LA MATEMÁTICA DE LEIBNIZ, UN CASO ESPECIAL[1]

Mary Sol de Mora
Universidad del País Vasco (UPV/EHU)

Resumen

Los escritos matemáticos publicados por Leibniz durante su vida son muy pocos: algunos artículos en revistas, como el *Journal des Sçavans,* las *Acta Eruditorum* (fundadas por él mismo), las *Nouvelles de la République des Lettres,* el *Journal de Trévoux,* las *Philosophical Transactions,* etc.; algún libro como el *De Arte Combinatoria*, redactado para acompañar su tesis doctoral, y los resúmenes o explicaciones enviados con su correspondencia. Póstumamente, y después de un cierto periodo de tiempo (hasta un par de siglos), empezaron a aparecer las ediciones oficiales de Dutens, Foucher, Gerhardt, Couturat y otros, y sobre todo la edición oficial de la Academia de las Ciencias de Berlín; pero la Serie (*Reihe*) VII de la edición leibniziana, que comprenderá los manuscritos matemáticos, tendrá que consistir en unos treinta volúmenes. Seis han aparecido hasta ahora o se pueden descargar por Internet. El volumen 5 trata de la Matemática Infinitesimal entre 1674 y 1676. El volumen 6, titulado *Arithmetische Kreisquadratur*, cubre el periodo 1673-1676. Cada volumen tiene alrededor de 800 páginas. Por lo tanto, el total llegará, si nada lo interrumpe, a unas 24 000 páginas. Y ello sin contar la correspondencia matemática, que constituye la Serie III, de la cual se han publicado siete volúmenes, el último de los cuales llega a 1698, y que por lo tanto está mucho más avanzada.

Abstract

Leibniz's mathematical published writings during his life are very few: some articles in journals such as the *Journal des Sçavans,* the *Acta Eruditorum* (which he contrived to fund), the *Nouvelles de la République des Lettres*, the *Journal de Trévoux*, the *Philosophical Transactions*, etc.; a book like *De Arte Combinatoria*, written to accompany his doctoral thesis, and summaries and explanations sent in his correspondence. Posthumously, and after a certain period of time (up to a couple of centuries), the official editions began to appear: Dutens', Foucher's, Gerhardt's, Couturat's and others, especially the edition of the Academy of Sciences of Berlin; but the series (*Reihe*) VII of Leibniz edition, devoted to the mathematical manuscripts, should consist of thirty volumes. Six have appeared so far or can be downloaded online. Volume 5, on Infinitesimal Mathematics, covers from 1674 to 1676.

Volume 6, entitled *Arithmetische Kreisquadratur,* includes the period 1673-1676. Each volume has about 800 pages. Therefore, the total will be, if nothing interrupts it, about 24000 pages long. This does not include the mathematical correspondence edited in the third Series, which is much more advanced –seven volumes have already been published, the last of it reaching 1698.

Palabras clave: Geometría, *Analysis Situs*, Cuadraturas, Cálculo, Combinatoria, Determinantes, Probabilidad y Juegos de Azar, Seguros y Estadística.

Keywords: Geometry, *Analysis Situs*, Quadratures, Calculus, Combinatory, Determinants, Probability and Gaming, Insurance and Statistical Analysis.

Recibido el 20 de noviembre de 2014 – Aceptado el 16 de febrero de 2015

Los escritos matemáticos editados por Leibniz durante su vida son muy pocos: algunos artículos en revistas, como el *Journal des Sçavans,* las *Acta Eruditorum* (fundadas por él mismo), las *Nouvelles de la République des Lettres,* el *Journal de Trévoux,* las *Philosophical Transactions,* etc.; algún libro como el *De Arte Combinatoria*, redactado para acompañar su tesis doctoral, y los resúmenes o explicaciones enviados en su correspondencia para aquellos que podían entenderlos. Póstumamente, y después de un cierto periodo de tiempo (hasta un par de siglos), empezaron a aparecer las ediciones oficiales de Dutens, Foucher, Gerhardt, Couturat y otros, y sobre todo la edición oficial de la Academia de las Ciencias de Berlín. Aparte de los manuscritos, también la correspondencia revela muchos aspectos de sus ideas, pero siempre de manera breve, y deja sin mostrar desarrollos mucho más intensos, como los que tratan acerca de los Determinantes o del Análisis Situs.

Lo primero que nos viene a la mente es preguntarnos cómo es posible que un Doctor en Derecho, interesado por la política de su tiempo y consejero de los poderosos desde su primera juventud, llegara a poseer unos conocimientos matemáticos que le convirtieron en uno de los creadores más importantes de la historia de la matemática occidental. Es uno de los enigmas de una época que permitía que existieran "aficionados" de la categoría de un Pascal, o de un Fermat, o de un Descartes, todos ellos algo mayores que Leibniz (más cercanos por tanto al humanista renacentista), pero interesados como él en muy variados temas, ya fuera en la religión y la salvación de su alma, como Pascal; en la política francesa como jurista, consejero en el Parlamento de Toulouse y amigo de científicos, como Fermat ("el príncipe de los aficionados"); o en un sistema filosófico blindado, como Descartes.

La formación de Leibniz no fue desde luego la de un niño corriente de su época, pues se centró sobre todo en la lectura, y de hecho heredó la magnífica biblioteca privada de su padre, profesor de filosofía moral en la Universidad de Leipzig, que le idolatraba pero que falleció cuando él tenía 6 años. El latín fue durante muchos años su segunda lengua, junto con el alemán (al que más tarde intentaría promover en la creación de Academias de las Ciencias como la de Berlín, en sustitución del latín), y años después dominaría también el francés. Pero el latín lo adquiere por propia iniciativa, a partir de los 8 años, para poder leer a los clásicos. El griego lo aprenderá en la escuela, pero no llegará a un conocimiento profundo del mismo. No obstante, leerá a Platón y Aristóteles. En resumen, y sin entrar en una detallada biografía de sus primeros años, su formación es fundamentalmente de letras: la filosofía, la lógica, la literatura.

Sus conocimientos de matemáticas eran en principio los obtenidos en la escuela, y más tarde sabemos que en 1663, a los 17 años, siguió en la universidad de Jena un cuatrimestre (¡un cuatrimestre solamente!) sobre matemáticas, sobre todo aritmética pitagórica, bajo la influencia de Erhard Weigel. En 1666 publica su *Disertación de Arte Combinatoria* [LEIBNIZ, 1666a], a los 19 años. Sus estudios universitarios en Derecho le llevan a presentar su tesis en 1667 con el título *De Casibus Perplexis in Jure* [LEIBNIZ, 1666b]. La carrera universitaria no le atrae, aunque le han ofrecido un puesto como profesor, y se aplica a una carrera jurídica y política.

La *Dissertatio de Arte Combinatoria* es el primer libro de Leibniz relacionado con las matemáticas, publicado en 1666 como complemento a sus otros escritos académicos preparados para obtener un título en la Universidad de Leipzig. Sus conocimientos de matemáticas eran todavía muy limitados, pero su formación general, en gran parte autodidacta, era extraordinaria. Este libro tan especial, publicado por un Leibniz tan joven, no ha sido prácticamente nunca traducido de su latín original. Algunos prestigiosos autores sin embargo lo han leído al menos parcialmente, pero los lógicos han encontrado algunos errores (muy pocos) en sus silogismos, y los matemáticos han encontrado pocas matemáticas: sólo doce problemas acerca de las Combinaciones, Variaciones y Permutaciones, en cuyo análisis han rastreado ecos de Ramón Llull y de otros predecesores en estos cálculos, pero ninguna fórmula, sólo un triángulo aritmético para calcular las particiones de un conjunto. Porque Leibniz comienza siempre por lo más difícil y ambicioso. Después calculará combinaciones y variaciones y en ellas se interesará enseguida por la posibilidad de repetición de algunos de los elementos, lo cual por supuesto complica la situación. No obstante, doce problemas pueden resolverse en doce páginas, sobre todo si son de combinatoria, no hacen falta cien. Esa es precisamente la cuestión. En los *Usos* de la combinatoria se encuentra ya todo Leibniz, sólo le falta el conocimiento de las matemáticas que adquirirá en París y la experiencia que obtendrá a lo largo de su vida en todos los demás ámbitos. La lista de esos “usos” es interminable y en ellos tratará las más heterogéneas materias con un enorme dominio de los diferentes campos y de su propio lenguaje especializado, desde la demostración de la existencia de Dios, a las formas de sentar a nuestros convidados a una mesa redonda en la que hay un lugar destacado, sin olvidar por supuesto el derecho, la poesía y cómo no, la Escritura Universal. Pero este texto muestra una estructura bastante desequilibrada y algo desordenada, en cuanto a la presentación de los doce problemas que plantea y sus aplicaciones. Quizá por ello nunca quisiera reeditarlo posteriormente, y le disgustara que se hiciera una reedición sin su permiso. En 1690 un librero de Frankfurt, llamado Cröker publicó dicha reedición, por la que Leibniz protestó en las *Acta Eruditorum* de febrero del mismo año. Entre otras cosas, no le agrada "la estructura de la obra, gran parte de la cual se podría mejorar". Es cierto que este trabajo, si lo considerásemos como una tesis doctoral de nuestros días, tendría mucho que criticar en su aspecto formal.

Leibniz no publicó otras contribuciones matemáticas al Arte Combinatoria, exceptuando un corto ensayo de 1690 sobre teoría de la probabilidad[2], aunque en muchos de sus manuscritos encontraremos numerosos estudios sobre el tema. El aspecto matemático del texto ha sido estudiado y comentado entre otros por Knobloch y Biermann, pero realmente no han sido muchos los estudios desde este punto de vista. Otros muchos expertos han comentado el Arte Combinatoria desde ámbitos no matemáticos, como la lógica, el derecho, la filosofía, la metafísica, etc. y en consecuencia, esto nos lleva a extraer la idea de que el Arte Combinatoria es claramente un texto de matemática aplicada y/o de filosofía, y tiene mucho que ver con la lógica. Sin embargo, las implicaciones matemáticas del Arte son mucho más profundas de lo que parece. He aquí una distinción entre combinaciones y variaciones y su relación con el pensamiento filosófico:

> 9. Así aparecen dos géneros de <u>Variaciones</u>, las <u>Complexiones</u> y el <u>Lugar</u>. Y tanto la <u>Complexión</u> como el <u>Lugar</u> pertenecen a la Metafísica, es decir, a la doctrina del Todo y de las partes, si son considerados en sí mismos. Si realmente observásemos la <u>Variabilidad</u>, es decir la cantidad de variación, se estaría llegando a los números y a la Aritmética. Pues tendería a creer que la doctrina de la Complexión pertenece más a la Aritmética pura, el lugar a la figurada, pues así las unidades son entendidas como formando la línea. Aunque quiero hacer notar aquí que las unidades se pueden disponer al modo de la línea recta, o del círculo, o de otras líneas, o de líneas que retornan sobre sí mismas, o figuras que cojean, en el primer modo en un lugar absoluto, o sea de partes respecto al todo, <u>Orden</u>; en los posteriores, en un lugar relativo o de partes de partes, <u>Vecindad</u>; [*De Arte Combinatoria*, GP, IV, p. 36]
>
> Como los todos que existen o pueden pensarse, en general están compuestos de partes, o bien reales o bien al menos conceptuales, es necesario que las que difieren en especie, o bien difieran en esto, que tienen otras partes, y de aquí el Uso de las <u>Complexiones</u>, o bien en ‹que tienen› otro lugar, de aquí las <u>Disposiciones</u>; aquel es considerado de la diversidad de la materia, éste de la diversidad de la forma. Así, con ayuda de las Complexiones no sólo son halladas las especies de las cosas, sino también los atributos. De modo que así casi toda la parte <u>inventiva</u> de la Lógica, aquella acerca de los términos simples, ésta acerca de los <términos> complejos, se fundamentan en las Complexiones; en una palabra, doctrina de las <u>divisiones</u> y doctrina de las <u>proposiciones</u>. Para no hacer tanta mención de la parte Analítica de la Lógica, o sea del Juicio, esperemos ilustrarla mediante un diligente escrutinio de los Modos del Silogismo [*De Arte Combinatoria*, GP, IV, p. 44].

