REVISTA DE CIENCIAS

ZUBÍA

MONOGRÁFICO

26

ier
Instituto de Estudios Riojanos

ZUBÍA. MONOGRÁFICO
REVISTA DE CIENCIAS.
Nº 26 (2014). Logroño (España).
P. 1-235, ISSN: 1131-5423

DIRECTORA
Purificación Ruiz Flaño

CONSEJO DE REDACCIÓN
Luis Español González
Rubén Esteban Pérez
Rafael Francia Verde
Juana Hernández Hernández
Luis Miguel Medrano Moreno
Patricia Pérez-Matute
Enrique Requeta Loza
Rafael Tomás Las Heras

CONSEJO CIENTÍFICO
José Antonio Arizaleta Urarte
(Instituto de Estudios Riojanos)
José Arnáez Vadillo
(Universidad de La Rioja)
Susana Caro Calatayud
(Instituto de Estudios Riojanos)
Eduardo Fernández Garbayo
(Universidad de La Rioja)
Rosario García Gómez
(Universidad de La Rioja)
José M.ª García Ruiz
(Instituto Pirenaico de Ecología-CSIC)
Javier Guallar Otazua
(Universidad de La Rioja)
Teodoro Lasanta Martínez
(Instituto Pirenaico de Ecología-CSIC)
Joaquín Lasierra Cirujeda
(Hospital San Pedro, Logroño)
Luis Lopo Carramiñana
(Dirección General de Medio Natural del Gobierno de La Rioja)
Fernando Martínez de Toda
(Universidad de La Rioja)
Alfredo Martínez Ramírez
(Centro de Investigación Biomédica de La Rioja –CIBIR–)
Juan Pablo Martínez Rica
(Instituto Pirenaico de Ecología-CSIC)
José Luis Nieto Amado
(Universidad de Zaragoza)
José Luis Peña Monné
(Universidad de Zaragoza)
Félix Pérez-Lorente
(Universidad de La Rioja)
Diego Troya Corcuera
(Instituto Politécnico y Universidad Estatal de Virginia, Estados Unidos)
Eduardo Viladés Juan
(Hospital San Pedro, Logroño)
Carlos Zaldívar Ezquerro
(Dirección General de Medio Natural del Gobierno de La Rioja)

DIRECCIÓN Y ADMINISTRACIÓN
Instituto de Estudios Riojanos
C/ Portales, 2
26071 Logroño
publicaciones.ier@larioja.org

Suscripción anual España (1 número y monográfico): 15 €
Suscripción anual extranjero (1 número y monográfico): 20 €
Número suelto: 9 €
Número monográfico: 9 €

INSTITUTO DE ESTUDIOS RIOJANOS

ZUBÍA

REVISTA DE CIENCIAS

Monográfico Núm. 26

Investigación en el Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja

Coordinadores
Óscar Ciaurri Ramírez y Luis Español González

Gobierno de La Rioja
Instituto de Estudios Riojanos
LOGROÑO
2014

Investigación en el Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja / coordinadores, Óscar Ciaurri Ramírez, Luis Español González. -- Logroño : Instituto de Estudios Riojanos, 2014
235 p. : gráf. ; 24 cm -- (Zubía. Monográfico, ISSN 1131-5423; 26). -- D.L. LR 413-2012

1. Universidad de La Rioja - Departamento de Matemáticas y Computación. I. Ciaurri Ramírez, Óscar. II. Español González, Luis. III. Instituto de Estudios Riojanos. IV. Serie

167 (460.21)
51:37.02 (460.21)

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse ni transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito de los titulares del copyright.

© Logroño, 2014
Instituto de Estudios Riojanos
C/ Portales, 2
26001-Logroño, La Rioja (España)

© Diseño del interior: Juan Luis Varona (Universidad de La Rioja), a partir de los archivos LaTeX proporcionados por los autores.

© Imagen de la cubierta: Composición fractal realizada por *José Pérez Valle*.

© Imagen de la contracubierta: Fotografía de la Nebulosa Trífida (M20), en la constelación de Sagitario, tomada en Murillo de Río Leza por la *Agrupación Astronómica de La Rioja* el 25 de agosto de 2014.

Producción gráfica: Gráficas Isasa S.L. (Arnedo, La Rioja)

ISSN 1131-5423
Depósito Legal: LR 413-2012

Impreso en España - Printed in Spain

ÍNDICE

PRESENTACIÓN
Óscar Ciaurri Ramírez, Luis Español González *(Coordinadores)* 7–9

PRÓLOGO
José Luis Ansorena *(Director del Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja)* 11–12

JOSÉ LUIS ANSORENA
Espacios de funciones derivables
Spaces of differentiable functions 13–18

