra; más aún, empiezan a cumplirse en la realidad histórica esas conocidas palabras de Brunschvicg: "Euclides, para las numerosas generaciones que se han nutrido de su sustancia, posiblemente ha sido menos un profesor de geometría que un profesor de lógica"[6]. Un empeño característico del "more geometrico" del s. XVII es desarrollar este legado. En primer lugar, quiere dotar a la práctica geométrica de una teoría metodológica congruente -por ejemplo, en la línea propuesta por Pascal hacia 1657 o 1658 en sus ensayos sobre el espíritu geométrico y el arte de persuadir–[7]. En segundo lugar, procura pasar desde la antigua lógica de la demostración hasta una lógica de la sistematización axiomática en general; en esta transición desde el análisis de la argumentación concluyente hasta la consideración del cuerpo deductivo del conocimiento -el conjunto infinito de las proposiciones fundadamente verdaderas–, es donde Leibniz parece asomarse a cuestiones metateóricas como la consistencia y la suficiencia semántica de las teorías deductivas[8]. En realidad estos ideales de geometrización del conocimiento, alentados por algunas filosofías del s. XVII, no sólo se vieron marginados por el curso de las matemáticas de los ss. XVII y XVIII; las cuestiones metateóricas únicamente empezaron a tener un sentido cabal y preciso a la luz del desarrollo de las teorías y métodos matemáticos del s. XIX, y por añadidura el análisis lógico subsiguiente ha mostrado que los ideales leibnizianos son lógicamente inviables. Para colmo, el propio método clásico de axiomatización deja bastante que desear en comparación con otras variantes de axiomatización -abstracta, formal, estructural–[9] y a la luz de los nuevos recursos lógicos y metodológicos actualmente disponibles.

Pero las secuelas del legado clásico y su consideración crítica corresponden a otra historia. La historia que interesa aquí es la hecha por las aportaciones griegas a la demostración indirecta, la demostración directa y la "axiomatización". Aunque, naturalmente, en el espacio de un artículo sólo caben algunos apuntes al respecto.

4. Reducción al absurdo y demostración indirecta

Como ya había indicado, la reducción al absurdo –propiamente dicha– de una proposición consiste en la exposición de su imposibilidad lógica. Supongamos el caso de A; de esta suposición, amén de otros conocimientos pertinentes, se sigue en consecuencia que ha de darse el caso tanto de B como de no-B; ahora bien, conforme a la relación de consecuencia lógica, no es posible que de una proposición verdadera se siga una contradicción. Luego, tal resultado evidencia la imposibilidad de que nuestra suposición inicial sea verdadera. Hoy podemos distinguir entre una variante "débil" y una variante "fuerte" de este tipo de argumentación. La primera se detiene en la prueba de la inevitable falsedad de la suposición en cuestión; la reducción sólo tiene los efectos destructivos de una demostración negativa. La segunda variante pasa a probar igualmente la verdad de la proposición contradictoria con la suposición refutada, de modo que la reducción alcanza a tener la fuerza de una demostración positiva –e.g.: cuando consideramos que la reducción al absurdo de una suposición de que no-P demuestra indirectamente la tesis de que P–. Esta variante fuerte entraña la adopción no sólo del principio de no contradicción sino del principio de tercero excluido o algún otro equivalente. Los griegos practicaron indistintamente las dos variantes[10].

Antes había reiterado que la primera muestra efectiva de una demostración cabal responde a este patrón de la reducción al absurdo y es de carácter matemático. Los partidarios de una matriz dialéctica y filosófica de la idea griega de demostración consideran que las aplicaciones primigenias de la reducción al absurdo propiamente dicha tienen lugar en la tradición de la filosofía eleática: aparecen en el *Poema* de Parménides y en los argumentos eleáticos –de Zenón de Elea y de Melisso– contra algunas concepciones cosmológicas milesias y pitagóricas. En opinión de Arpád Szabó, en particular, el primer uso matemático conocido –la demostración de la no conmensurabilidad– es posterior al *Poema* de Parménides; además, sólo tiene sentido en el seno de un desplazamiento del pensamiento matemático griego desde la visualización y la conceptualización empírica de los primeros tiempos hasta la abstracción que conlleva la investigación de magnitudes no conmensurables, y este nuevo talante teórico no deja de ser otro síntoma del influjo eleático. Los partidarios de una matriz matemática de la idea griega de demostración insisten en la filiación pitagórica de la prueba y en la autonomía de este uso matemático de la reducción al absurdo dentro del marco de un estudio incipiente de magnitudes no conmensurables. La cuestión continúa abierta. Ni siquiera tenemos noticias precisas sobre los inicios de esta investigación de no conmensurables (árrheta, áloga, asýmmetra); cabe suponer que sus primeros pasos estén relacionados con el problema de la duplicación del cubo y es probable que los primeros resultados daten de la segunda mitad del siglo V.

