

# El uso de Geogebra como herramienta para el aprendizaje de las medidas de dispersión

*Del-Pino, Jesús*

Universidad de Jaén.

## Resumen

En este trabajo se presenta un pequeño resumen de las herramientas virtuales y software que existe en el mercado para facilitar la comprensión de conceptos estadísticos teóricos y/o abstractos, como puede ser el de la dispersión y las medidas de la dispersión. Haciendo hincapié en las posibilidades de GeoGebra como herramienta estadística y probabilística para la educación secundaria debido a que es una herramienta que está en auge por la implantación de las pizarras digitales interactivas (PDI) de las que podemos sacar un gran partido, especialmente en la enseñanza de un concepto como la dispersión y sus medidas.

**Palabras clave:** Dispersión, TIC, GeoGebra

## 1. Introducción

En los últimos años la administración ha realizado un esfuerzo por implantar las denominadas como “Escuelas 2.0” en los centros de educación secundaria. El programa consiste en ir sustituyendo progresivamente las tradicionales pizarras por pizarras digitales interactivas (PDI) y dotar a los alumnos de ordenadores portátiles para su uso como material escolar.

Actualmente podemos emplear la potencia de las herramientas TIC con todas sus ventajas, como la posibilidad de manipulación o de interacción de los alumnos con ellas para facilitar el aprendizaje de conceptos estadísticos. Un ejemplo claro del uso de las TIC podemos verlo en su aplicación en el concepto de la dispersión, que habitualmente muestra dificultades en la interpretación y comprensión por parte del alumnado.

Dentro del espectro de herramientas existentes para este aprendizaje, en esta exposición deseamos destacar GeoGebra por varios motivos:

1. Es software gratuito, libre y de código abierto. No les cuesta dinero a los centros educativos y pueden modificar elementos para tener funcionalidades que no se presentan en la versión estándar.
2. Es multiplataforma. Funciona tanto si emplean una versión de Linux propio de la Comunidad Autónoma como distintas versiones de Microsoft Windows.
3. Es fácil de usar. Además existen numerosas formaciones, algunas de ellas gratuitas, impulsadas por colectivos de profesores y universidades.
4. Es sencillo y a la vez potente. Posee una hoja de cálculo y sus numerosas vistas permiten alternar el uso de la aritmética, representaciones algebraicas, cálculo simbólico y cálculo estadístico y probabilístico.

## 2. Antecedentes.

La enseñanza de la estadística y en concreto la del concepto de dispersión han estado normalmente marginados por varios motivos, uno de ellos y quizá el más relevante en nuestro país es similar al que exponía Shaughnessy (1997) y es el énfasis que se da a los elementos del currículo cuando se estudia la estadística marginando la dispersión. Normalmente la estadística es el último bloque de contenidos del currículo (el que no se

imparte si el tiempo no da para más) y en este bloque la dispersión suele hacer una aparición pobre. De hecho existe un chascarrillo entre los profesores que dice "los profesores de Matemáticas dejamos cada año la Geometría como última unidad del curso, y después viene la Estadística." Por tanto, una posible solución para que el bloque de estadística sea más atractivo y más ágil es la introducción de las TIC.

Nickerson (1995) analizó el impacto del uso de software en educación y expuso algunos motivos para el empleo de software:

1. Ver el aprendizaje como un proceso constructivo en el que la tarea es proporcionar una guía que facilite la exploración y el descubrimiento.
2. Utilizar simulaciones para llamar la atención de los estudiantes a los aspectos de una situación o problema que fácilmente pueden pasar desapercibidos o no observados en condiciones normales.
3. Proporcionar un ambiente de apoyo que es rico en recursos, ayudas a la exploración, crea una atmósfera en la que las ideas se pueden expresar libremente, y proporciona un estímulo cuando los estudiantes hacen un esfuerzo por comprender. (Nickerson, 1995 citado en Delmas, Garfield y Chance, 1999, p.2)

