ÁLGEBRA E GEOMETRIA PROJETIVA ANALÍTICA NA INGLATERRA DOS ANOS 1841-1853

Leandro Silva Dias
Gerard Emile Grimberg
Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro (Brasil)

Resumo

Nosso artigo pretende ressaltar a importância das considerações geométricas que acompanham o desenvolvimento da teoria das equações algébricas e a teoria nascente dos invariantes. Partindo dos trabalhos de Cayley, que precedem as famosas memórias sobre os invariantes, apontamos alguns aspectos que se reencontram nos trabalhos do período 1841-1853 de outros protagonistas dessa teoria. Boole, Cayley, Salmon e Sylvester desenvolvem alguns aspectos comuns que apresentamos na forma de uma "rede" de pesquisa, onde a álgebra sempre é acompanhada de uma "visão" geométrica. Nossa pesquisa leva a considerar uma prática comum entre os matemáticos ingleses deste período trabalhando a teoria das equações algébricas por via das propriedades projetivas das curvas referenciadas por essas equações.

Abstract

Our paper aims to highlight the importance of geometrical considerations accompanying the development of the theory of algebraic equations and the nascent theory of invariants. We point out some aspects of the works of Cayley preceding the famous *Memoirs on Quantics* that are found in the works of Boole, Sylvester, and Salmon in the period 1841-1853. These common aspects are presented as a research "network", where algebra is always accompanied by a geometric "vision". Our research leads us to consider a common practice among English mathematicians of this period working on the theory of algebraic equations by means of the projective properties of the curves defined by these equations.

Palavras-chave: Equações Algébricas, Propriedades Projetivas, Álgebra, Geometria, Matemática, Século XIX, Arthur Cayley.

Keywords: Algebraic Equations, Projective Properties, Algebra, Geometry, Mathematics, 19th Century, Arthur Cayley.

Recibido el 6 de octubre de 2014 – Aceptado el 5 de febrero de 2015

1. Introdução

O século XIX foi marcado por importantes avanços para a geometria, em particular a geometria projetiva. Elaborada a partir de métodos essencialmente sintéticos por Poncelet [1822] e, depois por Möbius [1827] Steiner [1832], a geometria projetiva se torna analítica a partir dos trabalhos de Plücker [1828-1831].

A Inglaterra, após superar o atraso deixado pela tradição de Newton, adota rapidamente os avanços do cálculo diferencial e dos métodos analíticos, conforme Guicciardini [1989, p. 136]. Um grande exemplo disto foi a atuação de Arthur Cayley, o matemático britânico mais produtivo e influente deste período.

No estudo do desenvolvimento da geometria e na abordagem da origem da sua classificação das diferentes geometrias a partir da geometria projetiva, Felix Klein apresenta Cayley como o fundador da conexão entre geometria projetiva e Teoria dos Invariantes, uma teoria iniciada pelo trabalho de Boole [1841]. Segundo Félix Klein [1928, p. 136, tradução nossa[1]] "Cayley foi essencialmente o defensor e, num amplo sentido, o criador da geometria algébrica atual, tanto em seus aspectos da Teoria dos Invariantes, quanto em seus aspectos geométricos". Mas devido ao seu objetivo de tratar da origem de seu método de classificar as diversas geometrias, apenas descreve o conteúdo da Sexta Memória sobre *Quantics*[2] e não fala das outras memórias de Cayley e de seus trabalhos anteriores.

Neste artigo, pretendemos estudar como esta nova visão analítica foi adotada e utilizada na teoria das curvas algébricas por vários matemáticos na Inglaterra, tais como: Boole, Sylvester, Salmon e Cayley, no decorrer dos anos 1841-1853. Ainda, veremos que estes matemáticos possuem pontos comuns em seus artigos que os colocam numa "prática comum". Seguindo esta idéia, apresentamos a construção de uma rede de textos, conforme a metodologia de Brechenmacher [2006, p. 8].

Então, iniciamos apresentando a situação de isolamento em que vivia a matemática britânica até inicio do século XIX. Neste contexto destacamos a atuação da Sociedade Analítica e a inserção de Arthur Cayley nesse processo de atualização de Cambridge.

Depois, mostramos o uso da visão analítica de Cayley, que nos leva aos seus trabalhos do período 1841-1853 –a partir de Cayley [1841], intervalo entre os primeiros artigos que tratam da Teoria dos Invariantes[3] e as Memórias sobre *Quantics*.

Em seguida, analisamos como se desenvolveram os aspectos iniciais da Teoria dos Invariantes, destacando o artigo de George Boole [1841] e as considerações geométricas presentes neste artigo.

Também são apresentados vários aspectos dos desenvolvimentos de J. J. Sylvester e George Salmon. Estes matemáticos contribuíram para o desenvolvimento da Teoria dos Invariantes e são citados também por Felix Klein como protagonistas desta relação entre geometria projetiva e os invariantes.

A partir daí, estudamos a relação entre os métodos de Cayley e os de matemáticos como Boole, Sylvester e Salmon e pensamos encontrar nos trabalhos destes uma prática comum na Inglaterra por aquele período (1841-1853), que culminou em desenvolvimentos posteriores, tais como: as Memórias sobre *Quantics* e o livro de Salmon[4], dentre outros.

Numa última etapa, destacamos os fatores comuns encontrados nos artigos de Cayley, Boole, Sylvester e Salmon, exemplificando com a formação de uma rede de textos, que nos ajuda a esclarecer o desenvolvimento desta prática analítica britânica.

Por fim, apresentamos algumas considerações, com base na leitura dos textos originais e na formação da "rede" de textos.

2. METODOLOGIA DA PESQUISA COM TEXTOS

A nossa metodologia se baseia no que Brechenmacher [2006, p. 8] chama de "rede de textos". Brechenmacher constrói uma rede de textos de diferentes matemáticos, a partir de um ponto inicial, que tratam de diferentes formas a noção de matriz. Ele encontra um período para sua pesquisa, 1850-1930, a partir das leituras dos diversos textos que tratam de matrizes. As interseções entre os usos do conceito de matriz representem os "nós" dessa "rede".

Mesmo que nosso trabalho não visa um período tão longo, iniciamos uma leitura dos artigos de Cayley que trata da álgebra de polinômios homogêneos e geometria projetiva e determinamos o período de 1841 a 1853, entre o início da pesquisa sobre Teoria dos Invariantes e a submissão da Primeira Memória sobre *Quantic*.

Estes artigos apresentam o mesmo tipo de relação em conformidade com o que Brechenmacher [2006, p. 9] chama dos "nós", entrelaçamentos de referências, que foram destacados nas diferentes práticas contidas nos textos que tratam de matrizes. Nossa pesquisa se utiliza destes pontos de confluência a fim de destacar um campo de pesquisa na Inglaterra em meados do século XIX. Assim, nosso trabalho reside em procurar nos diversos textos o uso da álgebra de polinômios homogêneos e algumas propriedades da geometria projetiva como involução de pontos ou retas, por alguns matemáticos britânicos.

Utilizamos também o que Catherine Goldstein [2007, p. 52, grifo do autor, tradução nossa[5]] chama de "campo de pesquisa":

> Nós dizemos que constitui um *campo* (pesquisa), no sentido de que "todas as pessoas que estão envolvidas neste campo têm em comum um certo número de interesses fundamentais, a saber, em tudo o que está ligado à própria existência do campo" , e que se pode descobrir "a presença na obra de vestígios de relações objetivas ... para outros trabalhos, passado ou presente, [do campo].

Ou seja, quando pessoas pertencem a um determinado campo de pesquisa possuem certo número de interesses fundamentais comuns. Nos artigos que analisamos, os pontos fundamentais são a álgebra dos polinômios homogêneos em conjunto com algumas propriedades da geometria projetiva. Com destaque a Teoria dos Invariantes e sua relação com a geometria projetiva.