Es claro –a mi juicio– que el empleo metódico de la reducción al absurdo presupone al menos dos cosas: por un lado, cierta familiaridad con las relaciones de oposición entre ideas y entre proposiciones; por otro lado, cierta experiencia en la aplicación de estas relaciones a efectos discursivos y dialécticos. La cosmología antigua, pitagórica y milesia, conoce varias clasificaciones y usos conceptuales de términos y elementos opuestos. La tradición eleática practica varias formas de argumentación sobre la base de nociones y tesis opuestas: es posible que el primer significado preciso de *dialéctica* fuera este género de argumentación reductiva y por ello su invención se atribuyera a Zenón de Elea, padre putativo de la Dialéctica (Aristóteles, Frag. 65). En cualquier caso, esta vía de refutación ya se ejerce como un método de razonamiento filosófico en la Grecia de mediados del s. IV (por ejemplo, en Atenas o en Megara), aparte de presentar otros usos comunes en el discurso forense, político o retórico. Sin embargo, conviene observar en primer término que ningún argumento eleático o filosófico de entonces, conservado, constituye una reducción al absurdo propiamente dicha, una demostración concluyente similar a la prueba matemática de inconmensurabilidad recordada por Aristóteles. Y, en segundo lugar, los desarrollos conceptuales y dialécticos anteriores a Aristóteles, que hoy conocemos, no llegan a configurar el marco de condiciones preciso para un uso consciente y efectivo de la pauta de demostración por reducción a un imposible lógico. Tanto la "gramática lógica" de las relaciones de oposición como el análisis de los principios lógicos subyacentes en una reducción al absurdo propiamente dicha –la referencia a extremos (términos, proposiciones) lógicamente incompatibles que formen una disyunción exhaustiva, más los supuestos de no contradicción y (posiblemente) tercero excluido–, son contribuciones aristotélicas. Al haber mostrado esto en otras ocasiones[11], no me detendré ahora en la justificación de ambos puntos. Pero quizá sea ilustrativo recordar las ambigüedades del mismo Platón a este respecto.

Por un lado, Platón procura introducir cierta lucidez y orden en el uso discursivo de las relaciones de oposición, logra disipar algunas dificultades y confusiones corrientes en la dialéctica de la contraposición y del dilema, sienta unas bases del método de división y de clarificación conceptual, da muestras incluso de una conciencia cabal de la oposición contradictoria bien de manera implícita (*Eutidemo*, 293, 7 ss.), bien en términos explícitos (*República* IV, 436b 8 ss.). No obstante, Platón continúa debatiéndose con las distintas clases de oposición (e.g., *Sofista*, 254b 10 ss.); su Sócrates no deja de incurrir en los vicios dialécticos comunes ya sea con fines destructivos (e.g., *Protágoras*, 330c 4 ss.), ya sea con fines constructivos (e.g., *Fedón*, 78, 1 ss.; 79a 6 ss.; *Timeo*, 51b 7 ss); y el empleo de la división en la Academia platónica siembra nuevos equívocos que toca desvanecer -en la teoría al menos- a Aristóteles (e.g., *APo.* II 5, 91b 18 ss.). Por otro lado, Platón recurre en ocasiones a la pauta dialéctica de reducción para corroborar la plausibilidad de una hipótesis o para descartarla (e.g., *Teeteto*, 162e y ss.); también advierte la distinción entre persuadir y demostrar (e.g., *Teeteto*, 162e; *Timeo*, 51e). Con todo, incluso cuando trata de establecer una refutación concluyente, sus pretensiones demostrativas pueden resultar atenuadas y vacilantes, verse debilitadas por una cláusula vaga del tenor de "parece darse algo de imposible" (*Teeteto*, 164b 8).

En la matemática griega posterior a Aristóteles, la reducción al absurdo propiamente dicha ya funciona como un patrón de prueba, como un método de demostración indirecta encaminado a la refutación de una tesis o a la prueba de la tesis contrapuesta, y como un procedimiento de eliminación de casos. Su empleo sistemático en contextos como el del mal llamado "método de exhaución" puede servir de muestra: se trata de sentar que X es igual a Y, siendo X una figura curvilínea cuya magnitud se desea conocer e Y una figura rectilínea regular cuya magnitud es conocida; conforme a una tricotomía elemental, X es mayor que Y, menor que Y o igual a Y; reducidas al absurdo las dos primeras posibilidades, queda establecido el resultado que había que demostrar. Sin embargo, con ser éste el uso más familiar no es el único entre los griegos. Por ejemplo, en los *Primeros Analíticos* aristotélicos la reducción al absurdo también adquiere la condición de una especie de recurso metalógico, que no aspira a sentar una conclusión sino más bien a mostrar la validez de un silogismo por su reducción a otro silogismo válido del sistema. El procedimiento está descrito en *APr.* II 8, 59b 1-5, y tiene diversas aplicaciones (cf. *APr.* I 5, 27a36-27b1, y I 7, 29a 37-39). Pero, en una perspectiva metodológica general, revisten suma importancia otros dos cometidos.

Por un lado, el patrón conserva de sus raíces dialécticas el papel de método de discurso a partir de suposiciones hipotéticas (ex hipothéseos). En este sentido, el razonamiento por vía de lo imposible puede presentar, en el propio Aristóteles, no tanto el carácter de una demostración como un carácter semejante al de los razonamientos hipotéticos en general (véase, por ejemplo, *APr.* I 23, 40b 26-30; I 44, 50a 16-19, 29-39), más interesantes desde un punto de vista heurístico; en esta línea, la demostración en términos estrictos no será otra que la demostración directa que procede por la vía canónica silogística a partir de unas verdades primeras[12].