En la misma obra Snir, Smith y Grosslight (1995) nos indican que "*ello (el uso de software) permite a los estudiantes percibir fenómenos que no pueden ser observados bajo condiciones normales (e.g., conceptos teóricos y abstractos)*" (Snir, Smith y Grosslight, 1995, citado por Delmas, Garfield y Chance, 1999, p.3)

La misma opinión comparte Blejec (2003) sobre el empleo del software y simulaciones por ordenador para la comprensión de conceptos teóricos y/o abstractos que de la forma tradicional presentan más dificultades a los alumnos,

Estas simulaciones pueden ayudar a enseñar estadística en general y particularmente conceptos abstractos o difíciles y teoremas. Usando simulaciones combinadas con visualizaciones en el ordenador, los conceptos y teoremas pueden ser efectivamente demostrados incluso a los estudiantes con escasas habilidades matemáticas o falta de interés, y en ocasiones puede servir como sustituto de la demostración matemática rigurosa. (Blejec, 2003, p. 2)

Blejec emplea herramientas online que cada día están más presentes, como IMS, Moodle, redes sociales o más específicas como RVLS (Rice Virtual Lab in Statistics, <http://onlinestatbook.com/rvls.html>) y se muestra un férreo defensor de la enseñanza con software y herramientas virtuales "*el uso de simulaciones de ordenador en la enseñanza estadística demostró ser un medio muy útil para la explicación de conceptos estadísticos difíciles.*" (Blejec, 2003, p. 3). Pero probablemente la cita que mejor demuestra que, en efecto, las TIC son hoy una herramienta no sólo útil sino imprescindible es "*es duro imaginar enseñar estadística hoy sin emplear de alguna forma la tecnología*" (Chance, Ben-Zvi, Garfield y Medina, 2007, p. 1)

Otros autores se unen a la opinión de que el uso de las TIC como herramienta mejora el aprendizaje de conceptos estadísticos difíciles (Kalsbeek, 1996; Hesterberg, 1998; Garfield y Ben-Zvi, 2008; Lane y Tang, 2000, Mills, 2003; Mills, 2005; Erikson, 2006) e incluso la guía sobre evaluación e instrucción en educación estadística (GAISE) recomienda el uso de la tecnología para una mejor comprensión de conceptos estadísticos. (Franklin y Garfield, 2006)

Sin embargo, la realidad en las aulas es bien distinta y se prescinde de la tecnología, por falta de formación o de conocimiento de cómo las TIC pueden ayudarnos a enseñar conceptos estadísticos complejos, por eso en este trabajo queremos mostrar brevemente,

cómo un software al alcance de todos como GeoGebra nos puede ayudar y dar algunas referencias sobre material ya elaborado.

### 3. Algunos programas y herramientas virtuales existentes. Ventajas y desventajas.

Algunos de los autores que he indicado anteriormente utilizaron herramientas virtuales o software como los que a continuación vamos a describir para realizar sus investigaciones didácticas, por supuesto no todos tienen las mismas funcionalidades ni son aconsejables en los mismos niveles. Por este motivo vamos a hacer un breve repaso de algunas de estas herramientas indicando los problemas que encontramos para su uso en educación secundaria.