Para Leibniz metafísica y matemáticas no estaban tan alejadas como podrían estarlo para los matemáticos actuales. Descartes y muchos otros autores ya habían señalado la profunda interacción entre ambas ciencias. De ahí que los conceptos filosóficos del Todo, el Uno o las Partes fueran fácilmente relacionados con la aritmética:

> La abstracción del uno es la Unidad, y el mismo todo abstraído de las unidades, o totalidad, se llama Número. Por lo tanto la Cantidad es parte del Número. De aquí es evidente que en una misma cosa Cantidad y Número coinciden [*De Arte Combinatoria*, GP, IV, p. 35].

Porque el número es uno de los conceptos más universales merece pertenecer a la Metafísica. Pues para Leibniz la Mathesis (tal como entonces se entendía ese término) no es una disciplina, hablando con rigor, sino que existen partes de muy diferentes disciplinas que tratan todas y cada una el tema de la cantidad:

> Así como la Aritmética y el Análisis tratan de la Cantidad de los Entes, así la Geometría de la Cantidad de los cuerpos, o del espacio que es coextenso para los cuerpos.
>
> Además el mismo Todo (y así el Número o la Totalidad) puede romperse en partes como totales menores, este es el fundamento de las Complexiones, de manera que se podrían entender dadas partes comunes en los mismos diversos todos menores, por ejemplo, sea el Todo A. B. C. Todos menores serían sus partes AB, BC, AC: y también la disposición de sus partes mínimas, o sea de las mínimas de las supuestas (es decir, las Unidades), puede variar entre sí y con el todo, al que se llama *situs* [*De Arte Combinatoria*, GP, IV, p. 36].

El término *situs* será utilizado años después por Leibniz en su *Analisis Situs*, pero aquí todavía significa simplemente lugar o situación.

La Terminología Combinatoria

La terminología utilizada por Leibniz en latín es diferente de la que actualmente se utiliza en la teoría de combinaciones. Así a las *Permutaciones* las llama "*variationes ordinis*" y a las *Combinaciones*, "*complexiones*", aunque finalmente se quedará con el nombre de "combinaciones" que será una generalización del *com2natio*. Las *complexiones simpliciter* serán todas las posibles combinaciones sin repetición, es decir, las *Particiones* de un conjunto dado. Es curioso que lo que Leibniz llama exponente ha aparecido como exponente durante mucho tiempo en las notaciones de combinaciones o variaciones de m elementos tomados de n en n: V_m^n, C_m^n.

Otro de sus términos característicos es "*caput*", un subconjunto definido de elementos dados que tienen que estar contenidos en las combinaciones deseadas, es decir, el problema es hallar cuántas de las combinaciones de m elementos tomados de n en n contienen un *caput* de c elementos prefijados, se trata pues de algunos elementos de una combinación que se mantienen en todos los casos. Si es una variación, el *caput* puede permutarse con el resto de los elementos, manteniéndose fijo o no. Puede haber varios *caput* en un conjunto de cosas (elementos, palabras, etc.) Llama "*discerptiones*" a aquellas complexiones que tomadas juntas son iguales al total. También estudia las variaciones con repetición y las permutaciones, de las que distingue casos particulares, como las permutaciones que contienen un *caput*, si se trata de un subconjunto, o bien que permanecen invariantes.

Uno de los temas que Leibniz trató ya desde esos primeros tiempos, sin bagaje matemático, y en los manuscritos posteriores, es el mencionado de las *Particiones*. Mucho más tarde, durante su estancia en París (1672-76) vuelve a ocuparse de la combinatoria sobre todo por su relación con el triángulo aritmético. En años posteriores cambia ligeramente su terminología, llamando *transposiciones* a las permutaciones sin repetición, por ejemplo. Todavía más tarde, en 1699, le comentaba a J. Bernoulli el interés y la dificultad de las particiones de un número.

No encontramos una fórmula de recursión para las particiones de n elementos en k partes, hasta que es publicada por primera vez por Euler en 1751, los números de Stirling de segundo tipo, publicados por primera vez en 1730, y varios casos especiales de la fórmula general de las particiones que fue publicada por Stern solo en 1840 [Knobloch, 1974]. El tema de las particiones es muy difícil de resolver, tampoco Boscovich lo logró y Euler nunca dio una fórmula explícita para el problema de la ecuación diofántica, sino sólo una ley de recursión, y en 1753 confesaba que "*quien quiera enumerar realmente todas las particiones, no solo comenzará una inmensa labor, sino que difícilmente evitará equivocarse, por muy atento que esté*"[3].

En el comienzo del Arte Combinatoria aparece la tabla siguiente, similar a la del *Triángulo Aritmético* de Pascal, y Leibniz la aplica a hallar el número de combinaciones de un conjunto de objetos tomados en grupos de dos, tres, cuatro... etc. También muestra cómo se obtiene el número de variaciones de un conjunto de objetos tomados de una vez (permutaciones) y forma el producto de los 24 primeros números naturales. Hay una reflexión profunda sobre el número y la continuidad: "pues la abstracción de lo uno es la unidad, y al propio todo, abstraído a partir de las unidades, o sea a la totalidad, se le llama número".

Mediante la tabla, obtiene una serie de resultados y reglas para las complexiones:

Tab. ℵ.

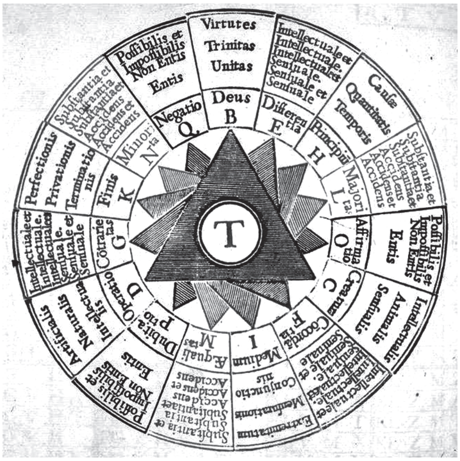
Exponentes | Complexiones

0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	2	3	4	5	6	7 *n*	8 *u*	9 *m*	10 *e*	11 *r*	12 *i*
2	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
3	0	0	0	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220
4	0	0	0	0	1	5	15	35	70	126	210	330	495
5	0	0	0	0	0	1	6	21	56	126	252	462	792
6	0	0	0	0	0	0	1	7	28	84	210	462	924
7	0	0	0	0	0	0	0	1	8	36	120	330	792
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	45	165	495
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	10	55	220
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	11	66
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	12
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
*	0	1.	3.	7.	15.	31.	63.	127.	255.	511.	1023.	2047.	4095.
†	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.	1024.	2048.	4096.

> Agreguemos aquí Teoremas cuyo hecho es manifiesto a partir de la Tabla ℵ:
>
> (I). Si el Exponente es mayor que el Número, la Complexión es 0. $C_2^3=0$.
>
> (II). Si es igual, ésta es 1, $C_2^2=1$
>
> (III). Si el Exponente es una unidad menor que el Número, la Complexión y el Número son iguales.
>
> (IV). En general: dos Exponentes, por los cuales el Número se puede dividir, es decir que son recíprocamente complemento del número, tienen las mismas complexiones con respecto a ese número. Pues como con los exponentes mínimos, 1 y 2, en los que se corta el número tres, así sucede en cada caso por la Tabla , y realmente los siguientes surgirán de los mismos. Si son iguales (3 y 3) se les añade lo mismo (el 1 superior y el 1 inferior), los resultados serían iguales (3 + 1 sería 4 = 4) y lo mismo sucedería necesariamente en el resto.
>
> (V). Si el número es impar, se dan en el medio dos complexiones casi iguales; si es par, eso no sucede. Pues el número impar se puede dividir en dos exponentes próximos distantes una unidad; por ejemplo 1 + 2 sería 3. Pero si es par no se puede. Pues los próximos en los que se podría dividir el par son idénticos. Por tanto, como el número impar se puede dividir en dos exponentes próximos, distantes una unidad, de ahí obtendremos dos complexiones iguales por el teorema IV, porque aquellas distan una unidad de las próximas.
>
> (VI). Las complexiones crecen hasta el exponente del número mismo dividido por la mitad o la mitad de dos próximos, y a partir de ahí decrecen.
>
> (VII). Todos los números primos recorren sus complexiones particulares (o sea con un exponente dado).
>
> (VIII). Todas las Complexiones Simples son números impares [*De Arte Combinatoria,* GP, IV, pp. 40-41].

Y por supuesto, entiende perfectamente la distinción entre combinaciones y variaciones, lo cual le servirá para estudiar muchas aplicaciones más. Otro de los usos o aplicaciones de la combinatoria es su utilidad para figuras geométricas complicadas, como las que describió Johann Kepler en su *Harmonices Mundi* [KEPLER, 1619]. El entusiasmo de Leibniz es característico:

> **34**. Así en este punto está su utilidad para figuras geométricas complicadas, en las cuales quien rompió el hielo fue Johann Kepler en el lib. 2 de su *Harmonices Mundi (1618).* En estas complicaciones, la geometría no sólo puede enriquecerse con infinitos Teoremas nuevos, pues con una nueva complicación surge una nueva figura compuesta, de donde, luego, observando sus propiedades, fabricamos los nuevos teoremas, y las nuevas demostraciones, sino que además (si es cierto que las grandes cosas están compuestas de pequeñas, ya sean éstas las palabras, átomos o moléculas), ésta es la única vía para penetrar los secretos de la naturaleza. Cuando, en efecto, alguien dice que conoce más perfectamente una cosa, percibe más partes en ella, y partes de las partes, y figuras y posiciones de éstas. Investigando completamente la razón de estas figuras primero en abstracto en geometría y también en estereometría; a partir de ahí, accederás a la historia y la existencia natural, o sea aquello que verdaderamente se halla en los cuerpos, y abrirás la ingente puerta de la Física; y admiraremos el aspecto de los elementos, y el origen de las cualidades y el origen de las mezclas y el de las mezclas de las mezclas, y cualquier otra cosa en la naturaleza [*De Arte Combinatoria*, GP, IV, pp. 56-77].