Pensamos alias que apontar a visão geométrica da álgebra como prática comum possibilita entender melhor o que Marie José Durand-Richard [1996] caracteriza como sendo a Escola algébrica inglesa.

Nossa metodologia consiste, portanto, a partir de uma análise dos textos de Cayley que identificamos como textos preparatórios às grandes memórias sobre os invariantes (1851-1878), em esclarecer como esses primeiros textos fazem parte de uma rede de textos envolvendo outros autores (Boole, Sylvester, Salmon...) e, testemunham de certa comunidade de vista e de práticas. A configuração desta rede de textos permitirá precisar a prática comum que animam estes cientistas.

3. Geometria analítica na Inglaterra do século XIX

O *Philosophiae naturalis mathematica*, obra de Issac Newton publicada em 1687, contém diversos resultados importantes, tais como: as leis de Newton para o movimento dos corpos, os fundamentos da mecânica clássica e a lei da gravitação universal. Nos desenvolvimentos das suas teorias da física, ele se utiliza de demonstrações geométricas, bem ao estilo da geometria sintética de Euclides e Archimedes. Com isso, todo o trabalho apresentado por Newton tem por base a geometria sintética. Guicciardini [1989, p. 37] explicita este fato dizendo que Newton, Halley e Simpson "foram motivados pela genuína crença de que a análise geométrica dos antigos era superior às modernas técnicas do cálculo". Aos "antigos" ele se refere como sendo os trabalhos dos geômetras gregos que foram retomados por predecessores do século XVI.

Maclaurin publica *A Treatise of Fluxions*, de 1742, onde usa os métodos da geometria euclidiana e o método de exaustão de Arquimedes para colocar o cálculo de Newton sobre uma base rigorosa. Neste tratado que ele usa o caso especial da série de Taylor que hoje leva seu nome, série de Maclaurin. Em sua introdução [Maclaurin, 1742, p. 3, tradução nossa[6]], pode-se constatar o papel da geometria como base de validação de resultados:

> Quando a certeza de qualquer parte da geometria é questionada, a maneira mais eficaz para estabelecê-la como verdadeira de forma clara e impedindo controvérsias, é deduzir-la a partir de axiomas ou primeiros princípios de evidência inatacáveis, por demonstrações do tipo rigorosas, conforme a maneira dos geômetras antigos. Este é o nosso objetivo no seguinte tratado; na qual não estamos propondo alterar a noção de fluxão do Senhor Isaac Newton, mas sim explicar e demonstrar o seu método, por deduzi-lo por completo a partir de algumas poucas verdades auto-evidentes, de forma rigorosa: e, em se tratando disto, abstrair a partir de todos os princípios e postulados que se pode exigir de imaginar quaisquer outras quantidades, mas tal como pode ser facilmente concebida ter uma real existência.

Maclaurin deixa claro em sua introdução que ele pretende estabelecer o cálculo dos fluxões de Newton demonstrando geometricamente, utilizando o raciocínio dedutivo. Para sua visão de rigor, a geometria sintética é o firme fundamento para qualquer demonstração, tornando a teoria bem estabelecida.

A questão da escolha da notação de Newton na Inglaterra, em oposição à notação de Leibnitz pelo restante da Europa, não é suficiente para explicar o atraso britânico. Mesmo que a notação de Newton fosse superior à de Leibnitz, os matemáticos britânicos estariam em desvantagem em relação ao restante da comunidade matemática europeia que traduziam e utilizavam os resultados de Newton, Taylor, Maclaurin, dentre outros para sua própria notação. Por outro lado, não houve na Inglaterra divulgação dos trabalhos dos analistas do continente, logo não eram conhecidos os trabalhos de Euler, D'Alembert e Lagrange, por exemplo [Ball, 1889, p. 98].

Somado a isto, o fato da escola de Newton insistir no uso de demonstrações geométricas sintéticas, mesmo após os princípios do cálculo diferencial já terem se tornados universais. Com isso, empregavam os métodos mais criativos possíveis para inserir tais demonstrações sempre que podiam. Daí uma resistência à análise e o critério de rigor britânico estar firmado na geometria sintética.

Este fato condiz com o que Menachem Fisch [1994, p. 249] apresenta como processo de reforma que envolveu as ideias por vezes conflituosas acerca da produção algébrica e sua significação por parte dos matemáticos: George Peacock, William Whewell, William Rowan Hamilton e Augustus De Morgan.

Este novo movimento, identificado como escola analítica, teve início com Robert Woodhouse que foi o primeiro a publicar um trabalho introduzindo as novas notações do cálculo diferencial. Com título: *Principles of analytical calculation*, sua obra foi publicada em 1803, em Cambridge, porém foi severamente criticada pela adoção dos novos métodos.

Em 1812, Peacock, Herschel e Babbage, que seguindo a influência das observações de Woodhouse, concordaram em formar a Sociedade Analítica, com o objetivo de defender o uso dos métodos analíticos e da nova notação do cálculo diferencial na universidade, no lugar da antiga notação de Newton, segundo Ball [1889, p. 120]. Crilly [2011, p. 21] ressalta bem todo esse processo de modernização que passou o ensino em Cambridge.

Duas conquistas marcantes desta sociedade foram: primeiro, em 1816, a publicação da tradução do livro texto *Elementary differential calculus*, de Lacroix; e segundo, em 1817, Peacock introduziu os símbolos do cálculo diferencial no conjunto dos documentos do exame do *senate-house*[7], conforme Ball [1889, p. 120]. Apesar de a tradução de Lacroix manter a notação de Leibnitz, segundo Joan L. Richard [1992, p. 63], foram acrescentadas diversas notas explicativas e acréscimos, até correções quanto à apresentação do cálculo, dentre às quais se destaca que a noção de limite que foi retida na versão inglesa, na versão original de Lacroix era apresentada como base para fundamentar o cálculo. Os ingleses permaneciam com a definição algébrica proposta por Lagrange, demonstrando dificuldades em entender o conceito de limite.

George Peacock foi o mais influente dos membros da escola analítica, grupo que pretendia modernizar o ensino em Cambridge utilizando a notação de Leibnitz e os métodos analíticos desempenhados por Euler e Lagrange. Menachem Fisch [1994, p. 249] apresenta como ponto de partida desta mudança a publicação em 1830 do *Treatise on Algebra*, e o subsequente esforço por substituir as fluxões de Newton pelos novos métodos do cálculo. Com isto, Peacock foi um dos responsáveis por retirar os matemáticos britânicos desta situação de isolamento em relação ao restante da Europa.

Além disso, Menachem Fisch [1999, p. 140] detalha o impacto do *Treatise on Algebra* de Peacock e de seu *Report on the Recent Progress and Present State of Certain Branches of Analysis* de 1834 para as futuras produções matemáticas inglesas. Este último sendo responsável por uma mudança na visão da própria matemática, em particular com o grau de importância e de rigor para com a álgebra na sociedade inglesa.

Dentre as outras inovações da Sociedade Analítica, pode-se destacar o aumento progressivo de trabalhos em geometria analítica. Segundo Ball [1889, p. 129], que viveu na segunda metade do século XIX, ou seja, logo após esse processo, o único trabalho que introduzia o tema em Cambridge, no início do século XIX, se tratava da Álgebra de Wood, que possuía um apêndice de aproximadamente trinta páginas no final do livro. Cujo título é: *On the application of álgebra to geometry*, e continha as equações da reta, da elipse, e de poucas outras curvas. Logo, a necessidade de um livro texto em geometria analítica foi primeiramente suprida pelo trabalho de Henry Parr Hamilton em 1826.

Henry Parr Hamilton (1794-1880) graduou-se no Trinity College[8], B.A.[9] em 1816. Exerceu vários ofícios universitários, tomando o grau de M.A.[10] em 1819. O livro texto de Henry Parr Hamilton, *The Principles of Analytical Geometry Designed for use of students in the University*, como induz o próprio título, vinha suprir uma lacuna no ensino de geometria analítica em Cambridge. Em seu prefácio, Hamilton deixa claro que seu trabalho visa atrair a atenção dos estudantes a este ramo da ciência que ele considera extensamente útil para os superiores departamentos de matemática [Hamilton, 1826, p. iii].

