EJERCICIOS RESUELTOS

132. *Se considera el triángulo formado por el minutero, el horario (de longitud distinta) y el segmento que une sus extremos. A las 9^h menos 20^m el triángulo es isósceles. Se pregunta la hora en que por primera vez después de las 9^h menos 20^m el triángulo es rectángulo.*

SOLUCION.—Tomando como origen las 12 y como sentido positivo el de giro, a las 9^h menos 20^m el minutero ha recorrido $^2/_3$ de vuelta o sean 240° y el horario los $^2/_3$ del arco que hay entre las dos cifras 8 y 9 del reloj que son 20°, es decir, forma con el origen 260°.

Siendo m la longitud del minutero y h la del horario y α el ángulo que forman

$$m = 2\,h \cos 20^\circ, \quad \text{o sea:} \quad h = \frac{m}{2 \cos 20^\circ};$$

cuando el triángulo es rectángulo se verifica $h = m \cos \alpha$, $\cos \alpha = \dfrac{h}{m} = \dfrac{1}{2 \cos 20^\circ}$, luego

$$\alpha = 57^\circ\, 51'\, 18'',8 = 208271'',8.$$

Expresando los ángulos y el tiempo en segundos es

$$\varepsilon = 864000 + 360\,t,$$
$$\varepsilon_1 = 936000 + 30\,t,$$

siendo ε y ε_1 los ángulos del minutero y del horario a partir del origen.

$$\varepsilon - \varepsilon_1 = -72000 + 330\,t = 208271,8,$$

$$t = \frac{208271,8 + 72000}{330} = 849^s,31 = 14^m\, 9^s,31;$$

es decir, el ángulo es recto a las $8^h\, 54^m\, 9^s,31$, en cuyo caso la posición de las agujas viene dada por los ángulos

$$\varepsilon = 864000 + 360 \times 849,31 = 1169751'',6 = 324^\circ 55' 51'',6,$$
$$\varepsilon_1 = 936000 + 30 \times 849,31 = 961479'',3 = 267^\circ\, 4' 39'',3.$$

JOSE M.ª ARREDONDO

Licenciado en Ciencias y Ayudante de O. P.

227. *Entre los numerosos problemas de máximo y mínimo propuestos en los* Elementos de Calcul differentiel et integrel, *de Mr. W. A. Granville (deuxième edition française,* 1926), *hay uno cuyo enunciado es* :

Un terreno ectangular se compra con el fin de trazar una pista de 500 metros que tiene sus lados en línea recta y sus extremidades semicirculares. Además, se debe comprar un trozo de terreno de 35 metros de longitud a lo largo de cada lado para las tribunas, entrenamientos, etc. Si cuesta el terreno a 200 francos el área, ¿cuál será el gasto máximo para la compra de terreno necesaria?

Es fácil darse cuenta, teniendo en cuenta los datos, que el máximo relativo da una solución que no tiene sentido físico. Demostrar que esto ocurrirá cualesquiera que sean los datos numéricos del problema.

P. Puig Adam

Solución.—Planteado el problema con los datos numéricos dados tenemos :

Gasto = área $\times$ precio = $[500 \cdot x + 2 \cdot 35\,(500 - x)]^2 = 860\,x + 70000$ francos,

llamando x a la anchura de la pista.

Por tratarse de una función lineal, lo cual ocurre cualesquiera que sean los datos numéricos del problema, su primera derivada es constante, no existiendo por consiguiente, máximo relativo y siendo su máximo absoluto para $a = \infty$ no tiene sentido físico pues se trataría de una faja de terreno de longitud 500 metros y de anchura infinita, siendo también infinito el gasto.

Otra interpretación.

Si suponemos que no adquirimos más que la pista y las zonas de las tribunas, y llamamos a a la longitud de la pista, b al ancho de las zonas laterales y p al precio del terreno por m^2, tendremos que el gasto es :

$$G = \left[x\,(a-x) + \frac{\pi x^2}{4} + 2b\,(a-x)\right]p = p\,\frac{\pi - 4}{2}\,x^2 + 2p\,(a-b)\,x + 2abp;$$

$$G' = p\,\frac{\pi - 4}{2}\,x + 2p\,(a-b) = 0, \qquad x = \frac{4\,(a-b)}{4-\pi} \qquad [1]$$

$$G'' = \frac{\pi - 4}{2} < 0 \text{ es un máximo.}$$

Para que la solución tenga sentido físico tienen que cumplirse las dos condiciones $x > 0$, $x < a$. Por la primera, se exige en [1] que sea $a > b$; y por la segunda tiene que ser $\dfrac{4\,(a-b)}{4-\pi} < a$, o sea, $-4b < -\pi a$, es decir,

$$\pi a < 4b, \qquad a < \frac{4}{\pi}\,b.$$

Por lo tanto, para que tenga sentido físico ha de cumplirse la limitación

$$\frac{4}{\pi} b > a > b, \quad \text{o sea} \quad 1{,}27\, b > a > b, \quad \text{o lo que es lo mismo},$$

$$1 < \frac{a}{b} < 1{,}27.$$

En el caso dado por ser $a=500$, $b=35$ no se cumple esta condición por ser $\frac{500}{35} = 14{,}2$. No existe, por tanto, solución física.

En efecto, es

$$x = \frac{4\,(500 - 35)}{4 - \pi} \simeq 2162{,}7 > 500.$$

J. M.ª Arredondo
Licenciado en Ciencias y Ayudante de O P.

230. *Un punto P (2, 0, 0) gira alrededor de la recta* $\begin{cases} x-2=0 \\ y-2=0 \end{cases}$ *con velocidad uniforme y a razón de 19,1 revoluciones por minuto. El vector eje de la rotación tiene por expresión geométrica* $\vec{\omega} = 2\vec{k}$

Otro punto P_2 *se mueve sobre la recta* $\begin{cases} x = 1 \\ y = -z+2 \end{cases}$ *con aceleración constante representada por el vector*

$$\vec{J} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}\right).$$

Cuando en P_2 *comienza el movimiento partiendo del reposo, en el punto (1, 0, 2),* P_1 *se encuentra en la posición más próxima al origen de coordenadas y se pone así mismo en movimiento.*

Hallar la distancia a que se encuentra P_1 *de* P_2 *al cabo de cuatro segundos, la expresión vectorial del vector* $\overline{P_1P_2}$ *en ese momento y la velocidad relativa de* P_1 *respecto a* P_2 *(Triedro de referencia trirrectangular).*

E. de Ing. Agr. (*Ej. de mecánica*, 1935).

Solucion.—En el momento de comenzar el movimiento la posición del punto P_1 es

$$x = (\sqrt{2} - 2)\cos 45^{0} = 2(\sqrt{2} - 1)\frac{\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2} \simeq 0{,}59, \qquad y = 2 - \sqrt{2} \simeq 0{,}59;$$

$$19{,}1 \text{ rev/min} = \frac{19{,}1 \times 2\pi}{60} \text{ rad/seg} = 2 \text{ rad/seg}.$$

Luego en 4 segundos habrá recorrido P_1, 8 radianes en el sentido de giro de las agujas del reloj por ser ω positivo. Habrá dado, por consiguiente, una vuelta completa, que son $2\pi = 6{,}283184$ radianes y un ángulo de 1,716816 radianes que son 98° 21′ 58″,6. Por lo tanto el ángulo α formado por los radios, paralelo al eje y y el radio del vector de P_1 es

$$\alpha = 98^0 21'58'',6 - 45^0 = 53^0 21'58'',6.$$

Las coordenadas del punto P_1 a los cuatro segundos de partida son

$$x = 2 + 2 \operatorname{sen} 53^0 21'58'',6 \simeq 3{,}6049, \quad y = 2 - 2 \cos 53^0 21'58'',6 \simeq 0{,}8063, \quad z = 0.$$

La posición del punto P_2 viene dada por las ecuaciones

$$x = 1, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2} t^2, \quad z = -\frac{\sqrt{2}}{2} t^2 + 2.$$

Al cabo de 4 segundos sus coordenadas son:

$$x = 1, \quad y = 8\sqrt{2} \simeq 11{,}312, \quad z = 2 - 8\sqrt{2} \simeq -9{,}312.$$

la distancia entre los dos puntos es:

$$\delta = \sqrt{(3{,}6049 - 1)^2 + (0{,}8063 - 11{,}312)^2 + (0 + 9{,}312)^2} = 14{,}278.$$

La expresión vectorial de $\overrightarrow{P_2 P_1}$ en dicho momento es:

$$\overrightarrow{P_2 P_1} = 2{,}6049\,\vec{i} - 10{,}5057\,\vec{j} + 9{,}3120\,\vec{k}.$$

La velocidad relativa de P_1 respecto a P_2 es un vector cuyas proyecciones son las diferencias de las proyecciones de las velocidades de P_1 y de P_2 en dicho momento.

Por ser la velocidad angular de P_1, 2 radianes-segundo su velocidad es $v = 2.2 = 4$ cm/seg. (tomando como unidad de longitud el centímetro). Por tanto sus proyecciones son:

$$v_x = 4 \cos \alpha = 4 \cos 53^0 21'58'',6 \simeq 2{,}3874 \text{ cm/seg};$$

$$v_y = 4 \operatorname{sen} \alpha = 4 \operatorname{sen} 53^0 21'58'',6 \simeq 3{,}2098 \text{ cm/seg}, \qquad v_z = 0.$$

La velocidad de P_2 es

$$v_x = 0, \quad v_y = \sqrt{2}\, t, \quad v_z = -\sqrt{2}\, t,$$

luego en el momento de que tratamos es

$$v_x = 0, \quad v_y = 4\sqrt{2} = 5{,}656 \text{ cm/seg}, \quad v_z = -4\sqrt{2} = -5{,}656 \text{ cm/seg}.$$

Por tanto, las componentes de la velocidad relativa de P_1 respecto a P_2 son :

$$V_{rx} = 2{,}3874 - 0 = 2{,}3874,$$

$$V_{ry} = 3{,}2098 - 5{,}656 = - 2{,}4462,$$

$$V_{rz} = 0 + 5{,}656 = 5{,}6560,$$

siendo su expresión vectorial

$$\overrightarrow{V} = 2{,}3874\,\overrightarrow{i} - 2{,}4462\,\overrightarrow{j} + 5{,}6560\,\overrightarrow{k}.$$

J. M.ª Arredondo
Licenciado en Ciencias y Ayudante de O. P.

236. *Expresar que una transformación homográfica en el plano :*

$$x_1 = \frac{a\,x + b\,y + c}{m\,x + n\,y + \rho}, \quad y_1 = \frac{a'\,x + b'\,y + c'}{m\,x + n\,y + \rho}$$

admite una recta de puntos dobles e interpretar geométricamente las nuevas fórmulas de transformación.

Solucion.—Si los planos (x, y) (x_1, y_1) están superpuestos coincidiendo los ejes del mismo nombre para hallar los puntos dobles haremos $\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = y \end{cases}$ por lo tanto :

$$\frac{a\,x + b\,y + c}{x} = \frac{a'\,x + b'\,y + c'}{y} = \frac{m\,x + n\,y + \rho}{1} = \lambda,$$

de donde :

$$\left.\begin{aligned} (a - \lambda)\,x + b\,y + c &= 0 \\ a'\,x + (b' - \lambda)\,y + c' &= 0 \\ m\,x + n\,y + \rho - \lambda &= 0 \end{aligned}\right\},$$

lo que obliga a que :

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b & c \\ a' & b' - \lambda & c' \\ m & n & \rho - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad [1]$$

que es una ecuación de tercer grado en λ, llevados sus tres valores a dos de las ecuaciones anteriores obtenemos los tres puntos dobles, éstos están unidos por tres rectas que forman un triángulo doble.