- S-Plus/R/SPSS(<http://www.statsci.org/splus.html> <http://www.r-project.org/> <http://www-01.ibm.com/software/es/analytics/spss/products/statistics/>): Estos tres programas son muy similares. Todos son software de análisis estadístico, los dos primeros gratuitos y el último de pago, al principio tanto S, como R eran más difíciles de usar debido a que usaban un lenguaje de programación para trabajar, sin embargo hoy existen GUIs o interfaces como R-commander o PSPP que hacen más amigable este software. Probablemente son los más potentes en cuanto a cálculo estadístico se refiere, pero precisamente la dificultad de su manejo los hace inaccesibles para secundaria, aunque se podrían introducir en un curso posterior como 2º de Bachillerato o 1º de Grado.
- Mathematica (<http://www.wolfram.com/mathematica/>) y Matlab (<http://www.mathworks.es/>) son dos aplicaciones de computación numérica de pago, que cuestan de 120€ mínimos para el Mathematica a 6000€ mínimos para Matlab, los que los hace económicamente inviables para su uso en educación secundaria.
- Excel (<http://www.microsoft.com/office/preview/es/excel-2013-preview>) y Calc (<http://es.libreoffice.org/caracteristicas/calc/>): Son dos hojas de cálculo muy similares, la primera es de pago y pertenece a la suite Microsoft Office, la segunda es libre y pertenece a la suite Libreoffice. Son muy útiles a la hora de gestionar datos y obtener datos, pero no permiten crear construcciones.
- WIRIS (<http://www.wiris.com/es/>): Wiris es un software ideado para PDI por la empresa Maths for more y que tiene gran presencia en muchos centros educativos, además cuenta con la ventaja de que existe gran cantidad de material diseñado y compartido. Sin embargo la calculadora online trabaja sobre internet, lo que determinados momentos es incómodo por la lentitud y los cortes que suele haber en los centros y por otro lado si deseas contar con el software de escritorio completo tendrás que pagar en torno a los 600€
- RVLS (<http://onlinestatbook.com/rvls.html>): El Rice Virtual Lab in Statistic fue desarrollado por David Lane en el año 2000. Es un conjunto de applets para trabajar conceptos estadísticos. Son descargables y modificables siempre que conozcas el lenguaje de programación JAVA ya que también puedes descargar el código fuente. Por señalar algunos inconvenientes toda la página está en inglés, con lo que algunos profesores pueden ser reticentes a su uso, y su modificación y/o creación implica conocer programación en JAVA. (Lane y Peres, 2006)
- Tinkerplots(<http://www.keycurriculum.com/products/tinkerplots/>): Es una herramienta de exploración dinámica de datos diseñada por KCP technologies y la Universidad de Massachusetts en 1998 y utilizada por autores como Hammerman y Rubin (2004) o Watson, Fitzallen, Wilson y Creed (2008.) Muy útil a todos los niveles el inconveniente que presenta es que es de pago con precios que van desde los 10\$ hasta los 50\$ por

licencia para el centro en licencias de por vida, mientras que para los alumnos tiene un coste de 8\$ anuales.

- Minitools (<http://www.fi.uu.nl/wisweb/>): Es un lote de tres applets ideadas por Paul Cobb, desarrolladas por Bakker y utilizadas por Gravemeijer en su tesis doctoral. Algunos resultados de su empleo los podemos leer en Bakker y Gravemeijer (2004.) Como principal problema los applets no son modificables y si quisiera notar que en mi última visita (15/02/2013) la minitool nº1 no estaba disponible.
- I<sup>3</sup> (<http://www.rossmanchance.com/applets/>): Es una colección de applets diseñados por Rossman y Chance (2004) para cuatro áreas de la estadística: el análisis de datos, la distribución de muestreo, simulación de distribuciones aleatorias y probabilidad e inferencia. Los inconvenientes que presentan son el lenguaje inglés y el carecer del código fuente para modificarlos (y quizá aun teniéndolo la dificultad de su modificación según el lenguaje de programación).

En este apartado hemos querido hacer un pequeño resumen de algunas de las herramientas virtuales y software existentes y que se podrían utilizar para hacer más comprensible la estadística. Todos son muy útiles, pero a juicio de los autores siempre tienen algún pero para su introducción en las aulas de secundaria de España.

#### 4. GeoGebra como herramienta estadística y probabilística.

Desde la versión 3.2 GeoGebra incorpora hoja una hoja de cálculo, con las mismas posibilidades que las vistas en el apartado anterior (Excel/Calc), comandos estadísticos y gráficos y la vista de probabilidades. (GeoGebra, 2013a)