El Método de Ramon Llull

Uno de los ejemplos más clásicos de construcción de combinaciones es el de Ramon Llull. Se trata de mostrar gráficamente cuántas proposiciones surgen de sus nueve términos universalísimos[4]: Bondad, Magnitud, Duración, etc., las cuales, dice, pueden predicarse unas de otras, Llull describe un círculo, inscribe en él una figura regular eneágona, y adscribe un término a cada ángulo, y desde cualquiera de esos ángulos traza una línea recta hacia cualquier otro. Tales líneas son 36, es decir, tantas cuantas combinaciones hay de 9 cosas. Sin embargo, el sentido de esas líneas se puede variar 2 veces en cualquier combinación, o sea cualquier proposición se puede simplemente invertir, y entonces se ponen de relieve las variaciones, es decir, 36 por 2 que serán 72, que es el número de las proposiciones de Llull. No obstante, Leibniz acepta la presentación geométrica de las combinaciones de los conceptos, pero no la elección que hace Llull de los mismos. Para establecer su círculo, Llull decide arbitrariamente utilizar sólo nueve términos, pero Leibniz encuentra algunos a faltar y otros le sobran. Sobre todo, lo que le parece mal es que Llull no tratara de establecer realmente una ciencia que partiera de las cosas dadas, de la realidad.

La Jurisprudencia y la Geometría

> En efecto, la Jurisprudencia, junto con otras cosas, es similar a la Geometría, ya que ambas tienen Elementos, y ambas, casos. Los Elementos son simples, en Geometría, las figuras: triángulo, círculo, etc.; en Jurisprudencia: el acto, la promesa, la enajenación, etc. Los Casos: las complexiones de éstos ‹elementos›, cuyas variables son infinitas en ambas. Los Elementos de la Geome-

tría fueron compuestos por Euclides, los Elementos del Derecho están contenidos en su propio *corpus*, sin embargo, en ambas <ciencias> son incorporados los casos más distinguidos. Ahora bien, los Términos simples en Derecho, de los cuales surgen los demás al mezclarse, y que son casi Lugares comunes y géneros superiores, nosotros los vemos así: los términos de los cuales surge en Derecho la diversidad de casos son: Personas, Cosas, Actos, Derechos [*De Arte Combinatoria*, GP, IV, pp. 58-59].

LA POESÍA

Algunos autores que estimaron interesante calcular estos asuntos, se decantaron por la poesía, como un medio de hacer más atractivos los resultados. Ello da a Leibniz la posibilidad de ejercer su ironía: "elaboraron versos, en los que, salvado el sentido y la métrica, se pudieran ordenar las palabras de varios modos. Otros emplearán menos de arte y más de variaciones", es decir, aquellos que utilizan versos compuestos por monosílabos, o bien monosílabos y otras palabras. Pero no todas las variaciones de este tipo de versos son posibles, es decir, "útiles", y resultan mucho más interesantes los llamados versos proteos.

LOS VERSOS PROTEOS

Un ejemplo de hexámetro formado con monosílabos, es el de Bauhuis [1620]:

8. Bernhard Bauhuis, *Societas Iesu,* insigne epigramático, es el artífice de tal Hexámetro como este, que abarca la inscripción *monosilábica* de nuestro Salvador:

Rey, Líder, Sol, Ley, Luz, Fuente, Esperanza, Paz, Monte, Piedra,

CRISTO.

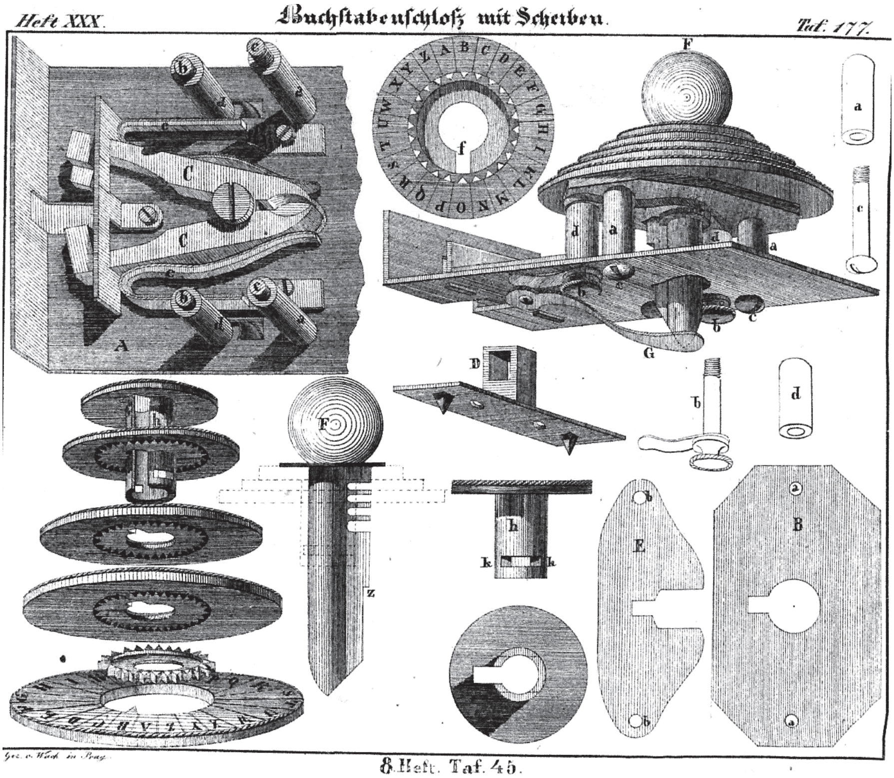
Dicho hexámetro, […] algunos afirman que pueden variarlo 362.880 veces, es decir, tomando en consideración solamente los monosílabos, los cuales son 9; yo creo que el número es casi 10 veces mayor, es decir, éste: 3,628.800, añadiendo la décima palabra CRISTO, que además puede ser colocada en cualquier parte en tanto que Piedra permanezca inmóvil, y después de Piedra, puede ponerse o bien la voz Cristo o bien dos monosílabas. Serán, por tanto, variaciones inútiles aquellas en las que, después de Piedra, se ponga 1 monosílabo […] esto sucede tantas veces como los restantes monosílabos son variados, es decir, 40.320 veces. Puesto que la última puede ser cualquiera de esos 9, 40.320 9 serán 362.880, - 3.628.800 serán 3,265.920. El cual es el número de las variaciones útiles de este verso [*De Arte Combinatoria*, GP, IV, pp. 86-87].

LOS HEXÁMETROS

Pero donde puede lucirse verdaderamente el talento del poeta en la creación de palíndromos es en los hexámetros clásicos. Además, los hexámetros pueden tener un número variable de letras, "como es evidente en un panegírico de Publio Porfirio Optaciano[5] a Constantino Magno, conteniendo 26 versos heroicos, de los cuales el primero es de 25 letras, y creciendo los demás en forma continua en una letra, hasta el vigésimo sexto, que tiene 50. Expresando así todos un tipo de instrumento musical" [*De Arte Combinatoria*, GP, IV, pp. 92].

Cerraduras Secretas

He aquí otra curiosa aplicación de la combinatoria [Hölzel, 1835, lámina 177]:



Basada en el mismo principio de las Complicaciones está la *Rhabdologia* de Neper[6], y aquellos candados de cerrajero, *die Vorleg- Schlösser,* que se abrían sin llave por un arte admirable, que llaman Mahl-Schlösser, es decir, que la superficie de la cerradura está protegida por armellas[7] de metal, casi como anillos giratorios, cada anillo tiene grabada una letra del alfabeto. Además, las cerraduras tienen impuesto un cierto nombre, por ejemplo, Úrsula, Catharina, en las cuales, quien ignore el nombre, solo por casualidad puede llegar a hacer girar los anillos. Pero quien conoce el nombre, gira los anillos correspondientes uno a uno, de forma que al final aparezca el nombre, es decir que las letras del alfabeto del nombre dado completan los diversos anillos de cada línea en una serie concreta. Entonces, cuando los anillos estén exactamente en esa posición, la cerradura se podrá abrir facilísimamente [*De Arte Combinatoria*, GP, IV, p. 94].

SENTARSE A LA MESA

Este es también un problema curioso, el de la permutación de los invitados alrededor de una mesa redonda, pero en la que hay una parte fija, es decir un asiento privilegiado, el del dueño de la casa. Se buscan, en efecto, todas las formas en que, en uno u otro orden, un número de personas dadas puede sentarse a la mesa. Leibniz menciona una anécdota de Drexelius[8]: Un padre de familia había invitado a una cena a 6 huéspedes, pero no sabe cuáles son sus títulos o su categoría, de forma que no es capaz de ponerlos en el orden adecuado. "Cuando llegó el momento de acomodarlos, con respecto al lugar de preferencia, el suyo mismo, se los encontró de pie, esperando que los asignara sus puestos, y él les increpó: *¿Cómo? ¿Vamos a comer de pie? Pero ni siquiera así, ya que para estar de pie también es necesario un orden. Pero si no cedéis, como yo tampoco respecto a vosotros, para que no pudierais quejaros, todas las veces que os invite a cenar, se puede variar vuestro orden*". Naturalmente, no se había parado a pensar ni a hacer los cálculos antes de hablar, pues de ese modo hubiera descubierto que hay 720 variaciones y que eran necesarias otras tantas cenas; las cuales, aunque se hicieran de forma continua cada noche, durarían 720 días, es decir, que consumirían un bienio más 10 días" [*De Arte Combinatoria*, GP, IV, p. 86].

LETRAS Y PALABRAS

Volviendo a Aristóteles, Leibniz señala que ha utilizado el ejemplo de todas las voces que se originan a partir de una pocas letras, para aclarar el origen de las cosas a partir de los átomos de la doctrina de Demócrito, en *De Gen. et Corrup.*, y en el más ilustre libro *Methaphisica*, donde dice que, según Demócrito, los Átomos se diferencian, o bien por la Figura, así como las letras A y N; o bien por el lugar, como las letras N y Z, pues al rotarlas se pueden transformar la una en la otra. Y no se le escapa que el propio Lucrecio[9] se dio cuenta de las variaciones y combinaciones de las cosas:

> De igual modo que en mis versos contemplas diferente la combinación (<u>complexiones</u>) y orden (<u>variación de lugar</u>) de las letras; Pues lo mismo mar y cielo, tierras, ríos, sol, muestran: las semillas, árboles y animales; Pues si no en todas, en gran medida la mayor parte es muy similar; solamente respecto al orden difieren: así en los cuerpos de la Naturaleza. Si se permutan los intervalos, vías, uniones, gravedades, zonas, encuentros, movimientos, orden, posición y figuras, también las cosas deben cambiar [*De Arte Combinatoria*, GP, IV, p. 89].

LA ESCRITURA UNIVERSAL

Y así es como, del Arte Complicatoria de las Ciencias, o Lógica inventiva, fluye un uso o aplicación muy especial: "Una Escritura Universal, esto es, inteligible para cualquiera que pueda leer o sea versado en alguna lengua; lo cual hasta el día de hoy han intentado muchos hombres eruditos". En realidad, dice Leibniz, "constituyendo la Tabla o los predicamentos de nuestro arte complicatoria surgen cosas mejores".

Aquí están las ideas para la futura Característica Geométrica y para muchas de sus ideas acerca de una Característica Universal, que debía ser extremadamente simple, un lenguaje que también fuera un cálculo, una especie de algebra del pensamiento, que debería ser elaborada paralelamente y al mismo tiempo con una enciclopedia de todos los conocimientos humanos.