Expresando que [1] tiene una raíz triple y llamando:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ m & n & \rho \end{vmatrix} \qquad \delta = a b' + a \rho + b' \rho - a' b - m c - n c';$$

la ecuación en λ es:

$$F(\lambda) \equiv \lambda^3 - [a + b' + \rho] \lambda^2 - \delta \lambda + \Delta = 0,$$

$$F'(y) \equiv 3 \lambda^2 - 2(a + b' + \rho) \lambda - \delta = 0,$$

$$F''(\lambda) \equiv 6 \lambda - 2(a + b' + \rho) = 0,$$

de donde:

$$\lambda = \frac{a + b' + \rho}{3},$$

valor de λ que sustituído en $F(\lambda)$ y $F'(\lambda)$ da las dos condiciones:

$$[a + b' + \rho]^2 = -3 \delta,$$

$$[a + b' + \rho]^3 = -3^3 \Delta.$$

E. Feltrer

249. *En una urna hay dos bolas: una blanca y otra negra. Se saca una bola y se devuelve a la urna acompañada de otra bola del mismo color. Continuando del mismo modo se tendrá cada vez una bola más en la urna. ¿Cuál es la probabilidad de que cuando haya veinte sean diez blancas y diez negras?*

Solucion.—Consideremos el caso más general de que se efectúen n extracciones, es decir, que sea $n+2$ el número de bolas que la urna contiene (supuesto que inicialmente sean dos).

Fácilmente se demuestra que la probabilidad $P^{(k)}_{n+2}$ de que k de las bolas sean blancas ($1 \leqslant k \leqslant n+1$), es $P^{(k)}_{n+2} = \frac{1}{n+1}$, valor independiente de k.

Procederemos por inducción..

Desde luego, para $n=1$, y, a causa de la simetría inicial se tiene:

$$P^{(1)}_3 = P^{(2)}_3 = \frac{1}{2}.$$

Supongamos ahora que sea: $P^{(k)}_{n+1} = \frac{1}{n}$, ($\alpha$), y demostremos que: $P^{(k)}_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.

Basta, a tal fin, observar que la aplicación de los principios de probabilidad total y compuesta conduce a la fórmula recurrente:

$$P^{(k)}_{n+2} = P^{(k-1)}_{n+1} \frac{k-1}{n+1} + P^{(k)}_{n+1} \frac{(n+1)-k}{n+1} \qquad (\beta)$$

puesto que $\dfrac{k-1}{n+1}$ es la probab'lidad de extraer bola blanca de una urna que contiene $(k-1)$ de esa clase, en un total de $(n+1)$ figuran K blancas.

Por tanto, teniendo en cuenta la hipótesis (α), la fórmula (β) da:

$$P^{(k)}_{n+2} = \frac{1}{n}\left[\frac{k-1}{n+1} + \frac{(n+1)-k}{n+1}\right] = \frac{1}{n+1}.$$

ALEF.

Nota complementaria sobre el ejercicio anterior.

Aparte de las consideraciones de índole elemental que conducen a la solución de este ejercicio, insertas en este mismo número, tal solución puede también obtenerse como caso particular de la fórmula que resuelve una cuestión de tipo más general tratada por Polya en sus conferencias del Instituto Poincaré, al estudiar los esquemas denominados de ***influencia*** o de *contagio*, cuestión que, en síntesis, puede enunciarse así: (*)

De una urna que contiene N *bolas,* R *blancas y* S *negras* (R+S=N), *se efectúan sucesivas extracciones de una bola. Después de cada extracción se devuelve a la urna la bola extraída acompañada de* Δ *bolas del mismo color.* (*Los casos particulares* $\Delta=0$ *y* $\Delta=1$ *corresponden, respectivamente, a los esquemas clásicos expuestos en todos los cursos sobre Probabilidades.*)

Se pregunta: *¿Cuál es la probabilidad de que a las* n *extracciones tenga la urna una determinada composición?*

He aquí el proceso, expuesto de las citadas conferencias de Polya, que resuelve esta cuestión.

Después de las n extracciones existirá en la urna un número total de $N+n\Delta$ bolas. Para representar el número de las que son blancas, asociemos a las sucesivas extracciones, variables aleatorias $x_1, x_2, \ldots x_n$, tales que $x_k = 1$ o $x_k = 0$, según que a la k^a extracción se obtenga bola blanca o negra; por consiguiente, el número de bolas blancas contenidas en la urna después de n pruebas, vendrá expresado por

$$R + (x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n)\,\Delta,$$

y la probabilidad de sacar una bola blanca a la $n+1)^a$ extracción será:

$$\frac{R + (x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_k)\,\Delta}{N + n\,\Delta} \qquad (1)$$

(*) «Anales de l'Institut Henry Poincaré», Vol. I (1931), pág. 136.

Ahora bien: dada la composición inicial de la urna, es decir, R y S, y el número Δ de las bolas nuevas que después de cada prueba se introducen, la cuestión de hallar la probabilidad de que la urna presente una determinada composición equivale a hallar la probabilidad de que la expresión (1) tenga un valor prefijado (relación entre el número de bolas blancas que en tal composición se asignan, y el total de las que la urna contiene), o lo que es equivalente, la probabilidad de que la variable aleatoria $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ tenga un valor determinado.

La fórmula que da la probabilidad de que sea: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$, es la siguiente: (*)

$$\binom{n}{r} \frac{\rho(\rho+\delta)(\rho+2\delta)\ldots[\rho+(r-1)\delta]\,\sigma\cdot(\sigma+\delta)(\sigma+2\delta)\ldots[\sigma+(s-1)\delta]}{1\,(1+\delta)(1+2\delta)\ldots\ldots[1+(n-1)\delta]} \qquad (2)$$

en la que:

$$r+s=n, \qquad \rho=\frac{R}{N}, \qquad \sigma=\frac{S}{N}=1-\rho, \qquad \delta=\frac{\Delta}{N}.$$

En particular, para $\rho=\sigma=\delta=\frac{1}{2}$, que corresponde al caso del ejercicio 249 la fórmula (2), da:

$$\frac{n!}{r!\,s!}\;\frac{\dfrac{r!}{2^r}\cdot\dfrac{s!}{2^s}}{\dfrac{(n+1)!}{2^n}}=\frac{1}{n+1},$$

que coincide con el obtenido aplicando el método de inducción.

250. *Averiguar cuál es la base del sistema de numeración en que está escrito el número* 3157 *que tiene como equivalente en el sistema decimal el número* 6832.

Solucion.—Sea n la base y teniendo en cuenta la igualdad:

$$N = a + b\,n + c\,n^2 + d\,n^3 + \ldots\ldots,$$

siendo N un número escrito en el sistema de base 10 y siendo a, b, c, d, ... las cifras del número escrito en la base n, podremos escribir:

$$3\,n^3 + n^2 + 5\,n - 6825 = 0.$$

(*) Esta fórmula, que resulta aplicando los principios de probabilidad total y compuesta, se encuentra establecida en las citadas conferencias de Polya (pág. 145).

De esta ecuación nos interesa conocer las raíces enteras mayores que 10, puesto que 6832 es mayor que 3157.

Para ello vamos a hallar los divisores de 6832 mayores de 10.

No es divisible por 11; $6-8+2-5 \neq \dot{11}$.

Es divisible por 13; $5-3\times 2-4\times 8-6=-39=\dot{13}$ que es raíz de la ecuación puesto que dividiéndola por $n-13$ da de resto cero.

3	1	5	—6825
	39	520	6825
3	40	525	0

JUAN VERA GARCIA

254. *Sobre la superficie cónica de ecuación, en coordenadas cartesianas rectangulares* $x^2+y^2=z^2$ *considérese la curva* (c) *cuya proyección ortogonal sobre el plano* xy *tiene por ecuación polar* $r=e^{\theta}$.

Hallar y construir el lugar geométrico de la traza sobre el plano xy *de la recta normal a la curva* (c) *y contenida en el plano tangente a la superficie cónica que pasa por el pie de dicho normal.*

La representación se efectuará en escala 1 :100, *tomando como eje polar el* x *y como sentido positivo de ángulos el* 0x—0y

(E. E. de I. Agr. 1935.)

SOLUCION.—Sea (x, y, z_1) un punto de la curva (c) y sean (r, θ_1) las coordenadas polares de su proyección sobre el plano xy.

Se verifican las siguientes relaciones:

$$x_1^2+y_1^2=z_1^2,\ x_1=r_1\cos\theta_1,\ y_1=r_1\cos\theta_1,\ r_1^2=x_1^2+y_1^2,\ \text{o sea},\ r_1=z_1\ \text{y}\ r_1=e^{\theta_1}$$

La ecuación del plano tangente al cono en el punto (x, y, z_1) es

$$x x_1+y y_1-z z_1=0.$$

La ecuación (en polares) de la recta tangente a la curva $r=e^{\theta}$ en el punto $(r_1\,\theta_1)$ es $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{r_1}[\cos(\theta-\theta_1)-\operatorname{sen}(\theta-\theta_1)]$, o sea,

$$r=\frac{r_1}{\cos\theta(\cos\theta_1+\operatorname{sen}\theta_1)+\operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen}\theta_1-\cos\theta_1)},$$

que transformada en cartesianas es

$$x(x_1+y_1)+y(y_1-x_1)=x_1^2+y_1^2.$$

Luego la tangente a la curva (c) viene dada por el sistema :

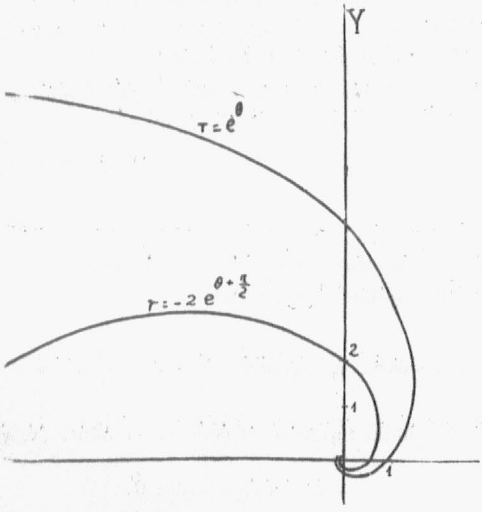
$$\left.\begin{aligned} x x_1 + y y_1 - z z_1 &= 0 \\ x(y_1 + y_1) + y(y_1 - x_1) - (x_1^2 + y_1^2) &= 0 \end{aligned}\right\},$$

que se puede poner en la forma :

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{z_1(y_1 - x_1)}{x_1^2 + y_1^2} z + y_1 \\ \cdot &= \frac{z_1(y_1 + x_1)}{x_1^2 + y_1^2} z - x_1 \end{aligned}\right\}.$$

