UN CRITERIO DE CONVERGENCIA PARA SERIES NUMERICAS

por

J. Barinaga

Designemos con u_i el número $+1$ o el -1, indistintamente. Construyamos, con ellos, una sucesión formada por grupos de k términos

$$\overbrace{u_1, u_2, \ldots\ldots, u_k}, \overbrace{u_{k+1}, u_{k+2}, \ldots\ldots, u_{2k}}, \ldots\ldots \tag{I}$$

tales que en todos los grupos exista el mismo número, p, de unidades positivas, y el mismo número, q, de unidades negativas, $(p+q=k)$, pero siendo arbitraria la distribución entre ambas clases de unidades en cada grupo. Sea, además,

$$v_1, v_2, \ldots\ldots, v_i, \ldots\ldots \tag{II}$$

una sucesión monótona con límite nulo para la cual diverja la serie $\sum v_i$. Hechos estos convenios, vamos a demostrar el siguiente

Teorema.—*La serie*

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots\ldots + u_k v_k + u_{k+1} v_{k+1} + \ldots\ldots + u_{2k} v_{2k} + \ldots\ldots \tag{III}$$

obtenida sumando los productos de los términos que ocupan el mismo lugar en las sucesiones (I) *y* (II), *es convergente si, y solamente si, es* $p=q$.

Probemos, primero, que la condición $p=q$ es necesaria. En efecto; supongamos convergente la serie (III), y sea P_m el número de términos positivos que hay entre sus m primeros. Se tiene

$$P_m = pn + p_1, \quad (0 \leq p_1 \leq p < k),$$

en donde n representa el cociente entero, exacto o por defecto, de $m:k$. Análogamente, el número Q_m de términos negativos, $(P_m+Q_m=m)$, tiene por expresión

$$Q_m = qn + q_1, \quad (0 \leq q_1 \leq q < k).$$

Y, puesto que es $n \leqq m:k < n+1$, resulta que, permaneciendo fijo k, cuando $m \to \infty$, también $n \to \infty$, y recíprocamente; por consiguiente, es

$$\lim_{m \to \infty} \frac{P_m}{Q_m} = \lim_{n \to \infty} \frac{pn + p_1}{qn + q_1} = \frac{p}{q},$$

y según una conocida proposición de Cesaro [1], al existir este límite, ha de ser 1. Por tanto, si la serie (III) converge, se tiene: $p=q$.

Esta condición es también suficiente. Pues siendo $p=q$, en la serie oscilante

$$u_1+u_2+\ldots\ldots+u_k+u_{k+1}+u_{k+2}+\ldots\ldots+u_{2k}+\ldots\ldots \qquad \text{(IV)}$$

la suma, U_m, de sus m primeros términos está comprendida entre $+p$ y $-p$, cualquiera que sea m, $(-p \leqslant U_m \leqslant +p)$, y según un clásico criterio de Dirichlet [2], la serie (III) que resulta de multiplicar los términos de (IV) por sus correspondientes en (II), es convergente.

El teorema queda, pues, demostrado.

Ejemplo.—Entre las series del tipo (III) figuran algunas muy curiosas, para las cuales, la sucesión (I) es periódica. Prescindiendo de las series alternadas leibnizianas, y de algunas otras harto conocidas, citaremos, como ejemplo, la

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}-\frac{1}{13}+\ldots\ldots,$$

que se deduce de la armónica prescindiendo en ésta de los términos cuyo denominador es múltiplo de 7, conservando el signo + para aquellos cuyos denominadores, al dividirlos por 7 dan como restos 1, 2 y 4, y colocando el signo — a todos los demás términos. Esta serie es, pues, convergente. Más general: sea $\mathfrak{p}$ un número primo de la forma $4h+3$. Es convergente la serie $\sum\limits_{\lambda=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mathfrak{p}}\right)\frac{1}{\lambda}$, en la cual $\left(\frac{\lambda}{\mathfrak{p}}\right)$ es el símbolo introducido por Legendre, tal que es $\left(\frac{\lambda}{\mathfrak{p}}\right)=0$, cuando es $\lambda=\dot{\mathfrak{p}}$; $\left(\frac{\lambda}{\mathfrak{p}}\right)=+1$, cuando λ es resto cuadrático (mód. $\mathfrak{p}$); y $\left(\frac{\lambda}{\mathfrak{p}}\right)=-1$, cuando λ es no resto cuadrático (mod. $\mathfrak{p}$) [3].