París

Pero siguiendo su evolución cronológicamente, vemos que, hasta su viaje a París (1672-76) y tras el abandono de algunas tareas diplomáticas que allí le llevaron, no se encuentra Leibniz a finales de 1672, con 26 años, en situación de relacionarse con científicos y sobre todo con matemáticos entre los más eminentes de su época. Sin contar naturalmente a las personalidades de todos los campos de la cultura que entonces vivían o pasaban por París. Christian Huygens, sobre todos ellos, ejerció de mentor de Leibniz con asombrosos resultados, en una actividad, la matemática, donde es tradicionalmente aceptado que los descubrimientos se han de hacer antes de los 25 años. Nos explica Jean Guitton [1962] acerca del *Horologium Oscillatorium*:

> Es hablando con Leibniz de esta obra como Huygens se da cuenta de que ese joven todavía no era más que un aficionado bien dotado; había leído a Cavalieri, pero como se lee una novela: ignoraba a Descartes, Vieta y Pascal. En particular, Huygens se percató de que Leibniz no tenía una noción exacta del centro de gravedad, y por esa razón le aconsejó que leyera a Deltonville, es decir, a Pascal.

En Deltonville, descubre Leibniz la suma de series.

Artus Gouffier, duque de Roannez (1627-1696), que fue gobernador del Poitou y gran amigo de Pascal, es quien le da noticia a Leibniz de curvas como la cicloide y la *roulette*, y le introduce en el cálculo de probabilidades. Pero no se conoce bien el proceso que lleva a Leibniz desde sus primeros ensayos hasta los resultados, y tampoco la historia de los mismos, que más tarde explicaría en parte en una carta a l'Hôpital de 1693.

En cualquier caso, del 21 de enero al 20 de febrero de 1673 Leibniz viajó a Londres donde le hicieron ver que sus descubrimientos sobre series ya estaban descubiertos y allí comprendió la extensión de su propia ignorancia de la matemática del momento, pero ello sólo serviría para determinarle a estudiar más, a documentarse más, y en ello Huygens, al que conocerá por fin personalmente en otoño, y que le presta el *Horologium Oscillatorium* [Huygens, 1673] (El Péndulo), será una guía inapreciable.

Entre otros autores, lee a Grégoire de Saint Vincent, Descartes, Sluse, Cavalieri, Guldin, Torricelli, Wallis, Gregory, etc. Durante este periodo, dado que Huygens no estaba muy interesado en el Álgebra, sus intercambios con Leibniz serán menos intensos.

En cuanto a la Geometría, Leibniz ya había tenido ciertos conocimientos sobre los *Elementos* de Euclides antes de su llegada a París, en 1672, pero como él mismo menciona, se pondrá seriamente al día en 1674-75, y además de Euclides y Apolonio leerá a Arnauld y a Desargues. De hecho, sabemos que en 1661 decía que la *Geometría* de Descartes le había parecido demasiado difícil. Pero para 1667 consulta la *Geometría de los Indivisibles* de Cavalieri [1635] y las obras científicas de Hobbes. Dice Taton [1978, p. 105]:

> Esta laguna persistente en la formación geométrica, combinada por otra parte con una paralela insuficiencia en la técnica del cálculo aritmético elemental, explica por qué ciertos desarrollos matemáticos particularmente brillantes de Leibniz, ya en el apogeo de su genio, se hayan visto deslucidos por algunos errores técnicos elementales de geometría o de cálculo, errores que un Christian Huygens no dejaría de señalar, a veces no sin una discreta ironía.

Con estos instrumentos, Leibniz construye su formación matemática y se convierte en el creador de tantos nuevos ámbitos de estas ciencias en los que su genio sorprenderá a todos los matemáticos que posteriormente tendrán la suerte y el privilegio de acceder a ellos. Consigue extender el álgebra y aplicar nuevas técnicas a la geometría para ampliarla hasta los problemas transcendentes, que Descartes había rechazado; así con la cuadratura de las cónicas llega al cálculo infinitesimal. Por otro lado, al tratar de resolver ecuaciones algebraicas generales de grado n, desemboca en la teoría de los determinantes. Y cuando considera los *Elementos* de Euclides y decide que también sus axiomas son demostrables, inventa el *Calculus situs*, la Característica Geométrica. Estos tres son los focos fundamentales de su pensamiento matemático más fecundo.

En su carta a Dangicourt, de 1716, le aclara que hay que precisar, diferenciando entre la <u>división actual al infinito</u> de la materia y la <u>existencia material de un infinitamente pequeño</u>, que por eso mismo tendría que ser indivisible y tal cosa sería precisamente una sustancia y no un fenómeno, como lo es la materia. En cambio el continuo, o cualquier todo intelectual o ideal, como la extensión continua, la línea o la unidad aritmética, no está dividido en acto al infinito, sino sólo en potencia, y no hay magnitudes de ese tipo que sean verdaderamente infinitas o infinitesimales. Es decir que tampoco aquí, en las matemáticas, las hay; son solo ficciones útiles, así se usan el cero, que se dice es un número muy pequeño y el infinito, que es un número muy grande, pero ambos están fuera de los números:

> I. Estoy encantado de que un espíritu tan matemático como el vuestro se aplique también a investigaciones filosóficas. Ello ayudará a mi objetivo de hacer demostrativa a la filosofía. Me parece que nuestros puntos de vista no están muy alejados el uno del otro. También soy de la opinión de que, hablando con exactitud, no existe una sustancia extensa. Es por eso que llamo a la materia *non subs-*

tantiam sed substantiatum. En alguna parte he dicho (quizá en la *Teodicea*, si no me equivoco) que la materia no es más que un fenómeno regulado y exacto, que no engaña si se observan cuidadosamente las reglas abstractas de la razón. Las verdaderas sustancias no son sino las sustancias simples, o lo que yo llamo MÓNADAS. Y creo que en la naturaleza no hay más que mónadas, el resto son sólo los fenómenos que resultan de ellas. Cada mónada es un espejo del universo según su punto de vista, acompañada de una multitud de otras mónadas que componen su cuerpo orgánico del cual ella es la mónada dominante. Y en ella misma no hay más que percepciones y tendencias a nuevas percepciones y apetitos, como en el universo de los fenómenos no hay más que figuras y movimientos. La mónada por lo tanto envuelve por adelantado en ella sus estados pasados y futuros, de suerte que un *omnisciente* puede leerlos, y las mónadas se conciertan entre ellas, al ser espejos de un mismo universo, pero diferentemente representado: es como una multiplicación al infinito de un mismo universo aunque el universo mismo sea de una difusión infinita. En esto es en lo que consiste mi armonía preestablecida. Las mónadas (entre las cuales a las que nos son conocidas las llamamos almas) cambian su estado por sí mismas, según las leyes de las causas finales o de los apetitos y sin embargo, el reino de las causas finales se concierta con el reino de las causas eficientes, que es el de los fenómenos. No obstante, yo no digo que el *continuum* esté compuesto de puntos geométricos, pues la materia no es en absoluto el *continuum* y la extensión continua no es más que una cosa ideal, que consiste en posibilidad, y que no contiene en sí misma partes actuales. Los todos intelectuales no tienen partes más que en potencia. Así, la línea recta no tiene partes actuales más que cuando está actualmente dividida al infinito; pero si existiera otro orden de las cosas, los fenómenos harían que ‹la línea› estuviera subdividida de otra manera. Es como la unidad en la Aritmética, que es también un todo intelectual o ideal divisible en partes, como por ejemplo en fracciones, no actualmente en sí misma (pues en ese caso sería reducible a partes mínimas que no se encuentran en los números), sino en la medida en que tuviera fracciones asignadas. Así digo que la materia, que es una cosa actual, no resulta más que de las mónadas, es decir, de las sustancias simples indivisibles, pero que la extensión o la magnitud geométrica no está compuesta en absoluto de partes posibles, que solamente le pueden ser asignadas, ni es resoluble en puntos, y que los puntos tampoco son más que extremos y en absoluto partes o componentes de la línea.

II. En lo que se refiere al cálculo de los infinitesimales, no estoy satisfecho del todo con las expresiones del señor Herman en su respuesta al señor Nieuwentyt, ni con las de nuestros otros amigos. Y el señor Naudé tiene razón al presentar oposición. Cuando disputaron en Francia con el Abate Gallois, el Padre Gouge y otros, yo les manifesté que no creía en absoluto que hubiera magnitudes verdaderamente infinitas ni verdaderamente infinitesimales, que no eran más que ficciones, pero ficciones útiles para abreviar y para hablar universalmente, como las raíces imaginarias en el álgebra, tales como $\sqrt{-1}$ […]. Y cuanto más grande se hiciera la proporción o intervalo entre esos grados, más se aproximaría a la exactitud y más pequeño se podría hacer el error, e incluso acortarlo de golpe mediante la ficción de un intervalo infinito, lo que siempre podría realizarse con la forma de demostrar de Arquímedes. Pero como el señor Marqués de l'Hospital creía que así yo traicionaría a la causa, me rogaron que no dijera nada, aparte de lo que ya había dicho en un lugar de las *Actas de Leipzig*, y me fue fácil acceder a su petición [Dutens, vol. III, pp. 499-502].

El Cálculo

Las cónicas de Apolonio, esa culminación de la matemática griega, con sus puntos del infinito, han atraído a los matemáticos de todos los tiempos, empeñados en lograr lo imposible, en cuadrar esas figuras infinitas mediante otras, finitas, o mediante números. En 1675 Leibniz elaboró el tratado manuscrito acerca de matemáticas más largo que escribió en su vida. Se titulaba *Sobre la cuadratura aritmética del círculo, la elipse y la hipérbola*. Su corolario era una trigonometría sin tablas. Como sucedió con otros escritos de Leibniz, permaneció sin publicar y sólo fue mostrado parcialmente a algunas personas. Knobloch [1993] publicó por primera vez su transcripción del original, en latín. Se conocía no obstante el texto que Leibniz envió a Huygens en octubre 1674, resumen del anterior. Sus diversos borradores, en latín y francés, se pueden consultar en la edición de la Academia de Berlín [AA, III, I, 39, 2C, 141-169] que fue publicada en 1988.