El plano normal a la curva (c) en el punto (x, y, z,) es :

$$-\frac{z_1(y_1 x_1)}{x_1^2 + y_1^2}(x - x_1) + \frac{z_1(y_1 + x_1)}{x_1^2 + y_1^2}(y - y_1) + (z - z_1) = 0,$$



que unida a la ecuación del plano tangente al cono nos da las de la normal pedida, que es :

$$\left.\begin{aligned} -z_1(y_1 - x_1)(x - x_1) + z_1(y_1 + x_1)(y - y_1) + (z - z_1)(x_1^2 + y_1^2) &= 0 \\ x x_1 + y y_1 - z z_1 &= 0 \end{aligned}\right\},$$

cuya traza con el plano xy se obtiene haciendo $z=0$, o sea,

$$\left.\begin{aligned} 2(x_1^2 + y_1^2) + x y_1 - x_1 y &= 0 \\ x x_1 + y y_1 &= 0 \end{aligned}\right\},$$

y pasando a polares tenemos:

$$\left.\begin{array}{r}2e^{2\theta_1}+r\cos\theta\, e^{\theta_1}\operatorname{sen}\theta_1-r\operatorname{sen}\theta\, e^{\theta_1}\cos\theta_1=0\\ r\cos\theta\, e^{\theta_1}\cos\theta_1+r\operatorname{sen}\theta\, e^{\theta_1}\operatorname{sen}\theta_1=0\end{array}\right\},$$

o sea

$$\left.\begin{array}{r}2e^{\theta_1}+r\operatorname{sen}(\theta_1-\theta)=0\\ \cos(\theta_1-\theta)=0\end{array}\right\};$$

eliminando θ, obtenemos la ecuación polar de la curva pedida:

$$\theta_1-\theta=\pm\frac{\pi}{2},\qquad \theta_1=\theta\pm\frac{\pi}{2},$$

o sea:

$$2e^{\theta\pm\frac{\pi}{2}}\pm r=0,$$

$$r=\mp 2e^{\theta\pm\frac{\pi}{2}};$$

estas dos curvas coinciden y equivalen a girar la curva dada en el plano xy un ángulo igual a $\frac{\pi}{2}$ y multiplicar los radios vectores por -2; o bien giran un ángulo $-\frac{\pi}{2}$ y multiplicar los radios vectores por $+2$. Ambas construcciones coinciden.

JOSE M.ª ARREDONDO

Otra solución del Sr. FELTRER.

256. *Las rectas* (a) *y* (b) *representadas en coordenadas cartesianas rectangulares por la ecuación*

$$x^2-3xy-2y^2+m(3x^2-4xy+y^2)=0,$$

son cortadas por la recta (c), *de ecuación* y—2x—5=0, *en los puntos* A *y* B *respectivamente. Por el punto* A *trácese una perpendicular a* (a) *y por el* B *una perpendicular a* (b). *Sea* P *el punto de intersección de ambas perpendiculares. Se pide:*

1.º *Hallar el lugar geométrico del punto* P *cuando* m *varía.*

2.º *Determinar las porciones de dicho lugar que correspondan a las posiciones de* P *cuando* (a) *y* (b) *son reales.*

3.º *Calcular las coordenadas del punto* P *cuando el ángulo que forman* (a) *y* (b) *es de* 45º.

(E. E. de I. Agr. 1935.)

SOLUCION.—Por ser homogénea la ecuación dada representa dos rectas que pasan por el origen, que son distintas, por no ser el primer miembro un cuadrado perfecto.

Sean éstas

$$(a) \quad y = a\,x,$$

$$(b) \quad y = b\,x.$$

$$\text{Punto } A \left\{ \begin{array}{l} y_1 = a\,x_1 \\ y_1 = 2\,x_1 + 5 \end{array} \right\}, \quad x_1 = \frac{5}{a-2}, \quad y_1 = \frac{5\,a}{a-2}.$$

$$\text{Punto } B \left\{ \begin{array}{l} y_2 = b\,x_2 \\ y_2 = 2\,x_2 + 5 \end{array} \right\}, \quad x_2 = \frac{5}{b-2}, \quad y_2 = \frac{5\,b}{b-2}.$$

$$\text{Punto } P \left\{ \begin{array}{l} y - \dfrac{5\,a}{a-2} = -\dfrac{1}{a}\left(x - \dfrac{5}{a-2}\right) \\ y - \dfrac{5\,b}{b-2} = -\dfrac{1}{b}\left(x - \dfrac{5}{b-2}\right) \end{array} \right\} \qquad [1]$$

De la ecuación de las dos rectas (a) y (b) se deduce:

$$x^2\,(1 + 3\,m) - x\,y\,(3 + 4\,m) + y^2\,(m - 2) = 0,$$

la cual nos da el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} a\,b = \dfrac{3\,m + 1}{m - 2} \\ a + b = \dfrac{3 + 4\,m}{m - 2} \end{array} \right\} \qquad [2]$$

Eliminando entre las cuatro ecuaciones [1] y [2] los tres parámetros a, b, m, obtenemos la ecuación pedida. Para efectuar esta eliminación resolvemos las ecuaciones [2] respecto a m e igualamos los segundos miembros obteniendo:

$$\left. \begin{array}{l} m\,(a\,b - 3) = 1 + 2\,a\,b \\ m\,(a + b - 4) = 3 + 2\,(a + b) \end{array} \right\} \quad \frac{1 + 2\,a\,b}{a\,b - 3} = \frac{3 + 2\,(a + b)}{a + b - 4} \qquad [3]$$

Las dos ecuaciones [1] son iguales, no variando más que el nombre del parámetro, y son de 2.° grado; pero como hemos dicho que a y b son distintas, tienen que ser cada una de las raíces de una de ellas resueltas respecto a a o a b.

La primera de ellas la podemos poner en la forma:

$$y\,a\,(a - 2) - 5\,a^2 + x\,(a - 2) - 5 = 0,$$

o sea:

$$a^2 (y - 5) + a (x - 2 y) - 2 x - 5 = 0,$$

de donde

$$\left.\begin{aligned} a b &= - \frac{2 x + 5}{y - 5} \\ a + b &= \frac{2 y - x}{y - 5} \end{aligned}\right\} \qquad [4]$$

que sustituídas en [3] dan la ecuación

$$\frac{y - 4 x - 15}{- 3 y - 2 x + 10} = \frac{7 y - 2 x - 15}{- 2 y - x 20},$$

o sea:

$$19 y^2 + 15 x y - 65 y - 75 x - 150 = 0,$$

que es una cónica degenerada compuesta por las dos rectas:

$$\left.\begin{aligned} y &= 5 \\ 19 y + 15 x + 30 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Para que (a) y (b) sean reales se necesita que

$$(3 + 4 m)^2 - 4 (m - 2) (1 + 3 m) \geqq 0,$$

o sea

$$4 m^2 + 44 m + 17 \geqq 0.$$

Las raíces de la ecuación $4 m^2 + 44 m + 17 = 0$, son

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \sqrt{26} - \frac{11}{2} \simeq - 0{,}40099 \\ m_2 &= - \sqrt{26} - \frac{11}{2} \simeq -10{,}59901 \end{aligned}\right\},$$

luego los puntos de separación son los que corresponden a estos valores de m; siendo reales las rectas (a) y (b) que corresponden a estos puntos.

Para hallar los puntos correspondientes a m_1 deducimos de las ecuaciones [2] y [4] el sistema:

$$\left.\begin{aligned} \frac{3 m_1 + 1}{m_1 - 2} &= - \frac{2 x + 5}{y - 5} \\ \frac{3 + 4 m_1}{m_1 - 2} &= \frac{2 y - x}{y - 5} \end{aligned}\right\} \qquad [5]$$

o sea

$$\left.\begin{array}{l}(3\,m_1+1)\,y-2\,(2-m_1)\,x-5\,(2\,m_1+3)=0\\(7+2\,m_1)\,y+(m_1-2)\,x-5\,(3+4\,m_1)=0\end{array}\right\},$$

en el que eliminando x obtenemos:

$$y=\frac{30\,m_1+15}{m_1+13}=\frac{30\left(\sqrt{26}-\frac{11}{2}\right)+15}{\sqrt{26}-\frac{11}{2}+13}\simeq 0{,}23,$$

lo cual nos dice que se trata de un punto de la recta $19y+15x+30=0$.

Su abscisa es

$$x\simeq-\frac{19}{15}\,0{,}23-2=-2{,}29;$$

es decir

$$M_1\,(-2{,}29;\ 0{,}23).$$

Para hallar el punto M_1 correspondiente al valor m_2 de m hay que resolver el mismo sistema poniendo m_2 en vez de m, con lo cual obtenemos:

$$y=\frac{30\,m_2+15}{m_2+13}=\frac{30\left(-\sqrt{26}-\frac{11}{2}\right)+15}{-\sqrt{26}-\frac{11}{2}+13}\simeq 126{,}18,$$

que también pertenece a la recta $19\,y+15x+30=0$, siendo su abscisa

$$x\simeq\frac{19}{15}\,126{,}18-2=157{,}74;$$

es decir

$$M_2\,(157{,}74;\ -126{,}18).$$

Para comprobar que el segmento propio M_1M_2 es el que corresponde a rectas (*a*) y (*b*) imaginarias basta dar a m un valor comprendido entre m_1 y m_2. *vg.*: $m=-2$ que nos da el punto de ordenada y

$$y=\frac{-30\times2+15}{-2+13}\simeq-4{,}09,$$

que evidentemente pertenece a dicho segmento.

Para que las dos rectas (*a*) y (*b*) formen 45° es necesario que sea

$$1=\frac{a-b}{1+a\,b},$$

que unida a las dos ecuaciones [2] nos da el sistema:

$$\left.\begin{aligned} a - b &= 1 + a\,b \\ a\,b &= \frac{3\,m + 1}{m - 2} \\ a + b &= \frac{3 + 4\,m}{m - 2} \end{aligned}\right\} \qquad [6]$$

en el cual podemos elim'nar a y b obteniendo una ecuación en m.

$$\left.\begin{aligned} a - b &= 1 + \frac{3\,m + 1}{m - 2} = \frac{4\,m - 1}{m - 2} \\ a + b &= \frac{3 + 4\,m}{m - 2} \end{aligned}\right\},$$

de donde

$$a = \frac{4\,m + 1}{m - 2}, \qquad b = \frac{2}{m - 2},$$

que sustituídas en la segunda ecuación del sistema [6] nos da la ecuación en m.

$$3\,m^2 - 13\,m - 4 = 0,$$

cuyas raíces son

$$m = \frac{13 \pm \sqrt{217}}{6} = \begin{cases} 4{,}621 \\ -0{,}288 \end{cases};$$

es decir, hay dos pares de rectas (a) y (b) que forman 45° y por tanto dos puntos P_1 y P_2.

Los pares de rectas corresponden a los pares de valores

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{4 \times 4{,}621 + 1}{4{,}621 - 2} \simeq 7{,}43 \\ b_1 &= \frac{2}{4{,}621 - 2} \simeq 0{,}76 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} a_2 &= \frac{-4 \times 0{,}288 + 1}{-0{,}288 - 2} \simeq 0{,}06 \\ b_2 &= \frac{2}{-0{,}288 - 2} = -0{,}87 \end{aligned}\right\}.$$

Para hallar los puntos P_1 y P_2 basta sustituir los valores correspondientes de m en el sistema [5], lo que nos da:

$$y_1 = \frac{30 \times 4{,}621 + 15}{4{,}611 + 13} \simeq 8{,}71,$$

estando, por tanto, en la recta $19y + 15x + 30 = 0$, siendo como consecuencia su abscisa

$$x = -\frac{19}{15}\,8{,}71 - 2 \simeq -13{,}026;$$

es decir:

$$P_1\,(-13{,}026;\ 8{,}71).$$

Análogamente, para P_2 obtenemos

$$y_2 = \frac{-30 \times 0{,}288 + 15}{-0{,}288 + 13} \simeq 0{,}5,$$

$$x_2 = -\frac{19}{15}\,0{,}5 - 2 \simeq -2{,}63; \qquad\qquad P_2\,(-2{,}63;\ 0{,}5).$$

JOSE M.ª ARREDONDO

Otra solución del Sr. FELTRER.