Sua abordagem detalhada possui duas partes: uma para geometria de duas dimensões e outra para geometria de três dimensões. Incluindo transformações dos eixos coordenados e sólidos de revolução, além da apresentação formal da reta, parábola, elipse e hipérbole e das curvas e superfícies quaisquer de segunda ordem.

No capítulo XI de sua obra encontramos transformações de coordenadas no espaço, tema que nos interessa uma vez que Boole retoma essa ideia em seu artigo de 1841 sobre transformações lineares. Segue primeira proposição do livro de Hamilton [1826, p. 245, tradução nossa[11]]:

Prop. 1. Para passar de um sistema de eixos oblíquos para outro, tendo a mesma origem.

Dados *x, y, z* e *x', y', z'* serem as coordenadas de um ponto a que se referem nos eixos primitivo e novo, respectivamente.

Se o mesmo raciocínio for aplicado ao plano, que foi utilizado (72) no caso de uma reta, pode ser provado que as coordenadas primitivas são funções lineares das novas; vamos supor, por conseguinte,

$$x = mx' + ny' + pz',$$
$$y = m'x' + n'y' + p'z',$$
$$z = m''x' + n''y' + p''z',$$

nas quais as constantes *m, n, p …* tem que ser determinadas.

A transformação linear das variáveis era abordada de forma clara com a interpretação geométrica de mudança dos eixos coordenados. Hamilton [1826, p. 251, tradução nossa[12]] acrescenta em sua observação, feita após desenvolver alguns de seus corolários:

> Observação. A transformação de um sitema de coordenadas retangular para outro é subserviente a várias perguntas importantes nos altos departamentos de Mecânica. Entre os diferentes métodos que têm sido propostos para executar esta operação, uma dada acima é o mais geralmente utilizado. Foi utilizada pela primeira vez por Euler, e foi subsequentemente adotado por Lagrange e de Laplace.

Dois anos mais tarde, Hamilton publica *An analytical system of conic sections*, que foi substituído somente pelo trabalho de John Hymers, *Conic sections* de 1837, segundo Ball [1889, p. 130]. Peacock também contribui com o ensino de geometria analítica num trabalho que conforme Ball [1889, p. 130] foi emitido anonimamente, em 1833, com o título: Syllabus *of trigonometry, and application of álgebra to geometry*, possuindo setenta páginas destinadas à geometria analítica. Houve uma segunda edição em 1836, antes do trabalho de Hymers.

O método de exposição mudou, como se pode notar a partir da nova geração de matemáticos britânicos como Arthur Cayley, porém o uso de uma visão geométrica perdurou como um método de invenção. Ou seja, os métodos da analise e do cálculo diferencial passaram a ser aceitos como legítimos no processo de demonstrações e validações dos resultados, mas o pensamento geométrico permanece guiando o raciocínio matemático.

Esses fatos explicam o interesse do primeiro artigo de Cayley, *On a Theorem in the Geometry of Position* [Cayley, 1841], de fazer uso da relação álgebra e geometria, o que está em consonância com o movimento trazido pela escola analítica.

3.1. Os artigos de Cayley

Para avaliar a influência de Chasles e Plücker sobre Cayley é interessante observar o comentário de um contemporâneo, Mansion [1873, p. 314] que ressalta a importância do trabalho de Plücker sobre coordenadas homogêneas e o tratamento analítico das propriedades projetivas. Destaca duas vantagens deste novo método: a idéia das curvas e das superfícies mais gerais e os imaginários que surgem nas equações algébricas. Plücker fez belas aplicações deste método para estudar curvas de terceira ordem, segundo Mansion [1873, p. 314]. Jeremy Gray [2010, p. 160] destaca a importância do trabalho de Plücker, de 1830, para a teoria das coordenadas homogêneas, ressaltando a influência que este matemático recebeu da geometria projetiva presente no Tratado de Poncelet [PLÜCKER, 1830, p.2]. Mansion ainda menciona Möbius e seu cálculo baricêntrico, destacando o fato que depois as principais ideias foram sintetizadas por Steiner e com desenvolvimentos de Chasles, em seu *Aperçu Historique*, conforme Mansion [1873, p. 315].

Este trabalho de Chasles exerceu influência sobre as pesquisas de Cayley, segundo Crilly [2006, p. 65]. Podem-se citar como exemplo os primeiros artigos de Cayley que trata de curvas algébricas: *On the intersection of curves* (1843) e *On the theory of algebric curves* (1843). No primeiro artigo, Cayley cita um teorema presente no *Aperçu Historique* que Chasles usa para demonstrar o teorema de Pascal. O teorema como apresentado por Cayley [1843, p. 25, tradução nossa[13]]: "Se uma curva de terceira ordem passa através de oito pontos de interseção de duas curvas de terceira ordem, ela passará através do nono ponto de interseção".

Cayley [1843, p. 26] estende a definição para curvas de ordem "*m*" e "*n*" e relaciona aos pontos de interseção.

Nas *Nouvelles remarques sur les courbes Du troisième ordre*, de 1845 do jornal de Liouville, Cayley trata cônicas e polinômios homogêneos. Cayley prossegue a sua investigação das curvas de terceira ordem, iniciadas em seu artigo *Mémoire sur les courbes Du troisième ordre* (1844), acrescentado algumas definições. Ao apresentar o teorema IV ele inicia o que chama de "demonstração analítica" da primeira parte deste teorema. Abaixo o quarto teorema [CAYLEY, 1845, p. 191, tradução nossa[14]]:

> Teorema IV. O lugar geométrico de um ponto P, que se move de maneira que as tangentes formadas por este ponto a três cônicas dadas qualquer formam sempre um feixe em involução, é uma curva do terceiro grau que passa pelos dezoito centros de homologia das cônicas tomadas dois a dois, estes centros formando seis a seis dos quadriláteros inscritos correspondentes.

Cayley [1845, p. 192] propõe uma demonstração analítica considerando o que ele chama de "coordenadas indefinidas de um ponto" que ele representa como: ξ/ζ, η/ζ. E para as equações das cônicas utiliza equações do tipo: $\Upsilon = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2F\eta\zeta + $ $+ 2G\zeta\xi + 2H\xi\eta$, fazendo: $\Upsilon = 0$, $\Upsilon' = 0$, $\Upsilon'' = 0$.

Observamos que trabalha de fato sobre as coordenadas homogêneas de um ponto (ξ, η, ζ), assim como aparece nas equações das cônicas. Há nos trabalhos de Cayley certo vai e vem entre o uso de coordenadas homogêneas e das coordenadas cartesianas associadas.

Com efeito, depois das considerações acima, ele toma x/z, y/z para as coordenadas do ponto P e apresenta as seguintes expressões:

$$U=Ax^2+By^2+Cz^2+2Fyz+2Gzx+2Hxy,$$

$W=Ax\xi+By\eta+Cz\zeta+F(y\zeta+\eta z)+G(z\xi+\zeta x)+H(x\eta+y\xi)$, onde $W=0$ é a equação da reta polar do ponto P. Então Cayley coloca a expressão das duas tangentes a uma das cônicas:

$$U\Upsilon-W^2=0.$$

Ao desenvolver a equação das tangentes encontra uma equação um tanto extensa que ele reduz ao utilizar simbolismos para representar partes da equação e coloca a origem no ponto P, reduzindo a equação das tangentes à forma mais simples: $\mathfrak{A}\xi^2+\mathfrak{B}\eta^2-2\mathfrak{D}\xi\eta=0$. Para as outras duas cônicas: $\mathfrak{A}'\xi^2+\mathfrak{B}'\eta^2-2\mathfrak{D}'\xi\eta=0$ e $\mathfrak{A}''\xi^2+\mathfrak{B}''\eta^2-2\mathfrak{D}''\xi\eta=0$. Daí se utiliza da relação que garante que estas tangentes estejam em involução:

$$\begin{bmatrix}\mathfrak{A} & \mathfrak{B} & \mathfrak{D}\\ \mathfrak{A}' & \mathfrak{B}' & \mathfrak{D}'\\ \mathfrak{A}'' & \mathfrak{B}'' & \mathfrak{D}''\end{bmatrix}=0$$

A demonstração prossegue utilizando propriedades do determinante e Cayley conclui sua demonstração encontrando a equação do terceiro grau que representa o lugar geométrico do ponto conforme descrito na primeira parte do teorema IV do artigo.