Se trata en ese texto de una discusión muy ambiciosa de la geometría infinitesimal. Leibniz trata de establecer los fundamentos de la teoría de las cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes. Es una teoría de los indivisibles y está íntimamente conectada con las ideas filosóficas de Leibniz sobre continuidad y sobre el infinito. Aparece en ella la idea de integrar o sumar las funciones continuas. Así la Proposición VI:

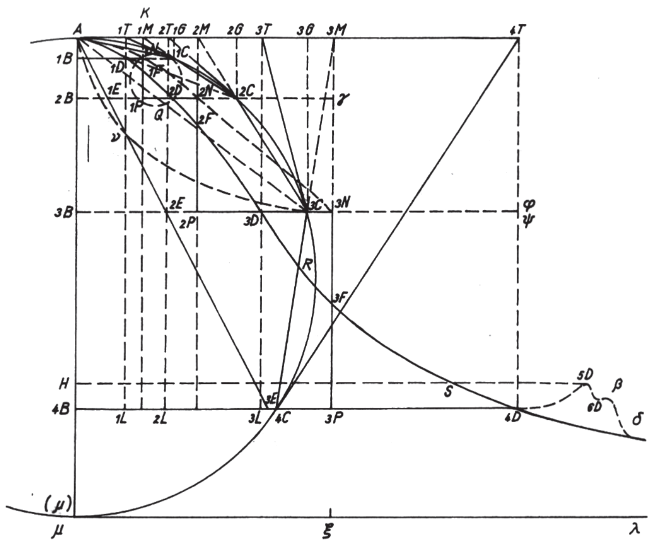


fig. 3

… Y así esto establecido y preparado, afirmo que se pueden considerar, en las dos curvas, puntos C entre 1C y 4C y puntos D entre 1D y 4D, en tanto número, y tan vecinos unos de los otros que el espacio rectilíneo escalonado B4B3P3N2P2N1P1N compuesto por rectángulos como 1N1B2B1P y siguientes hasta 3N3B4B3P, los cuales están comprendidos bajo las partes de las ordenadas, si es necesario prolongadas, 1B1N, etc., hasta 3B3N, y bajo los intervalos 1B2B, etc., hasta 3B4B y el espacio de cuatro líneas 1D1B4B4D3D, etc., 1D (eje 1B4B, ordenadas extremas 1B1D, 4B4D, y curva nueva 1D2D, etc., 4D, ambos espacios difieren en una cantidad menor que cualquier cantidad dada. la misma demostración vale para otros espacios cualesquiera mixtilíneos y escalonados formados por la continua aplicación de rectas a algún eje, de modo que se puede dar por demostrado el método de los indivisibles, que por suma de líneas halla las áreas de los espacios. sin embargo se requiere que las curvas, o por lo menos las partes en que son divididas, sean cóncavas hacia el mismo lado y carezcan de puntos de reversión.

El teorema sexto de este escrito de la Cuadratura es, según el propio Leibniz avisa, uno de los más difíciles, pero es el fundamental porque sienta las bases de todo el método de los indivisibles: "Se puede perseguir la construcción de ciertos espacios rectilíneos, escalonados e incluso poligonales hasta el punto de que la diferencia entre los mismos, o incluso entre ellos y ciertas curvas, sea igual a una cantidad inferior a cualquier cantidad dada". Se trata de conseguir con una demostración finita un resultado que, directamente no se podría conseguir, si no es con los infinitesimales.

El resultado de este teorema, dice Leibniz, es aproximar, hasta una diferencia menor que cualquier diferencia dada y trazando sólo un número finito de figuras inscritas, dos espacios, uno de los cuales es finito y termina por transformarse en el otro cuando el número de figuras inscritas tiende a infinito, es decir que sus diferencias pueden ser más pequeñas que cualquier cantidad dada. Eso es una cuadratura. Se puede por lo tanto tener por demostrado el método de los indivisibles, que consiste en hallar las áreas de los espacios con ayuda de sumas de líneas. También consigue demostrar que en una hipérbola, puede establecer un rectángulo que es igual a la figura logarítmica correspondiente.

En este texto, busca una regla general que abarque las cuadraturas del círculo, la elipse y la hipérbola. Su fórmula no incluye a la parábola, sólo toma las cónicas que tienen centro. Los principales temas son pues las secciones cónicas y la curva logarítmica. Su método es a la vez geométrico y algebraico. Es necesaria una cuadratura del círculo no solamente geométrica sino también analítica. Pero, desde su punto de vista, los límites entre líneas geométricas y no geométricas no están fijados de una vez para siempre. Lo que cuenta es que los problemas sean resolubles. Su cuadratura aritmética del círculo se realiza por medio de una serie infinita, pero tal que se percibe fácilmente debido a su sencilla ley de formación. Para Leibniz los límites de la Geometría no son tan rígidos; está convencido de que debemos admitir que las líneas no analíticas son necesarias, pues ayudan a resolver problemas mediante el cálculo, es decir, sin la existencia de una construcción geométrica. Lo importante es resolver los problemas, y una línea no geométrica se convierte en geométrica cuando se encuentra un modo de describirla, y una no analítica también se puede convertir en analítica; el ámbito de la Geometría puede así ir creciendo gradualmente.

Leibniz redacta la Cuadratura en principio para presentarla a la Academia de las Ciencias de París, con la intención de ser aceptado como miembro de la misma. Diversas vicisitudes impidieron que este proyecto tuviera éxito. De hecho, había comunicado a miembros destacados de la mencionada *Académie Royale des Sciences de Paris*, comenzando por su secretario, Jean Galloys, sus proyectos de las Cuadraturas, de la Característica Universal y el Arte de Inventar. También su máquina de calcular y otros inventos técnicos. En octubre de 1675 había muerto Roberval y Leibniz intentó ser su sucesor en la Academia, pero ya había dos eminentes extranjeros en ella, Huygens y Cassini, además de que su condición de luterano y de alemán no facilitaba las cosas. Leibniz lo intentó por todos los medios que se le ocurrieron, pero finalmente tuvo que renunciar y abandonar París en 1676, muy a su pesar, volviendo a Alemania, donde el duque Juan Federico le ofrecía un buen empleo que, sin embargo, le ponía a merced de la Casa de Hannover, la cual, tras la llegada de Jorge (I) al trono de Inglaterra en 1714, se decantaría por Newton y olvidaría a Leibniz en Hannover, en gran parte por razones políticas, dejándolo de lado incluso después de muerto, incautándose el electorado de Hannover de sus manuscritos y evitando su publicación durante más de cincuenta años.

Cómo computar las sumas de infinitos términos era el tema que le preocupaba en la investigación de las series. En su estudio de las progresiones y la aritmética de los infinitos, por ejemplo, dice: "no puede haber ninguna duda de que algunas series son iguales a números irracionales aunque consisten en números racionales. Esto se debería investigar" [AA, VII, 3. No 7]. Por ejemplo, en 1674 consigue una serie de este tipo: $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$ etc., un resultado que expresa un irracional, $\frac{\pi}{4}$, en términos de una serie de números racionales, aunque eso sí, una serie infinita. Así dirá en 1686: "finalmente he hallado un verdadero complemento del álgebra para los trascendentes, esto es, mi cálculo de las cantidades indefinidamente pequeñas, que llamo también cálculo diferencial o de las sumas".

Su definición es totalmente actual: "las cantidades infinitamente pequeñas son menores que cualquier cantidad dada, pero mayores que cero; las cantidades infinitamente grandes son mayores que cualquier cantidad dada". No importa que estas cantidades infinitamente grandes o pequeñas aparezcan en la naturaleza, que existan o no en la realidad, porque nos proporcionan posibilidades de simplificar los problemas al hablar, al pensar, al inventar y al demostrar. En una carta[10] a Johann Bernoulli, que no acababa de entenderlo, y escrita en 1698, dice al respecto:

> ... El Señor de Volder afirma, cosa que Grégoire de Saint Vincent había dicho ya en algún lugar, que en el infinito no se verifica el axioma "el todo es mayor que la parte". A mí, sin embargo, me parece que lo que hay que decir es, o que el infinito no es realmente un todo, o que, si es un todo y sin embargo no es mayor que su parte, esto es algo absurdo. Hace muchos años yo demostré que el número-conjunto de todos los números implica contradicción si se entiende como un todo[11]; lo mismo sea dicho del número máximo y del número mínimo o fracción más ínfima [...] Así como no se da el elemento numérico o parte mínima de la unidad o mínimo en los números, tampoco se da la línea mínima o elemento lineal; la línea, como la unidad, se puede dividir en partes o fracciones. Ahora bien, yo sostengo que, puesto que el máximo es distinto del infinito y el mínimo distinto del infinitamente pequeño, no se puede refutar la posibilidad de nuestros infinitamente pequeños. ‹Así› al menos podemos utilizarlos en el cálculo y en el razonamiento, lo que no es lícito hacer con lo máximo y lo interminado ni con lo mínimo, como ya he dicho. Cuando dije que, si yo creyera posibles los infinitamente pequeños y ‹los› infinitos admitiría su existencia, no dije que fueran imposibles, sino que dejé la cuestión a mitad de camino. Y cuando negué que se llegue a las porciones mínimas, fácilmente se podía entender que no hablaba sólo de nuestras divisiones[12], sino también de las que se verifican en acto en la naturaleza. Pues, aunque tengo por cierto que cualquier parte de la materia está a su vez actualmente dividida, no pienso que de aquí se siga que se dé una porción de materia infinitamente pequeña[13], y menos aún se sigue que se dé la porción más ínfima de todas.

Y dice en otro lugar:

> La división del continuo no debe ser considerada como la de la arena, en granos, sino como la de una hoja de papel o la de una túnica, en pliegues, de tal modo que pueda haber una infinidad de pliegues, los unos más pequeños que los otros, sin que el cuerpo se disuelva nunca en puntos o mínimos.

No vamos a entrar aquí en la polémica del descubrimiento del Cálculo Infinitesimal. Todo el mundo sabe ya que ni Leibniz ni Newton se copiaron el uno al otro y que sus métodos para llegar al descubrimiento eran distintos, el uno desde una matemática más abstracta y el otro desde el cálculo de las fluxiones, más relacionado con la física. Yvon Belaval, el gran experto en Leibniz, lo decía claramente [Belaval, 1962, p. 83]:

> Ni Newton ni Leibniz han inventado con todas sus piezas el cálculo infinitesimal. La noción de infinitesimal aparece desde la Antigüedad con los eleatas, Eudoxo, introductor del método de exhaución desarrollado por Arquímedes. ¡Y cuántos nombres en el siglo XVII! Al menos citemos a Kepler, cuando aplica la ley de continuidad a los infinitamente pequeños (1604); a Cavalieri, cuyo método de los indivisibles esboza el cálculo integral; a Fermat, utilizando el principio del cálculo diferencial; a Descartes, que define la tangente como posición límite de una secante, mientras que Roberval prefiere considerarla como el vector velocidad, en el instante, de un punto móvil sobre la curva; a Pascal, cuyo manuscrito de la *Geometría de las Cónicas*, es consultado hasta 1679; a Barrow, en fin, que acaba de publicar con su alumno Newton, las *Lectiones Opticae et Geometricae* (1669), donde se trata el triángulo diferencial. Pero faltaba por descubrir: 1º, que el problema de la cuadratura, es decir de la evaluación de las áreas, se remitía al problema inverso de las tangentes; 2º, un algoritmo especial que fuera de manejo cómodo y que generalizase el cálculo. La gloria de Leibniz se apoya sobre este doble descubrimiento, sobre todo el de un algoritmo y una notación muy superiores a los de Newton, y a los cuales –escribirá Poisson en 1833– ‘el análisis infinitesimal debe todos sus progresos.

Y el propio Leibniz, en una carta al Abbé Conti de 9 abril 1716 [GBrM, p. 279], precisa:

> Pues no es por las fluxiones de las líneas sino por las diferencias de los números que yo he llegado ‹a mi Cálculo de las Diferencias›, considerando finalmente que esas diferencias, aplicadas a las magnitudes que crecen continuamente, se desvanecen en comparación con magnitudes diferentes y en cambio subsisten en las sucesiones de los números.

Ríos de tinta han corrido sobre el tema y se han publicado en todos los idiomas los textos de la polémica tanto por parte de Newton como de sus seguidores ingleses, de un lado, y las respuestas de Leibniz, del otro. Es un caso más en la historia de la ciencia en que los intereses sectarios primaron sobre la justicia y la imparcialidad, durante décadas, logrando amargar a Leibniz sus últimos años de vida.