259. *En coordenadas cartesianas rectangulares considérese la superficie* (S) *engendrada por la recta* $x = tz + t^2$, $y = t^2z + t$.

Determinar:

a) *Las ecuaciones generales de los planos tangentes y de los asintóticos.*

b) *Contorno aparente sobre el plano* XY.

c) *Superficie cónica circunscrita que tenga su vértice en el origen de coordenadas.*

d) *Puntos múltiples de la curva de contacto de dicha superficie cónica con la* (S).

(E. E. de I. Agr. 1935.)

SOLUCION.

a) Para cada valor de t obtenemos una recta que pertenece a la superficie que, por lo tanto, es reglada. Poniendo las rectas en la forma $\begin{cases} x = a\,z + m \\ y = b\,z + n \end{cases}$ la superficie es desarrollable o alabeada según sea nulo o no el módulo de la proyectividad $\mu = \dfrac{z_1\,d a + d m}{z_1\,d b + d n}$, siendo $(x,\ y,\ z)$ un punto de la superficie.

En este caso es:

$$d a = d t, \quad d b = 2\,t\,d t, \quad d m = 2\,t\,d t, \quad d n = d t;$$

por tanto, el módulo es

$$d a\,d n - d b . d m = d t^2 - 4\,t^2\,d t^2,$$

que en general es distinto de cero, tratándose por tanto de una superficie alabeada.

Las generatrices singulares se obtienen igualando a cero el módulo anterior, es decir, $1-4t^2=0$, $t=\pm\frac{1}{2}$; por consiguiente las dos generatrices singulares son

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{z}{2}+\frac{1}{4} \\ y &= \frac{z}{4}z+\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x &= -\frac{z}{2}+\frac{1}{4} \\ y &= \frac{z}{4}-\frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$

Si por el punto x, y, z, de la superficie pasa la generatriz correspondiente al valor t, del parámetro la ecuación del plano tangente en dicho punto es: $x-az-m-\mu(y-bz-n)=0$; es decir, en este caso la ecuación general de los planos tangentes es:

$$x-t_1 z-t_1^2-\frac{z_1+2t_1}{2z_1 t_1+1}(y-t_1^2 z-t_1)=0 \qquad [1]$$

Para los casos de las generatrices singulares basta poner en esta ecuación $t=\pm\frac{1}{2}$, con lo cual obtenemos respectivamente las dos ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 4x-4y-z+1=0 \\ 4x-4y+3z-3=0 \end{aligned}\right\},$$

que al ser independientes de z, nos dicen que el plano tangente es el mismo en todos los puntos de cada una de las generatices singulares.

Para hallar los planos asintóticos no hay más que hacer $z\longrightarrow\infty$ en la ecuación [1] con lo que toma la forma

$$x-t_1 z-t_1^2-\frac{1}{2t_1}(y-t_1^2 z-t_1)=0.$$

En esta ecuación están comprendidos (variando el parámetro t) todos los planos asintóticos, excepto los tangentes en los puntos del infinito de generatrices paralelas al plano $x\,y$, porque en ellos es $z \mp \infty$. Pero esta excepción queda deshecha al comprobar que la superficie no tiene generatrices en tal posición, pues cortando la superficie por el plano $z=R$ tenemos: $\left.\begin{aligned} x&=kt+t^2 \\ y&=kt^2+t \end{aligned}\right\}$, que al eliminar t no da una ecuación lineal.

b) Para hallar el contorno aparente sobre el plano xy, cortamos por él haciendo $z=0$ con lo que obtenemos $\left.\begin{aligned} x&=t^2 \\ y&=t \end{aligned}\right\}$; es decir, la parábola

$$x=y^2.$$

c) Para hallar la ecuación del cono circunscrito, que tiene por vértice el origen eliminemos t entre las dos ecuaciones de (S) con lo cual obtenemos, haciendo la eliminación por el método de Bezout,

$$(1-z^2)(-zy+x)-(-y+xz)^2=0;$$

o sea

$$-zy + z^3 y + x - xz^2 - y^2 - x^2 z^2 + 2xyz = 0 \qquad [2]$$

eliminando λ y μ entre la [2] y las $x = \lambda z$ $y = \mu z$ que son las de una recta genérica que pasa por el origen, tenemos:

$$-z^2 \mu + z^4 \mu + \lambda z - \lambda z^3 - \mu^2 z^2 - \lambda^2 z^4 - 2\lambda \mu z^3 = 0 \qquad [3]$$

Buscaremos una relación entre λ y μ haciendo que esta ecuación tenga una raíz doble, pero como una de ellas es $z=0$ para que tenga otra raíz nula es necesario que sea $\lambda=0$ con lo cual el cono circunscrito es $x=0$, es decir, el plano yz; por consiguiente, el origen de coordenadas pertenece a la superficie y este es un plano tangente en él. Puede comprobarse sustituyendo $x=y=z=0$ en las ecuaciones de (S) con lo cual obtenemos $t=0$ y llevando estos valores a la ecuación [1] de los planos tangentes obtenemos $x=0$.

d) Las generatrices que pasan por el origen están confundidas en una cuyo parámetro es $t=0$ y su ecuación es $x=0$ $y=0$ es decir, el eje z.

El punto doble pedido es el origen como punto de contacto de dos superficies tangentes en un punto.

JOSE M.ª ARREDONDO

260. *En un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares se dan la cuádrica representada por la ecuación*

$$x^2 + 4y^2 - 4z^2 - 4 = 0 \qquad [S]$$

y el vector $\overline{a}$ *de módulo* $\sqrt{11}$ *y recta de posición definida por sus parámetros directores* (3, 1, 1) *y por contener el punto* A (6,6, 0).

Determínese:

I) *Punto o puntos de la cuádrica* [S] *tales que tomados por centros de momento, el del vector* $\overline{a}$ *respecto a cada uno de ellos se halle contenido en la cuádrica. Caso de existir varios que satisfacen la condición pedida, calcúlense las coordenadas solamente para el que dé suma máxima de éstas y cuyo vector-momento de* a *respecto a él, forme un ángulo mínimo con el eje Z. Denomínese* 0_1 *a este punto.*

II) *Siendo*

$$\overline{C}_1 = M_{0_1}\,\overline{a},\ \overline{C}_2 = M_A\,\overline{C}_1,\ \overline{C}_3 = M_{0_1}\,\overline{C}_2,$$

y así sucesivamente, tomando de modo alternativo para centro de momento 0_1 *y* A, *hallar el producto vectorial de* $\overline{C}_{10}$ *por* $\overline{a}$.

(E. E. de I. Agr. 1935.)

SOLUCION.—Las ecuaciones de la recta en que está situado el vector $\overline{a}$ son: $\dfrac{x-6}{3} = y-6 = z$, que se pueden poner en la forma $\begin{cases} x - 3z - 6 = 0 \\ y - z - 6 = 0 \end{cases}$.

Tracemos por ella un plano cualquiera $x - 3z - 6 + \alpha(y - z - 6) = 0$, o sea

$$x + \alpha y - (3 + \alpha) z - 6(1 + \alpha) = 0 \qquad [1]$$

Como el vector-momento de $\overline{a}$ respecto al punto (x_0 y_0 z_0) es normal al plano determinado por este punto y el vector, supongamos que el punto está en la curva sección de la cuádrica por el plano [1]; es decir, tenemos que determinar α con la condición de que este plano sea normal a alguna generatriz (cuando lo sea a una lo será a dos, una de cada sistema) de la cuádrica para que el vector momento esté contenido en ella.

La cuádrica dada [S] es un hiperboloide de una haja referida a sus ejes, ya que se puede poner en la forma:

$$\frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1.$$

Siendo los dos sistemas de generatrices las dadas por las ecuaciones:

$$\frac{\frac{x}{2} - z}{1 - y} = \frac{1 + y}{\frac{x}{2} + z} = \lambda \quad [2] \qquad ; \qquad \frac{\frac{x}{2} - z}{1 + y} = \frac{1 - y}{\frac{x}{2} + z} = \mu \quad [3]$$

que se pueden escribir, respectivamente, en la forma:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\,\frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}\,z + 4\,\frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \\ y &= 2\,\frac{\lambda}{1 + \lambda^2}\,z + \frac{\lambda^2 - 1}{1 + \lambda^2} \end{aligned}\right\} [4] \qquad \left.\begin{aligned} x &= 2\,\frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2}\,z + 4\,\frac{\mu}{1 + \mu^2} \\ y &= -2\,\frac{\mu}{1 + \mu^2}\,z + \frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2} \end{aligned}\right\} [5]$$

o también en la:

$$\frac{x - 4\,\frac{\lambda}{1 + \lambda^2}}{2\,\frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}} = \frac{y - \frac{\lambda^2 - 1}{1 + \lambda^2}}{2\,\frac{\lambda}{1 + \lambda^2}} = z \quad [6] \qquad \frac{x - \frac{4\mu}{1 + \mu^2}}{2\,\frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2}} = \frac{y - \frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2}}{-\frac{2\mu}{1 + \mu^2}} = z \quad [7]$$

La condición de perpendicularidad entre la recta [6] y el plan [1] es:

$$\frac{1}{2\,\frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}} = \frac{\alpha}{2\,\frac{\lambda}{1 + \lambda^2}} = \frac{-3 - \alpha}{1},$$

sistema en λ y α que resuelto nos da los valores de las incógnitas correspondientes a los planos del haz [1] y de las generatrices del hiperboloide que son normales. El sistema se puede poner en la forma:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1 + \lambda^2}{2(1 - \lambda^2)} &= -3 - \alpha \\ \frac{1 + \lambda^2}{2(1 - \lambda^2)} &= \frac{\alpha(1 + \lambda^2)}{2\lambda} \end{aligned}\right\}; \quad \text{sus raíces son} \quad \left\{\begin{aligned} &\lambda_1 = \frac{7}{5}, \quad \alpha_1 = -\frac{35}{24} \\ &\lambda_2 = -1, \quad \alpha = -\infty \end{aligned}\right.$$

Por tanto, los puntos ($x_0\, y_0\, z_0$) buscados son las intersecciones de los planos y generatrices correspondientes, o sea, las soluciones de los sistemas:

$$\left.\begin{aligned} &24x-35y-37z-66=0\\ &\frac{\dfrac{x}{2}-z}{1-y}=\frac{1+y}{\dfrac{x}{2}+z}=\frac{7}{5}\end{aligned}\right\}\ [8] \qquad \left.\begin{aligned} &y-z-6=0\\ &\frac{\dfrac{x}{2}-z}{1-y}=\frac{1+y}{\dfrac{x}{2}+z}=-1\end{aligned}\right\}\ [9]$$

Procediendo análogamente con las generatrices del otro sistema, tenemos la condición de perpendicularidad entre la recta [7] y el plano [1]

$$\frac{1}{2\,\dfrac{1-\mu^2}{1+\mu^2}}=\frac{\alpha}{\dfrac{-2\mu}{1+2\mu^2}}=\frac{-3-\alpha}{1},$$

sistema en α y μ que, resuelto, nos dará los valores de α y μ correspondientes a plano y generatrices normales.