JESÚS ARANSAY, JOSÉ DIVASÓN, CÉSAR DOMÍNGUEZ, FRANCISCO GARCÍA, JÓNATHAN HERAS, ARTURO JAIME, LAUREANO LAMBÁN, ELOY MATA, GADEA MATA, JUAN JOSÉ OLARTE, VICO PASCUAL, BEATRIZ PÉREZ, ANA ROMERO, ÁNGEL LUIS RUBIO, JULIO RUBIO, EDUARDO SÁENZ DE CABEZÓN
Informática para las Matemáticas, Matemáticas para la Informática, Informática Aplicada
Computer Science for Mathematics, Mathematics for Computer Science, Applied Computer Science 19–37

ALBERTO ARENAS, ÓSCAR CIAURRI, EDGAR LABARGA, LUZ RONCAL, JUAN LUIS VARONA
Series de Fourier no trigonométricas: una perspectiva familiar
Nontrigonometric Fourier series: a familiar point of view 39–54

MANUEL BELLO HERNÁNDEZ, JUDIT MÍNGUEZ CENICEROS
Aproximación racional y polinomios ortogonales
Rational approximation and orthogonal polynomials 55–76

PILAR BENITO, DANIEL DE-LA-CONCEPCIÓN, JESÚS LALIENA, SARA MADARIAGA, JOSÉ M. PÉREZ-IZQUIERDO
Algunos aspectos del álgebra no asociativa
Some aspects on nonassociative algebra 77–96

ROBERTO CASTELLANOS FONSECA, CLARA JIMÉNEZ-GESTAL, JESÚS MURILLO RAMÓN
Didáctica de la Matemática: cuándo el cómo cuenta tanto (casi) como el qué
Mathematics Education: when how is (almost) as important as what 97–117

LUIS ESPAÑOL GONZÁLEZ
Investigaciones sobre Julio Rey Pastor realizadas desde La Rioja entre 1982 y 2000
Researches about Julio Rey Pastor made from La Rioja between 1982 and 2000 119–141

JOSÉ IGNACIO EXTREMIANA ALDANA, LUIS JAVIER HERNÁNDEZ PARICIO, MARÍA TERESA RIVAS RODRÍGUEZ
Modelos de Quillen, espacios y flujos exteriores y algunas aplicaciones
Quillen models, exterior spaces and flows, and some applications 143–164

JOSÉ ANTONIO EZQUERRO, DANIEL GONZÁLEZ, JOSÉ MANUEL GUTIÉRREZ, MIGUEL ÁNGEL HERNÁNDEZ-VERÓN, ÁNGEL ALBERTO MAGREÑÁN, NATALIA ROMERO, MARÍA JESÚS RUBIO
Resolución de ecuaciones no lineales mediante procesos iterativos
Solving nonlinear equations by iterative processes 165–200

MANUEL IÑARREA, WAFAA KANAAN, VÍCTOR LANCHARES, ANA ISABEL PASCUAL, JOSÉ PABLO SALAS
Sistemas dinámicos: de los átomos al sistema solar
Dynamical systems: from the atoms to the solar system 201–219

JAVIER PÉREZ LÁZARO
Regularidad de la función maximal de Hardy-Littlewood
Regularity of the Hardy-Littlewood maximal function 221–227

Zubía. Monográfico 26 77–96 Logroño 2014

ALGUNOS ASPECTOS DEL ÁLGEBRA NO ASOCIATIVA

PILAR BENITO[1], DANIEL DE-LA-CONCEPCIÓN[1],
JESÚS LALIENA[1], SARA MADARIAGA[1,2],
JOSÉ M. PÉREZ-IZQUIERDO[1]

RESUMEN

Una gran cantidad de estructuras algebraicas, y entre las más significativas las álgebras asociativas y de Jordan, están fuertemente vinculadas a las álgebras de Lie y también a interesantes geometrías. Estas relaciones dan explicación a determinadas excepcionalidades en álgebra y geometría que no son sino manifestaciones de los mismos fenómenos. En esta reseña se analiza una parte de la actividad investigadora que el grupo de álgebra de la Universidad de La Rioja ha realizado en los últimos años. Esta actividad se centra en el estudio de estructuras no asociativas que están en el entorno de las álgebras de Lie.

Palabras clave: Álgebras de Lie, nilpotencia, álgebras de Lie-Yamaguti, superálgebras, álgebras de Sabinin, identidades polinómicas.

A large number of algebraic structures, among which the associative and the Jordan algebras deserve special mention, are closely related to the Lie algebras and to some interesting geometries. These relationships explain certain exceptional behaviors in Algebra and Geometry, which are nothing but manifestations of the same phenomena. In this note we analyse part of the research made during the last years by the research group of Algebra of the University of La Rioja. This research focuses on the study of nonassociative structures related to Lie algebras.