Cayley explicita a fonte que o inspira em seus trabalhos com cônicas e coordenadas homogêneas no artigo *On geometrical reciprocity* de 1848. Neste artigo, Cayley inicia tratando do "teorema fundamental da reciprocidade", que trata da dualidade no plano. Trabalha relações importantes nas cônicas, cada uma destas possuindo um teorema dual. E destaca Plücker como a fonte dos teoremas apresentados. Cayley [1848, p. 380, tradução nossa[15]] diz:

> As construções anteriores têm sido tomadas inteiramente do System der Analytischen Geometrie de Plücker, capítulo 3, Allgemeine Betrachtungen über Coordinaten-bestimmung. Tenho acrescentado demonstrações analíticas de alguns dos teoremas em questão.

Estes artigos sinalizam que o trabalho geométrico com coordenadas homogêneas de Cayley segue dos desenvolvimentos de Plücker. Apesar de Cayley se utilizar deste sistema de coordenadas sem nenhuma justificativa, aparentando ser uma prática matemática comum.

Pode-se constatar que Cayley pesquisava sobre as formas quadráticas, através de polinômios homogêneos, que nas memórias a partir de 1853 Cayley denomina por *quantics*, e estes com claras relações geométricas. As transformações lineares das variáveis também sendo uma constante em suas pesquisas.

Visto os principais pontos que Cayley se utiliza em seus artigos, pode-se comparar com os traços comuns de alguns matemáticos britânicos.

3.2. George Boole, a visão geométrica no embrião da Teoria dos Invariantes

Karen Parshall [1989, p. 160], em seu artigo que trata da historia da Teoria dos Invariantes do século XIX, apresenta as origens da abordagem britânica desta teoria através da inspiração que George Boole obteve de suas leituras do *Méchanique Analytique* de Lagrange [1788].

O *Mécanique Analytique* de Lagrange [1788] tratou, na sua segunda parte, de título *La Dynamique*, das substituições lineares das variáveis de polinômios homogêneos, a fim de estudar o movimento de corpos suspensos. Lagrange [1788, p. 395] verifica a transformação linear:

$$p=p'x+p''y+p'''z,$$
$$q=q'x+q''y+q'''z, \text{ e}$$
$$r=r'x+r''y+r'''z.$$

Ele considera a relação $p^2+q^2+r^2=x^2+y^2+z^2$ e seis equações de condição.

Em seu artigo *Exposition of a General Theory of Linear Transformations – Part II*, George Boole [1841] introduz o tema da Teoria dos Invariantes através de transformações lineares das variáveis, trabalhando igualmente com a ideia de mudança do sistema de coordenadas.

Crilly [1986, p. 242, tradução nossa[16]] destaca a importância deste artigo de Boole, mostrando a influência que exerceu sobre Cayley:

> Um que exerceu influência sobre o jovem Cayley foi George Boole (1815-1864). Na Teoria dos Invariantes Boole encontrou um tema que apresentou como um “amplo campo de investigação e de descoberta” e em seu [1841] indicou que tinha aplicações em geometria algébrica e na solução de equações polinomiais.

Pode-se perceber que o uso da álgebra aplicada à geometria estava gerando trabalhos importantes. Este artigo de Boole demonstra de forma clara que os desenvolvimentos algébricos possuíam uma visão geométrica que guiava a produção deste matemático.

Mas o que nos interessa, além de uma apresentação do início da Teoria dos Invariantes, é o fato deste trabalho trazer uma interpretação geométrica para essas transformações. E Boole explicita essa interpretação, mostrando sua importância. Num exemplo, Boole [1841, p. 11] seleciona o caso abaixo:

$$ax^2+2bxy+cy^2=a'x'^2+2b'x'y'+c'y'^2,$$
$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=A'x'^2+2B'x'y'+C'y'^2.$$

Neste exemplo tem-se: $\theta(Q)=AC-B^2$, $\theta(q)=ac-b^2$, $\theta(R)=A'C'-B'^2$, $\theta(r)=a'c'-b'^2$, que seriam as soluções pelo método de eliminação das variáveis. Boole aplica seu método:

$$\frac{\theta(Q)}{\theta(q)}=\frac{\theta(R)}{\theta(r)} \text{ e}$$

$$\frac{(a\frac{d}{dA}+b\frac{d}{dB}+c\frac{d}{dC})\,\theta(Q)}{(\theta(q)}=\frac{(a'\frac{d}{dA'}+b'\frac{d}{dB'}+c'\frac{d}{dC'})\,\theta(R)}{\theta(r)}$$

realizando as substituições e resolvendo as diferenciações:

$$\frac{AC-B^2}{ac-b^2}=\frac{A'C'-B'^2}{a'c'-b'^2} \text{ e}$$

$$\frac{aC-2bB+cA}{ac-b^2}=\frac{a'C'-2b'B'+c'A'}{a'c'-b'^2}$$

Em relação à primeira igualdade, $ax^2+2bxy+cy^2=a'x'^2+2b'x'y'+c'y'^2$ (39), Boole [1841, p. 11, tradução nossa[17]] faz a seguinte consideração:

> Isto corresponde à ideia geométrica de uma alteração das coordenadas, a partir de um par de eixos x, y, que faz um ângulo θ, para um outro par x', y', cujo ângulo de inclinação é θ', então (39) torna-se
>
> $$x^2+2xy\cos\theta+y^2=x'^2+2x'y'\cos\theta'+y'^2$$
>
> $$\therefore a=1, b=\cos\theta, c=1, a'=1, b'=\cos\theta', c'=1.$$
>
> Desde (41) e (42), temos o seguinte
>
> $$\frac{AC-B^2}{(\sin\theta)^2}=\frac{A'C'-B'^2}{(\sin\theta')^2},$$
>
> $$\frac{A-2B\cos\theta+C}{(\sin\theta)^2}=\frac{A'-2B'\cos\theta'+C'}{(\sin\theta')^2}.$$

Logo, desde a primeira parte de seu trabalho sobre transformações lineares, Boole se utiliza do fato geométrico dessas transformações poderem ser interpretados como uma mudança dos eixos coordenados. Este fato ainda foi destacado em outro exemplo no mesmo artigo, onde:

$$\begin{aligned}&ax^2+by^2+cz^2+2dyz+2exz+2fxy\\&=a'x'^2+b'y'^2+c'z'^2+2d'y'z'+2e'x'z'+2f'x'y',\end{aligned}$$

pelo mesmo processo, corresponde a uma mudança do sistema de eixos x, y, z, para o x', y', z'; onde se as inclinações entre x e y, y e z, x e z são, respectivamente, iguais a χ, ϕ, ψ, e as inclinações para o outro sistema de eixos, x' e y', y'e z', x'e z', sendo, respectivamente, iguais a χ', ϕ', ψ', então:

$$\begin{aligned}&x^2+y^2+z^2+2yz\cos\phi+2xz\cos\psi+2xy\cos\chi\\&=x'^2+y'^2+z'^2+2y'z'\cos\phi'+2x'z'\cos\psi'+2x'y'\cos\chi'\end{aligned}$$

Este tipo de transformação linear quando se trata de coordenadas homogêneas são as transformações projetivas. Isso mostra o quanto um assunto tão puramente algébrico como a Teoria dos Invariantes nascente - assim o descreve Crilly [2006] - recebe desde o início aspectos geométricos relevantes.