El sistema se puede poner en la forma:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1+\mu^2}{2(1+\mu^2)}=-3-\alpha\\ &\frac{1+\mu^2}{2(1-\mu^2)}=\frac{\alpha(1+\mu^2)}{-2\mu}\end{aligned}\right\},\quad \text{cuyas raíces son}\quad \left\{\begin{aligned} &\mu_1=1,\quad \alpha'_1=-\infty\\ &\mu_2=-\frac{7}{5},\quad \alpha'_2=-\frac{35}{24}\end{aligned}\right.$$

siendo, por consiguiente, puntos de los buscados las soluciones de los dos sistemas:

$$\left.\begin{aligned} &y-z-6=0\\ &\frac{\dfrac{x}{2}-z}{1+y}=\frac{1-y}{\dfrac{x}{2}+z}=1\end{aligned}\right\}\ [10] \qquad \left.\begin{aligned} &24x-35y-37z-66=0\\ &\frac{\dfrac{x}{2}-z}{1+y}=\frac{1-y}{\dfrac{x}{2}+z}=-\frac{7}{5}\end{aligned}\right\}\ [11]$$

Las generatrices de los sistemas [9] y [10] como perpendiculares a un mismo plano son paralelas y su coseno director, respecto al eje z es

$$\cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{1+1}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\simeq-0{,}71.$$

Las generatrices de los sistemas [8] y [11] son también paralelas entre sí por la misma razón. El coseno director respecto al eje z es:

$$\cos\gamma=\frac{-37}{\sqrt{24^2+35^2+37^2}}=\frac{-37}{\sqrt{3170}}\simeq-0{,}65,$$

el ángulo menor lo forma la recta cuyo coseno director es $|\cos\gamma|=0{,}7$.

Por lo tanto, el punto 0_1 es aquel cuya suma de coordenadas sea máxima de las soluciones de los sistemas [9] ó [10].

El sistema [9] se puede poner en la forma:

$$\left.\begin{aligned} y - z &= 6 \\ \frac{x}{2} - y - z &= -1 \\ -\frac{x}{2} - y - z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

cuyas raíces son $\quad x_0 = -2 \quad y_0 = 3 \quad z_0 = -3,$

siendo $\quad x_0 + y_0 + z_0 = -2.$

El sistema [10] se puede poner a su vez en la forma:

$$\left.\begin{aligned} y - z &= 6 \\ \frac{x}{2} - y - z &= 1 \\ \frac{x}{2} + y + z &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad [12]$$

cuyas raíces son $\quad x_0 = 2 \quad y_0 = 3 \quad z_0 = -3,$

siendo $\quad x_0 + y_0 + z_0 = 2.$

Luego el punto buscado es 0_1 (2, 3,—3).

II) Consideremos el plano AO_1B definido por el vector $\overline{AB}$ y el centro de momentos 0_1. Por la definición de momento respecto a un punto, el vector $\overline{C}_1$ está sobre la recta O_1M, que es normal al plano AO_1B. El vector $\overline{C}_2$ es normal al plano AO_1M y está orientado hacia el mismo de los semiespacios definidos por el plano AO_1M, en que se encuentra el vector a. Por la misma razón se ve que todos los vectores de subíndice impar tienen la misma línea de acción y de sentido que el c_1, y los de subíndice par la misma línea y sentido que el $\overline{C}_2$.

Las ecuaciones de la recta O_1M son las dos últimas del sistema [12] o sea

$$\left.\begin{aligned} x - 2y - 2z &= 2 \\ x + 2y + 2y &= 2 \end{aligned}\right\}.$$

La ecuación del plano AO_1M determinado por esta recta y el punto A (6 6, 0) es de la forma:

$$x - 2y - 2z - 2 + \lambda(x + 2y + 2z - 2) = 0,$$

con la condición de satisfacerse para el punto A (6, 6, 0) lo cual nos da $\lambda = \frac{1}{2}$, siendo por tanto la ecuación del plano $3x-2y-2z-6=0$ y los cosenos directores de su normal, o sea del vector $\overline{C}_{10}$ son:

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{9+4+4}} = \frac{3}{\sqrt{17}}, \quad \cos\beta = \frac{-2}{\sqrt{17}}, \quad \cos\gamma = \frac{-2}{\sqrt{17}} \qquad [13]$$

El módulo de C_2 es $|\overline{C_2}| = |\overline{C_1}| \times |OA|$,

» » C_3 es $|\overline{C_3}| = |C_2| \times |OA| = |C_1| \times |OA|^2$,

y así sucesivamente obtenemos

$$|\overline{C_{10}}| = |C_1| \times |OA|^9.$$

Para calcular C, tenemos en cuenta que las proyecciones sobre cada uno de los ejes coordenados del momento respecto al punto $(x_2\ y_0\ z_2)$ de un vector que pasa por el punto $(x, y, z,)$ y cuyas componentes son $a_x\ a_y\ a_z$ son

$$\left.\begin{aligned} c_{1x} &= (y_1 - y_0)\, a_z - (z_1 - z_0)\, a_y \\ c_{1y} &= (z_1 - z_0)\, a_x - (x_1 - x_0)\, a_z \\ c_{1z} &= (x_1 - x_0)\, a_y - (y_1 - y_0)\, a_x \end{aligned}\right\} \qquad [14]$$

En el vector dado a es:

$$x_1 = 6, \quad y_1 = 6, \quad z_1 = 0,$$

y sus cosenos directores son

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{9+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{11}}, \qquad \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{11}},$$

siendo, por tanto, $a_x = 3 \quad a_y = a_z = 1$,

luego sustituyendo en las [14] tenemos

$$C_{1x} = 0 \quad C_{1y} = 5 \quad C_{1z} = -5,$$

luego el módulo es

$$|C_1| = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2}.$$

La distancia OA

$$OA = \sqrt{(6-2)^2 + (6-3)^2 + (0+3)^2} = \sqrt{34}.$$

Por tanto

$$|C_{10}| = 5\sqrt{2} \times \sqrt{34^9} = 5 \times 34^4 \sqrt{2}\sqrt{34}.$$

Pero en virtud de las [13] sus componentes son

$$C_{10x} = \frac{3 \times 5 \times 34^4 \sqrt{2}\sqrt{34}}{\sqrt{17}} = 30 \times 34^4 =$$

$$= C_{10y} = C_{10z} = -\frac{2 \times 5 \times 34^4 \sqrt{2}\sqrt{34}}{\sqrt{17}} = -20 \times 34^4$$

y el pruducto vectorial pedido es

$$[\overline{C}_{10} \cdot \overline{a}]_x = a_y\, C_{10z} - a_z\, C_{10y} = 0$$

$$[\overline{C}_{10} \cdot \overline{a}]_y = a_z\, C_{10x} - a_x\, C_{10z} = 90 \times \overline{34}^4$$

$$[\overline{C}_{10} \cdot \overline{a}]_z = a_x\, C_{10y} - a_y\, C_{10x} = -90 \times \overline{34}^4$$

JOSE M.ª ARREDONDO
Licenciado en Ciencias y Ayudante de O. P.

271. *Calcular la suma:* $\sum_{p=1}^{p=\lambda} \operatorname{sen}^2 \frac{p\pi}{n}$, *siendo* n *un número entero, positivo o negativo y* λ *el número mayor de los números enteros positivos inferiores al valor absoluto de* $\frac{n}{2}$.

SOLUCION.—En la suma

$$S = \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n} + \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi}{n} + \operatorname{sen}^2 \frac{3\pi}{n} + \ldots\ldots + \operatorname{sen}^2 \frac{\lambda\pi}{n}$$

podemos sustituir los cuadrados de los senos en función de los cosenos de doble ángulo:

$$S = \begin{cases} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{n} \\ \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\frac{2\pi}{n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \operatorname{sen}^2 \frac{\lambda\pi}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\lambda\frac{2\pi}{\pi} \end{cases}$$

de donde se deduce que

$$S = \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=\lambda}\cos\frac{2p\pi}{n}.$$

El sustraendo de esta diferencia es una suma de cosenos en progresión aritmética aplicando la fórmula conocida que nos da su suma (*Trigonométrie*, J. A. Serret, (20)) se tiene:

$$S = \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sen}(\lambda+1)\frac{\pi}{n}\operatorname{sen}\frac{\alpha\pi}{n}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}} \qquad [1]$$

Caso de n *impar.*

$$n = 2m - 1, \quad h = m - 1.$$

Sustituyendo los valores de n y λ en la fórmula [1] se tiene:

$$S = \frac{m-1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sen}\frac{m\pi}{2m-1}\operatorname{sen}\frac{(m-1)}{2m-1}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2m-1}} =$$

$$= \frac{m-1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{\frac{1+\cos\frac{\pi}{2m-1}}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2m-1}} = \frac{m-1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos^2\frac{\pi}{2(2m-1)}}{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2(2m-1)}\cos\frac{\pi}{2(2m-1)}} =$$

$$= \frac{m-1}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2(2m-1)}.$$

Caso de n *par.*

$$n = 2\,m, \qquad \lambda = m - 1.$$

Análogamente se tiene:

$$S = \frac{m-1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2} \operatorname{sen} \dfrac{(m-1)\,\pi}{2\,m}}{\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2\,m}} = \frac{m-1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sen} \dfrac{m-1}{2\,m}\,\pi}{\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2\,m}}.$$

E. Feltrer

280. *En un sistema de ejes cartesianos rectangulares considérense las circunferencias*

$$C \equiv x^2 + y^2 - 9 = 0 \qquad C_1 \equiv x^2 + y^2 - 10\,x + 24 = 0.$$

Se pide el lugar geométrico:

1.° *De los centros de las circunferencias* (C_2) *tangentes a* C *y ortogonales a* C_1.

2.° *De los puntos de intersección de cada circunferencia* C_2 *con la* C_3, *ortogonal a* C *en el punto de tangencia de* C_2 *y ortogonal a* C_1.

Discútanse y caracterícense los lugares obtenidos.

(E. E. de Ing. Ag. Octubre, 1935.)

Solucion.—1.° Si tomamos un punto variable $A[\alpha, \beta]$ sobre (C), la ecuación de la tangente es:

$$(d) \equiv \alpha\,x + \beta\,y - 9 = 0.$$

Ahora bien, por ser tangente (C_2) a (C) esta tangente común es el eje radical de ambas, luego la ecuación de (C_2) es:

$$(C_2) \equiv (C) + h\,(d) \equiv x^2 + y^2 - 9 + h\,(\alpha\,x + \beta\,y - 9) = 0.$$

Expresando que (C_2) es ortogonal a (C_1) o sea exceptuando que la potencia de [5,0] con relación a (C_2) es +1 se tiene:

$$25 - 9 + h\,(5\,\alpha - 9) = 1, \qquad \text{de donde} \qquad h = \frac{15}{9 - 5\,\alpha} \qquad [1]$$

por lo tanto la ecuación de (C_2) es:

$$x^2 + y^2 - 9 + \frac{15}{9 - 5\,\alpha}\,(\alpha\,x + \beta\,y - 9) = 0.$$

Designando por X, Y las coordenadas del centro de (C_2) se tiene:

$$X = -\frac{\alpha\,h}{2}, \qquad \alpha = -\frac{2\,x}{h}$$

$$Y = -\frac{\beta\,h}{2}, \qquad \beta = -\frac{2\,Y}{h}.$$

Expresando que $A\,[\alpha, \beta]$ está sobre (C) se tiene:

$$4\,(X^2 + Y^2) = 9\,h^2\,\lambda^2 \qquad [2]$$

Y eliminando se obtiene la ecuación del lugar:

$$4(x^2+y^2)=9\,\frac{(15-10\,x)^2}{9^2}\,,\qquad 64\,x^2-36\,y^2-300\,x+225=0,$$

que es la ecuación de una hipérbola reducida a sus ejes paralelos a los coordenados cartesianos.

$$\text{Centro}\ \left(\frac{150}{64}\,,\ 0\right),\qquad \text{Ecuación reducida}\quad 64\,x^2-36\,y^2-\frac{2025}{16}=0.$$

2.º Por ser ortogonal (C_1) a (C_2) y (C_3) el centro de (C_1) está sobre el eje radical de (C_2) y (C_3) y siendo A y B los puntos de intersección de (C_2) y (C_3); el lugar de B es el inverso de A tomando como centro de inversión el centro de (C_1) y como potencia de radio $+1$, por tanto el lugar de B es la circunferencia inversa de (C).