Ahora bien, por otro lado, todavía se puede sacar mayor partido de estas virtualidades del patrón en un contexto típico de la geometría griega, en el contexto del método de análisis. Según la conocida descripción de Pappo: "El análisis es el método que parte de lo buscado (tò thetouménon), como si ya estuviera admitido, y pasa a través de sus consecuencias (tà akóloutha) hasta algo aceptado en la síntesis; pues en el análisis asumimos lo buscado como si ya estuviera dado (gegonós) e investigamos de dónde resulta y nuevamente cuál es el antecedente de esto último y así hasta que, en el curso de esta regresión, lleguemos a algo conocido que es lo primero en el orden (arkhés) –i.e., alguna premisa primera o algún principio de acuerdo con el orden propio de una deducción axiomatizada–. Y a este método lo llamamos *análisis* al ser una solución hacia atrás (anápalin lýsin)"[13]. Puede verse en la reducción al absurdo un germen de este método de investigación. Como dice Pappo al final del pasaje citado: si algún resultado aceptado en este proceso regresivo es verdadero o posible, lo buscado es a su vez una proposición verdadera o una construcción posible; si tal resultado es reconocidamente falso o imposible, lo buscado es falso o imposible. Pappo describe el método de análisis como la contrapartida heurística de la síntesis que se plasma en las demostraciones "axiomáticas": el regreso a los principios o el hallazgo de premisas dentro de una pirámide deductiva cuyo vértice corresponde a las proposiciones teóricas primitivas. Esta formulación entraña ciertas dificultades lógicas y, además, representa una especie de desafío hermenéutico. Interpretaciones recientes del método lo entienden como un procedimiento heurístico más general e informal, relacionado con la lógica de la deducción natural o con una suerte de experimentación mental[14]. Por ejemplo, cabría entender que el método de análisis trata de hallar no el antecedente de una relación de consecuencia, sino la compatibilidad de una proposición con los principios de la teoría. En esta interpretación, la prueba de la verdad de una proposición equivale a mostrar que la proposición "va junto a" tales principios, es una tesis concomitante; la prueba de su falsedad equivale a mostrar que la proposición "no va junto a" los principios de la teoría, no cuadra con ellos. En la práctica geométrica habitual, el procedimiento funcionaría mediante el examen de casos concretos de aplicación (ékthesis) de la proposición en cuestión. Si nuestra búsqueda de contraejemplos fracasa, este intento fallido de reducir la proposición al absurdo, a una composición imposible con los principios, se convierte en una señal positiva de que esa proporción es deducible de estos principios. Hoy nos son familiares las bases y condiciones lógicas de este recurso al análisis sistemático de contraejemplos, pero no tenemos motivos para adivinarlas en la geometría antigua. A lo sumo, podemos suponer que los matemáticos relacionados con la Academia platónica conocían este plan de buscar el acuerdo de una conjetura con ciertos principios antes de proceder a su deducción directa, y podemos reconocer la importancia que esta especie de experimentación mental reviste en algunas investigaciones matemáticas avanzadas del s. III (e.g., arquimédicas).

5. La demostración directa y la "axiomatización" aristotélicas

De las notas anteriores sobre la demostración indirecta cabe colegir que fueron filosóficos, dialécticos y matemáticos los motivos que condujeron a ella. Una interacción y una confluencia semejante marcó también los primeros pasos de la idea de demostración directa –que podríamos situar hacia mediados del s. IV–. El lugar más propicio para el encuentro fue el medio intelectual ateniense que supo crear en torno suyo la Academia platónica. Los textos que dan fe de la adquisición de una idea general y precisa de demostración, amén de unas primicias del método axiomático, son los *Analíticos* de Aristóteles. También conviene recordar el contexto próximo que configuran otros tratados del *Organo* aristotélico –e incluso la *Metafísica*– en la medida en que la teoría de la demostración aristotélica es congruente con otra invención suya no menos interesante: la teoría de la argumentación.

Ahora no parece necesario volver sobre las raíces filosóficas, dialécticas y matemáticas de esta teoría de la demostración[15]. Pero no estará de más destacar el papel que desempeñan algunas discusiones y actitudes fomentadas por la Academia, donde el joven Aristóteles ejerció como retórico y dialéctico y donde se empezaron a gestar sus análisis lógicos y metodológicos. En primer lugar, Aristóteles compartía la convicción platónica y académica de que el discurso es un *medio* idóneo de investigación y de argumentación racional: el *lógos* discursivo común constituye de suyo tanto un instrumento como un ámbito natural de la investigación científica y la elucidación filosófica. En segundo lugar, Aristóteles tiene que habérselas con el problema de las relaciones entre la división platónica, la definición y la demostración, una cuestión en la que se ve enredada la Academia y cuya resolución le llevará a él mismo cierto tiempo y algún trabajo: la división o la clasificación pueden desembocar en una definición, así como una definición puede oficiar como premisa deductiva, pero ninguna de estas operaciones metódicas constituye una demostración. En tercer lugar, Aristóteles también se considera obligado a despejar otros equívocos acerca de la idea misma de demostración. A tenor de *APo.* I 3, 72b 5 ss., había quienes daban en pensar que la demostración es imposible por envolver una regresión infinita -opinión atribuida a Antístenes y debatida en la Academia-; había quienes confiaban en una especie de proceso circular -opción atribuida a seguidores de Jenócrates, y al geómetra Menaekhmo, ambos relacionados con el medio académico-; Aristóteles niega que todo conocimiento sea demostrable y sienta la efectividad de la demostración sobre la existencia de supuestos o principios indemostrables. Por último, es bien sabido que la Academia platónica no sólo alienta disquisiciones filosóficas y dialécticas: en torno suyo gravitan algunos de los matemáticos griegos más notables de la época -en particular, Eudoxo-; Proclo menciona la difusión en este ámbito de unos primeros manuales o *Elementos* matemáticos, concretamente el de Theudio de Magnesia (*In I Euc. Elem. Lib. Comment.*, 66.4-67.15), y el lenguaje de los *Analíticos* aristotélicos confirma la popularidad de ciertos términos, ejemplos y pruebas matemáticos; en fin, cabe atribuir al propio Platón alguna sugerencia en favor de una organización "deductiviforme" del conocimiento (e.g., *República* 6, 511a ss.)[16].

Pero nada de esto empaña la originalidad del programa metodológico de los *Segundos Analíticos* de Aristóteles, ni su consciente fundación de una teoría de la demostración científica.

Los *Segundos Analíticos* apuntan dos caracterizaciones básicas del conocimiento científico. Conforme a la primera (*APo.* I 2, 71b 9 ss.), una persona X conoce que Q si y sólo si X llega a saber que P es una explicación causal de Q y que, por lo tanto, Q no puede ser de otra manera. Conforme a la segunda (*APo.* I 4, 73a 21 ss.), si X conoce que Q entonces X cuenta con una demostración de la necesidad de Q. Ambas descripciones convergen en la idea de que la demostración es una explicación lógicamente concluyente.

