LA OBRA DE REY PASTOR EN ANALISIS MATEMATICO(*)

Alberto Dou
Universidad Complutense de Madrid

0. Entre las diversas actividades científicas que a lo largo de su vida ejerció Rey Pastor destaca evidentemente la de matemático. Dentro de la obra matemática, me parece que sobresale la que dedica al Análisis Matemático, aunque sus trabajos de Geometría en la segunda década del siglo son ciertamente originales, profundos y extensos. Rey Pastor ganó dos oposiciones a cátedras de Análisis Matemático, para Oviedo y para Madrid; ejerció toda su vida (exceptuando un período de excedencia) como catedrático de Análisis Matemático en la Universidad de Madrid. En sus años en Alemania se dedicó a la Geometría y también al estudio de las funciones analíticas y de la sumación de series. Publica estupendos textos de Análisis de una influencia incalculable. Y sobre todo, a partir de su entrada en la Academia en 1920 se dedica, dentro de las matemáticas, casi exclusivamente al Análisis especialmente en los temas de convergencia y sumación, y de la teoría de funciones analíticas.

En esta conferencia tengo que limitarme necesariamente a una corta selección, casi sólo una muestra, de la extensísima obra de Rey Pastor en Análisis Matemático. Expondré su trabajo de 1915, o sea un trabajo de su juventud, sobre la resolución del problema de Dirichlet (1). Luego me ocuparé de sus trabajos sobre convergencia y sumación: dos trabajos anteriores a 1930 (2.1), la gran memoria de 1931 (2.2) y su importante teorema publicado también en 1931 (elaborado después de la citada memoria) en los *Rendiconti del C.M. di Palermo* (2.3). Luego mencionaré algún otro artículo y

(*) Estas páginas quieren ser una exposición sucinta de las ideas que con alguna mayor extensión expuse en la conferencia.

trataré de su trabajo sobre singularidades de funciones analíticas de 1933 en la *Rev. Mat. Hisp. - Amer.* (3). Finalmente una conclusión (4).

1. Rey Pastor participa en el Congreso de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, que tuvo lugar en Valladolid en 1915, con una comunicación: *Resolución elemental del problema de Dirichlet para el círculo.*

El problema es, pues, el de hallar una función armónica *u* en el interior D de un círculo dado de radio R y que toma valores U también dados sobre la circunferencia D del contorno. O sea hallar *u* tal que

$$(*) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en} \quad D \\ u = U & \text{en} \quad \partial D. \end{cases}$$

El autor demuestra en primer lugar la fórmula de C.F. Gauss (1977-1855) o teorema del valor medio,

$$u_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(\theta) d\theta,$$

siendo $\underline{u_0}$ el valor de $\underline{u}$ en el centro del círculo, por consideraciones elementales.

A continuación calcula el valor u(C) de *u* en un punto cualquiera del círculo, reduciéndolo a la fórmula de Gauss, mediante una simple transformación definida por una función lineal de la variable compleja, que transforma el círculo en otro, el punto C en el centro del nuevo círculo y U en U'. Obtiene así muy fácilmente la fórmula de H.A. Schwarz (1843-1921):

$$u(C) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U'(\theta) \,.\, dX(\theta),$$

donde X es un ángulo que se define elementalmente teniendo en cuenta que la citada transformación es conforme.

De nuevo por consideraciones geométricas sintéticas elementales, calcula dX en coordenadas polares y obten la fórmula de S.D. Poisoon (1781-1840):

$$u\,(r,\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\phi)}\, U d\theta \qquad (*)$$

A partir de estos resultados, que demuestran la unicidad, no ofrece dificultad demostrar también la existencia mediante comprobación directa de

(*). El autor termina el artículo con unas consideraciones sobre el cálculo numérico de las soluciones.

Esta contribución, a pesar de que carece de la originalidad y profundidad de muchos de sus trabajos, es típica de Rey Pastor en varios aspectos. Es una nueva resolución de un problema fundamental y famoso, con un método breve, brillante y con técnicas elementales. Emplea consideraciones geométricas, que nunca abandonó, argumentadas con método sintético. E incluso, finalmente, muestra su preocupación por la aplicabilidad de las Matemáticas.

2. Rey Pastor dedica muchos de sus trabajos a los algoritmos de convergencia y sumación; quizás con la posible excepción de sus trabajos de geometría en la segunda década del siglo, son los más importantes de su vida por su originalidad y profundidad.

