EJERCICIOS PROPUESTOS

418. En la serie

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}--++\ldots\ldots$$

no hay términos con denominadores múltiplos de tres.
Se pide: 1.º Probar su convergencia. 2.º Sumarla.

419. En una superficie cónica de revolución, dos puntos A y B, situados sobre dos generatrices que forman un ángulo 2α, distan del eje R y $\frac{R}{2}$. Hallar la menor distancia del vértice al arco de curva de mínima longitud situado en la superficie cónica que pasa por A y B. Sea M este punto; suponiendo A fijo y variable la generatriz que pasa por B, hallar el lugar geométrico del punto M.

420. Sean D, E, F los puntos en que las bisectrices interiores de un triángulo, ABC cortan el lado opuesto. Hallar el área del triángulo DEF en función de los lados del triángulo, y en función de los ángulos y del área del triángulo primitivo.

421. Los radios de los círculos exinscritos de un triángulo son las raíces de la ecuación

$$x^3-(r+4R)x^2+p^2x-p^2r=0,$$

siendo r el radio del círculo inscrito, R el radio del círculo circunscrito y p el semiperímetro.

422. En un triángulo equilátero, ABC, los puntos M, N, P son los simétricos de un punto cualquiera L, del plano del triángulo, respecto de sus lados. Demostrar que las rectas AM, BN, CP concurren en un punto.

423. Si p es primo con 5, el trinomio $p^{8m}+3^{4m}-4$ es divisible por 25.

424. Sean a y b dos números enteros; hallar la suma de los números primos con a e inferiores al producto $a\,b$.

425.. Sea Δ la mínima distancia entre dos rectas que se cruzan r y s; θ el ángulo que forman; H el pie de la mínima distancia sobre r. Determinar la longitud MM' del segmento de esta recta tal que desde sus puntos se puedan trazar segmentos de longitud 2Δ cuyo otro extremo esté en la recta s.

426. Los planos tangentes a una esfera en los vértices de un icosaedro regular convexo inscrito en ella determinan un dodecaedro regular convexo. Hallar, en función de la arista del icosaedro, la mínima distancia entre dos aristas correspondientes de los poliedros.

427. Suponiendo la Tierra esférica se conoce el radio de la perspectiva estereográfica, sobre un meridiano, de un paralelo. Hallar la distancia del centro de la elipse al centro del círculo máximo.

429. Dos puntos de la superficie de la Tierra, supuesta esférica tienen por coordenadas:

$$A \left\{ \begin{array}{l} \text{Lat} = 55^{0}44'56'' \\ \text{Long} = 74^{0}59'20''\ W \end{array} \right. \qquad B \left\{ \begin{array}{l} \text{Lat} = 33^{0}59'8'' \\ \text{Long} = 25^{0}39'40''\ E \end{array} \right.$$

¿Cuál es el punto del camino entre A y B más próximo al polo Sur?

430. Dibujar un rectángulo conociendo el centro y la dirección de uno de sus lados y que tenga dos vértices sobre dos rectas dadas.

431. Se hallan las medias aritmética y geométrica p_1, q_1, de dos números a y b; después las medias aritmética y geométrica p_2, q_2, de p_1 y q_1; así sucesivamente. Demostrar: $lim\ p_n = lim\ q_n$.

SECCION PARA PRINCIPIANTES

17. ¿En qué caso un ángulo recto se proyecta ortogonalmente sobre un plano según un ángulo agudo?

18. Si una recta forma ángulos iguales con otras tres de un plano que pasan por su pie, es perpendicular al plano.

19. Si las raíces de la ecuación $x^2+px+q=0$ son reales, lo son también las de la ecuación

$$x^2 + p\,x + q + (x + a)(2\,x + p) = 0,$$

cualquiera que sea a.

20. Comprobar que

$$2\,(\text{sen}^6\,\theta + \cos^6\theta) - 3\,(\text{sen}^4\,\theta + \cos^4\theta) + 1 = 0.$$

21. Comprobar que

$$\frac{4\,\text{tg}\,A\,(1 - \text{tg}^2 A)}{(1 + \text{tg}^2 A)^2} = \text{sen}\,4\,A.$$

22. Comprobar que

$$\text{tg}\,142^{0}30' = 2 + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6}\,.$$