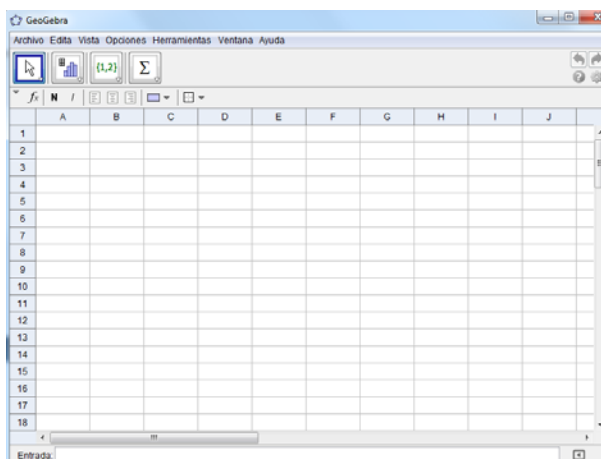


Figura 1. Hoja de cálculo en GeoGebra.

En la vista de la hoja de cálculo, no sólo podemos realizar las operaciones habituales de un software similar, sino que viene con 3 botones de cálculos estadísticos con diferentes herramientas que facilitan el cálculo.

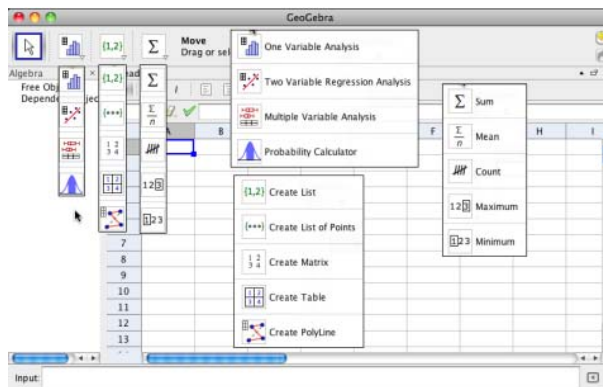


Figura 2. Herramientas estadísticas en la vista hoja de cálculo. (GeoGebra, 2013b)

Además GeoGebra cuenta con una vista probabilística dónde podemos manejar las distribuciones más frecuentes, así como calcular sus estadísticos. En la misma vista pero en otra pestaña podemos realizar diferentes test de bondad y ajuste. Como podemos observar GeoGebra cuenta con una serie de herramientas que lo convierten en un software ideal para enseñar estadística como podemos leer en Romano, Martín y Tenorio (2012) que lo emplearon en educación superior con este fin.

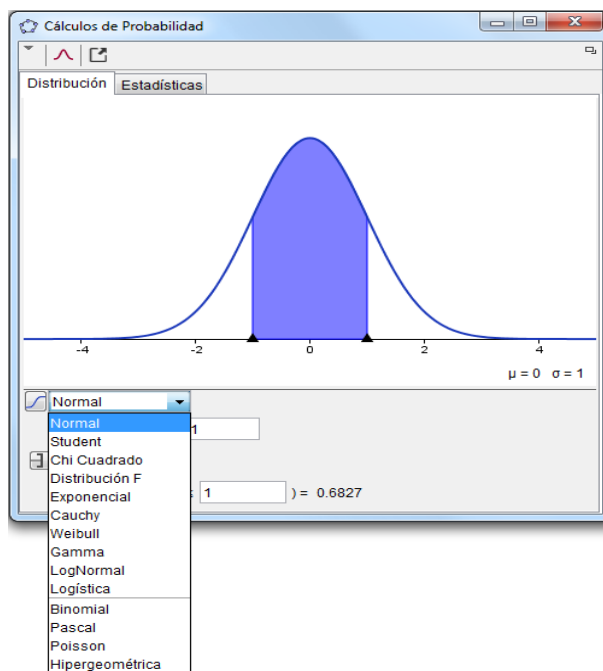


Figura 3. Vista de cálculo de probabilidades.

