EJERCICIOS PROPUESTOS

401. *Descomponer en fracciones simples la fracción*

$$1 : \begin{vmatrix} x-p_a & b & c & d & l \\ a & x-p_b & c & d & l \\ a & b & x-p_c & d & l \\ a & b & c & x-p_d & l \\ a & b & c & d & x-p_l \end{vmatrix};$$

siendo

$$p_a = b + c + d + l, \quad p_b = a + c + d + l, \text{ etc.}$$

402. *Una superficie cónica de 2.º grado está definida por una circunferencia de radio,* R=6, *y por el vértice que se proyecta en el plano de la directriz en el punto medio de un radio y dista del plano,* h=16. *Una sección antiparalela es una circunferencia de radio,* r=25.

Se pide 1.º: Volumen del tronco de cono comprendido entre las dos secciones. 2.º: El ángulo máximo y el ángulo mínimo que forman las generatrices con el plano de la directriz.

403. *Dibujar una hipérbola dados el foco, una asíntota y un punto.*

404. *Encontrar un polinomio de 2.º grado en* x, y, z, *homogéneo, simétrico y tal que si se hace* x=y=z=1 *el polinomo vale* 9 *y cuando se hace* x=1, y=2, z=3 *el polinomio vale* 36.

405. *Sin desarrollar los paréntesis ver que*

$(b-c)^5 + (c-a)^5 + (a-b)^5$ *es divisible por* $(b-c)(c-a)(a-b)$.

Hallar el cociente.

406., *Hallar la expresión general del radio de una circunferencia tangente a otras dos dadas y además que:*

1.º *Los centros de las circunferencias estén en línea recta.*

2.º *Los centros de las circunferencias formen un triángulo rectángulo, el vértice del ángulo recto es el centro de la circunferencia buscada.*

3.º *Los centros de las circunferencias formen un triángulo isósceles (los centros de las circunferencias dadas forman la base del triángulo).*

407. *Si es* $\operatorname{tg} \alpha = i$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ *es también igual a* i.

408. *Dadas las fracciones* $\frac{a}{b}$ y $\frac{a'}{b'}$ (a b a′ y b′ *son enteros) encontrar el mayor número que al dividir aquellas fracciones por él los cocientes sean enteros.*

409. *Se dan dos puntos* P, R, *dos rectas* a, b *coplanarias con ellos y un ángulo* α. *Trazar por* P *una recta tal que el segmento* AB *interceptado por las* a, b, *sea visto desde* Q *bajo el ángulo* α. *Discusión.*

410. *Dos términos del desarrollo de* $(a\,x^m + b\,y^n)^{620}$ *son:*

$$119! \cdot 500!\, x\, y^{12}, \qquad 19!\, 600!\, x^6\, y^{10},$$

siendo a, b, m *y* n *números racionales. Hallar sus valores.*

411. *Siendo* x *un número real se pide:* 1.° *Para qué valores de* x, z *es real.* 2.° *¿Puede ser* z=1?

$$z = \sqrt{\frac{x^2 + 5x + 4}{-x^2 + 2x - 5}}\,.$$

412. *Un tronco de cono de revolución tiene por radio de la base mayor* R=65, *por radio de la base menor* r=15, *y por altura* h=100. *Un plano que pasa por una tangente a la base mayor y por el punto en que la generatriz opuesta a la que pasa por el punto de contacto, corta a la base menor, divide al tronco en dos sólidos. Hallar la razón de los volúmenes.*

413. *Estudiar el límite*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^n f(x) + g(x)}{x^n + 1}\,,$$

según los valores positivos de x, *supuesto, claro está, que* f (x), g (x) *están definidas para toda* x>0.

414. *Demostrar que el cuadrado de la serie*

$$1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - \ldots\ldots + (-1)^n\, q^{\frac{1}{2} n (3n+1)} + \ldots\ldots$$

es la serie

$$1 - 3q + 5q^3 - 7q^6 + 9q^{10} - \ldots\ldots + (-1)^n\,(2n+1)\, q^{\frac{1}{2} n(n+1)} + \ldots\ldots$$

(JACOBI: *Fundamenta Nova*, pág. 185).

415. *Demostrar que*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum\limits_{p=1}^{n} \sqrt{p}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}\,.$$

416. *Se da en un plano horizontal una circunferencia fija de radio* 4R. *Otra circunferencia móvil de radio* R *rueda sobre la primera, consevándose contantemente tangente a aquélla sobre un plano vertical (móvil). Estudiar y representar la trayectoria descrita por un punto cualquiera de la segunda circunferencia.*

417. *Sean* A, B, C, D, *las áreas de las caras de un tetraedro cuyos ángulos diedros son*

$$\alpha = (B, C), \quad \beta = (C, A), \quad \gamma = (A, B).$$

Demostrar que es

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2 - 2\,BC\cos\alpha - 2\,CA\cos\beta - 2\,AB\cos\gamma.$$

(A. Strnad, *Casopis* 29, pág. 146-147, 1900).

SECCION PARA PRINCIPIANTES

12. *Comprobar las identidades*

$$
\begin{aligned}
a)&\quad 134^4 + 3^4 = 19273 \cdot 16729,\\
b)&\quad 86^4 + 1 = 7673 \cdot 7129,\\
c)&\quad 1786^4 + 9^4 = 17 \cdot 190649 \cdot 3139369,\\
d)&\quad 3266^4 + 1 = 17 \cdot 41 \cdot 15289 \cdot 10677089.
\end{aligned}
$$

13. *El tomo* 54 *del* Jahrbuch *consta de* 1181 *páginas. ¿Cuántos guarismos se han empleado para numerarlas?*

14. *Si las cuatro sumas*

$$b + c + d, \quad c + d + a, \quad d + a + b, \quad a + b + c$$

forman una proporción, se verifica

$$\frac{a^3 - d^3}{a - d} = \frac{b^3 - c^3}{b - c}.$$

Demostrarlo.

15. *Demostrar que si entre los ángulos* A *y* B *existe la relación* $tang^2 A = 1 + 2\ tang^2 B$ *también existirá esta otra*:

$$\cos 2B = 1 + 2\cos 2A.$$

16. *En una ciudad de* **1.048.575** *habitantes, recibe uno de ellos, en conferencia telefónica que dura un minuto, una noticia que ignora el resto de la población. En el minuto siguiente se la comunica a dos convecinos. Cada uno de éstos la hace saber inmediatamente a otros dos, invirtiendo en ello, también, un minuto. Y así sucesivamente. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que estén enterados todos los moradores?*