3.3. J. J. Sylvester e George Salmon

A partir de George Boole pode-se determinar o que Crilly [2006, p. 177] chama de "*The Invariant Trinity*" que seria formado por três matemáticos britânicos: Cayley, Sylvester e Salmon. Realmente pode-se constatar que a Teoria dos Invariantes foi um tema comum e de grande importância para a pesquisa destes matemáticos.

O trabalho destes matemáticos sobre Teoria dos Invariantes segue uma visão geométrica anterior que será destacada logo a seguir. No período de 1845 a 1854, percebe-se que estes matemáticos trabalharam sobre teorias algébricas, como: transformações lineares e a teoria dos polinômios homogêneos, com um pensamento geométrico guiando o desenvolvimento destas teorias.

Sylvester, por exemplo, trata das relações entre duas cônicas em seu artigo de 1850, *On the intersections, contacts, and other correlations of two conics expressed by indeterminate coordinates*. Neste artigo, Sylvester [1850a] se utiliza de polinômios homogêneos do segundo grau e trata das cônicas utilizando as coordenadas projetivas para analisar as relações entre duas cônicas. Um fato a ser destacado é a utilização da definição de interseção de duas cônicas de Cayley. Cayley afirmou que a interseção de duas cônicas projetivas formava sempre um quadrângulo. Sylvester [1850a, p. 119, tradução nossa[18]] se utiliza deste resultado:

> Adotando excelente designação do Sr. Cayley, onde os quatro pontos de intersecção das duas cônicas é chamado de quadrângulo. Este quadrângulo terá três pares de lados; as interseções de cada par, a partir de princípios de analogia, eu os chamo de vértices do quadrângulo.

Sylvester [1850a, p. 120, grifo do autor, tradução nossa[19]], ainda no mesmo artigo, considera o fato da interseção entre as cônicas poder possuir pontos imaginários, ou seja, ele considera as soluções no conjunto dos números complexos. Ele traz as interpretações geométricas de cada caso:

> Se todos os quatro pontos de intersecção do quadrângulo são reais, os três vértices e os três pares de lados são todos reais. Se apenas dois pontos do quadângulo são reais, um vértice e um dos três pares de lados serão reais; os outros dois vértices e dois pares de lados sendo imaginários. Se todos os quatro pontos do quadrângulo não são reais, um par de lados será real e os outros dois pares imaginários, como no último caso; mas todos os três vértices permaneceram reais, como no primeiro caso. Assim, temos um critério direto e simples para distinguir o caso de intersecção *mista* de intersecção totalmente real ou totalmente imaginária, ou seja, que a equação cúbica das raízes das quais as coordenadas dos vértices são funções lineares reais terá *um par de raízes imaginárias* . Esta é a única e inequívoca condição exigida.

Isto deixa claro que o trabalho de Sylvester neste artigo possui claras perspectivas geométricas, apesar de não possuir figuras que representem esses casos possíveis de interseção de duas cônicas. Este fato não ocorre apenas neste artigo e pode ser considerado uma prática desses matemáticos britânicos, ou seja, eles não apresentam figuras para exemplificar as relações geométricas. Pode-se dizer que isto se deve a herança da Sociedade Analítica, onde a geometria sintética deixou de ser padrão de rigor nas demonstrações.

Brechenmacher [2006, p. 10], ao estudar a história das matrizes, destaca este artigo como aquele onde Sylvester apresenta características importantes no desenvolvimento da teoria dos determinantes. Ele destaca a visualização geométrica apresentando figuras que representam os casos de interseção que Sylvester [1850a] apresenta em seu primeiro artigo de 1850.

O desenvolvimento de Sylvester [1850a] se desencadeia na interpretação da seguinte relação polinomial $U+\mu V = 0$, onde U e V são as expressões das duas cônicas dadas. Suas considerações durante este artigo demonstram as condições para que as interseções entre as cônicas possam ser todas reais, ou dois pares reais e dois pares imaginários, ou, por último, todos os pares imaginários.

Após este artigo, Sylvester [1850b] escreve outro artigo tratando analiticamente propriedades projetivas, como: *An instantaneous demonstration of Pascal's theorem by the method of indeterminate coordinates*, no *Philosophical magazine*, também em 1850. Seque-se a este artigo um onde ele trata da Teoria da Eliminação[20], *On a new class of theorems in elimination between quadratic functions*, Sylvester [1850c].

Em 1851, Sylvester publica mais dois artigos que tratam de cônicas e funções homogêneas que são: *On the intersections of two conics* e *On certain general properties of homogeneous functions*. O primeiro artigo, Sylvester [1851a], é uma extensão dos artigos anteriores que utilizam a expressão $U+\mu V = 0$ para determinar a interseção entre cônicas, já o segundo artigo, Sylvester [1851b], traz alguns desenvolvimentos ligados a Teoria da Eliminação. Neste artigo Sylvester [1851b, p. 171] considera que as funções polinomiais representam e são representados por um lócus, dando assim uma clara interpretação geométrica ao seu trabalho, da mesma forma como Cayley fez em suas Memórias sobre *Quantics*.

Em seu artigo *On the general theory of associated algebraical forms*, Sylvester apresenta a nova nomenclatura dos principais componentes da Teoria dos Invariantes. Inclusive é neste artigo [Sylvester, 1851c] que a teoria recebe este nome, conforme Sylvester utiliza durante seu artigo.

Salmon, por sua parte, utiliza de polinômios homogêneos e trata de superfícies e propriedades projetivas em seu artigo de 1846, *On the degree of a surface reciprocal to a given one*. Neste artigo, dentre as várias relações apresentadas, destacamos a seguinte propriedade: "A projeção em algum plano da interseção de duas superfícies do segundo grau será em geral uma curva do quarto grau tendo dois pontos duplos" [Salmon, 1846, p. 68, tradução nossa[21]].

Salmon publica dois artigos no *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, *On The Condition that a Plane should Touch a Surface along a Curve Line* [Salmon, 1848a] e *On the Number of Normals which Can Be Drawn from a Given Point to a Given Surface* [Salmon, 1848b]. Estes fazem referência ao uso de equações diferenciais e abordam uma visão geométrica através dos desenvolvimentos algébricos apresentados.

Salmon também escreveu artigos que relacionam as propriedades projetivas à álgebra dos polinômios homogêneos, como *Théorèmes sur les courbes de troisième degré* [Salmon, 1851a] e *Sur La formation de l'équation de La courbe reciproque à une courbe donnée* [Salmon, 1851b].

4. Alguns pontos comuns dessa rede de pesquisa britânica

Boole influenciou fortemente os trabalhos de Cayley e consecutivamente os de Sylvester e Salmon, conforme Crilly [1986, p. 241]. Como temos apresentado, o tema comum que os vários textos possuem é: o tratamento da álgebra de polinômios homogêneos com uma visão geométrica ligada as propriedades projetivas dessas curvas que estes polinômios representam. Logo, nosso campo de pesquisa na Inglaterra fica bem determinado por esta característica comum, assim como Goldstein [2007, p. 52] define.

O que se pode observar é que os textos se comunicam, uma vez que, um determinado artigo de Cayley, por exemplo, cita um de Salmon; desta relação entre os diversos artigos montamos alguns "fios" desta rede de pesquisa, conforme Brechenmacher [2006] fez para representar as diversas práticas relacionadas as matrizes. Abaixo alguns exemplos dessa "comunicação" entre textos.

Sylvester [1850a, p. 119] utiliza-se de um importante resultado ao qual ele cita um artigo de Cayley como referência. Este teorema trata das possíveis interseções entre cônicas se utilizando de pontos reais e complexos. O trabalho de Cayley, referenciado por Sylvester, *Sur Le problème des contacts*, de 1850, afirma que a interseção de duas cônicas forma um quadrângulo.