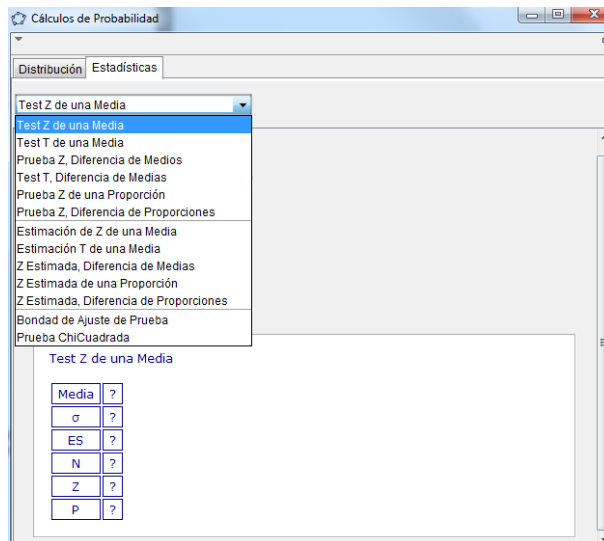


Figura 4. Realización de test.

## 5. Applets sobre las medidas de dispersión en GeoGebra

GeoGebra permite la construcción de applets que se pueden subir y compartir en su propia red GeoGebraTube (<http://geogebraTube.org/>) lo que permite globalizar el conocimiento, no sólo nos permite descargarlos, sino que además podemos modificarlos fácilmente para adaptarlos a nuestras necesidades, también nos permite crear applets online para utilizar en sistemas CMS como Moodle. En GeoGebraTube podemos encontrar applets ya diseñados para ayudar a entender algunas medidas de dispersión como el siguiente, en el que se explica cómo se construye un diagrama de caja: (<http://www.geogebraTube.org/student/m18352>)

**Find center, shape and spread.**

Each student in Mr. Lamb's class measured a pencil. The data set below shows the pencil lengths in centimeters (cm).

What is the expected length of any given pencil?  
Describe the shape, center, and spread of the data.

Enter the data in the chart. Pencil lengths (c.m.)	
17.8	14
19	14.3
16.7	15.1
16.5	17.3
16.1	15.6
15.6	16.1
10.2	16.2
15.7	16.2
17.9	18.6
15.7	16

- Order the data from least to greatest.
- Calculate the interquartile range (IQR).
- Multiply 1.5 times IQR.
- Determine if there are any outliers at the lower end of the data.
- Determine if there are any outliers at the upper end of the data.
- List all the outliers.
- Calculate a measure of center. This will give us an approximate expected length of any given pencil, based on Mr. Lamb's data.
- Describe the shape, center, and spread in the context of the problem.

Figura 5. Ejercicio de GeoGebraTube.

Podemos encontrar otros similares en <http://www.geogebraTube.org/student/m14006> <http://www.geogebraTube.org/student/m14005>, aunque aparecen en inglés, descargándolos podemos modificarlos y traducirlos.

## 6. Conclusiones

Siguiendo la línea del Real Decreto 1631/2006 en el que se fijan las competencias y una de ellas (la cuarta) es el tratamiento de la información y competencia digital en este artículo hemos querido poner de manifiesto no sólo lo útil que puede ser GeoGebra para mostrar algunas medidas de dispersión sino también hemos traído un elenco de software existente para este fin, este decreto además otorga un papel relevante a la estadística aunque no siempre los profesores se lo dan

Debido a su presencia en los medios de comunicación y el uso que de ella hacen las diferentes materias, la estadística tiene en la actualidad una gran importancia y su estudio ha de capacitar a los estudiantes para analizar de forma crítica las presentaciones falaces, interpretaciones sesgadas y abusos que a veces contiene la información de naturaleza estadística. (M.E.C., 2007, p. 751)

Así pues, las TIC y en concreto GeoGebra nos permiten conjugar a la perfección ambas directrices y puede ser una herramienta perfecta para la creación de futuros experimentos de enseñanza.