Trasladando los ejes a $[5{,}0]$ y aplicando las fórmulas de inversión se tiene:

$$(C_T)\equiv x^2+y^2+10\,x+16=0,\qquad x=\frac{X}{X^2+Y^2}\,;$$

de donde

$$16\,(X^2+Y^2)+10\,X+1=0,\qquad y=\frac{Y}{X^2+Y^2}\,;$$

trasladando los ejes al origen se tiene:

$$X^2+Y^2-\frac{75}{8}\,X+\frac{351}{16}=0.$$

E. Feltrer

321. *Hallar el término general de la serie recurrente:*

$$3+11+32+84+\ldots\ldots$$

Solucion.—Llamemos

$$a_0=3,\ a_1=11,\ a_2=32,\ a_3=84\ \ldots\ldots$$

Se ve que cada término de esta sucesión es igual al duplo del anterior más 5 multiplicado por una potencia de 2 igual al subíndice del término considerado rebajado en esa unidad.

Siguiendo esta ley formemos los términos sucesivos:

$$a_1=2\,a_0+2^0{,}5=6+5,$$
$$a_2=2\,a_1+2{,}5\ =2\,(2\,a_0+2{,}5)=2\,(6+2{,}5),$$
$$a_3=2\,a_2+2^2{,}5=2^2\,[2\,a_0+2{,}5+5]=2^2\,[6+3{,}5],$$
$$a_4=2\,a_3+a^3{,}5=2^3\,[2\,a_0+2{,}5+5+5]=2^3\,[6+4{,}5],$$
$$a_5=2\,a_4+2^4{,}5=2^4\,[2\,a_0+4{,}5+5]=2^4\,[6+5{,}5].$$

Ya se ve la ley que siguen los términos y el término general buscado será:

$$a_n = 2^{n-1}[2\,a_0 + n \cdot 5] = 2^{n-1}[6 + n \cdot 5].$$

J. Huerta Lopez

333. *Demostrar que para cualquier valor natural de* n *se tiene*:

$$2\,n + 1 = \prod_{k=1}^{n} \operatorname{tg}^2\left(\frac{k\,\pi}{2\,n+1}\right).$$

I. Aldanondo

Solucion.

$$\operatorname{tg}(2\,n+1)\,x = \frac{(2\,n+1)\operatorname{tg} x - \binom{2\,n+1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \ldots\ldots + (-1)^n \operatorname{tg}^{2\,n+1} x}{1 - \binom{2\,n+1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ldots\ldots + (2\,n+1)\operatorname{tg}^{2n} x};$$

los valores de $x < \pi$ que hacen $\operatorname{tg}(2n+1)\,x = 0$ son:

$$0, \quad \frac{\pi}{2\,n+1}, \quad \frac{2\,\pi}{2\,n+1}, \quad \frac{3\,\pi}{2\,n+1}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{2\,n\,\pi}{2\,n+1}.$$

Estos valores anulan, pues, a

$$(2\,n+1)\operatorname{tg} x - \binom{2\,n+1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \ldots\ldots (-1)^n \operatorname{tg}^{2\,n+1} x.$$

Por las relaciones de Cardano-Vieta se deduce:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2\,n+1} \cdot \operatorname{tg}\frac{2\,\pi}{2\,n+1} \ldots\ldots \operatorname{tg}\frac{2\,n\,\pi}{2\,n+1} = \frac{2\,n+1}{(-1)^n};$$

o sea:

$$(-1)^n \cdot \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2\,n+1}\operatorname{tg}^2\frac{2\,\pi}{2\,n+1} \ldots\ldots \operatorname{tg}^2\frac{n\,\pi}{2\,n+1} = \frac{2\,n+1}{(-1)^n};$$

luego:

$$\prod_{k=1}^{n} \operatorname{tg}^2\left(\frac{k\,\pi}{2\,n+1}\right) = 2\,n+1.$$

Miguel A. Hacar

Otra solución del Sr. Feltrer.

Otra solucion.—Mediante las relaciones

$$\operatorname{tg}\frac{k\,\pi}{2\,n+1} = -\operatorname{tg}\left(\pi - \frac{k\,\pi}{2\,n+1}\right) = -\operatorname{tg}\frac{2\,n+1-k}{2\,n+1}\,\pi$$

y

$$\operatorname{tg}\frac{k\,\pi}{2\,n+1} = \frac{1}{i}\,\frac{1 - e^{-\frac{2\,k\,\pi\,i}{2\,n+1}}}{1 + e^{-\frac{2\,k\,\pi\,i}{2\,n+1}}},$$

resulta :

$$\prod_{k=1}^{n} \operatorname{tg}^2 \frac{k\pi}{2n+1} = (-1)^n \prod_{k=1}^{2n} \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2n+1} = \prod_{k=1}^{2n} \left[\frac{1-e^{-\frac{2k\pi i}{2n+1}}}{1+e^{-\frac{2k\pi i}{2n+1}}} \right].$$

Pero $x = e^{-\frac{2k\pi i}{2n+1}}$ es una raíz de la ecuación $x^{2n+1} - 1 = 0$, puesto que $\left(e^{-\frac{2k\pi i}{2n+1}}\right)^{2n+1} = 1$. Luego se tiene idénticamente

$$\frac{x^{2n+1}-1}{x-1} \equiv \prod_{k=1}^{2n} \left(x - e^{-\frac{2k\pi i}{2n+1}}\right);$$

de donde

$$\prod_{k=1}^{2n} \left[1 - e^{-\frac{2k\pi i}{2n+1}}\right] = \left[\frac{x^{2n+1}-1}{x-1}\right]_{x=1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^{2n+1}-1}{x-1} = 2n+1.$$

$$\prod_{k=1}^{2n} \left(-1 - e^{-\frac{2k\pi i}{2n+1}}\right) = \prod_{k=1}^{2n} \left(1 + e^{-\frac{2k\pi i}{2n+1}}\right) = \left[\frac{x^{m+1}-1}{x-1}\right]_{x=-1} = 1.$$

Por consiguiente:

$$\prod_{k=1}^{n} \operatorname{tg}^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{2n+1}{1}.$$

R. Merino

337. *Sean* A′, B′, C′, *los puntos de los lados* a, b, c, *de un triángulo, tales que sea*

$$\frac{A'C}{A'B} = \frac{B'A}{B'C} = \frac{C'B}{C'A} = -\frac{1}{2}.$$

Calcular el área del triángulo que forman las rectas AA′, B′B, CC′, *en función del área de* ABC (Lieubray).

Solucion.—Como la razón es la negativa los puntos A', B', C', están comprendidos entre los vértices B y C, C y A, A y B; resolviendo el problema general o sea que se tomen en un mismo sentido los segmentos

$$BA' = \frac{a}{n}, \quad CB' = \frac{b}{n}, \quad AC' = \frac{c}{n};$$

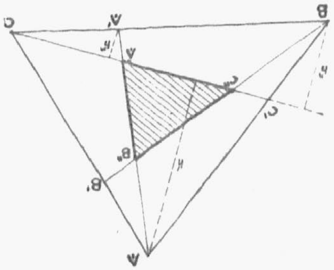
particularizando luego para el valor de $n = \frac{3}{2}$ obtendremos la solución.

En los triángulos ABC y ACC' se tiene:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AC'C}} = \frac{b\,c}{\frac{1}{n}\,b\,c} = n, \qquad S_{AC'C} = \frac{1}{n}\,S_{ABC}$$

$$S_{BCC'} = S_{ABC} - S_{ACC'} = \frac{n-1}{n}\,S_{ABC} = S_{CA'A} = S_{AB'B},$$

$$S_{AA'C} = S_{AA''C} + S_{A'A''C} = \frac{n-1}{n}\,S_{ABC} \qquad [1]$$



Los triángulos $AA''C$ y $A''A'C$ tienen la misma altura, luego:

$$\frac{S_{AA''C}}{S_{A''A'C}} = \frac{A\,A''}{A''\,A'} = \frac{h'}{h'''}, \qquad S_{A''A'C} = \frac{h'''}{h'}\,S_{ABC}.$$

Por otra parte se tiene que:

$$\frac{h'}{h''} = \frac{A\,C'}{C'\,B} = \frac{\frac{a}{h}}{a - \frac{a}{h}} = \frac{1}{n-1}, \qquad \frac{h''}{h'''} = \frac{B\,C}{A'\,C} = \frac{b}{b - \frac{b}{n}} = \frac{n}{n+1};$$

multiplicando miembro a miembro se tiene:

$$\frac{h'}{h'''} = \frac{n}{(n-1)^2}, \qquad S_{A''A'C} = \frac{(n-1)^2}{n}\,S_{ABC}.$$

Sustituyendo en [1] el valor de $S_{A''A'C}$ y despejando $S_{AA''C}$, se tiene:

$$S_{AA''C} = \frac{n-1}{(n-1)^2+n}\,S_{ABC}.$$

Análogamente se obtendría para los triángulos $AB''B$ y $BC''C$; por lo tanto, $S_{A''B''C''}$ valdrá:

$$S_{A''B''C''} = S_{ABC} - 3\,S_{AA''C} = \frac{(n-2)^2}{(n-1)^2+n}\,S_{ABC}.$$

Aplicando el caso de $n = \frac{3}{2}$ se tiene $S_{A''B''C''} = \frac{1}{7}\,S_{ABC}$.

E. Feltrer

Otras soluciones del Sr. Hacar, *de la* Srta. Redondo *y del* Sr. Merino.

339. *Demostrar que para cualquier triángulo plano se verifica:*

$$\frac{a}{\sqrt{a}\, cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{b}{\sqrt{b}\, cos^2 \frac{B}{2}} = \frac{c}{\sqrt{c}\, cos^2 \frac{C}{2}}.$$

Solucion.—Basta recordar las fórmulas:

$$\sqrt{a} = p \operatorname{tg} \frac{1}{2} A, \quad \sqrt{b} = p \operatorname{tg} \frac{1}{2} B, \quad \sqrt{c} = p \operatorname{tg} \frac{1}{2} C,$$

siendo $2p = a + b + c$, y sustituyendo:

$$\frac{a}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} A \cos^2 \frac{1}{2} A} = \frac{b}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} B \cos^2 \frac{1}{2} B} = \frac{c}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} C \cos^2 \frac{1}{2} C};$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C};$$

pero como: $\operatorname{sen} A = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A$, etc., queda

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C},$$

que es la conocida relación de proporcionalidades entre los lados los senos de los ángulos opuestos.