Abaixo a afirmação de Cayley [1850, p. 522, tradução nossa[22]] em seu artigo de 1850:

> Duas cônicas quaisquer se cortam em quatro pontos que formam um quadrângulo inscrito as duas cônicas. Elas possuem quatro tangentes comuns que formam um quadrilátero circunscrito às duas cônicas. O quadrângulo inscrito e o quadrilátero circunscrito possuem mesmos centros e mesmos eixos.

Este fato foi utilizado por Sylvester em seus desenvolvimentos, conforme apresentamos na seção anterior. Logo, Sylvester assim como Cayley pesquisava as relações geométricas das cônicas através de polinômios homogêneos.

Salmon também trabalhou sobre o assunto das cônicas e sua relação algébrica como se pode ver em seu artigo *On The Degree of a surface reciprocal to a given one*, de 1846 [Salmon, 1846. p. 65]. Cayley [1849, p. 446] cita este trabalho de Salmon em seu *On the triple tangent planes of surfaces of the third order*. Tanto Cayley quanto Salmon pesquisaram o método do polar recíproco e destacam o caso onde a superfície é de segunda ordem.

Salmon também considera teoremas nas curvas de terceira ordem como Cayley e relaciona à geometria projetiva de retas e cônicas. Em seu artigo *Théorèmes sur les courbes de troisième degré* (1851), apresenta três teoremas, sendo que no terceiro se utiliza de uma definição de Plücker. Neste artigo, Salmon [1851a] utiliza polinômios homogêneos relaciona a interseções de cônicas dentre outras propriedades ligadas à geometria projetiva.

As diversas comunicações entre os diferentes textos podem ser representadas graficamente, conforme na figura 1. As setas demonstram essa comunicação, onde a origem (início, a saída) é o texto que fez referência ao artigo da extremidade (ponta da seta). O eixo horizontal é formado pelos diversos assuntos contidos nesses artigos e o eixo vertical o ano de submissão do artigo.

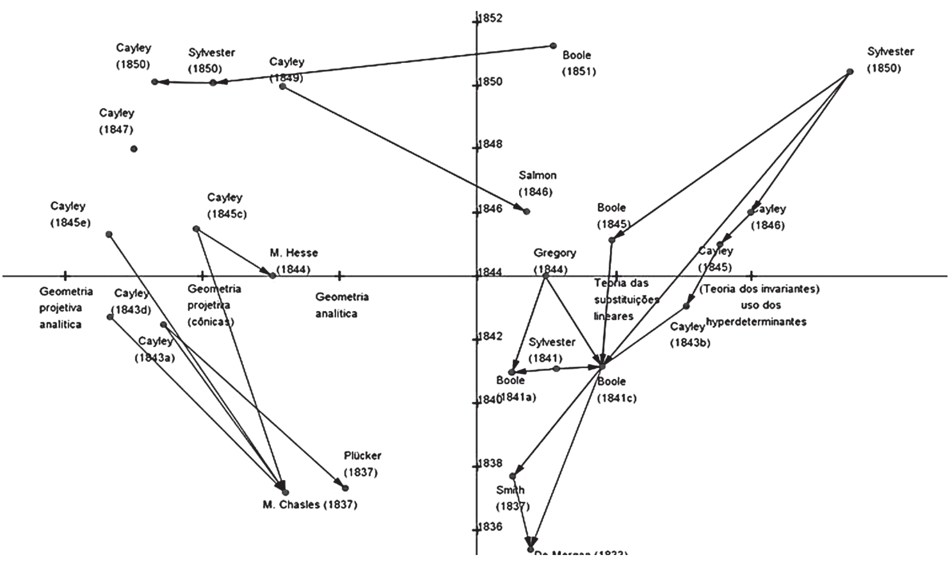

Figura 1: Rede de textos

Dentre os vários aspectos que se pode realçar a partir deste gráfico, seguem-se dois importantes.

Primeiro, destaca bem a origem da abordagem analítica da geometria projetiva. Com efeito podemos constatar que artigos de Cayley (parte esquerda do gráfico) fazem referência a esses dois autores, Plücker [1837] e M. Chasles [1837]. Isto torna claro o fato de que o pensamento algébrico de Cayley é apoiado por uma visão geométrica. Assim um polinômio homogeneo de três variáveis se torna um objeto geométrico do plano projetivo, uma cónica, e todas as propriedades projetivas das cónicas irão se traduzir em relações algébricas que norteiam as pesquisas de Cayley.

Segundo aspecto é a clara infuência do artigo de George Boole [1841] *Exposition of a General Theory of Linear Transformations*, que é considerado o embrião da Teoria dos Invariantes, sobre os demais artigos posteriores. É nesta configuração do gráfico (parte direita do gráfico) que podemos apreender a prática comum destes cientistas. Nesta parte do gráfico, relaciona ainda Cayley, Sylvester, Boole e Salmon o que vem confirmando essa comunidade de vistas e práticas. Alem disso, os artigos posteriores (parte acima do gráfico) vem confirmando a perenidade desta comunidade de vistas.

Nossos resultados são coerentes com que Joan L. Richards [1986, p. 308] apresenta, ou seja, que Cayley, Sylvester e Salmon apresentam uma forte intensão de relacionar a álgebra dos invariantes com a teoria e as técnias da geometria projetiva. E isto fica muito claro com os desnvolvimentos das famosas Mémorias sobre os *Quantics* de Cayley, com destaque para as Primeira, Quinta e Sexta Memórias, onde o caráter geométrico dos invariantes fica muito bem estabelecido. Aliás, a Sexta Memória possui uma importância ainda maior, pois através do desenvolvimento da teoria das distancias, Cayley mostrou que a geometria euclidiana seria um caso particular da geometria projetiva (descritiva nos termos de Cayley), esta sendo então a mais geral. Esse resultado foi grandemente inovador para meados do século XIX, visto que a geometria projetiva, que surgia neste período, era considerada derivada da geometria euclidiana.

5. Considerações finais

Alguns pontos podem ser destacados após nossa investigação.

A leitura dos artigos de Cayley mostrou que a relação entre álgebra dos polinômios homogêneos e geometria projetiva é uma constante em suas pesquisas no período 1841-1853.

A partir de Cayley constatamos a realidade de uma rede de matemáticos britânicos que possuem esta prática comum. Conseguimos definir alguns traços desta prática comum, as pesquisas algébrica e analítica destes cientistas são inseparáveis da visão geométrica que os animam, assim os conceitos da geometria norteiam os cálculos e os resultados obtidos considerando a álgebra dos polinômios homogêneos. Neste processo, os métodos de Plücker, geometria analítica e projetiva, providenciam relações muito ricas entre conceitos da geometria projetiva e propriedades algébricas dos polinômios homogêneos.

Apesar da clara utilização de aspectos geométricos, os diversos textos não apresentam figuras, nem mesmo para exemplificar. O que pode ser compreendido como uma mudança de postura a partir da Sociedade Analítica, retirando a geometria sintética da posição de único padrão de rigor, mas permanecendo uma visão geométrica que ajuda no raciocínio matemático das diversas teorias algébricas. Aliás, a visão geométrica é mais do que um ferramenta, pois se, de um lado, ela influencia diretamente a interpretação dos resultados da Teoria dos Invariantes, de outro lado, irá revolucionar a relação da geometria projetiva com as geometrias euclidiana e não euclidianas, com a leitura de Felix Klein dos artigos de Cayley sobre os *Quantics*.