## Referencias

- Bakker, A. y Gravemeijer, K. (2004). Learning to reason about distribution. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 147–168). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Blejec, A. (2003). Teaching statistics by using simulations on the Internet. *IASE Satellite Conference on Statistics*, Berlin, Germany.
- Chance, B., Ben-Zvi, D., Garfield, J. y Medina, E. (2007). The role of technology in improving student learning of statistics. *Technology Innovations in Statistics Education Journal*, 1.
- DelMas, R., Garfield, J. y Chance, B. (1999). A model of classroom research in action: developing simulation Activities to improve students' statistical reasoning. *Journal of Statistics Education*, 7, 1-12.
- Erickson, T. (2006). Using simulation to learn about inference. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*, Voorburg, The Netherlands: International Statistics Institute
- Franklin, C. y Garfield, J. (2006). The GAISE (Guidelines for assessment and instruction in statistics education) project: Developing statistics education guidelines for pre K-12 and college courses. En G. Burrill (Ed.), *2006 NCTM Yearbook: Thinking and reasoning with data and chance*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2008), *developing students' statistical reasoning: connecting research and teaching practice*, Kluwer Academic Publishers.
- GeoGebra. (2013a). *Página web de GeoGebra*. Recuperado el 18 de febrero 2013 de, <http://www.geogebra.org/cms/>
- GeoGebra (2013b). *Revisión de las utilidades estadísticas de GeoGebra en la versión 4.0*. Recuperado el 18 de febrero de 2013 de, [http://nrocnetwork.org/sites/default/files/resources/SpreadsheetStatistics\\_GeoGebra4.0rc.pdf](http://nrocnetwork.org/sites/default/files/resources/SpreadsheetStatistics_GeoGebra4.0rc.pdf)
- Hammerman, J.K. y Rubin, A. (2004). Strategies for managing statistical complexity with new software tools. *Statistics Education Research Journal*, 3 (2), 17-41.
- Hesterberg, T.C. (1998). Simulation and bootstrapping for teaching statistics. *American Statistical Association Proceedings of the Section on Statistical Education*, 44-52.

- Hodgson, T. y Burke, M. (2001). on simulation and the teaching of statistics. *Teaching Statistics*, 22, 91-96.
- Kalsbeek, W.D. (1996). The computer program called sample: a teaching tool to demonstrate some basic concepts of sampling (version 1.01). *American Statistical Association Proceedings of the Section on Statistical Education*, 103-8.
- Lane, D. y Peres, C. (2006), "Interactive simulations in the teaching of statistics: promise and pitfalls," En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*, Voorburg, The Netherlands: International Statistics Institute.
- Lane, D. y Tang, Z. (2000). Effectiveness of simulation training on transfer of statistical concepts. *Journal of Educational Computing Research*, 22, 383-396.
- M.E.C. (2007). Real decreto por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la educación secundaria obligatoria. *Boletín Oficial del Estado*, 5 de enero de 2007. RD 1631/2006.
- Mills, J. (2003). A theoretical framework for teaching statistics. *Teaching Statistics*, 25, 56- 58.
- Mills, J. (2005). Learning abstract statistics concepts using simulation.. *Educational Research Quarterly*, 28, 18-33.
- Nickerson, R. S. (1995). Can technology help teach for understanding. In eds. D. N. Perkins, J. L. Schwartz, M. M. West, and M. S. Wiske, *Software goes to school: teaching for understanding with new technologies*, New York: Oxford University Press.
- Romano, I., Martín, A.M. y Tenorio, A.F. (2012). Teaching statistics using GeoGebra. *Proceedings of EDULEARN12 Conference, 4th International Conference on Education and New Learning Technologies*, pp. 1307-1314.
- Rossman, A. y Chance, B. (2004). The Rossmann/Chance Applet Collection.
- Shaughnessy, J. M. (1997). Missed opportunities on the teaching and learning of data and chance. In J. Garfield and J. Truran (Eds.), *Research Papers on Stochastics Education* (pp. 129-145).
- Snir, J., Smith, C. y Grosslight, L. (1995). Conceptually enhanced simulations: a computer tool for science teaching. in eds. D. N. Perkins, J. L. Schwartz, M. M. West, and M. S. Wiske, *Software goes to school: teaching for understanding with new technologies*, New York: Oxford University Press.
- Watson, J.M., Fitzallen, N.E., Wilson, K. y Creed, J.F., (2008) The representational value of hats, *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14, (1), 4-10.