Key words: *Lie algebras, nilpotency, Lie-Yamaguti algebras, superalgebras, Sabinin algebras, polynomial identities.*

1. INTRODUCCIÓN

Los estudios universitarios de ciencias en La Rioja comenzaron su andadura en el antiguo Colegio Universitario de La Rioja (CUR), allá por 1972. Esto supuso

1. Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, Logroño (La Rioja, España)
Correo electrónico: {pilar.benito, daniel-de-la.concepcion, jm.perez, jesus.laliena, sara.madariaga}@unirioja.es
2. Department of Mathematics and Statistics, University of Saskatchewan, Saskatoon, Canadá

enseguida el reforzamiento de la actividad en investigación científica en La Rioja, y la aparición de diversas líneas de investigación en las distintas ramas de ciencias (biología, geología, química, física y matemáticas). En concreto, a mediados de los 80, se empezó a formar un grupo de investigación en la rama de matemáticas y en el ámbito de las álgebras no-asociativas. Este grupo incipiente tuvo en su origen sus principales conexiones con el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza. En Zaragoza fue donde los investigadores veteranos del grupo se licenciaron, hicieron sus cursos de doctorado, se especializaron en álgebra no asociativa y se doctoraron bajo la dirección de los profesores Vicente R. Varea, Santos González y Alberto Elduque. A finales de los 80, las conexiones investigadoras se ampliaron a otras universidades como las de Granada y Málaga.

Con la creación de la Universidad de La Rioja en 1992, el grupo se consolidó, y a mediados de los 90 se empezaron a dirigir ya las primeras tesis doctorales. A día de hoy, y haciendo un balance de tipo cuantitativo, diremos que han formado parte de él, en todos estos años, 5 profesores permanentes (un catedrático y 4 titulares de universidad), 4 no permanentes (2 ayudantes, 1 profesor visitante y un asociado a tiempo parcial), se han dirigido 5 tesis doctorales, y se ha atendido a 5 becarios de investigación FPI o FPU. En la actualidad, el grupo cuenta con 3 profesores permanentes, un becario FPU, Daniel de la Concepción, en fase de elaboración de su tesis doctoral, y Sara Madariaga, becaria postdoctoral en la Universidad de Saskatchewan (Canadá). Dos colaboradores externos más, en México, Jacob Mostovoy, y en Brasil, Iván Shestakov, cierran nuestro grupo investigador actual, que, desde hace más de una década, participa en proyectos nacionales coordinados con otros grupos en álgebras no asociativas de las universidades de Málaga, Oviedo y Zaragoza. En todo este tiempo hemos colaborado también con investigadores de las universidades de Almería, Wisconsin (EEUU), Lecce (Italia), Uppsala (Suecia), Cinvestav (México), Sakatchewan (Canadá) y Coimbra (Portugal), entre otras. Quizás, en este breve resumen sobre los componentes que lo han sido del grupo, convendría destacar la profunda impronta en su estancia en la Universidad de La Rioja de A. Elduque e I. Shestakov, que actualmente siguen colaborando con nosotros.

El objetivo en esta nota es comentar, por parte de los que formamos en estos momentos el grupo, algo sobre nuestra investigación. Toda ella está en el entorno del más importante tipo de álgebras no asociativas: las álgebras de Lie. Por ello, previamente vamos a hacer una pequeña presentación histórica de estas álgebras y sus protagonistas (basada en [2], [29] y [55]).

2. ÁLGEBRAS DE LIE

2.1. Un poco de historia

En principio todo surgió de la geometría y las ecuaciones diferenciales. Las ecuaciones diferenciales modelizan muchos fenómenos físicos de la vida ordina-

ria como pueden ser el enfriamiento o calentamiento de objetos, la evolución de poblaciones, el cambio en la concentración de los compuestos en una reacción química, la caida de objetos,... La resolución de ecuaciones diferenciales (conseguida para un porcentaje muy pequeño de ellas) ha sido motivo de la aparición de numerosos e ingeniosos métodos desarrollados por un gran número de científicos a lo largo de los últimos siglos.

Uno de estos científicos fue Sophus Lie (1842–1899). Sophus Lie fue un matemático noruego que trabajó y tuvo contactos con importantes matemáticos de su época, como por ejemplo Felix Klein, Gaston Darboux, Charles E. Picard, Henri Poincaré, Friedrich Engel, Wilhelm Killing, Gösta Mittag-Leffer, Ludvig Sylow y Élie Cartan, entre otros.

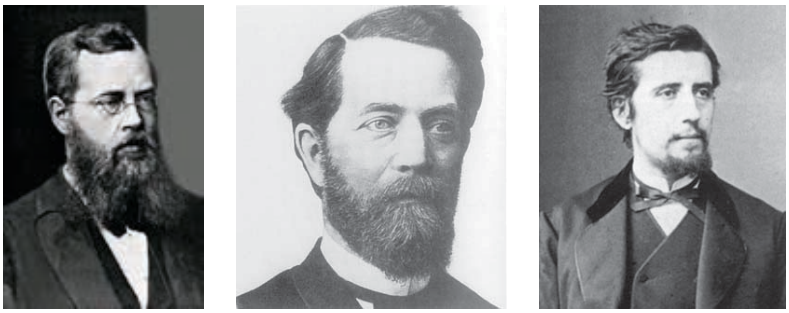

Figura 1: Sophus Lie, Felix Klein y Gaston Darboux

Lie comenzó sus estudios universitarios de ciencias en 1861 en la Universidad de Christiania (Christiania es el nombre con el que se llamó a la actual ciudad de Oslo desde 1624 hasta 1924, en honor al rey danés Christian IV). Al cabo de unos años de terminar sus estudios, se interesó por trabajos de geometría proyectiva sobre complejos tetraédricos. A estos complejos se les puede asociar lo que se conoce como la superficie de Plücker del complejo. Y las superficies de Plücker verifican una ecuación en derivadas parciales de primer orden:

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0. \tag{1}$$

Sobre estas ecuaciones actúa un grupo (conocido como grupo de homografías) que lleva soluciones de (1) a soluciones de (1). Si en este grupo, que es un grupo de transformaciones proyectivas, los elementos conmutan y dependen de 3 parámetros, la ecuación, haciendo un cambio de coordenadas, se puede resolver por cuadraturas (queda de la forma $F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$). Y si admite un grupo dependiendo de 2 parámetros entonces la nueva ecuación también se puede resolver por cuadraturas (queda de la forma $F\left(z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$), lo cual fue probado por Lie. Cuando el grupo depende de 1 parámetro, la ecuación puede ser resuelta solo en algunas ocasiones.

Lie conoció los trabajos de Évariste Galois (1811–1832) rescatados por Liouville en 1843 tras el trágico final de aquel (Galois murió con 21 años en un duelo). Percibió que había cierta similitud entre lo que él había obtenido y la Teoría de Galois. En la Teoría de Galois, los grupos de automorfismos de las extensiones determinadas por las raíces de un polinomio permiten decidir si la ecuación que determina el polinomio es o no resoluble por radicales. Es decir, si las soluciones se pueden escribir en una fórmula a partir de los coeficientes usando las operaciones elementales y la extracción de raíces. En las ecuaciones diferenciales que trató Lie, determinados grupos (ahora continuos, en vez de discretos) permiten dar con su resolución. En realidad, la teoría de Lie va más lejos que la de Galois, porque no solo dice que la ecuación diferencial se puede resolver, sino que además busca los grupos más adecuados para que se resuelva de forma sencilla.

Lie estaba enfrascado en estos trabajos cuando en 1869 viajó a Berlín y conoció a F. Klein (1849–1925). Klein había hecho la tesis doctoral bajo la dirección de J. Plücker, y conocía los trabajos de este. El común interés por la investigaciones de Plücker les llevó a una relación profesional y de amistad. Fruto de esta amistad fue que visitaran París en mayo de 1870 para conocer la escuela de geometría de un contemporáneo suyo: Gaston Darboux (1842–1917). A finales de 1870, Lie presentó su tesis doctoral en Christiania, cuyos logros fueron considerados por Darboux y Klein como los más importantes en geometría diferencial en su tiempo.

Figura 2: Wilhelm K. J. Killing, Élie J. Cartan y Eugenio E. Levi

Tras la presentación de su tesis, y en el periodo desde 1871 hasta 1886, Lie decide estudiar el modo de resolver y simplificar ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer grado usando grupos de transformaciones continuos. En realidad, esta línea de trabajo había sido ya iniciada por C. Jacobi. Recordemos que estos grupos llevan soluciones a soluciones de la ecuación diferencial, y así se decía que la ecuación admitía a los elementos de dicho grupo como simetrías. El interés de Lie por estos grupos sería cada vez mayor y se llegó a plantear la pregunta inversa: dado un grupo continuo, ¿cuál es la ecuación más general que tiene a dicho grupo como grupo de simetrías?

En esta época (entre 1871 y 1886) Lie dedicó también su vida a otros quehaceres. Por ejemplo, recibió un encargo del recién creado estado noruego para hacer

una recopilación, junto a L. Sylow, de las obras completas de un célebre matemático nourego fallecido unas pocas décadas antes: N. Abel (1802–1829). La obra se publicó en 1881 en dos volúmenes. También por estos años, y junto con G. Mittag-Leffler (1846–1927), matemático sueco, crearon en 1882 la revista *Acta Mathematica*. En aquel momento existían ya en Berlín, desde 1826, el *Crell's Journal* (en realidad llamado *Journal für die reine und angewandte mathematik*, en alemán, y cuya traducción en castellano sería *Revista de Matemáticas Puras y Aplicadas*), y en Gotinga, desde 1868, el *Mathematische Annalen*. Estas tres revistas matemáticas fueron en esa época de las más importantes, y continúan siéndolo a día de hoy. Respecto a la vida familiar o personal de Lie hay que resaltar que en este tiempo, en 1874, se casaría con Anna Birch, con la que tendría tres hijos (Marie, en 1877, Dagny, en 1880, y Herman, en 1886).