F. Huerta Lopez

Otra solución del Sr. Feltrer.

341. *Construir un triángulo* ABC *conociendo un lado* c, *la razón* $\frac{b}{a}$ *de los otros dos, y la razón* $\frac{OA}{OB}$, *siendo* O *el centro del círculo instrito en el triángulo pedido.*

Solucion.

$$\frac{OA}{OB} = \frac{\operatorname{sen} \frac{B}{2}}{\operatorname{sen} \frac{A}{2}} = \sqrt{\frac{p-a}{p-b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Sea M el punto de contacto del círculo inscrito con AB

$$\frac{p-a}{p-b} = \frac{MA}{MB} = \left(\frac{OA}{OB}\right)^2 : \frac{b}{a} = \frac{OA^2}{a} : \frac{\overline{OB}^2}{b}.$$

Luego podemos gráficamente hallar M.

Por ser $\frac{OA}{OB}$ una cantidad dada fija, el lugar de O es una circunferencia con centro sobre AB. Su intersección con la perpendicular en M a AB nos da el punto O.

HACAR

Otra solución de los Sres. E. FELTRER, R. MERINO y Srta. REDONDO.

342. *Encontrar dos números enteros tales que la diferencia entre sus cubos sea* 17451.

SOLUCION.—Sean los números a y $a+x$; la diferencia entre sus cubos es

$$3\,x^2 x + 3\,a\,x^2 + x^3 = x\,(3\,a^2 + 3\,a\,x + x^2) = 17451\,.$$

Los divisores de 17451 son:

1	3	9
7	21	63
277	831	2493
1939	5817	17451;

uno de estos valores debe ser igual a x. Uno de los sumandos que forman el segundo factor es x^2 y como $277^2 > 17451$ resulta que $x < 831$, luego los únicos valores posibles de x son 1, 3, 9, 7, 21, 63.

Busquemos soluciones enteras para las ecuaciones de 2.º grado.

$$\begin{array}{lllll}
1.^{\circ} & 3\,a^2 + 3\,a - 17450 = 0 & \text{para} & x = & 1 \\
2.^{\circ} & 3\,a^2 + 9\,a - 5808 = 0 & \text{»} & x = & 3 \\
3.^{\circ} & 3\,a^2 + 27\,a - 1858 = 0 & \text{»} & x = & 9 \\
4.^{\circ} & 3\,a^2 + 21\,a - 2444 = 0 & \text{»} & x = & 7 \\
5.^{\circ} & 3\,a^2 + 63\,a - 390 = 0 & \text{»} & x = & 21,
\end{array}$$

ya que para los valores de $x=63$ y $x=277$ la ecuación es imposible.

La solución debe ser raíz cuadrada exacta, luego el descriminante no puede terminar en 2, 3, 7, ni 8; de esta forma se desecha la segunda. La quinta es la que tiene $\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}$ exacta a

$$a = \frac{-63 \pm 93}{6}, \quad a_1 = 5, \quad a_2 = -26,$$

luego

$$\boxed{a = 5}, \quad \boxed{a + x = 26}, \quad \boxed{a = -26}, \quad \boxed{a + x = -5}.$$

LUISA REDONDO

Otra solución del Sr. HACAR *y del* Sr. FELTRER.

347. *¿Cuál es la condición para que sea algebraica la curva*

$$x = \cos\varphi, \qquad y = \cos m\,\varphi.$$

SOLUCION.

$$\cos m\,\varphi = \cos^m\varphi - \binom{m}{2}\operatorname{sen}^2\varphi\,\cos^{m-2}\varphi + \binom{m}{4}\operatorname{sen}^4\varphi\,\cos^{m-4}\varphi - \ldots\ldots$$

Desde luego m tiene que ser entero (positivo o negativo). Sustituyendo en fórmula anterior los valores del enunciado

$$y = x^m - \binom{m}{2}(1 - x^2)\, x^{m-2} + \binom{m}{4}(1 - x^2)^2\, x^{m-4} - \ldots\ldots$$

siendo el último término

$$\pm (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \quad \text{o} \quad \pm\, m\,(1 - x^2)^{\frac{m-1}{2}} \,.\, x \text{ según sea } m \begin{cases} \text{par} \\ \text{impar.} \end{cases}$$

Como el término en x^m que es el de mayor grado tiene por coeficiente

$$\binom{m}{0} + \binom{m}{2} + \binom{m}{4} + \ldots\ldots + \binom{m}{m}$$

$$\binom{m}{0} + \binom{m}{2} + \binom{m}{4} + \ldots\ldots + \binom{m}{m-1}$$

respectivamente (distintos de cero), el grado de la ecuación es m.

Ser m *entero (positivo o negativo).*

HACAR

350. *La distancia entre las dos bocas* A *y* B *de un túnel es de mil metros. El día* 1.° *de marzo se empezó la perforación por la boca* A, *avanzando el primer día cuatro metros justos; el segundo día, un centímetro menos; el tercer día, un centímetro menos que el segundo, y así sucesivamente y sin interrupción se continúa, avanzando siempre cada día un centímetro menos que el anterior.*

El día 1.° *de junio se comenzó a perforar por la boca* B, *avanzando en sentido contrario sin interrupción y de un modo uniforme dos metros diarios.*

El día 20 *de agosto se inició la apertura de un pozo de* 90 *metros de altura en la vertical del punto* C, *situado sobre la línea* AB, *a* 650 *metros de la boca* A, *perforando a razón de cinco metros diarios.*

El mismo día con que se llegó con el pozo al punto C, *se comenzaron dos perforaciones: una en dirección a* A, *con un avance diario de* 1,50 *metros, y otra en dirección a* B, *avanzando un metro cada día.*

Se pregunta qué día se encontraron los perforadores que partieron de C *con los que habían entrado por* A *y por* B, *respectivamente, y qué día hubiera tenido lugar el encuentro si solamente hubieran trabajado estos dos últimos.*

Además de la resolución numérica de este problema debe hacerse su comprobación gráfica.

E. DE AYUD. DE O. P.). Junio 1934.

SOLUCION.—El pozo C costará de perforar, puesto que tiene 90 metros de profundidad y cada día se adelanta 5 metros, 18 días; como se ha comenzado el 20 de agosto el día 7 de septiembre se habrá llegado a C; la perforación por A se comenzó el 1.° de marzo, luego calcularemos lo que han adelantado en 190 días; lo que adelantan cada día son los términos de una progresión aritmética:

$$\div 4,\ 4 - \frac{1}{100},\quad 4 - \frac{2}{100},\ \ldots\ldots,\ 4 - \frac{n-1}{100}.$$

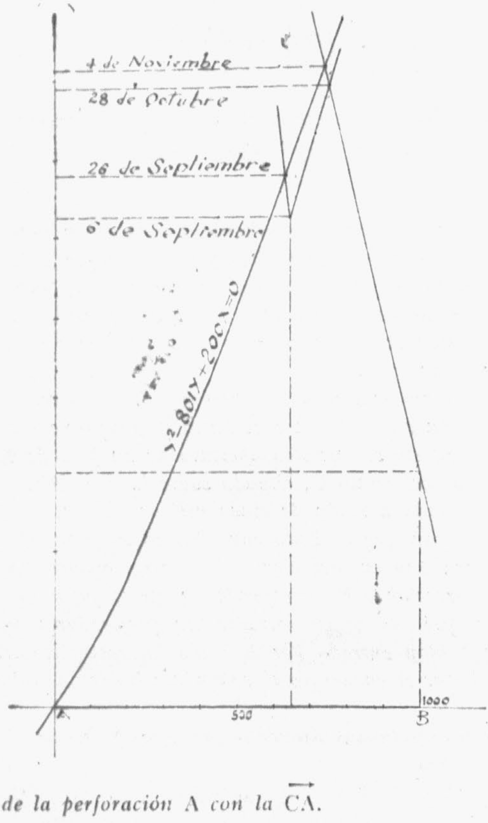
Por lo tanto lo adelantado en n días es

$$S_n = 4n - \frac{n(n-1)}{200}.$$

Aplicando para $n = 190$,

$$S_{190} = 760 - 179{,}55 = 580{,}45 \text{ ms.}$$

La perforación por B se comenzó el 1 de junio, luego en 98 días, como adelantan dos metros diarios, se habrá adelantado 196 metros.



Encuentro de la perforación A *con la* $\overrightarrow{CA}$.

La distancia $A'C = 650 - 580{,}45 = 69{,}55$; llamando x al número de días a partir de septiembre; la distancia recorrida en el sentido $\overline{A'C}$ vale:

$$A'H = \left(4 - \frac{19}{10}\right)x - \frac{x(x-1)}{200};$$

la distancia recorrida en el sentido cm vale: $1,5\,x$; por lo tanto,

$$A'M = +MC = 69,55, \qquad \left(4 - \frac{189}{100}\right)x - \frac{x(x-1)}{200} + 1,5\,x = 69,55,$$

$$3,61\,x - \frac{x + x^2}{200} = 69,55, \qquad x^2 - 721\,x + 13910 = 0,$$

de donde:

$$x = \frac{721 \pm \sqrt{721^2 - 4 \cdot 13910}}{2} \sim \frac{721 + 681,323}{2} \sim 1\,g,8385\,d;$$

por lo tanto se encontrarán el día

26 DE SEPTIEMBRE A LAS 20 H.-7 M.-2,6 SEG.

Encuentro de la perforación C *con la* BC.

La distancia $CB' = 350 - 196 = 154\ m$; llamando x a los días contados a partir del 7 de septiembre se tiene:

$$CM = x, \quad B'M = 2\,x, \quad CM + B'M = 154, \quad x + 2\,x = 154,$$

de donde

$$x = 51,333\,d;$$

por lo tanto se encontraron el día

28 DE OCTUBRE A LAS 7 HORAS, 59 M.-59,9 SEG.

Encuentro de la perforación A *con la perforación* B.

La perforación A habrá adelantado desde el 1 de marzo hasta el 1 de junio

$$S_{92} = 4 \cdot 92 - \frac{92 \cdot 91}{200} = 326,14;$$

por lo tanto $A''B = 1000 - 326,14 = 673,86$; llamando x al número de días que transcurren hasta el encuentro a partir del 1 de junio, se tiene:

$$BM = 2\,x, \quad A''M = \left[4 - \frac{91}{100}\right]x - \frac{x(x-1)}{200}, \quad BM + A''M = 673,86,$$

de donde:

$$\left(4 - \frac{91}{100}\right)x - \frac{x(x-1)}{200} + 2\,x = 673,86,$$

$$x^2 - 1017\,x + 134772 = 0;$$

por lo tanto:

$$x = \frac{1017 \pm \sqrt{1017^2 - 4 \times 134772}}{2} = \frac{1017 \pm 703,705}{2} \sim 156,6475\,d;$$

por lo tanto se encontraron el día:

4 DE NOVIEMBRE 3 LAS 15 H.-32 M.-24 SEG.

E. FELTRER

Otra solución del Sr. ARREDONDO.