La concepción aristotélica de la demostración científica, en general se puede resumir como sigue. Un argumento es una demostración si y sólo si satisface (*i*) la condición lógica de revestir la forma de un silogismo válido; (*ii*) las condiciones epistemológicas de constituir una serie finita y ordenada de verdades necesarias, y de poseer fuerza explicativa interna -en el sentido de reflejar la estructura inteligible o causal del objeto de la explicación-; (*iii*) la condición metodológica de pertenecer a un cuerpo teórico "axiomatizado" que versa sobre un dominio acotado de la realidad. La demostración deviene así una forma canónica de exposición fundamentada y lógicamente concluyente de lo que se puede saber a ciencia cierta.

La claridad de ideas que muestra Aristóteles en punto a la demostración científica (apódeixis) contrasta con la relativa ambigüedad en que se mueven sus primicias "axiomáticas". Para empezar, su caracterización de las asunciones primeras o indemostrables (anapódeiktoi) es tajante pero tiene un carácter híbrido lógico-epistemológico: son proposiciones verdaderas, primitivas, inmediatas, provistas de fuerza explicativa, prioritariamente conocidas y familiares (*APo.* I 2, 71b 25 ss.). Por añadidura, los *Segundos Analíticos* ofrecen varias y diversas descripciones de estos ingredientes primordiales[17]. Una de las más populares es la versión correspondiente a *APo.* I 2, 72a 14-22, donde los principios se dividen en axiomas y tesis. Con arreglo al ejemplo más frecuente de axioma -si de iguales se quitan iguales quedan restos iguales (*APo.* I 10, 76a 41; 76b 20; I 11, 77a 31)-, cabe entender que A es un axioma para una ciencia o un conjunto ordenado de ciencias, C, si todo el que conozca alguna proposición de C reconoce A. Los comentadores aristotélicos han insistido en su alcance absoluto: A es un axioma si todo el que conozca algo reconoce A. Esta interpretación tiende a acentuar el carácter común de los axiomas frente al carácter específico de las tesis propias de una ciencia. Las tesis, a su vez, se subdividen en definiciones y suposiciones: las definiciones establecen más bien lo que algo es; las suposiciones establecen que algo es el caso, sin que Aristóteles distinga por lo regular entre usos predicativos -ser tal o cual cosa- y usos existenciales -ser efectivamente, darse en la realidad-. De este pasaje y de otros más o menos parejos podemos sacar en limpio dos ideas fundamentales sobre los elementos de un cuerpo deductivo axiomatizado: la distinción entre elementos primitivos y elementos derivados; la distinción entre elementos comunes de varias ciencias y elementos propios de una ciencia. Pero no hay evidencia de otras distinciones capitales: la distinción entre reglas lógicas y proposiciones teóricas: la distinción entre proposiciones y términos.

Otra cuestión difícil de dirimir es si Aristóteles propone una clarificación metódica preliminar, destinada a la construcción de sistemas axiomáticos, o se limita a un análisis de lo que hay que conocer o asumir en orden a sentar o reconocer una demostración. Creo que se trata más bien de lo segundo: la metodología aristotélica, en general, no acaba por pasar desde la lógica de la demostración, desde la convalidación de una prueba deductiva concluyente, hasta la lógica estructural de los sistemas deductivos.

Por último, llama la atención el sentido netamente programático de la teoría aristotélica de la demostración científica. Son claras las ilusiones que se hacen los *Analíticos* cuando suponen que las ciencias deductivas siguen efectivamente el canon silogísitco de demostración (e.g. *APo.* I 14, 79a 17-20); es igualmente obvio el entusiasmo que embarga a este respecto a muchos comentadores aristotélicos. Con todo, lo cierto es que no hay evidencia documental de que algún filósofo, matemático o científico griego –incluido el propio Aristóteles– hubiera practicado alguna vez esa forma canónica de ciencia demostrativa. Y puede que el primero en caer en la cuenta de las dificultades que entrañaba el aplicar esta lógica de la demostración haya sido el mismo Aristóteles, al vérselas con la prueba de una proposición geométrica elemental –los ángulos del triángulo equivalen a dos rectos– en APr. I 35, 48a 30-39. Las raras pruebas silogísticas de Aristóteles –e.g., los silogismos de la vid de APo. II 16, 98b 5-16– son ilustraciones metodológicas triviales antes que demostraciones sustantivas.

El análisis de los argumentos demostrativos en la tradición de la lógica estoica parece prestarse a consideraciones similares. En conclusión, el legado más eficaz de estas dos metodologías de la demostración, la aristotélica y la estoica, fue seguramente la convicción clásica en que una demostración es un argumento lógicamente concluyente, descansa en premisas verdaderas y, en última instancia, remite a unos principios indemostrables y prioritariamente conocidos.

6. El paradigma de la demostración geométrica

Los griegos del s. IV pudieron disponer de una teoría de la demostración gracias a los *Analíticos* aristotélicos. Pero, de hecho, conocieron una práctica efectiva de la demostración con los *Elementos* de Euclides y a través de su influjo paradigmático sobre la matemática helenística desde la primera mitad del s. III. Uno y otro modelos, el programático de los *Analíticos* y el paradigmático de los *Elementos*, fueron relativamente dispares e independientes[18].

En la suma geométrico-aritmética de Euclides se toman en consideración dos cuestiones principales: la resolución de *problemas*, que tienen que ver con la construcción de –o con operaciones sobre– algún objeto y la derivación de *teoremas*, esto es: asertos relativos a propiedades esenciales de los objetos teóricos o a relaciones entre ellos. La demostración, en el primer caso, viene a confirmar deductivamente las construcciones u operaciones realizadas; en el segundo caso, constituye la prueba deductiva de una proposición. *Problemas* y *teoremas* responden a tradiciones perceptibles en el s. IV. Los *problemas*, así como la elaboración y manipulación de objetos geométricos, pertenecen a una tradición más bien matemática, quizás entrenada en el planteamiento de viejas cuestiones como la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo, y familiarizada con diversos recursos intuitivos, diagramáticos y aun "mecánicos" –a veces censurados en medios filosóficos, e.g. por Platón: *República* VII, 527a–. Los *teoremas* acusan más el peso de consideraciones filosóficas, tienen mayor dependencia de algún principio teórico y establecen propiedades o relaciones de índole abstracta.