En Leipzig (ciudad del estado de Sajonia, entonces independiente de Prusia), donde estuvo F. Klein entre 1880 y 1886, los trabajos de Lie fueron apreciados, y, en concreto, un joven F. Engel (1861–1941) estudió los grupos de transformaciones en ecuaciones diferenciales. A instancias de Klein y Lie, Engel se desplazaría de Leipzig a Christiania para trabajar junto con Lie en 1884. Fruto de su estancia fue la redacción de un denso libro sobre la teoría de grupos de transformaciones, editado en tres volúmenes [25].

No en todos los centros científicos de la época los trabajos de Lie fueron tan considerados. En Berlín, el centro matemático alemán, o mejor dicho prusiano, más importante de entonces, los trabajos de Lie no fueron muy reconocidos. Sin embargo, W. Killing (1847–1923), un discípulo de Weierstrass en Berlín, define por aquel entonces el concepto de álgebra de Lie, lo cual llega a saber Klein. Klein pone en contacto a Killing con Lie, teniendo esto como resultado que Killing acabe siendo atendido por Engel, que le animó continuamente en el intento de Killing por clasificar las álgebras de Lie de dimensión finita.

Donde sí fueron muy reconocidos los trabajos de Lie fue entre la comunidad matemática francesa. G. Darboux, E. Picard (1856–1941) y H. Poincaré (1854–1912) (los matemáticos franceses más importantes de aquel tiempo) tenían en muy alta estima su investigación. Como consecuencia de ello, en 1889, estando en París, Lie es elegido miembro de la Academia de Ciencias de París. Lie estaba ya entonces en la Universidad de Leipzig, ocupando la vacante de Klein, que se había ido a Gotinga. Varios de los estudiantes de París visitaron a Lie en Leipzig. Y las visitas son recíprocas, también Lie acude a París. Como fruto de estos viajes, el matemático francés E. Cartan (1869–1951) conoce los intentos de clasificación de Killing, y como resultado de sus tesis consigue la clasificación de las álgebras de Lie semisimples.

Para acabar esta sección introductoria comentaremos que el estudio de los grupos y álgebras de Lie derivó al de los grupos algebraicos y después al de los grupos cuánticos y las superálgebras. Todos estos entes matemáticos están muy conectados con las sucesivas teorías físicas de unificación que han ido apareciendo en el último siglo y medio: la Teoría de la Relatividad, la Mecánica Cuántica y la Teoría de Cuerdas.

2.2. Álgebras de Lie y el mundo no-asociativo

En lo que sigue supondremos que el lector está familiarizado con las nociones básicas de estructuras algebraicas y álgebra lineal y multilineal. Usaremos $\mathbb{K}$ para denotar un cuerpo arbitrario y $\mathbb{R}$ para representar los números reales. Los conceptos más técnicos se pueden encontrar en [53, 34].

Un $\mathbb{K}$-espacio vectorial A se dice que es un *álgebra* sobre $\mathbb{K}$ o también una $\mathbb{K}$-*álgebra* si A está dotado de una aplicación $\mathbb{K}$-bilineal $A \times A \to A$. La aplicación bilineal determina en A un producto xy que, notemos, no hemos impuesto que sea ni conmutativo, ni asociativo. En caso de que lo sea, se dice que la $\mathbb{K}$-álgebra es *conmutativa o asociativa*, respectivamente. En las álgebras de Lie, el producto es anticonmutativo, $xy = -yx$, y debe cumplir la llamada *identidad de Jacobi*:

$$(xy)z + (zx)y + (yx)z = 0. \tag{2}$$

El fenómeno de anticonmutatividad y no-asociatividad, aunque pueda parecerlo, no es extraño: el espacio vectorial de vectores de $\mathbb{R}^3$ con el producto vectorial usual es una $\mathbb{R}$-álgebra de Lie. En [26] se pueden encontrar muchas otras interesantes manifestaciones.

Un ejemplo sencillo de $\mathbb{R}$-álgebra conmutativa y asociativa es el cuerpo $\mathbb{C}$ de los *números complejos*, obtenidos por duplicación de los reales. Los complejos cuentan además con una norma (forma cuadrática definida positiva) y, como todo elemento no nulo tiene inverso, tenemos que los complejos son una $\mathbb{R}$-álgebra normada de división conmutativa y asociativa; el cuerpo real también lo es, el módulo es su norma. Los complejos y sus operaciones algebraicas permiten definir puntos en el plano y describir la geometría básica 2-dimensional.

La construcción de los complejos desde los reales se puede ver como un caso particular del conocido como *proceso de duplicación de Cayley-Dickson* [53, Capítulo 3, Sección 4]. Si se aplica a los complejos, aparecen los *cuaternios* $\mathbb{H}$, que al ser duplicados proporcionan los *octoniones* $\mathbb{O}$. Los cuaternios y octoniones de división son álgebras normadas descubiertas a finales de 1843, por W. R. Hamilton los primeros y los segundos por J. Graves. Los cuaternios, asociativos y no conmutativos, son capaces de representar fielmente las rotaciones 3-dimensionales (vitales en el diseño de videojuegos si pensamos en aplicaciones actuales). Los octoniones no son ni conmutativos ni asociativos y están vinculados a las geometrías 7 y 8 dimensionales, la Supersimetría y la Teoría de Cuerdas. En cita textual de [4]:

> «(...) If string theory is right, the octonions are not a useless curiosity: on the contrary, they provide the deep reason why the universe must have 10 dimensions: in 10 dimensions, matter and force particles are embodied in the same type of numbers, the octonions.»