2.1. Ya en 1911 y en la Revista de la Sociedad Matemática Española, publica Rey Pastor un artículo "Sobre la sumación de Series". En el teorema primero deduce una fórmula que da la suma S_m de los m primeros términos, supuesto que se halle la función f tal que

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{1+f(n-1)}{f(n)} \quad (1)$$

Ello le permite sumar series en casos en los que los términos de la serie sean funciones racionales de n. El artículo no deja de ser ingenioso, aunque todo él resulta elemental y no exento de confusión; ya que si la serie es convergente f existe siempre y se tiene

$$f(n) = \frac{F(n)}{u_n} = \frac{S_{n-1}}{u_n}$$

En el Congreso Internacional de Matemáticas de 1928 en Bolonia, presenta nuestro autor un profundo e interesante artículo sobre series, en el que introduce las funciones semianalíticas. Merece citarse que ya en este artículo reivindica la definición euleriana de series: "Dicamus ergo seriei cuiusque infinitae *summam* esse expessionem finitam, ex cuius evolutione illa series nascatur". (Digamos, pues, que la suma de una serie infinita cualquiera es [el valor de] la expresión finita, de cuyo desarrollo aquella serie nazca)[1]. Moderniza esta definición así: "Suma de una serie Σu_n es el valor que toma en el punto x = 1 la función analítica cuyo desarrollo es $\Sigma u_n x^n$" [2]. En la memoria que comentamos en el número siguiente 2.2, precisa todavía más,

1. Euler, *Opera Omnia,* serie 1, vol. 10, p. 82.
2. *Atti* del Congreso Internacional (Bolonia, 1928), p. 336.

definiendo en el n. 10: "Llamaremos suma generalizada de una serie numérica u_n al límite a que tiende la rama de su función generatriz definida por la serie $\Sigma u_n t^n$, cuando t tiende radialmente a 1, partiendo del origen".

Observemos que esta comunicación al Congreso Internacional de Bolonia es el primer trabajo de un conjunto de unos treinta, dedicados a la investigación de algoritmos de convergencia y sumación. Este período puede considerarse que termina en 1936 y culmina en los trabajos de 1931 y algunos posteriores de 1933 y 1934.

2.2. Rey Pastor publica en Buenos Aires en 1931, la que sin duda es su obra más importante en Análisis Matemático: *Teoría de los algoritmos lineales de convergencia y de sumación.* Se trata de una memoria monográfica de exposición sistemática de una Teoría, en la que se coordinan y clarifican resultados previos de otros autores y en la que culminan numerosos resultados originales y profundos de su autor. Este trabajo es extensamente reseñado, no sin algunas observaciones, tanto por Raff en *Jahrbuch ueber die Forschritte der Mathematik,* como por Ullrich en el *Zentralblatt.* Algunas interesantes precisiones sobre este mismo tema pueden verse en la conferencia "Aplicaciones de los algoritmos lineales de convergencia y sumación (*Ren dic. S.M. Milano,* 7 (1933) 191-222) y en el artículo "Algunas relaciones entre los algoritmos correlativos de convergencia y sumación" (*RMHA,* 11 (1936), 67-70).

Más interesante e ilustrativo que entrar aquí en una exposición detallada en la memoria, es, me parece, reproducir el acertado y bien ponderado juicio de Babini, González Domínguez y Santaló (1): "En su monografía (1931-3) ensaya Rey Pastor una exposición de conjunto de la teoría de algoritmos lineales de convergencia y sumación. Su punto de partida es la definición euleriana de suma de una serie (con que tanto se ha encariñado) y definiciones análogas de límite generalizado para integrales, funciones y sucesiones. Establece Rey Pastor un cuerpo de teoremas donde se ponen en claro las propiedades del método de sumación derivado de esta definición y muestra cómo muchos resultados importantes se sitúan naturalmente, como casos particulares, dentro de este esquema (los métodos de Euler-Knopp y de Borel se prestan particularmente bien para ello, en virtud de su íntima conexión con la prolongación analítica). Hace también Rey Pastor un estudio detallado de los más importantes métodos de sumación; establece las relaciones de inclusión o equivalencia que los ligan, y agrega teoremas nuevos, y nuevos métodos de sumación (por ejemplo, el que él llama de "bimedios").

Rey Pastor ha meditado mucho sobre el tema, y su libro se recomienda por la elegancia y concisión de las demostraciones, tan características de su estilo.

La obra que condensaba la labor de los años de más fecunda actividad matemática de Don Julio no tuvo la resonancia que quizás él esperaba. Creemos adivinar que Don Julio sufrió algo así como un desencanto, y su interés por las series divergentes se desvaneció gradualmente.