Assim, os artigos anteriores de Cayley e de seus contemporâneos nos ajuda a entender o campo de pesquisa dessa rede de matemáticos britânicos que culminou em trabalhos como as Memórias sobre *Quantics* de Cayley e *A Treatise on the higher plane curves* de Salmon. Este aspecto torna evidente o caráter geométrico de todas essas memórias de Cayley. Assim, se Felix Klein apenas menciona a Sexta Memória quando estuda o desenvolvimento da geometria até a sua própria classificação das geometrias a partir da geometria projetiva, ele faz o grande atalho deixando de lado uma parte importante da obra de Cayley que o levou à famosa Sexta Memória.

Notas

1. Cayley was primarily the champion and, in a far-reaching sense, the creator of present-day algebraic geometry, in both its invariant-theoretic and geometric aspects.
2. *Quantic* foi a nomenclatura utilizada por Cayley para denominar polinômios homogêneos de coeficientes racionais de um dado grau. Exemplo: a *quantic* $ax^2+bxy+cy^2$ é uma quádrica binária.
3. Por exemplo, um invariante da forma binária $Q(x,y)$ de grau n é a função $I(a)=I(a_0.....a_n)$, dependendo dos seus coeficientes $a=(a_0.....a_n)$, que, a menos do determinante dos coeficientes da substituição linear, permanecem inalterados sob uma dada transformação linear: $I(a)=(l.m'-l'.m)^k.I(a')$. Onde $a'=(a'_0.....a'_n)$ são os coeficientes do polinômio transformado e K é chamado o "peso" do invariante.
4. *A Treatise on the higher plane curves*, de 1879. Teve participação de Cayley, principalmente na elaboração do capítulo 1 que foi creditado a Cayley. Primeiro livro de Salmon foi *A treatise on conic sections,* de1848.
5. We argue that it constituted a (research) *field*, in the sense that "all the people who are engaged in [this] field have in common a certain number of fundamental interests, viz., in everything that is linked to the very existence of the field," and that one can uncover "the presence in the work of traces of objective relations … to other works, past or present, [of the field]".
6. When the certainty of any part of geometry is brought into question, the most effectual way to set the truth in a full light and to prevent disputes, is to deduce it from axioms or first principles of unexceptionable evidence, by demonstrations of the strictest kind, after the manner of the ancient geometricians. This is our design in the following treatise; wherein we do not propose to alter Sir Isaac Newton's notion of a fluxion, but to explain and demonstrate his method, by deducing it at length from a few self-evident truths, in that strict manner: and, in treating of it, to abstract from all principles and postulates that may require the imagining any other quantities but such as may be easily conceived to have a real existence.
7. Por esse período Peacock foi eleito professor "*moderator*", cuja função era preparar os exames das disciplinas de matemática.

8. Cambridge é formada pelos *colleges* que são organismos com administração própria, que tinham como principal função cuidar da residência dos alunos e de algumas questões acadêmicas como: prover tutores aos alunos, ceder espaço físico para atividades acadêmicas, prover biblioteca, dentre outras. Trinity College se enquadra nestas características, dando condições aos alunos para realizarem os exames que eram aplicados pelo senado de Cambridge.
9. Bachelor of Arts, a menor graduação de uma universidade.
10. Master of Arts, este grau é obtido após o bacharel em artes. Originalmente, depois dos "exercícios de mestre", onde o candidato respondia a três questões de membros que possuíam M.A., duas questões de membros B.A. e de uma declaração. Em Cambridge, o grau de mestre era conferido àqueles que possuíam o mínimo de seis anos após o final de sua primeira residência, salvo membros que possuíam o título de *fellow* e aos agentes universitários, que possuíam o mínimo de três anos.
11. Prop. 1. To pass from one system of oblique axes to another, the origin being the same.

    Let x, y, z and x', y', z' be the co-ordinates of a point referred to the primitive and new axes respectively.

    If the same reasoning be applied to the plane, which was used (72) in the case of the straight line, it may be proved that the primitive co-ordinates are *linear* functions of the new ones; we shall assume, therefore,

    $$x=mx'+ny'+pz',$$
    $$y=m'x'+n'y'+p'z',$$
    $$z=m''x'+n''y'+p''z',$$

    in which the constants $m, n, p \ldots$ are now to be determined.
12. Observation. The transformation of co-ordinates from one rectangular system to another is subservient to various important inquiries in the higher departments of Mechanics. Among the different methods which have been proposed for executing this operation, the one above given is the most generally used. It was employed for the first time by Euler, and was afterwards adopted by Lagrange and Laplace.
13. If a curve of third order pass through eight of the points of intersection of two curves of third order, it passes through the ninth point of intersection.
14. Théorème IV. Le lieu d'um point P qui se meut de maniére que les tangentes menées par ce point à trois coniques données quelconques, forment toujours un faisceau en involution, est une courbe du troisième ordre qui passe par les dix-huit centres d'homologie des coniques prises deux à deux, ces centres formant six à six des quadrilatères inscrits correspondants.
15. The prededing constructions have been almost entirely taken from Plücker's "System der Analytischen Geometrie", § 3, Allgemeine Betrachtungen über Coordenatenbestimmung. I subjoin analytical demonstrations of some of the theorems in question.
16. A personal influence on the young Cayley was George Boole (1815-1864). In invariant theory Boole found a subject which presented an "ample field of research and discovery" and in his [1841] indicated that it had applications to algebraic geometry and the solution of polynomial equations.
17. Should that correspond to the geometrical idea of a change of co-ordinates, from a pair of axes x, y, making an angle θ, to another pair x', y', whose angle of inclination is θ', then will (39) become

    $$x^2+2xy\cos\theta+y^2=x'^2+2x'y'\cos\theta'+y'^2$$
    $$\therefore a=1, b=\cos\theta, c=1, a'=1, b'=\cos\theta', c'=1.$$

    Hence (41) and (42) give

    $$\frac{AC-B^2}{(\sin\theta)^2}=\frac{A'C'-B'^2}{(\sin\theta')^2},$$

    $$\frac{A-2B\cos\theta+C}{(\sin\theta)^2}=\frac{A'-2B'\cos\theta'+C'}{(\sin\theta')^2}.$$

18. Adopting Mr Cayley's excellent designation, let the four points of intersection of the two conics be called a quadrangle. This quadrangle will have three pairs of sides; the intersections of each pair, from principles of analogy, I call the vertices of quadrangle.
19. If all the four points of the quadrangle of intersection are real, the three vertices and the three pairs of sides are all real. If only two points of the quadrangle are real, one vertex and one of the three pairs of sides will be real; the other two vertices and two pairs of sides being imaginary. If all four points of the quadrangle are unreal, one pair of sides will be real and the other two pairs imaginary, as in the last case; but all the three vertices will remain real, as in the first case. Hence we have a direct and simple criterion for distinguishing the case of *mixed* intersection from intersection wholly real or wholly imaginary; namely, that the cubic equation of the roots of which the coordinates of the vertices are real linear functions shall have *a pair of imaginary roots*. This is the sole and unequivocal condition required.
20. Chamava-se assim ao método de se eliminar uma das variáveis de um determinado polinômio. Este possui claras interseções com o desenvolvimento da Teoria dos Invariantes, principalmente no cálculo dos invariantes e covariantes.
21. The projection on any plane of the intersection of two surfaces of the second degree will in general be a curve of the fourth degree having two double points.
22. Deux coniques quelconques se coupent en quatre points qui forment un quadrangle inscrit aux deux coniques. Elles ont quatre tangentes communes qui forment un quadrilatère circonscrit aux deux coniques. Le quadrangle inscrit et le quadrilatère circonscrit ont les même centres et mêmes axes.

Referências

Ball, W.W.R. (1889) *A History of the Study of Mathematics at Cambridge.* Cambridge, Cambridge University Press.

Boole, G. (1841) "Exposition of a General Theory of Linear Transformations – Part I". *The Cambridge Mathematical Journal, 3(13)*, 1-20.

Brechenmacher, F. (2006) "Les matrices: formes de représentation et pratiques opératoires (1850-1930)". *CultureMATH – Site expert ENS Ulm / DESCO*. Acessado em 07/2013 em: <http://www.math.ens.fr/culturemath/histoire%20des%20maths/htm/Brechenmacher/matrices_index.htm >.