Otros ejemplos sencillos de álgebras son los polinomios con coeficientes reales $\mathbb{R}[X]$ y las matrices de orden $d \geq 2$, $M_d(\mathbb{R})$, con su producto habitual. En el primer caso obtenemos una $\mathbb{R}$-álgebra conmutativa y asociativa; en el segundo

Núm. 26 (2014), pp. 77–96
ISSN 1131-5423
Zubía
Monográfico

una asociativa y no conmutativa. Estas estructuras se pueden generalizar a polinomios y matrices sobre cuerpos arbitrarios o incluso sobre otras álgebras. Las deformaciones del producto usual de matrices xy para $x, y \in M_d(\mathbb{K})$ en la forma $x \circ y := xy + yx$ (*producto simetrizado*) y $[x, y] := xy - yx$ (*producto antisimetrizado*) inducen nuevas estructuras de $\mathbb{K}$-álgebra en $M_d(\mathbb{K})$. En el primer caso, $x \circ y = y \circ x$, luego la $\mathbb{K}$-álgebra $(M_d(\mathbb{K}), \circ)$, que se suele denotar como $M_d(\mathbb{K})^+$, es conmutativa y cumple además la llamada *identidad de Jordan* ($x^2 = x \circ x$):

$$(x^2 \circ y) \circ x = x^2 \circ (y \circ x).$$

En el el segundo caso, $[x, y] := -[y, x]$ y la $\mathbb{K}$-álgebra resultante $M_d(\mathbb{K})^-$ satisface la llamada identidad de Jacobi; tenemos por tanto un álgebra de Lie (de matrices). Si en $M_d(\mathbb{K})^-$ nos quedamos con el conjunto de matrices de traza cero, aparece la llamada *álgebra especial lineal* $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{K})$. Los productos simetrizados y antisimetrizados se pueden definir sobre cualquier $\mathbb{K}$-álgebra asociativa A dando lugar a *álgebras de Jordan* A^+ o *de Lie* A^-.

Otras fuentes interesantes de ejemplos de álgebras de Lie son las álgebras de derivaciones de cualquier $\mathbb{K}$-álgebra finitodimensional y los campos de vectores de variedades diferenciales ligados a los grupos de Lie. La teoría de representación de álgebras de Lie y grupos de Lie juega un importante papel en su propia teoría de estructura, y también en la Geometría diferencial, además de tener muchas aplicaciones en Física.

2.3. Algunas nociones básicas

En toda esta sección $\mathfrak{g}$ denotará una $\mathbb{K}$-álgebra de Lie con producto $[x, y]$. La clausura $\mathbb{K}$-lineal de los productos $\{[x, y] : x \in U, y \in V\}$ se denotará como $[U, V]$.

El Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt asegura que toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es una subálgebra de una de tipo A^-, con A asociativa. En dicho teorema se construye una de estas álgebras asociativas (puede haber varias), en concreto la llamada *álgebra envolvente universal* y denotada $U(\mathfrak{g})$. Si $\mathfrak{g}$ es finito-dimensional, resulta ser isomorfa a una subálgebra de $M_d(\mathbb{K})^-$ (Teorema de Ado-Iwasawa).

Se dice que un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es *nilpotente* si la serie

$$\mathfrak{g} \supseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \supseteq [[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}] \supseteq [[[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}], \mathfrak{g}] \supseteq \cdots,$$

denominada *serie central descendente*, acaba haciéndose cero. Se dice que un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es *resoluble* si la serie

$$\mathfrak{g} \supseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \supseteq [[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] \supseteq [[[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]], [[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]] \supseteq \cdots,$$

denominada *serie derivada*, se acaba haciendo cero. Si un álgebra de Lie no tiene ideales resolubles distintos de cero se le dice *semisimple*. Notemos que un álgebra *simple*, es decir sin ideales distintos del cero y el total, es semisimple, y también se

puede probar que toda álgebra semisimple es suma de simples. Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, al mayor ideal resoluble (nilpotente) de $\mathfrak{g}$ se le denomina el *radical resoluble* (*nilpotente*) de $\mathfrak{g}$.

Veamos otra forma de obtener álgebras de Lie. Sea una F-álgebra A y supongamos que en A tenemos definida una aplicación F-lineal $* : A \to A$ tal que verifica $a^{**} = a$, $(ab)^* = b^* a^*$ para todo $a, b \in A$. Se dice que $*$ es una *involución* y los elementos $K(A) = \{a \in A : a^* = -a\}$, llamados *antisimétricos*, constituyen un álgebra de Lie con la operación corchete $[x, y] := xy - yx$.