Sin embargo, en los *Elementos*, el tratamiento de los problemas y de los teoremas geométricos puede atenerse a una estructura común de argumentación[19]. Según Proclo (*In I Euc. Comment.*, 203.1-204.13), la forma perfecta de esta estructura comprende los siguientes pasos:

(*i*) *Prótasis*: presentación del objeto de la demostración (la tarea que hay que realizar como problema o la proposición que hay que establecer como teorema). (*ii*) *Ekthesis*: introducción o exposición de un caso determinado. (*iii*) *Diorismós*: especificación –sobre el caso expuesto– del objeto de la demostración; en los teoremas suele venir anunciado por una cláusula del tenor de "digo que..."; a veces en Euclides y en otros matemáticos –e.g., Arquímedes o Apolonio– cobra el sentido de una determinación de las condiciones y límites de la construcción o del aserto en cuestión, y entonces sigue inmediatamente a la prótasis o incluso forma parte de ella (e.g., *Elementos* I, 22; IV, 28). (*iv*) *Kataskeué*: preparación y disposición de los datos o construcciones pertinentes.(*v*) *Apódeixis*: proceso demostrativo propiamente dicho –generalmente por vía de demostración directa, aunque tampoco falte el recurso a reducciones y demostraciones indirectas–, donde los postulados pueden perder el protagonismo anterior y pasan a un primer plano las definiciones y, sobre todo, las nociones comunes (axiomas). (*vi*) *Sympérasma*: conclusión señalada en ocasiones por una cláusula del tenor de "que era lo que había que hacer" en el caso de problemas, y del tenor de "que era lo que había que demostrar" en el caso de teoremas.

Un ejemplo cabal de este proceso es justamente la proposición 1 del libro I de los *Elementos*. Pero, naturalmente, no siempre aparece con esta plenitud en las demostraciones euclídeas. En opinión de Proclo, los pasos esenciales son la formulación del objeto de la demostración, la demostración misma y la conclusión. Por lo demás, las demostraciones aritméticas de los libros VII-IX suelen requerir una kataskeué fundada en operaciones combinatorias, más bien que espaciales o diagramáticas, y ordinariamente carecen de sympérasma.

La estructura completa muestra algunos rasgos sobresalientes de la demostración geométrica euclidiana. Es, en primer lugar, una prueba deductiva de carácter informal e intuitivo, donde el uso de diagramas y la referencia a un caso concreto desempeñan un papel característico. Responde, en segundo lugar, a una lógica peculiar de la condicionalización y de la generalización; el sympérasma es tanto una conclusión como una reafirmación sumaria del objeto de la demostración, que supone tácitamente pasos de condicionalización y la introducción de un cuantificador universal. Siendo la ékthesis un paso regular en el proceso de la prueba, la reiteración de lo que se trata de hacer o de demostarar parece ir recordando la necesidad de generalizar el resultado obtenido por medio de la consideración de un caso cualquiera. Este alcance general de la conclusión está expresamente reconocido en Proclo (*In I Euc. Comment.* 207.4-25). En suma, parece un tipo de demostración más pendiente de su vigencia y general que de la necesidad inherente a la validez de su forma lógica.

Las demostraciones geométricas se mueven en un ámbito de nociones de objetos relativamente determinado -aunque no a la manera de una axiomatización hilbertiana informal abstracta[20]-. La determinación de este ámbito descansa aparentemente en una declaración preliminar de *nociónes comunes* (koinaì énnoiai), *definiciones* (hóroi) y *postulados* (aitémata). Es bien sabido que el conjunto de estos principios no resulta necesario ni suficiente para el desarrollo deductivo de la matemática recogida en los *Elementos.* Las nociones comunes pueden considerarse un correlato de los axiomas aristotélicos, pero Euclides no parece dispuesto a señalar exhaustivamente todos los precisos. Las definiciones son acotaciones conceptuales e intuitivas que a veces desempeñan un papel sustancial en las demostraciones y otras veces no representan papel alguno -e.g., las nociones de oblongo, rombo o romboide-; seguramente se deben más a la tradición de los *Elementos* matemáticos y a un trabajo acumulativo de elucidación que a algún propósito axiomático como la demarcación de todos -y solos- los términos primitivos o la eliminación de los términos definidos en el curso de la demostración; por lo demás, la introducción paulatina de las definiciones a lo largo de los distintos libros de los *Elementos* da a entender que Euclides no está tan interesado en la unificación del cuerpo del conocimiento matemático como en una organización conceptual y deductiva de los dominios teóricos específicamente considerados. Esta tendencia a una especie de parcelación"axiomática" es aún más acusada en otros matemáticos del s. III, en particular Arquímedes. Los postulados pueden responder a la intención de adelantar ciertas condiciones básicas y generales de construcción y de aserción al menos en el ámbito geométrico -la aritmética de los *Elementos* carece de postulados expresos, si bien Euclides parece acogerse en ocasiones a una suerte de inducción matemática y a otros supuestos tácitos (e.g. *Elementos* VII, 31, 33)-. No es fácil pronunciarse acerca de otras cuestiones relacionadas con estos ingredientes "axiomáticos" por ejemplo la cuestión de si la constructibilidad euclidiana entraña efectivamente la existencia matemática de los objetos teóricos o si, más bien, procede de la tradición matemática anterior ligada a recursos prácticos y un tanto empíricos. Desde luego, no hay motivos para atribuir a Euclides la conciencia del problema de las relaciones entre constructibilidad y existencia en los términos en que hoy puede plantearlo la filosofía de las matemáticas: Euclides no caracteriza -a la manera axiomática de Hilbert- un sistema de objetos existentes, sino que por lo regular infiere la existencia de un objeto a partir de la existencia de otro por medio de una construcción diagramática[21].