La Característica Geométrica. Análisis Situs

En cuanto al extraordinario contenido del A*nálisis Situs o de la Situación*, es sabido que la idea de ampliar o de completar la Geometría clásica, es decir los *Elementos* de Euclides y los escritos de Descartes, mediante un cálculo de la situación, o de la posición, ha estado vigente durante toda la vida de Leibniz. No estaba satisfecho con el enfoque de Euclides y menos con el de Descartes, porque, como le dice a Huygens: "necesitamos un análisis propiamente geométrico o lineal, que exprese directamente la situación (el *situs*), como el álgebra expresa la magnitud". Leibniz pensaba que todos los axiomas de Euclides se pueden demostrar y de hecho hizo varios intentos con éxito. Pero además tampoco estaba de acuerdo con algunas de sus definiciones y demostraciones. Por eso, en estos textos se encuentran nuevas definiciones con vistas a la construcción de esa nueva geometría.

La Característica Universal, uno de los proyectos más queridos por Leibniz, debía comenzarse precisamente por la Geometría y la Lógica, pues esas dos ciencias proporcionan fundamentos para muchas otras ciencias. En cuanto a la Combinatoria, se utiliza también para demostrar y calcular, y de ese modo inventar objetos o teoremas nuevos.

La posibilidad de una Característica Geométrica tiene grandes ventajas sobre el Álgebra, pues esta última "requiere grandes rodeos para llegar a las demostraciones y construcciones geométricas". En cambio, este método nuevo puede hacer una descripción de cualquier objeto, una máquina por ejemplo, por complicada que sea, <u>sin emplear figuras ni palabras</u> "Y no obstante, sería muy fácil, para quien entendiese esos caracteres, trazar la figura a partir de ellos".

Huygens prefiere quedarse con la Cuadratura Aritmética, que es la que le ha convencido. Pero Leibniz insiste y le pone el ejemplo de la ecuación del círculo: $x^2 + y^2 = a^2$, que para la geometría ordinaria no nos dice nada, y hay que explicar qué son x e y, y que están en dos ejes perpendiculares, y trazar la figura para entenderla. Huygens le ha pedido unos ejemplos de sus especulaciones teóricas, pero rechaza el nuevo concepto de <u>lugar</u>, el *situs,* que introduce Leibniz, y de ese modo se acaba la discusión. Leibniz, dolido, le dice que había elegido precisamente los lugares "porque todo el resto lo determinaba por sus intersecciones". La figura y el lugar son cosas distintas.

Los textos de Leibniz sobre el tema del *analysis situs* sólo se dieron a conocer muy limitadamente, a Huygens, a Bodenhausen y pocos más. La incomprensión de la importancia del tema y otros sucesos azarosos hicieron que no fuera conocido hasta muy tardíamente, a través de la publicación de la correspondencia de Huygens, en 1833, donde se encuentran las cartas de Leibniz a Huygens. Más tarde aparecerán algunos de los textos, diseminados en las ediciones de Gerhardt o de Couturat, pero poniendo muy poco énfasis en el descubrimiento de Leibniz.

Leibniz explica en este texto que, desde su punto de vista, la Geometría dispone de dos métodos: uno de ellos utiliza las palabras, que explican las cosas de modo que la mente puede percibirlas, imaginarlas, aún sin trazar las figuras; el otro método utiliza los caracteres, es menos intuitivo, pero si se siguen sus reglas, se obtienen más fácilmente resultados, incluso sin saber de qué se está tratando. Los caracteres no serán ambiguos, como las palabras del lenguaje vulgar, serán inequívocos y claros. Por último, el método de las figuras por sí solas es inviable, pues muchas cosas ni siquiera se pueden dibujar, por eso queda descartado.

Los caracteres son cosas con las cuales se expresan relaciones de otras cosas entre sí. No necesitamos saber lo que representan hasta el final de la operación. Las descripciones de los geómetras son con frecuencia demasiado largas, la profusión de líneas en una figura aumenta la confusión en lugar de aclararla, en cambio las letras pueden significarla mediante su colocación o transposición, y así representaremos exactamente "todo el universo que está sujeto a la imaginación".

Lo primero que hay que hacer es establecer la notación que vamos a utilizar, así los puntos serán A., B., etc.; las magnitudes, letras minúsculas; la línea tendrá una sola letra, por ejemplo B, pero diferenciada por puntos: 1B 2B 3B, etc. Los subíndices los coloca Leibniz a la izquierda de la letra a la que afectan, en todo el texto.

El espacio es lo extenso puro absoluto, es decir, ilimitado, sus partes existen simultáneamente, coexisten. Pero insinúa Leibniz que ese espacio puede ser algo distinto de la materia, o bien sólo una aparición constante o un fenómeno, pues en tanto que consideremos un espacio real, material y no puramente matemático, estaremos en el mundo de los fenómenos, pero si es algo distinto, podríamos estar en el espacio real de las mónadas. No obstante no quiere aquí insistir en este punto. El espacio es el lugar de todos los puntos congruentes entre sí, el lugar de todos los puntos del universo, pues todos los puntos son congruentes. Es un continuo en el orden de coexistencia, es decir, en un tiempo dado. En el extenso se pueden encontrar partes de infinitos modos, una parte del extenso es siempre extensa. En esto es totalmente coherente con su metafísica: sólo las mónadas no tienen partes.

Los puntos geométricos en cambio son un mínimo y carecen de partes, y todos los puntos son congruentes (pueden coincidir) y semejantes, y se podría decir, iguales. La relación de lugar o de *situs* que hay entre dos puntos es lo que se entiende como distancia, la vía mínima entre ellos.

Considera Leibniz que la recta no está correctamente definida en la geometría griega, pues se puede incluso dudar de su posibilidad. Una cosa es trazar una recta y otra concebirla intelectualmente. Así propone como definición que una recta es el extenso que se percibe por el hecho de que dos puntos son percibidos simultáneamente. La recta es uniforme y es única entre dos puntos. También desarrolla cuidadosamente las relaciones entre las rectas: la intersección, las paralelas, las perpendiculares, etc.

Todas estas definiciones y precisiones son necesarias para la nueva geometría, y nos abren un panorama realmente moderno y con grandes lazos con las ideas de la topología y otros métodos de considerar el espacio. Define asimismo la línea circular, pero de un modo un poco más complicado: "consideramos cualquier línea rígida de forma que se suponen en ella dos puntos que permanecen inmóviles en la línea si la línea se mueve, o al menos si se mueve alguno de sus puntos. Este punto describirá una línea circular". El trazo rígido no implica por supuesto que la línea sea recta, pero sí que no cambia su forma, todos sus puntos conservan su *situs* respectivo. Esta definición le llevará a continuar considerando exclusivamente líneas rígidas en las demás figuras o trazos.

El otro aspecto importante de su Característica Geométrica es el movimiento. Desde ese punto de vista considera de nuevo las definiciones que hemos visto más arriba. El movimiento es la mutación continua del *situs,* con el movimiento las cosas transitan, se desplazan.

Resumiendo, en estos textos, Leibniz establece que los puntos geométricos son indiscernibles, a diferencia de los puntos físicos o metafísicos, todos diferentes entre sí. Pero al mismo tiempo considera rígidas las trayectorias entre los puntos; si las hubiera considerado flexibles, habría llegado a la topología del siglo XX.

ARITMÉTICA Y TEORÍA DE NÚMEROS

Y en la época en que Leibniz estaba en París, Huygens le propuso calcular la suma de esta serie, inversa de los números triangulares: $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\cdots$ etc. Leibniz se puso a ello y calculó no la suma, sino su mitad:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)\cdots$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$$

DETERMINANTES

Las investigaciones de Leibniz sobre este tema[14] permanecieron ignoradas hasta la publicación, en 1850, de su correspondencia con L'Hôpital. En ella se puede comprobar que descubrió el método de los determinantes cincuenta años antes que Cramer. Leibniz buscaba el modo de resolver los sistemas de ecuaciones lineales y, en ese contexto de la eliminación de las incógnitas y resolución de las ecuaciones, encuentra la forma de los determinantes. Para resolver este tipo de ecuaciones, se trataba de aplicarse a solucionar sistemas no homogéneos de ecuaciones lineales. También encuentra una regla para expresar la resultante de un sistema de ecuaciones lineales o polinomios y la eliminación de una variable común a varias ecuaciones algebraicas. Por otra parte, el progreso del álgebra dependía en gran medida de la combinatoria. Éstas son las ideas que iba a aplicar en su invención de los determinantes. No obstante, Leibniz habló siempre de ecuaciones resultantes y no utilizó el término "determinantes". Había encontrado, decía, una regla para eliminar las incógnitas de cualquier número de ecuaciones de primer grado, siempre que el número de ecuaciones sea el mismo que el de incógnitas más uno.

Pero uno de los aspectos más originales de este trabajo es la invención de un nuevo método de notación, basado en los números en lugar de las letras. Estas nuevas notaciones son parte de sus investigaciones en el empleo apropiado de los signos, de forma que se pudiera ir construyendo la Característica Universal, en este caso aplicada al Álgebra, y con el uso de la Combinatoria. Esta notación también servirá en Geometría, para expresar el *situs*, como él mismo señala.

El problema de los signos en los determinantes será sin embargo uno de los más complicados de resolver para Leibniz, porque él utilizaba sobre todo sistemas de tres ecuaciones; pero acabaría ofreciendo una regla basada en las transposiciones de los índices derechos o izquierdos que en número par o impar, marcan el signo a aplicar, de un modo muy semejante a la regla de Cramer de 1750.

Estos textos no fueron publicados en vida de Leibniz ni tampoco comunicados a sus corresponsales excepto a muy pocos de ellos, como a Johan Jakob Ferguson en 1680, L'Hôpital en 1693 o Charles Reyneau hacia 1708. Algunos de ellos no parecen muy entusiasmados por esta nueva forma de notación o no comprenden su utilidad. Por otra parte, como hemos dicho, el problema de los signos de los determinantes se le resiste a Leibniz, y aunque lo resuelve en formas que son equivalentes a las de MacLaurin o Cramer, no desarrolla sus resultados para aplicarlos al caso general de un determinante cualquiera.