No resulta difícil descubrir el porqué de tal falta de resonancia. En efecto, en el momento en que Don Julio vuelca todo su esfuerzo en la teoría de las series divergentes, éstas ya habían pasado de moda y hacía tiempo que habían dejado de preocupar a las más fuertes cabezas matemáticas (el libro de Borel data de principios de siglo; la memoria de Toeplitz, de 1911). Hacia 1925 el Análisis había cambiado de rumbo: era el momento del triunfo del "presque partout" en toda la línea, incluso en el ámbito de las funciones analíticas (teorema de unicidad de los hermanos Riesz, y de Lusin-Privalov, clases H^p de Hardy, funciones conjugadas de M. Riesz...). Bien es cierto que los métodos de sumación seguían (y siguen) teniendo vigencia de primer orden en el campo de las series de Fourier. Pero es precisamente este dominio, el que D. Julio nunca abordó, y las series de Fourier sólo de pasada se citan en su libro".

2.3. Vamos a concluir esta reseña de trabajos de nuestro autor sobre series con la exposición de un "elegante teorema", que según Babini, González Domínguez y Santaló (l.c.), "bien merece el nombre de Teorema de Rey Pastor". Se publica en los *Rendiconti di Palermo*[3], también en 1931.

Rey Pastor, en la memoria reseñada en 2.2. y juntamente con los métodos de convergencia y sumación de Vallée-Poussin y Perron, introduce su propio método, tomando como factores de sumación

$$\mu_r (t) = t(t-1) \dots (t-r+1) \cdot t^{-r} \equiv t^{(r}t^{-r},$$

de modo que, para una serie dada Σu_n, el algoritmo de sumación de Rey Pastor arroja:

$$\text{(RP)} \quad \sum_{r=0}^{\infty} u_r \equiv \lim_{t \to \infty} \sum_{r=0}^{t} t^{(n}t^{-n}u_r$$

Nuestro autor justifica este algoritmo demostrando que, cuando la serie potencial

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n Z^n$$

converge, también converge el límite

$$\text{(RP)} \quad \sum_{r=0}^{\infty} u_r Z^r = \lim_{t \to \infty} \{ \sum_{r=0}^{t} u_r \quad t^{(r} \left(\frac{Z}{t}\right)^r \},$$

3. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo,* 55 (1931), 450-455.

y converge hacia el mismo valor que la serie potencial. Además, demuestra que el método de sumación de series numéricas (RP) es más potente que el de Euler-Knopp y no es comparable con el de Borel.

El teorema de Rey Pastor que hemos mencionado se enuncia: "Aplicando el algoritmo de Rey Pastor a la serie geométrica ΣZ^r, se tiene que (RP) ΣZ^r converge en el dominio interior de la rama exterior de la curva

$$| Ze^{(1/Z)} | = e,$$

y converge uniformemente en todo cerrado contenido en dicho dominio".

Obsérvese que este dominio de convergencia es bastante mayor (unas seis veces) que el círculo unidad, al que naturalmente contiene; el único punto común de ambos contornos es naturalmente $Z = 1$.

3. Los trabajos de Geometría de la segunda década y los de convergencia y sumación de los años 1928-1936 no agotan la actividad investigadora de Rey Pastor. Ya en 1926 dio a conocer su curso autografiado de lecciones sobre *Series e integrales D,* o sea del tipo

$$\int_0^\infty e^{-\lambda(t).Z} \cdot f(t)\, dt,$$

acerca de las cuales publicó luego varios artículos. También después de 1936 publicó todavía varios trabajos de investigación en variados campos del Análisis, y especialmente sobre la teoría de las funciones analíticas. Como muestra he elegido los dos trabajos que menciono a continuación.

El primero se titula "Esquema de una teoría geométrica de las singularidades de las funciones analíticas"[4] que publica en 1933. Es un tema relacionado con el estudio de las series divergentes. En este artículo Rey Pastor aborda el estudio sistemático de la situación de los puntos singulares de una función analítica $f(Z) = \Sigma a_n Z^{-n-1}$, que sea regular en el infinito. Lo hace estudiando las propiedades de la indicatriz de crecimiento $h(\omega)$ de una función entera $\phi(x) = \Sigma (a_n/n!)x^n$, siendo

$$h(\omega) = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\log | \phi(t) |}{t}$$

El tema del artículo es de enorme interés y su contenido es muy rico, aunque a veces resulta difícil establecer la prioridad de los diversos autores mencionados.

4. En *Boletín del Seminario Matemático Argentino,* 3 (1932-33) 157-162; y también en *Rev. Mat. Hisp.-Amer.* 8 (1933) 225-230. Hay una segunda parte de este artículo en *Bol. Sem. Math. Arg.*, 4 (1936), pero no he podido consultarlo.

El segundo trabajo se titula "Espacios D_0",[5] y lo publica en 1940. Se trata de espacios abstractos estructurados por una métrica asimétrica. Más concretamente, existe una distancia entre dos puntos, $d(x,y)$, tal que $d(x,y) \geq 0$, $d(x,x) = 0$, $d(x,z) < d(x,y) + d(y,z)$; pero puede ser que $d(y,x) \neq d(x,y)$ y que $d(x,y) = 0$ sin que sea $x = y$. El autor señala que tales espacios surgen en el estudio de los espacios cuyos puntos sean subconjuntos de un espacio compacto. También indica que su trabajo guarda relación con otros de Wilson y Kakutani. Muestra también este trabajo el polifacetismo de Rey Pastor dentro de las Matemáticas.