3. ÁLGEBRAS DE LIE Y DE LIE-YAMAGUTI

El conocimiento estructural de álgebras de Lie y clasificaciones específicas de las mismas (e.g. simples, resolubles, nilpotentes) son importantes tanto desde el punto de vista teórico como desde el práctico. Las representaciones de grupos y álgebras de Lie permiten en ocasiones explicar ciertos enigmas de la Geometría y de la Física. En Física de Partículas, las representaciones de las álgebras de Lie $\mathfrak{su}_2(\mathbb{R})$ y $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ son básicas. La Física de Partículas se apoya en la Mecánica Cuántica y en la Geometría, especialmente en teorías que tienen que ver con grupos de simetrías y lo que estos conservan, y que son conocidas en Física como teorías gauge [3].

3.1. Álgebras de Lie nilpotentes

En 1905 el matemático italiano Eugenio E. Levi (1883–1917) prueba uno de los resultados de estructura más importantes para álgebras de Lie. Este resultado, conjeturado previamente por Killing, reduce el problema de clasificación de las álgebras de Lie al estudio de álgebras de Lie semisimples y resolubles:

Teorema 3.1. *Toda álgebra de Lie finito-dimensional sobre un cuerpo de característica cero se descompone como una subálgebra semisimple, llamado factor de Levi, y su radical resoluble.*

Las álgebras de Lie semisimples en característica cero son suma de simples, clasificadas gracias a los trabajos de Lie, Killing y Cartan. El problema de clasificación de las álgebras de Lie resolubles es «salvaje». En 1945, Anatoly I. Maltcev reduce este problema a la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes, sus álgebras de derivaciones, sus grupos de automorfismos y algunos otros invariantes. Los avances en este problema se reducen a clasificaciones de álgebras nilpotentes en dimensiones modestas o con propiedades muy restrictivas (filiformes, codimensión del álgebra derivada o índice de nilpotencia pequeños). En [28] se puede encontrar un resumen histórico de las investigaciones sobre el tema.

La aparición de las llamadas *álgebras nilpotentes libres*, introducidas con rigor en 1971 por T. Sato [52], proporciona nuevas técnicas para el estudio de las álgebras de Lie nilpotentes. Sato demuestra que toda álgebra de Lie nilpotente de

dimensión finita es isomorfa a un cociente de una nilpotente libre y realiza un estudio detallado de las derivaciones y los automorfismos en esta clase de álgebras. El estudio concluye que los factores de Levi de las álgebras de derivaciones de las álgebras nilpotentes libres son álgebras especiales lineales $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{K})$, y que sus grupos de automorfismos se describen mediante el grupo general lineal $\mathrm{GL}_d(\mathbb{K})$ de matrices de determinante no nulo [52, Sección 2, Proposiciones 2 y 3]. El álgebra simple $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{K})$ permite introducir teoría de representación en el estudio de la estructura de las álgebras nilpotentes libres, sus cocientes y sus extensiones. Así, el uso de la teoría elemental de la representación del álgebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ nos permitió, en [7], mediante un algoritmo computacional y descomposiciones en módulos y transvecciones, generar ejemplos de álgebras nilpotentes de dimensión arbitraria que admiten $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ como factor de Levi. La observación previa de los ejemplos proporcionados en [7] derivó posteriormente en resultados más generales sobre álgebras de Lie con radical nilpotente predeterminado que aparecen en [8] y [9].

En este momentos estamos trabajando en el estudio de la estructura de álgebras de Lie cuadráticas, esto es, álgebras que admiten una forma bilineal invariante no degenerada. En 1956, S. T. Tsou y A. G. Walker [56] conjeturan que, exceptuando algunos pocos casos, y para cualquier $d \geq 3$, siempre se puede encontrar un álgebra cuadrática con dimensión de su álgebra derivada igual a d. Solamente las nilpotentes libres de dimensiones 5 y 6 son cuadráticas [5], pero es fácil probar que las nilpotentes cuadráticas aparecen como cocientes de libres usando como ideales de corte los núcleos de sus formas bilineales degeneradas [10], lo que permite construir infinidad de ejemplos.

3.2. Álgebras de Lie-Yamaguti

En 1954, K. Nomizu [50, Teorema 8.1] llega a la estructura de *álgebra de Lie-Yamaguti* (LY-álgebra de aquí en adelante) tras estudiar en profundidad las conexiones afines invariantes en espacios homogéneos reductivos:

Teorema 3.2. *El conjunto de conexiones afines invariantes de un espacio homogéneo reductivo con LY-álgebra asociada* $\mathfrak{m}$ *está en correspondencia biyectiva con el conjunto de homomorfismos* $\mathfrak{m} \otimes \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ *que son invariantes para el álgebra de derivaciones internas de* $\mathfrak{m}$.

La definición formal de LY-álgebra aparece en 1958 y fue dada por K. Yamaguti [59]. Las derivaciones internas de las LY-álgebras permiten sumergir cada una de ellas en una cierta álgebra de Lie llamada *envuelta estándar*.