Observando que se hubiera podido prescindir de las letras si se hubiese tratado a los números como a letras, Leibniz propone cambiar las letras por números:

> Y así como Viète sustituyó los números por letras para tener una mayor generalidad, yo he pretendido volver a introducir los caracteres de los números en el Álgebra Especiosa misma, puesto que son mucho más adecuados que las letras". Esto simplifica mucho los cálculos largos y permite hacer comprobaciones sencillas como la prueba del 9, sin necesidad de esperar a terminar la operación.
>
> Los números ahora nos sirven como indicadores de las posiciones o de la ecuación de que se trata[15]. Supongamos dos polinomios: $10x^2+11x+12$ y $20x^2+21x+22$, que utilizará en lugar de $a_{10}x^2+a_{11}x+a_{12}$, y $a_{20}x^2+a_{21}x+a_{22}$. En general, llamará términos, a los que acompañan a una incógnita, coeficientes de las incógnitas a cada par de números del tipo 10, 11, 12, etc. y notas o índices a los números de la izquierda de los coeficientes: 1, 1, 1, que denotan la ecuación en la que se encuentran, la primera en este caso; o los de la derecha, 0, 1, 2, que denotan la incógnita, 0, 1, 2 donde 0 = nada, 1= x, 2 = y.
>
> De este modo, si tuviéramos tres ecuaciones con tres incógnitas: 2, 3 y 4 (en lugar de x,y,z), se podrían escribir así:
>
> $12.2+13.3+14.4-119 = 0$
>
> $22.2+23.3+24.4-209 = 0$
>
> $32.2+33.3+34.4-299 = 0$, y podemos calcular el valor de la incógnita 4 mediante un quebrado:
>
> $$4 = \frac{-12.23.299 + 12.33.209 - 22.33.119 + 13.22.299 - 13.32.209 + 23.32.119}{+12.23.34 + 12.33.24 - 22.33.14 + 13.22.34 - 13.32.24 + 23.32.14}$$

En éste, tanto numerador como denominador son determinantes que están calculados en la fórmula de arriba:

Para el numerador:

$$\begin{vmatrix} 12.(2) & 13.(3) & +119 \\ 22.(2) & 23.(3) & +209 \\ 32.(2) & 33.(3) & +299 \end{vmatrix}$$

Para el denominador:

$$\begin{vmatrix} 12.(2) & 13.(3) & 14.(4) \\ 22.(2) & 23.(3) & 24.(4) \\ 32.(2) & 33.(3) & 34.(4) \end{vmatrix}$$

Esta ingeniosa notación (junto con algunas más) es la que emplea en todos los manuscritos de esta sección, y en este pasaje hemos visto claramente su originalidad y utilidad con un ejemplo sencillo que todos los lectores "aunque no sean geómetras" pueden fácilmente entender.

Todavía inventa Leibniz otro símbolo para los determinantes, así, si tenemos $\begin{vmatrix} 10 & 11 \\ 20 & 21 \end{vmatrix}$ igual a N, este determinante o resultante, como él le llama, se puede escribir abreviadamente, en <u>*compendium*</u>, así: $\overline{0\ 1} = N$. De ese modo, para un número mayor de términos, puede estudiar el efecto de las transposiciones sobre el signo.

PROBABILIDAD

LEIBNIZ Y EL AZAR

El interés de Leibniz por los problemas de lo contingente viene de su primera juventud. Ya hemos hablado de la *Dissertatio de Ars Combinatoria* [LEIBNIZ, 1666a]. Del 1663-7 compone *De conditionibus*, en la que utilizaba números para representar lo que él llamaba "grados de probabilidad". Al no ser aceptada su tesis en Leipzig, se matricula en la Nürnberger Universität de Altdorf. Su tesis doctoral, presentada en 1667, trataba *De casibus perplexis in jure* [LEIBNIZ, 1666b]. En ella, lo que después sería la Teoría de la Probabilidad debía ser una "jurisprudencia natural". La probabilidad numérica era entonces para Leibniz una noción primordialmente epistemológica, a diferencia de Pascal, Fermat y los demás autores, para quienes el cálculo de las "*chances*" era fundamentalmente aleatorio. Los grados de probabilidad de que habla Leibniz son grados de certeza. La doctrina de las "chances" no trata para Leibniz de las características físicas de una situación de juego, sino de <u>nuestro conocimiento</u> de esas situaciones.

Ya en ese temprano texto, *De Conditionibus* (1663-7), aparecía una cuantificación de la probabilidad entre dos valores límites: 0 y 1, que corresponden al <u>*jus nullum*</u> y al <u>*jus purum*</u> respectivamente, pero le faltaban los valores intermedios para el <u>*jus conditionale*</u>; cuando una condición es necesaria, Leibniz la denota por la cifra 1, cuando es imposible, utiliza la cifra 0, cuando es incierta (*incerta)*, como la llama en la primera versión de su escrito [LEIBNIZ, 1665], o contingente (*contingens*), como la llama en la versión de 1672, habrá que denotarla por una fracción; y esa fracción será el "grado de prueba" en el caso de la ley, o el "grado de probabilidad" en general. Está por lo tanto en condiciones de considerar las diferencias cualitativas de los grados de probabilidad y también la existencia de diferencias cuantitativas, pero no puede asignarles los valores numéricos que les corresponden; Leibniz hablaba de un continuo de posibilidades, es decir, de valores o grados de probabilidad, y años después esperaba que Jacques Bernoulli consiguiese realizar esa cuantificación. Las verdades contingentes, sobre todo las referentes al espacio y al tiempo son para él series continuas que conducen al infinito.

> Así pues, ante una situación contingente, hay que tomar decisiones que no vienen totalmente justificadas por el Arte de la Demostración o del Juicio, sino que pertenecen al Arte de Conjeturar:

El hombre se encontraría indeciso en la mayor parte de las acciones de su vida, si no tuviera nada para conducirse cuando un conocimiento seguro le faltase.

Y la base matemática de estas decisiones es precisamente, lo que llaman los autores de la época el cálculo de los "*partis*", fundamental para la teoría De Alea, es decir, la Teoría de la Probabilidad.

Los juegos de azar

El interés de Leibniz por los juegos iba más allá de la Teoría de la Probabilidad. Las aplicaciones que pudieran tener al Arte de Inventar y por lo tanto a la construcción de la Característica Universal le parecían del mayor interés. Pensaba además que los hombres nunca mostraban mayor ingenio que en sus diversiones y que incluso los juegos infantiles podían atraer la atención de los más grandes matemáticos.

Uno de los textos más interesantes de Leibniz, en el que se utiliza la suma de series para un problema de juegos de azar, y que además nos da una muestra del modo en que se operaba en la época: desafíos en las revistas, revelación de los resultados, pero no de los métodos de llegar a ellos, y las relaciones entre las teorías en desarrollo de Huygens, J. Bernoulli y Leibniz, es el siguiente, que demuestra una vez más la capacidad matemática de Leibniz. En 1685, Bernoulli propone en el *Journal des Sçavans*, nº 25 el problema de dos jugadores A y B que juegan por turnos, según diversas variantes. Se trata de encontrar la proporción de sus posibilidades (*hazards*). Estos casos: A B AA BB AAA… y A BB AAA BBBB… son variantes del propuesto por Huygens en 1665[16].

Leibniz resuelve parcialmente el problema en su manuscrito de 1685, y además realiza interesantes hallazgos teóricos referentes a la suma de series, pero no lo publica. Durante un tiempo nadie responde al reto de Bernoulli. Ahora sabemos que Leibniz había resuelto el problema mucho antes de lo que Bernoulli creía, gracias al manuscrito que dejó inédito, como decimos, del mismo año 1685.

Los resultados de Leibniz son los mismos que los de Bernoulli, pero el método de obtención es diferente. Leibniz precisa que estos resultados son independientes del número de jugadores y de tiradas, pero, a semejanza de Bernoulli, tampoco explica mucho más la cuestión.

La explicación más lógica del hecho de que Leibniz no publicara sus resultados ni los comunicara a nadie antes de 1690, es que no estaba satisfecho del grado de generalidad alcanzado y de no haber hallado la suma de las series que resultan del problema, pero cuando ve la solución de Bernoulli y que tampoco él da la suma de las series, decide publicar sus propios resultados aun "incompletos".

SEGUROS Y ESTADÍSTICA

A finales del siglo XVI diversos países de Europa prohibieron los seguros de vida, que no son sino una apuesta sobre las posibilidades de supervivencia de una persona, asunto que se consideraba competencia exclusiva de la Providencia. Sin embargo, el sistema de rentas vitalicias era conocido y practicado desde la antigüedad, con mayor o menor acierto. Lo esencial para calcular uno de estos sistemas es disponer de una tabla de supervivencia lo más completa posible de una determinada población y además es necesario contar con ciertas herramientas matemáticas. En el siglo XVII, con el desarrollo de la teoría de la probabilidad, era posible por primera vez calcular la duración probable de la vida humana, pero antes de esa fecha los cálculos empleados eran proverbialmente inexactos y conducían con frecuencia a la ruina del estado o del prestamista particular.

Huygens había recibido una copia del libro de Graunt en 1662 y su hermano Ludwig Huygens, que estaba interesado en estos temas, le propuso calcular la esperanza de vida de un recién nacido (o más bien recién concebido) basándose en las tablas de Graunt. Esta esperanza de vida es de hecho la duración media de la vida, pero no la duración probable (o mediana). Como señala uno de los más relevantes autores actuales sobre temas de historia y filosofía de la ciencia, Ian Hacking, en nuestros días, debido a la baja mortalidad infantil, ambos conceptos están muy próximos, pero en la época de Graunt la media de edad era de 18,2 años pero la mediana era solamente de 11 años y en todas las familias había muchos hijos que no llegaban a la edad adulta.

Se supone implícitamente que la proporción de defunciones es uniforme a partir de los 6 años de edad, idea que va a ser adoptada también por los hermanos Huygens y por Leibniz y ésta es una suposición sorprendente pero que, ante las tablas disponibles, resulta razonable.

Hubo que esperar a Neumann en 1692, para la ciudad de Breslau y a Maitland en 1739 para la de Londres, que fueron los primeros en disponer de una estadística de los fallecimientos por edades.

Hacking presentaba en su libro *The emergence of probability* [HACKING, 1975] a Leibniz como alguien determinante para el surgimiento de la probabilidad, alrededor de 1660, describiéndolo como el testigo filosófico del mismo, decisivo para las estadísticas oficiales prusianas. El nombre de Leibniz aparece en toda la obra. Pero en otro de sus libros, *The taming of chance* [Hacking, 1990], añade esta reflexión:

> Las premisas esenciales de Leibniz eran que debía constituirse un estado prusiano; la verdadera medida del poder de un estado es su población y el estado debería poseer un departamento estadístico central para conocer ese poder. De ahí que un nuevo estado prusiano debía comenzar por fundar una oficina de estadística. Esta idea de Leibniz es formulada alrededor de 1685, unos pocos años después de haber hecho William Petty la misma recomendación en el caso de Inglaterra.

Se han publicado recientemente algunos textos de Leibniz traducidos al francés sobre temas de probabilidad y de estadística [Parmentier, 1995] y, sobre todo, se ha publicado en el 2000 el volumen de la Academia de Berlín de textos originales de Leibniz sobre seguros y matemáticas financieras, editado por Eberhard Knobloch con prólogos y comentarios de otros especialistas, de forma bilingüe latín o francés/alemán [Knobloch, 2000], de manera que contamos ahora con todos los elementos para formarnos una opinión de la influencia de Leibniz sobre estos asuntos.

De hecho Leibniz está utilizando la fórmula de la esperanza de vida en el momento del nacimiento. Este cálculo resulta correcto, dado que partimos de una población estacionaria en la cual la vida media o esperanza de vida en el nacimiento y la vida mediana o duración probable de la vida, son iguales. De esta forma tenemos un esbozo de la intensa actividad de Leibniz referente a estas teorías matemáticas, aunque en el total de su obra no representen una parte muy grande. Pero eso realmente en el caso de Leibniz, cuya obra es monumental, no tiene gran importancia.