Así pues, no está claro que los *Elementos* deparen algo más que una primicia de axiomatización. Ni siquiera el desarrollo teórico alcanzado en algunos dominios, como el de la teoría de las proporciones del libro V, permite ver una muestra cabal del método axiomático. Y, en fin tampoco son especialmente afortunadas en este preciso sentido otras empresas "axiomáticas" no menos celebradas, por ejemplo la teoría del equilibrio establecida por los postulados del libro I de *Sobre el equilibrio de planos* de Arquímedes[22]. De modo que parece más justo entender estas contribuciones como elucidaciones conceptuales y desarrollos deductivos de cuerpos de conocimiento relativamente maduros, en cuyo seno tiene perfecto sentido la idea de una demostración rigurosa pero informal.

La disparidad y la incongruencia de usos que cunden en la terminología empleada a propósito de los ingredientes axiomáticos básicos, podrían ser un síntoma externo de este nivel de "axiomatización". No falta, al parecer, un uso un tanto regular de 'etéstho' ('asúmase', 'postúlese') para introducir los postulados, y de 'hypokeístho' ('supóngase') para introducir las definiciones y otros principios. Pero más allá de este punto reina bastante confusión. El ejemplo más notorio es justamente el matemático griego más capaz y lúcido, Arquímedes, para quien 'hypothesis', 'aítema', 'axíoma', 'lambanómena' pueden resultar expresiones equivalentes. Proclo –ya en el s. V d.n.e.– da a entender que la terminología relativa a los principios (arkhaí) venía siendo vaga y problemática desde el s. IV hasta seguir discutiéndose en su propia época estas nociones y denominaciones; los comentadores de Euclides y Arquímedes también trataron en vano de fijar una terminología uniforme sobre bases aristotélicas[23].

Todo lo anterior no impide a los *Elementos* de Euclides el ejercer un papel de paradigma de la demostración para los matemáticos helenísticos y, en especial, para los directamente relacionados con Alejandría. Esta pronta institucionalización quizás estuviera favorecida por el peso de una tradición matemática y, en particular, por la confección anterior de *Elementos* que, según Proclo, se remontaría a Hipócrates de Khíos[24].

En cualquier caso, una de las evidencias más claras de la existencia de un canon demostrativo es la comunicación de Arquímedes a Eratóstenes sobre el método aplicado a sus proposiciones "mecánicas"[25].

El testimonio de Arquímedes, su aceptación de la ortodoxia establecida en el método de la prueba geométrica, tiene un valor añadido: proviene de alguien con una notable independencia de espíritu frente a sus colegas alejandrinos, teñida de desdén hacia sus rutinas escolares.

En este informe a Eratóstenes, Arquímedes quiere confiarle las características de un método para abordar la investigación de cuestiones matemáticas por medio de nociones y conjeturas mecánicas. El método tiene virtudes heurísticas y permite adelantar una argumentación plausible de los resultados contemplados, pero queda lejos de constituir una verdadera demostración. A lo largo de su exposición se mantiene la contraposición entre esta investigación (theoría, theoreîn dià mekhanikôn) y la demostración geométrica (apódeixis dià tôn geometrouménon); en alguna ocasión llega incluso a distinguirse entre mostrar (deíknmi) un resultado por este método y proceder a su demostración efectiva. Las observaciones metodológicas de Arquímedes tienen sentido en el marco de una idea precisa y bien establecida de la demostración geométrica: es por referencia a ella como define Arquímedes su método mecánico de investigación y de argumentación. La investigación se funda en nociones de estática aplicadas a figuras geométricas y se sirve de conjeturas tan audaces como la suposición de que las figuras se llenan o componen de sus cuerdas, y los sólidos de sus secciones. La argumentación es un remedo de la pauta normal en matemáticas: Arquímedes avanza unas asunciones previas, en forma de postulados y definiciones, sobre centros de gravedad; luego, en el examen de los resultados ofrecidos, tiende a reproducir los pasos familiares: la proposición, la exposición de un caso determinado, la preparación o disposición de la prueba mediante construcciones geométricas –introducidas por un 'sea' o un 'trácese'– y consideraciones estáticas –introducidas por un 'imagínese (concíbase) tal línea como una palanca'–, hasta llegar por diversos recursos inferenciales a la conclusión.

Hay varios motivos para que esta argumentación diste de ser una demostración canónica: emplea conjeturas carentes de base teórica matemática; parece atentar contra la autonomía conceptual y sistemática de la geometría; tampoco respeta su prioridad metódica sobre las posibles aplicaciones mecánicas –una prioridad ya reconocida por los *Analíticos* aristotélicos. Según esto, el canon de la demostración geométrica responde a supuestos como los siguientes: se funda en nociones y en métodos específicamente geométricos –e.g., en teorías como la de las proporciones y en métodos congruentes como los de compresión y aproximación ("exhaución")–; procede a demostraciones rigurosas, pero informales –e.g., mediante el uso tácito de la condicionalización y la generalización–, sobre la base de algunas asunciones previas que determinan el ámbito teórico pertinente; el curso de la demostración tiene una estructura análoga a la euclidiana y sólo incluye las asunciones propias, los teoremas de dominio público (e.g., los ofrecidos por los tratados de *Elementos*) o las proposiciones cuya derivación de las asunciones básicas –o, en ocasiones, congruencia con ellas– ya ha sido establecida anteriormente. Puede ocurrir incluso que el recurso a construcciones más complejas que las euclídeas, en la resolución de ciertos problemas "sólidos" –sobre secciones cónicas– o "lineales" –e.g., sobre espirales–, sea un medio tachado de heterodoxo por la comunidad alejandrina. Cuando menos, el propio Arquímedes y su amigo Conón, entre otros, hubieron de soportar acusaciones de este tipo.