Cayley, A. (1841) "On a Theorem in the Geometry of Position". *Cambridge mathematical journal*. En: A. Cayley (1889) *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley*. Cambridge, Cambridge University Press, Vol. 1, 1-4.

Cayley, A. (1843) "On the intersection of curves". *Cambridge mathematical journal*. En: A. Cayley (1889) *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley*. Cambridge, Cambridge University Press, Vol. 1, 25-27.

Cayley, A. (1845) "Nouvelles remarques sur les courbes Du troisième ordre". *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (Liouville).* En: A. Cayley (1889) *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley*. Cambridge, Cambridge University Press, Vol. 1, 190-194.

Cayley, A. (1848) "On geometrical reciprocity". *Cambridge and Dublin mathematical journal* En: A. Cayley (1889) *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley*. Cambridge, Cambridge University Press, Vol. 1, 377-382.

Cayley, A. (1849) "On the triple tangent planes of surfaces of the third order". *Cambridge and Dublin mathematical journal*. En: A. Cayley (1889) *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley*. Cambridge, Cambridge University Press, Vol. 1, 445-456.

Cayley, A. (1850) "Sur Le problème des contacts". *Journal für die reine angewandte Mathematik (Crelle).* En: A. Cayley (1889) *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley*. Cambridge, Cambridge University Press, Vol. 1, 522-531.

Chasles, M. (1837) *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*. Bruxelles, M. Hayez.

Corry, L. (2004) "Introduction: The History of Modern Mathematics – Writing and Rewriting". *Science in Context*, *17(1)*, 1-21.

Crilly, T. (1986) "The Rise of Cayley's Invariant Theory (1841 – 1862)". *Historia Mathematica*, *13*, 241-254.

Crilly, T. (2006) *Arthur Cayley Mathematician Laureate of the Victorian Age.* Baltimore, MD, Johns Hopkins University Press.

Crilly, T. (2011) "The Rise and Fall of the Mathematical Tripos". En: Flood, R.; Rice, A.; Wilson, R. (eds.) *Mathematics in Victorian Britain.* New York, Oxford University Press.

Durand-Richard, M.J. (1996) "L'Ecole Algébrique Anglaise: les conditions conceptuelles et institutionnelles d'un calcul symbolique comme fondement de la connaissance". En: C. Goldstein, J. Gray & J. Ritter (eds.) *L'Europe mathématique - Mythes, histoires, identités*. Paris, Éditions de la Maisondes sciences de l'homme.

Fisch, M. (1994) "The Emergency Which Has Arrived: The Problematic History of Nineteenth-Century BritishAlgebra - A Programmatic Outline". *The British Journal for the History of Science*, *27(3)*, 247-276.

Fisch, M. (1999) "The Making of Peacock's Treatise on Algebra: A Case of Creative Indecision". *Archive for History of Exact Sciences*, *54(2)*, 137-179.

Goldstein, C.; Schappacher, N. & Schewermer, J. (2007) *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's disquisitions Arithmeticae.* New York, Springer.

Gray, J. (2010) *Worlds out of nothing, A Couse in the History of Geometry in the 19th Century*. London, Springer-Verlag, 159-162.

Guicciardini, N. (1989) *The Development of Newtonian Calculus in Britain 1700 – 1800*. Cambridge, Cambridge University Press.

Hamilton, H.P. (1826) *The Principles of Analytical Geometry Designed for use of students in the University.* Cambridge, Cambridge University Press.

Klein, F. (1928) *Development of Mathematics in the 19th Century.* Traducción: M. Ackerman (1979), Massachusetts, Math Sci Press.

Lagrange, J.L. (1788) *Méchanique analitique*. Paris, Desaint.

Maclaurin, C. (1742) *A Treatise of Fluxions*. Edinburgh, T. W. and T. Ruddimans.

Mansion, P. (1873) "Notice sur les travaux de Jules Plücker". *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, *5*, 313-319.

Möbius, A. F. (1827) *Der barycentrische Calcul.* Hildesheim, Germany: Georg Olms, 1976. Original edition, Leipzig, Germany.

Parshall, K.H. (1989) "Toward a History of Nineteenth-Century Invariant Theory". En: D.E. Rowe & J. Mccleary, J. (eds.) *The History of Modern Mathematics.* San Diego, Academic Press, Vol. 1, 157-206.

Plücker, j. (1828-1831) *Analytisch-geometrische Entwicklung*. Essen, Baedeker, *1 e 2*.

Plücker, j. (1830) "Über ein neues Coordinatensystem". *Journal für die reine und angewandte Mathematik, 5,* 1-36.

Plücker, j. (1837) "Théorèmes généraux concernant les equations à plusieurs variables, d'un degré quelconque enre un nombre quelconque d'inconnues". *Journal für die reine und angewandte Mathematik, 16,* 47-57.

Poncelet J.V. (1822) *Traité des Propriétés Projectives des Figures*. Paris, Bachelier.

Richards, J.L. (1986) "Projective Geometry and Mathematical Progress in Mid-Victorian Britain". *Studies in History and Philosophy of Science*, *17(3)*, 297-325.

Richards, J.L. (1992) "God, Truth, and Mathematics in Nineteenth Century England". En: M.J. Nye, J. Richards & Roger H. Stuewer (eds.) *The Invention of Physical Science*. Kluwer Academic Publishers, 51-78.

Salmon, G. (1846) "On The Degree of a Surface Reciprocal to a given one". *Cambridge and Dublin mathematical journal*, *2*, 65-75.

Salmon, G. (1848a) "On The Condition that a Plane should Touch a Surface along a Curve Line". *Cambridge and Dublin mathematical journal*, *3*, 44-46.

Salmon, G. (1848b) "On the Number of Normals which Can Be Drawn from a Given Point to a Given Surface". *Cambridge and Dublin mathematical journal*, *3*, 46-47.

Salmon, G. (1851a) "Théorèmes sur les courbes de troisième degree". *Journal für die reine und angewandte Mathematik, 42,* 274-276.

Salmon, G. (1851b) "Sur La formation de l'équation de La courbe reciproque à une courbe donnée". *Journal für die reine und angewandte Mathematik, 42,* 277-278.

Steiner, J. (1832) *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer gestalten von einander*. Berlin, G. Fincke.

Sylvester, J.J. (1850a) "On the intersections, contacts, and other correlations of two conics expressed by indeterminate coordinates". *Cambridge and Dublin mathematical journal*. En: J.J. Sylvester (1904) *The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester.* Cambridge, Cambridge University Press, Vol. 1, 119-137.

Sylvester, J.J. (1850b) "An instantaneous demonstration of Pascal's theorem by the method of indeterminate coordinates". *Philosophical magazine*. En: J.J. Sylvester (1904) *The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester.* Cambridge, Cambridge University Press, Vol. 1, 138.

Sylvester, J.J. (1850c) "On a new class of theorems in elimination between quadratic functions". *Philosophical magazine*. En: J.J. Sylvester (1904) *The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester.* Cambridge, Cambridge University Press, Vol. 1, 139-144.

Sylvester, J.J. (1851a) "On the intersections of two conics". *Cambridge and Dublin mathematical journal*. En: J.J. Sylvester (1904) *The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester.* Cambridge, Cambridge University Press, Vol. 1, 162-164.

Sylvester, J.J. (1851b) "On certain general properties of homogeneous functions". *Cambridge and Dublin mathematical journal*. En: J.J. Sylvester (1904) *The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester.* Cambridge, Cambridge University Press, Vol. 1, 165-180.

Sylvester, J.J. (1851c) "On the general of associated algebraical forms". *Cambridge and Dublin mathematical journal*. En: J.J. Sylvester (1904) *The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester.* Cambridge, Cambridge University Press", Vol. 1, 198-202.