351. *Simplificar todo lo posible la expresión:*

$$y = \frac{\cos^2 x}{\left[10 - \dfrac{\dfrac{275}{4493}\sqrt{4{,}35\overline{684}\left(\dfrac{280}{11}+\dfrac{293}{165}\right)}}{\dfrac{5}{3}\,x\,\dfrac{41}{105}\left(2-\dfrac{1}{1-\dfrac{20}{61}}\right)} - \sqrt{3259^{\frac{1}{2}} - \dfrac{\sqrt{11025}}{5}}\right] - \cos x}$$

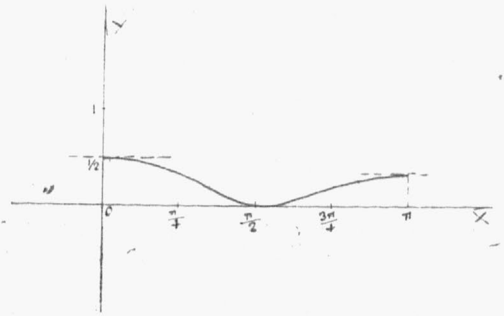
y dibujar la curva correspondiente referida a dos ejes coordenados cartesianos rectangulares, tomando para escala de abscisas $\frac{\pi}{4}$ *centímetros, y para las ordenadas, unidad=4 centímetros.*

ESCUELA DE AYUDANTES DE O. P., Junio 1934.

SOLUCION.—Calculando la cantidad entre corchetes del denominador se tiene:

$$4{,}35\overline{684} = \frac{435684 - 4356}{99000} = \frac{431328}{99000}, \quad \frac{280}{11} + \frac{293}{165} = \frac{49423}{11.165}$$

$$\frac{275}{4493}\sqrt{4{,}35\overline{684}\left(\frac{280}{11}+\frac{293}{165}\right)} = \frac{275}{4493}\sqrt{\frac{4493^2.2^2}{11^2.3^2.5^4}} = \frac{5^2.11.2}{11.3.5^2} = \frac{2}{3},$$



$$\frac{5}{3}\times\frac{41}{105}\left(2-\frac{1}{1-\dfrac{20}{61}}\right) = \frac{1}{3}, \quad \sqrt{3249^{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{11025}}{5}} = \sqrt{57 - \frac{105}{5}} = \sqrt{36} = 6,$$

de donde se deduce que:

$$10 - \frac{\dfrac{2}{3}}{\dfrac{1}{3}} - 6 = 2; \quad \text{por lo tanto,} \quad y = \frac{\cos^2 x}{2 - \cos^2 x}.$$

Construcción.—Es una función periódica de período 2π; si se cambia x en $-x$ la y no varía; por lo tanto, es simétrica respecto al eje YY'. Por la simetría el período se reduce a π

$$y' = \frac{(\cos x - 4)\,\text{sen}\,x\cos x}{(2 - \cos x)^2};$$

igualando a cero y' obtendremos los máximos o mínimos.

$$\operatorname{sen} x = 0 \left| \begin{array}{l} x = 0 - \text{máx.} \\ x = \pi - \text{máx.} \end{array} \right. \qquad \cos x = 0 \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} - \text{mín.} \\ x = \dfrac{3\pi}{2} - \text{mín.} \end{array} \right.$$

Valores notables:

$$x = 0 \qquad x = \frac{\pi}{4} \qquad x = \frac{\pi}{2} \qquad x = \frac{3\pi}{4} \qquad x = \pi$$

$$y = \frac{1}{2} \qquad y \simeq 0{,}38 \qquad y = 0 \qquad y \simeq 0{,}18 \qquad y = \frac{1}{3}$$

E. Feltrer

Otra solución del Sr. Hacar.

353. *En el plano de las variables camplejas el origen* $z=0$ *y el punto* $z=2+2i$, *son los extremos de una diagonal que une dos vértices opuestos de un exágono regular.*

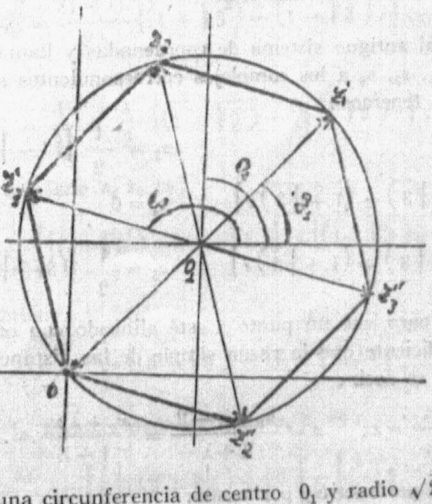
Determinar haciendo uso de las cantidades complejas:

1.° *Las coordenadas de los otros vértices.*

2.° *Hallar la figura que resulta de reemplazar cada uno de los puntos del exágono por la compleja de valor inverso* $\omega = \dfrac{1}{z}$ *obteniendo no sólo los vértices sino también las ecuaciones de las curvas que corresponden a los lados rectilíneos del exágono.*

(E. E. de Ing. de C. Junio 1936.)

Solucion.—1.° Tomando como nuevo origen el punto $0_1(1,1)$, reculta que este punto será centro si de simetría del exágono, cuyos vértices esta-



rán por tanto en una circunferencia de centro 0_1 y radio $\sqrt{2}$, y únicamente habremos de determinar los argumentos de dos de los cuatro vértices buscados, pues los otros vendrán representados por los complejos opuestos a los hallados. Así los vértices dados estarán representados respectivamente por $z'_1 = 1 + 1\,i$, $z'_0 = -1 - 1\,i$.

De la figura se deduce:

$$\theta_1 = 45^0, \qquad \theta_2 = \theta_1 + 60^0 = 45^0 + 60^0;$$

las componentes de z'_2 son:

$$\left.\begin{aligned} x'_2 &= \sqrt{2}\cos\theta_2 = \sqrt{2}\cos(4{,}5^0 + 60^0) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{3}\right) \\ y'_2 &= \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta_2 = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,(4{,}5^0 + 60^0) = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3}\right) \end{aligned}\right\},$$

y las de su opuesto z''_2 son:

$$\left.\begin{aligned} x''_2 &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right) \\ y''_2 &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + 1\right) \end{aligned}\right\}.$$

Análogamente $\theta_3 = \theta_2 = 60$; las componentes de z'_3 son:

$$\left.\begin{aligned} x'_3 &= \sqrt{2}\cos\theta_3 = \sqrt{2}\cos\qquad + 60) = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + 1\right) \\ y'_3 &= \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta_3 = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,(\theta_2 + 60) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right) \end{aligned}\right\},$$

y las de su opuesto z''_3 son:

$$\left.\begin{aligned} x''_3 &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + 1\right) \\ y''_3 &= \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{3}\right) \end{aligned}\right\}.$$

Volviendo al antiguo sistema de coordenadas y llamando respectivamente z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6 a los complejos correspondientes a los z'_1, z'_2, z'_3, z'_0, z''_2, z''_3, tenemos:

$$z_1 = 2 + 2\,i \qquad\qquad z_2 = \frac{1}{2}\left[\left(3 - \sqrt{3}\right) + \left(3 + \sqrt{3}\right)i\right]$$

$$z_3 = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \sqrt{3}\right) + \left(1 + \sqrt{3}\right)i\right] \qquad\qquad z_4 = 0$$

$$z_5 = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \sqrt{3}\right) + \left(1 + \sqrt{3}\right)i\right] \qquad\qquad z_5 = \frac{1}{2}\left[\left(3 + \sqrt{3} + \left(3 - \sqrt{3}\right)i\right]\right..$$

2.º Como para que un punto z esté alineado con otros dos z, y z_2, es necesario y suficiente que la razón simple de las distancias a los otros dos sea constante; es decir:

$$\frac{z_1 - z}{z_2 - z} = \lambda; \qquad z = \frac{z_1 + \lambda - 2}{1 + \lambda} = \frac{x_1 + \lambda\,x_2}{1 + \lambda} + \frac{y_1 + \lambda\,y_2}{1 + \lambda};$$

donde λ es un parámetro; por tanto:

$$\omega = \frac{1}{z} = \frac{(1 + \lambda)}{x_1^2 + y_1^2 + 2\,\lambda\,(x_1\,x_2 + y_1\,y_2) + \lambda^2\,(x_2^2 + y_2^2)}\left[(x_1 + \lambda\,x_2) - (y_1 + \lambda\,y_2)\,i\right].$$

Sustituyendo z_1 y z_2 por sus valores anteriormente obtenidos tenemos que la x transformada del lado z_1 y z_2 es:

$$\omega_{12} = \frac{(1+\lambda)}{8+12\lambda+6\lambda^2}\left[\left[2+\frac{\lambda}{2}\left(3-\sqrt{3}\right)\right]-\left[2+\frac{\lambda}{2}\left(3+\sqrt{3}\right)\right]i\right].$$

Poniendo $\lambda=0_0$ $\lambda=\infty$ resultan, respectivamente, las transformadas de los puntos z_1 y z_2:

$$\omega_1 = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{8}(2-2i); \qquad \omega_2 = \frac{1}{12}\left[\left(3-\sqrt{3}\right)-\left(3+\sqrt{3}\right)i\right].$$

Procediendo análogamente sin más que cambiar los subíndices tenemos que la transformada del lado $z_2\,z_3$ es:

$$\omega_{23} = \frac{(1+\lambda)}{12+12\lambda+4\lambda^2}\left[\left[\left(3-\sqrt{3}\right)+\lambda\left(1-\sqrt{3}\right)\right]-\left[\left(3+\sqrt{3}\right)+\lambda\left(1+\sqrt{3}\right)\right]i\right];$$

para $\lambda=0$ sale para ω_2 el mismo valor anteriormente obtenido y para $\lambda=\infty$ es:

$$\omega_3 = \frac{1}{3_3} = \frac{1}{4}\left[\left(1-\sqrt{3}\right)-\left(1+\sqrt{3}\right)i\right];$$

la transformada del lado $z_3\,z_4$ es:

$$\omega_{34} = \frac{1+\lambda}{4}\left[\left(1-\sqrt{3}\right)-\left(1+\sqrt{3}\right)i\right].$$

para $\lambda+\infty$ resulta $\omega_4=\infty$, como debía resultar por ser z_4 el origen la transformada del lado $z_4\,z_5$ es:

$$\omega_{45} = \frac{(1+\lambda)}{2\lambda}\left[\left(1+\sqrt{3}\right)-\left(1-\sqrt{3}\right)i\right];$$

para $\lambda+\infty$ es:

$$\omega_5 = \frac{1}{z_5} = \frac{1}{2}\left[\left(1+\sqrt{3}\right)-\left(1-\sqrt{3}\right)i\right];$$

la transformada del lado $z_5\,z_6$ es:

$$\omega_{56} = \frac{(1+\lambda)}{4+12\lambda+6\lambda^2}\left[\left[\left(1+\sqrt{3}\right)+\lambda\left(3+\sqrt{3}\right)\right]-\left[\left(1-\sqrt{3}\right)+\lambda\left(3-\sqrt{3}\right)i\right]\right];$$

para $\lambda+\infty$ se obtiene:

$$\omega_6 = \frac{1}{6}\left[\left(3+\sqrt{3}\right)-\left(3-\sqrt{3}\right)i\right].$$

Y finalmente, la transformada del lada $z_6\,z_1$ es:

$$\omega_{61} = \frac{(1+\lambda)}{3+12\lambda+8\lambda^2}\left[\left(\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{3}\right)+2\lambda\right]-\left[\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{3}\right)+2\lambda\right)i\right].$$

F. Huerta Lopez