No es extraño entonces que el desarrollo posterior de la matemática helena consistiera principalmente en la elucidación de lemas –asunciones auxiliares más o menos implícitas en los resultados probados–, y en la dilucidación metodológica de otros supuestos conocidos o suplementarios. Estas discusiones y perfeccionamientos del paradigma geométrico no enriquecieron sustancialmente el legado teórico anterior. Tampoco tuvieron mayor fortuna metodológica: no contribuyeron al desarrollo de las primicias "axiomáticas" de la gran matemática del s. III, ni al análisis formal de la prueba matemática, a pesar de que no les faltaran estímulos para ello –e.g.: el reto de la crítica escéptica desde el s. II, la reacción de la metodología de raíz aristotélica desde el s. I en nuestra era, los encantos de una reunificación neoplatónica de los principios como la contemplada cuatro siglos más tarde por Proclo–. Por lo demás, ni la relativa confluencia de motivos lógicos peripatéticos (aristotélicos) y estoicos que parece culminar en Galeno (s. II d.n.e.) ni el interés del mismo Galeno hacia algunas formas de demostración matemática apenas reconocidas –como el silogismo de relación (e.g.: *Eisagogé Dialektiké*, xvi, 1 ss.)– y su estructura "axiomática", configuran una nueva perspectiva de la idea de demostración[26].

NOTAS

1 Véanse, por ejemplo, A. Szabó (1969): *The Beginnings of Greek Mathematics*, Dordrecht/Budapest, 1978, y las contribuciones a la sección II (The early history of the axiomatic method) de la Conferencia de Pisa, 1978, recogidas en J. Hintikka, D. Gruender y E. Agazzi, eds.: *Theory Change, Ancient Axiomatics, and Galileo's Methodology*, Dordrecht/Boston, 1981, pp. 113-225; en particular, la de W.R. Knorr: "On the early history of axiomatics: the interaction of mathematics and philosophy in Greek antiquity", pp. 145-86.

2 Por recordar a Kuhn: "Muchos descubrimientos científicos, particularmente los de más interés e importancia, no son acontecimientos a los que se adecue la pregunta '¿dónde?' y, menos aún, '¿cuándo?'. Aunque se dispusiera de todos los datos imaginables, tales preguntas, en términos generales, no tendrán resupuesta" en su (1962): "La estructura histórica del descubrimiento científico", *La tensión esencial*, México, 1982; pág. 190. Estas palabras se aplican con igual razón a las invenciones metodológicas relacionadas con esos descubrimientos –e.g., a la manera como la primera prueba efectiva por reducción al absurdo parece relacionarse con el descubrimiento de magnitudes no conmensurables–.

3 Por ejemplo, en los *Segundos Analíticos* aristotélicos puede verse un uso general de 'deíxis', en el sentido amplio de 'prueba', que incluye como especializaciones la demostración (apódeixis), la inducción (epagogé) y aun la percepción (aísthesis), *APo.* II 7, 92a34-b 4. Cfr. el uso específico de 'apódeixis' en *APo.* I 2, 71b 16 ss. (En las citas aristotélicas emplearé las abreviaturas habituales: *APr.* para referirme a los *Primeros Analíticos*, *APo.* para los *Segundos.*).

4 Naturalmente, esto no implica que hayan sido los griegos del s. IV los únicos que se ocuparon originalmente del análisis lógico de la contradicción y la deducción. Cfr. por ejemplo las contribuciones independientes de lógicos y gramáticos hindúes, sobre todo a partir de los ss. I y II d.n.e. B.K. Matilal: *Epistemology, Logic, and Grammar in Indian Philosophical Analysis*, The Hague/Paris, 1971.

5 En la edic. de J. Echeverría, Madrid, 1983, pág. 445.

6 *Les étapes de la philosophie mathématique*, VI § 49. Citado en R. Blanché: *L'Axiomatique*, Paris, 1967^2, quien glosa esta frase apuntando que, a raíz de ello, la expresión "more geometrico" viene a significar lo mismo que "more logico", l.c., pág. 2.

7 "De l'esprit géométrique", "De l'art de persuader", en la edic. de L. Lafuma, Pascal: *Oeuvres completes*, Paris, 1963; pp. 348-59. (Hay versión castellana en Pascal: *Obras*, Madrid, 1980, pp. 278-301).

8 Véase, por ejemplo, P. Weingartner: "The ideal of the mathematization of all sciences and the "more geometrico" in Descartes and Leibniz", en W.R. Shea, ed.: *Nature mathematized*, Dordrecht/Boston, 1983; pp. 151-95.

9 Utilizo las calificaciones de W. Stegmüller: *The Structure and Dynamics of Theories*, Berlin/Heidelberg/New York, 1976; § 2.1, pp. 30-5. (Hay versión castellana: Barcelona, 1982).

10 Aristóteles emplea la variante fuerte en *APr.* II 11, 61a 19, y en *Del cielo*, 305a 14 ss.; la variante débil en *APr.* I 23, 41a 26-30, y *Física*, 237b 23 ss. También se han apreciado muestras de uno y otro tipo en los *Elementos* de Euclides. No estamos en condiciones de precisar si, por entonces, se tenía conciencia de los compromisos inherentes al uso de una u otra variante. Vid. las observaciones de L. Kalmár y A. Robinson a la

contribución de A. Szabó ("Greek dialectic and Euclid's Elements") al Coloquio internacional de Filosofía de la Ciencia (Londres 1965), en I. Lakatos, ed.: *Problems in the Philosophy of Mathematics*, Amsterdam, 1967; pp. 10-11 en particular.