(1) «Si una serie numérica con términos de signos variados y módulos no crecientes es convergente, pero no absolutamente, y si en ella existe un porcentaje para el número de términos positivos, éste es, necesariamente, el 50 por 100». E. Cesaro: *Sur une distribution de signes*. «Rend. Acc. Lincei». Cuarta serie, tomo IV, páginas 133-138. Roma, 1888. Este teorema ha sido generalizado por H. Rademacher en «Mathematische Zeitschrift», tomo 11, páginas 276-288. Berlin, 1921, creando los que él llamó «factores generadores de convergencia», que son, en general, números complejos.

(2) «Si una serie oscilante tiene finitos sus límites, superior e inferior, de oscilación, y se multiplican ordenadamente sus términos por los de una sucesión monótona que tiende a cero, la serie que resulta es convergente». (Este criterio puede verse en cualquier tratado de Series; por ejemplo, en la *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, de K. Knopp, página 324, tercera edición; Berlin, 1931.)

Que el recíproco no es cierto, lo prueba el Ejercicio número 374 de esta Revista. (Véase la página 83 de este cuaderno.)

(3) Se dice que λ es resto cuadrático (mód. $\mathfrak{p}$), cuando λ es congruente, según el módulo $\mathfrak{p}$, con el cuadrado de algún número natural no múltiplo de $\mathfrak{p}$. En caso contrario (siendo siempre $\lambda \neq \dot{\mathfrak{p}}$), λ se llama no resto cuadrático (mód. $\mathfrak{p}$). Así, para $\mathfrak{p}=7$, los únicos restos que puede dar un cuadrado perfecto no múltiplo de 7, al dividirle por 7 son el 1, el 2 y el 4. Luego, los restos cuadráticos (mód. 7), menores que 7, son 1, 2, 4; y los no restos 3, 5, 6.

Pudiera creerse que la presencia de términos nulos en la serie ocasiona alguna perturbación. Sin embargo, la demostración subsiste con sólo tener la precaución de omitir previamente los términos correspondientes en la sucesión (II).

Lo notable de estas series (y esto, naturalmente, no lo da nuestro teorema) es que son sumables. Se sabe, en efecto, desde la época de Dirichlet [1], que es

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mathfrak{p}}\right)\frac{1}{\lambda}=-\frac{\pi}{\mathfrak{p}\sqrt{\mathfrak{p}}}\sum_{\mu=1}^{\mathfrak{p}-1}\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)\mu.$$

Para el caso particular primeramente considerado ($\mathfrak{p}=7$), se tiene [2]

$$\overbrace{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}+\overbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}-\frac{1}{13}}+\ldots=\frac{\pi}{\sqrt{7}}.$$

---

(1) P. G. Lejeune Dirichlet, «Vorlesungen über Zahlentheorie», tercera edición, página 262 (Braunschweig, 1879). Las investigaciones de Dirichlet son mucho más amplias, pues no exigen (aun cuando imponen otras restricciones) que $\mathfrak{p}$ sea un número primo.

(2) Una sumación directa, interesantísima, de esta serie fué dada por J. W. L. Glaisher en su trabajo *A series for* $\pi:\sqrt{7}$, publicado en el «Messenger of Mathematics», tomo 31, página 50 (1901-1902). El método de Glaisher se reduce a lo siguiente: Representando por $F(l, r)$ el primer miembro de la igualdad

$$\frac{1}{l}+\frac{1}{l-r}+\frac{1}{l+r}+\frac{1}{l-2r}+\frac{1}{l+2r}+\ldots=\frac{\pi}{r}\operatorname{cotg}\left(\frac{l\pi}{r}\right),$$

y ordenando los sumandos, atendiendo al decrecimiento de sus módulos, se obtiene:

$$F(1,7)+F(2,7)-F(3,7)=$$

$$=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}-\frac{1}{13}+\ldots=$$

$$=\frac{\pi}{7}\left(\operatorname{cotg}\frac{\pi}{7}+\operatorname{cotg}\frac{2\pi}{7}-\operatorname{cotg}\frac{3\pi}{7}\right)=\frac{\pi}{7}\sqrt{7}=\frac{\pi}{\sqrt{7}}.$$