4. Los seis o siete trabajos científicos de Rey Pastor que hemos reseñado constituyen, como ya hemos indicado, una pequeña muestra. El número del total de sus publicaciones científicas sobre matemáticas en Argentina, en España o en revistas extranjeras de prestigio es muy elevado y desde luego muy superior al de cualquier otro matemático español contemporáneo, anterior o coetáneo suyo. Aunque algunas de estas publicaciones tienen el carácter de una observación o de un complemento o constituyen meramente una nueva demostración (más corta y elegante), la calidad del conjunto de sus trabajos científicos ciertamente no desmerece respecto de la calidad de las publicaciones de la comunidad matemática internacional. Ya hemos mencionado la extraordinaria calidad de sus textos de Análisis Matemático y debemos añadir todavía la fecundísima labor investigadora llevada a cabo por Rey Pastor juntamente con sus discípulos en el Laboratorio-Seminario Matemático en Madrid y en el Seminario Matemático argentino. Consiguientemente la figura de Rey Pastor emerge con extraordinaria relevancia en la historia de la matemática española contemporánea, hasta tal punto que esta historia puede dividirse con mucho sentido en antes y después de Rey Pastor. Posteriores a Rey Pastor y dentro del Análisis Matemático y en España ha habido y hay otras figuras que por su dedicación y la calidad de su labor investigadora son de la misma categoría o incluso superior a la de Rey Pastor. Citemos entre los que han muerto ya a Ricardo San Juan y Ferran Suñer Balaguer.

El paso por Alemania dejó profunda huella en el bagaje científico de Rey Pastor. Estudió Geometría, funciones de variable compleja y convergencia de algoritmos infinitos. Su obra geométrica de la segunda década de este siglo fue original, profunda y extensa. A pesar de ello, apenas tuvo resonancia; el tema había entrado en vía muerta. El mismo nos describe su inmenso dolor en su discurso de entrada en la Academia de Ciencias (14-11-1920). Pero Rey Pastor no cejó, sino que con nuevo ímpetu puso toda su alma en la empresa de la renovación matemática en España y en Argentina. A partir de fines de la tercera década de este siglo y durante un par de lustros se concentra sobre todo en el estudio de los algoritmos lineales de convergencia y de sumación. Obtiene numerosos resultados y construye una Teoría original, profunda, sistemática y elegante. Nuevamente, su obra no es

5. En *Revista de la Universidad de Tucumán*. Serie A, 1 (1940) 105-122.

comentada ni encuentra un eco internacional que responda al valor de sus investigaciones. La época de interés por la sumación de series divergentes había pasado ya; o el interés se transfería al estudio de las series trigonométricas, las cuales habían sido casi totalmente preteridas por Rey Pastor.

¿Podemos dar alguna razón del por qué de ambos fracasos, en Geometría y en Análisis? Rey Pastor viajó, asistió a congresos internacionales presentando comunicaciones, estaba informado y de vez en cuando publicaba artículos agudos y elegantes sobre temas nuevos. Con todo, me parece que a partir ya de 1920, Rey Pastor empieza a vivir una vida de progresivo aislamiento de los centros en los que se crean las nuevas corrientes matemáticas. España y Argentina son para él campos de fecunda labor, pero no son lo suficientemente importantes o eficientes para producir una investigación original y prolongada que traspase las fronteras. Podríamos quizás decir que no habían alcanzado todavía una masa crítica. Rey Pastor sufrió probablemente con hondo dolor las consecuencias de esta situación.

BIBLIOGRAFIA

1. *Revista de la Unión Matemática Argentina,* 21 (1962) 1-56. Es un homenaje de la U.M.A. a su fundador Julio Rey Pastor. Contiene una bibliografía de las obras de Rey Pastor.
2. A. DOU: "Julio Rey Pastor". *Razón y Fe,* 167 (1963), 133-146 y 273-282. Contiene una bibliografía acerca de J. Rey Pastor.
3. S. RIOS; L.A. SANTALO y M. BALANZAT: *Julio Rey Pastor (Matemático),* Editado por el Instituto de España, 1979; 128+XII páginas con fotografías y bibliografía de Rey Pastor y numerosos complementos documentales.

Deben consultarse además los trabajos originales de Rey Pastor (algunos no fáciles de encontrar aquí en Madrid) y las reseñas de los mismos en *Jahrbuch über die Forschritte der Mathematik,* en *Zentralblatt für Mathematik* y en *Mathematical Reviews.*