11 Vid. "La historia de la lógica y el «caso Aristóteles»", *Llull*, 5 (1983), pp. 176-80 en especial; "Una introducción histórica a la lógica general", en *Lecturas de Lógica* II (Madrid, 1984), pp. 13-24 en particular.

12 Esta depreciación relativa de la reducción al absurdo frente a la demostración directa es un motivo recurrente en distintos momentos del desarrollo de la idea clásica de demostración axiomática. Por ejemplo reaparece en la *Logique ou l'Art de penser* de Port Royal (1662), IV, –donde la reducción al absurdo tiene el valor de un recurso sólo utilizable a falta de otro mejor, la demostración directa–, o en la *Wissenschaftslehre* de Bolzano (1837), V § 530 –donde únicamente posee una fuerza suasoria, alejada de la capacidad de fundamentación objetiva e interna de una auténtica demostración–.

13 *Synagogé* (edic. F. Hultsch), VII, 634-6. Véase Th. Heath (1908, 1925): *Euclid's Elements*, New York, 1956; "Introduction", ch. ix, § 6, I, pp. 138-40; o su (1921): *A History of Greek Mathematics*, New York, 1981; v. II, pp. 400-1.

14 Cf. la reconstrucción lógica de J. Hintikka y U. Remes: *The Method of Analysis: Its Geometrical Origin and Its General Significance*, Dordrecht/Boston, 1974, así como su "Ancient geometrical analysis and modern logic", contribución a R.S. Cohen et al., eds.: *Essays in Memory of Imre Lakatos*, Dordrecht/Boston, 1976, pp. 253-76. Y, por otro lado, la interpretación y las observaciones críticas de I. Lakatos (1978): "El método de análisis-síntesis", en la recopilación póstuma *Matemáticas, ciencia y epistemología*, Madrid, 1981, pp. 103-44.

15 Véanse, por ejemplo, los trabajos ya citados en la nota 11 supra, en particular las pp. 195-201 y 44-52 respectivamente, o mi artículo: "El incierto sentido de la teoría aristotélica de la ciencia", *Contextos*, II/4 (1984), pp. 27-47.

16 Aunque no conviene mitificar la mediación platónica en este sentido como a veces se ha querido hacer en otros aspectos, e.g. en la orientación geométrica del pensamiento matemático griego maduro, o en la transición de la cosmología a la astronomía bajo el programa de "salvar las apariencias (los fenómenos)".

17 J. Barnes, en su edición anotada: *Aristotle's Posterior Analytics*, Oxford, 1975, ha podido apreciar nueve clasificaciones a veces inconexas y no todas congruentes entre sí; *o.c.*, pp. 138-9.

18 Véanse, por ejemplo, los trabajos de I. Mueller: "Greek Mathematics and Greek Logic", en J. Corcoran, ed.: *Ancient Logic and Its Modern Interpretations*, Dordrecht/Boston, 1974, pp. 35-70; y *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*, (Mas London, 1981. Es errónea la difundida tesis de que los griegos sólo conocieron una axiomatización, la desarrollada por los matemáticos y descrita por Aristóteles (H. Scholz: "Die Axiomatik der Alten", *Blätter für deutsche Philosophie*, 4 (1930), pp. 259-78; reimp. en *Mathesis Universalis*, edic. de H. Hermes, F. Kambartel y J. Ritter, Basel, 1969, pp. 27-44). Todavía lo es más, si cabe, el inveterado tópico de que la lógica subyacente en los *Elementos* de Euclides no es otra que la aristotélica (tópico del que aún se hace eco un historiador de la Lógica tan conocido como J.M. Bocheński, vid. "The general sense and character of modern logic", en E. Agazzi, ed.: *Modern Logic A Survey*, Dordrecht/Boston, London, 1981, pág. 11.

19 En general, convendría recordar una observación de Th. Heath en su ya citada *History of Greek Mathematics* (v. I, pág. 217): aunque, en sustancia, los *Elementos* de Euclides recojan el contenido geométrico y aritmético de la tradición matemática anterior, pueden diferir de ella por lo que concierne a la forma y disposición de la materia,

y al método empleado en determinadas pruebas. Por lo demás, las discusiones sobre el sentido y las relaciones mutuas de problemas y teoremas continuaron después de los *Elementos*, como testimonia Proclo.

20 Cf. D. Lacombe: "L'axiomatisation des mathématiques au III[e] siècle avant J.C.", Thalès, (1949-1950), pp. 37-58.

21 Vid. I. Mueller: *Philosophy of Mathematics and Deductive...*, o.c. pp. 14-5, 26 ss., 119-22.

22 Vid. P. Suppes: "Limitations of the axiomatic method in ancient greek mathematical sciences", en el ya citado J. Hintikka, D. Gruender y E. Agazzi, eds.: *Theory Change, Ancient Axiomatics...*, pp. 197-213; F.A. Medvedev: "On the role of axiomatic method in the development of ancient mathematics", *ibid.*, 223-5.

23 Aparte del ya clásico K. von Fritz: "Die ARXAI in der griechischen Mathematik", *Archiv für Begriffsgeschichte*, 1 (1955), pp. 13-103, pueden verse las múltiples observaciones de A. Szabó: *The Beginnings of Greek Mathematics, o.c.*, sobre los diversos sentidos y contextos de uso de estos términos.

24 Vid. la versión castellana del sumario histórico de Proclo que J.D. García Bacca en sus *Textos clásicos para la historia de las ciencias*, Caracas, 1961; pp. 10-11 en particular.

25 Vid. mi edición del *Método* de Arquímedes, Madrid, Alianza Editorial, 1986. Especialmente, los apartados 7 y ss. de la introducción.

26 Vid. la introducción de M.H. Otero a Galeno: *Iniciación a la dialéctica*, México, 1982.