Nos queda otra pregunta por hacer, que ya ha sido planteada para el total de la obra de Leibniz, y es cómo fue posible que un talento como el suyo estuviera durante tantos años soterrado, incluso desconocido para todo el mundo. En lo referente a las matemáticas, algunas de las razones de ese desconocimiento u ocultamiento son desgraciadamente la incomprensión de aquellos en los que Leibniz más confiaba, como Christian Huygens, L'Hôpital, y otros insignes matemáticos de su época, que habían sido sus introductores en alguno de los campos en los que él se movía e inventaba, pero que no podían seguirle en sus más complejos desarrollos, que veían a veces como sueños imposibles, como en el caso de la Característica, o en sus afirmaciones de la inexistencia material del infinito, tanto grande como pequeño. Estas ideas estaban en estrecha conexión con su metafísica y su filosofía y por esa razón no eran fáciles de entender para algunos de sus interlocutores, como el propio J. Bernoulli.

No obstante las razones de este olvido fueron también en gran medida políticas, tras la muerte de Leibniz. En lugar de ocuparse de la ordenación de los manuscritos, de la recuperación de las cartas y documentos, y en general de la edición de sus textos más importantes, la corte de Hannover guardó la inmensa mayoría de los trabajos de Leibniz en su Archivo, impidiendo la difusión de sus ideas filosóficas, científicas y políticas durante buena parte del siglo XVIII.

El leibnizianismo se propagó a través de Wolff y sus discípulos, los cuales dejaron de lado numerosas facetas de la actividad de Leibniz, de las que ni siquiera tuvieron noticia. Visto desde nuestra época, resulta increíble que un hombre de su prestigio, fundador y ‹primer› presidente de la Academia de Berlín, miembro de muchas sociedades científicas y corresponsal de prestigiosos pensadores, no encontrase ni siquiera un grupo de editores póstumos. Pero lo cierto es que el acceso a los manuscritos de Hannover comenzó a ser cada vez más difícil, y la figura de Leibniz sólo influyó a través de epígonos que ignoraron la complejidad de su pensamiento y de su obra.

NOTAS

1 Este trabajo tiene su origen en el Proyecto *Leibniz en Español*, en el que la autora participa como miembro del Consejo Editorial, del Equipo Investigador y como Editora del volumen 7A (*Escritos matemáticos*) [MORA CHARLES, 2015]. Una versión reducida del mismo, expuesta en la Conferencia Inaugural del XII Congreso de la SEHCYT, aparecerá publicada en sus Actas. Traducción castellana de los textos recogidos en este trabajo a cargo de la autora.

2 *Acta Eruditorum*, julio 1690, 358-360.

3 Citado por [KNOBLOCH, 1974].

4 Como se ve en la figura de la derecha [LLULL, 1523, f. xxij verso]. También trabaja con más términos, como se ve en la figura de la izquierda [LLULL, 1721, T1.L1.F_4].

5 Publio Porfirio Optaciano fue un poeta latino que vivió a principios del siglo IV. Escribió un *Panegírico de Constantino*, cuyos versos están dispuestos de modo que forman diferentes figuras. Algunas de ellas son cuadrados (el número de letras en cada línea es el mismo), algunas letras están rubricadas de manera que forman modelos o figuras, y al mismo tiempo versos o máximas especiales; otros representan variados objetos (una siringa, un órgano, un altar); otras tienen peculiaridades especiales en cada línea (números de palabra o de letras) mientras que el octavo poema (el *versus anacyclici*) puede leerse hacia atrás sin ningún efecto sobre el significado ni sobre la métrica.

6 John Napier (Neper), barón de Merchiston (1550–1617), matemático escocés, reconocido por ser el primero en definir los logaritmos. También hizo común el uso del punto decimal en las operaciones aritméticas. En 1617 apareció su obra *Rabdologiæ* [NAPIER, 1617], en la que describe el ábaco neperiano.

7 Un anillo de metal que suele tener una espiga o tornillo para clavarlo en parte sólida.

8 Jeremias Drexel S.J. (Hieremias Drexelius or Drechsel) (1581–1638) autor de literatura devocional y profesor de humanidades y retórica. Alemán, nacido en Augsburgo y educado como luterano. Se convirtió al catolicismo en su juventud y fue educado por los jesuitas.

9 Lucrecio Caro, Tito (96 a.C–55 a.C.) *De la naturaleza de las cosas.*

10 Carta de G.W. Leibniz a Johann Bernoulli, Hannover, 22 agosto/1 septiembre, 1698 [OFC, vol. 16a, p. 495].

11 Paradoja de Russell.

12 Es decir, dentro del cálculo, no en la realidad.

13 Está aludiendo discretamente al problema de las mónadas como partículas metafísicas, en contraposición con cualquier partícula física.

14 Se puede consultar [KNOBLOCH, 1980].

15 Leibniz comenta estas ideas en el manuscrito *Specimen analiseos novae qua errores vitantur animus quasi manu ducitur, et facile progressiones inveniuntur,* junio de 1678 [LH, XXXV, 4, 8 Bl.1-2. 1. Bog.2º, 4S].

16 Puede verse el comentario completo en [MORA CHARLES, 1986].

BIBLIOGRAFÍA

AA = LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm (1921-) *Sämtliche Schriften und Briefe*. Hrsg. von der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften und der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen. Berlin (desde 1921, ocho series).

BAUHUIS, Bernhard, SJ (1620) *Epigramatum selectorum libri V*. Antwerpe.

BELAVAL, Y. (1960) *Leibniz. Critique de Descartes.* Paris, Gallimard.

BELAVAL, Y. (1962) *Leibniz. Initiation à sa Philosophie*. Paris, Vrin.

BELAVAL, Y. (1978) "Introduction". **SLS**, pp. 1-2.

CAVALIERI, Bonaventura (1635) *Geometria indivisibilibus promota.* Bolonia.

DUTENS, L. (ed.) (1768) *G.W. Leibnitii Opera Omnia, nunc primum collecta.* Geneva, De Tournes, 6 vols.

ECHEVERRÍA, Javier (ed.) (1989) *G.W. Leibniz*: *Filosofía para princesas*. Madrid, Alianza.

ECHEVERRÍA, Javier (ed.) (1992) *G.W. Leibniz*: *Nuevos ensayos sobre el entendimiento humano*. Madrid, Alianza.

ECHEVERRÍA, Javier (ed.) (2011) *Leibniz (Antología*). Madrid, Gredos.

GBrM = GERHARDT, C.I. (ed.) (1889) *Der Briefwechsel von G.W. Leibniz mit Mathematikern*. Berlin, Mayer & Müller [Hildesheim, Georg Olms, 1962].

GP = GERHARDT, C.I. (ed.) (1875-90) *Die Philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz*. Berlin, Weidmannsche Buchhandlung, 7 vols. [Hildesheim, Georg Olms, 1965]. Vol. IV: 1880.

GUITTON, J. (1962) *Génie de Pascal*. Paris, Aubier.

HACKING, I. (1975) *The emergence of Probability*. Cambridge U.P.

HACKING, I. (1990) *The Taming of Chance*. Cambridge U.P. [Trad. esp. A.L. Bixio, *La domesticación del azar*, Barcelona, Gedisa, 1991].

HÖLZEL, T. (1835) *Neuestes Schlosserbuch.* Praga.

HUYGENS, C. (Hugenius) (1654). *De circuli magnitudine inventa.* En: D. Bierens de Haan *et al.* (eds) (1888-1950) *Œuvres Complètes de Christiaan Huygens publiées par la Société Hollandaise des Sciences*. La Haya, Nijhoff, Vol. XII (1920), p. 65.

HUYGENS, C. (Hugenius) (1657) *De ratiociniis in ludo alea*. En: D. Bierens de Haan *et al.* (eds) (1888-1950) *Œuvres Complètes de Christiaan Huygens publiées par la Société Hollandaise des Sciences*. La Haya, Nijhoff, Vol. XIV (1920), 1-179.

HUYGENS, C. (Hugenius) (1673) *Horologium oscillatorium.* Paris, F. Muguet.

KEPLER, J. (1619) *Harmonices Mundi*. Lincii Austriae.

KNOBLOCH, E. (1974) "The mathematical studies of G.W. Leibniz on combinatorics". *Historia Mathematica*, *1(4)*, 409-430.

KNOBLOCH, E. (1980) *Der Beginn der Determinantentheorie, Leibnizens nachgelassene Studien zum Determinantenkalkül*. Hildesheim, Gerstenberg Verlag.

KNOBLOCH, E. (1993) *De Quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis / Gottfried Wilhelm Leibniz*; *kritisch herausgegeben und kommentiert von Eberhard Knobloch*. "Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse", Dritte Folge, 43. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht, 160 pp.

KNOBLOCH, E. (2000) *G.W. Leibniz, Hauptschriften zur Versicherungsmathematik / herausgegeben von E. Knobloch und J. Matthias Graf von der Schulenburg.* Berlin, Akademie Verlag.

LEIBNIZ, G.W. (1665) *Disputatio juridica de conditionibus.* Lipsae, Typis Johannis Wittigau.

LEIBNIZ, G.W. (1666a) *Dissertatio De Arte Combinatoria.* **AA**, VI, 1, 165-230.

LEIBNIZ, G.W. (1666b) *Disputatio Inauguralis De casibus perplexis in Jure*. Altdorf, Typis Viduæ GeorgI Hagen Universitatis Typogr. [Su Tesis Doctoral].

LH = BODEMANN, E. (ed.) (1895) *Die Leibniz-Handscriften der königlichen öffentlichen Bibliothek zu Hannover*. Hannover, Hand'sche Buchhandlung [Hildesheim, Georg Olms, 1966].

LLULL, R. (Beato) (1523) *Practica compēdiosa artis Raymūdi Lull*. Lyon, Joannis Moylin.

LLULL, R. (Beato) (1721) *Beati Raymundi Lulli Doctoris illuminati et martyris operum tomus I*. Moguntiæ, ex officina typographica Mayeriana, Per Joannem Georgium Häffner.

MORA CHARLES, Mary Sol de (1986) "Leibniz et le problème des partis. Quelques papiers inédits". *Historia Mathematica*, *13(4),* 352-369.

MORA CHARLES, Mary Sol de (2015) *G.W. Leibniz, Escritos Matemáticos*. Editados por Mary Sol de Mora Charles. "Obras Filosóficas y Científicas de G. W. Leibniz", 7A. Granada, Editorial Comares [**OFC**, vol. 7A]. El volumen 7B se publicará en 2015.

NAPIER, J. (Neper) (1617) *Rabdologiæ seu numerationis per virgulas libri duo: cum appendice expeditissimo multiplicationis promptuario, quibus accesit et arithmeticæ localis liber unus*. Lugd. Batavorum.

OFC = LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm (2007-) *Obras Filosóficas y Científicas*. Editadas por la Sociedad Española Leibniz (SEL). Granada, Comares.

PARMENTIER, M. (1995) *L'estime des apparences*. Paris, Vrin. Ed. bilingüe latín-francés. Traducción de los originales en latín por Parmentier.

SLS = MÜLLER, Kurt; SCHEPERS, Heinrich; TOTOK, Wilhelm (Eds.) *Leibniz à Paris (1672-1676). Symposion de la G.W. Leibniz-Gesellschaft (Hannover) et du Centre National de la Recherche Scientifique (Paris) a Chantilly (France) du 14 au 18 November 1976.* Vol. 1. "Studia Leibnitiana Supplementa", XVII. Wiesbaden, Steiner Verlag, 1978.

TATON, R. (1978) "L'initiation de Leibniz à la Géométrie". **SLS**, pp. 103-130.