Un álgebra de Lie-Yamaguti se define mediante un producto binario y otro ternario que satisfacen una larga colección de axiomas. Cuando el producto ternario es nulo, llegamos a las álgebras de Lie. Si el nulo es el binario, obtenemos los llamados *sistemas triples de Lie*. Las primeras deben resultarnos ya familiares; sobre los segundos, simplemente decir que son subespacios de valor propio -1 respecto de automorfismos de orden 2 de álgebras de Lie. De hecho, las llamadas *derivaciones internas* de un sistema triple de Lie y el propio sistema se pueden trenzar

para construir un álgebra de Lie $\mathbb{Z}_2$-graduada. Un sistema triple es el contrapunto algebraico de un *espacio simétrico*.

Nuestro trabajo en este campo se inicia a finales de los 90 con la tesis de Cristina Draper Fontanals [21], actualmente Contratado Doctor de la Universidad de Málaga, y continúa con la de Fabián Martín Herce [46] quien, tras la defensa de su tesis en 2006, se incorporó como profesor de secundaria. El punto de partida de [21] fue un estudio de *conexiones afines invariantes* en cierto tipo de espacios simétricos riemannianos irreducibles realizado por H. T. Laquer en 1992. Tras los resultados obtenidos en [43, Teorema 8.1] (ver también [42]), Laquer escribe:

> «The surprising result is that, while in most cases the only such connections are from a well known 1-dimensional family (...), in the case of $\mathbf{SU}(d)$ there is a second family of such connections.»

El álgebra de Lie del grupo de Lie $\mathbf{SU}(d)$ resulta ser la conocida $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$. Como las matrices completas de orden d con el producto simétrico $x \circ y = xy + yx$ forman un álgebra de Jordan, en $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$ conviven, además de la estructura de Lie bajo el producto antisimétrico $[x,y] = xy - yx$, la estructura de Jordan. Esta es la explicación algebraica que se proporciona en [11, Teorema 4.3] y que resuelve el enigma de la sorpresa de Laquer ante sus resultados sobre conexiones afines: una familia de conexiones procede del producto antisimétrico Lie y la otra está relacionada con el producto simétrico Jordan. La investigación iniciada en esta tesis derivó en los trabajos [11], [12] y está en la base de muy citados resultados sobre graduaciones, actual tema de investigación de Cristina Draper.

La experiencia investigadora en [21] fue vital para la segunda tesis. En este caso el punto de partida fue el estudio de las estructuras algebraicas no asociativas ligadas a la clasificación de *espacios homogéneos isotrópicamente irreducibles* dada por J. A. Wolf en [58]. En cita textual y como conclusión tras la clasificación, el autor dice:

> «The results are surprising, for there are a large number of non symmetric isotropy irreducible coset spaces G/H and only a few examples had been known before. One of the most interested classes is $\mathbf{SO}(\dim L)/\operatorname{ad} L$ for any arbitrary compact simple Lie group (...). I have hope that those examples, specially the $\mathbf{SO}(\dim L)/\operatorname{ad} L$, which show a clear pattern, will contribute toward an understanding of Einstein manifolds.»

El objeto que, desde un punto de vista algebraico, describe este tipo de espacios homogéneos, se llama álgebra de Lie-Yamaguti irreducible (1-irreducible). La conclusión final de la investigación realizada en la tesis y que aparece en [13] y [14] fue que las LY-álgebras 1-irreducibles viven en descomposiciones de subálgebras simples de $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{K})$ que tienen que ver con múltiples y clásicas construcciones y sistemas algebraicos no asociativos (construcción de *Tits-Kantor-Köecher*, *triples de Lie y de Jordan* y álgebras *estructurables* entre otros). Las Tablas 7, 8 y 9 de [14, Sección 7] proporcionan un resumen completo de la clasificación. De hecho, las series

$\mathbf{SO}(\dim L)/\operatorname{ad} L$ resaltadas por Wolf se modelizan mediante álgebras de matrices simétricas (respecto de la forma de Killing) relacionadas con álgebras de Lie simples centrales y sus álgebras de derivaciones. Un bonito paseo histórico-algebraico-geométrico que relaciona construcciones clásicas de álgebras de Lie y geometría aparece en [26].

La idea de 1-irreducibilidad se puede generalizar a n-irreducibilidad en LY-algebras sin, parece ser, perder la conexión geométrica. De hecho, en [20] se clasifican los espacios homogéneos 2-irreducibles, una de cuyas series ortogonales hemos estudiado en [6] desde el punto de vista algebraico y mediante técnicas computacionales.

4. SUPERÁLGEBRAS

Hemos comentado en la introducción que en las teorías físicas de unificación han aparecido nuevas estructuras algebraicas de interés y que tienen relación con las álgebras de Lie. Una de estas estructuras es la de superálgebra de Lie.

En principio, una *superálgebra*, sin más, es un álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada: $A = A_0 \oplus A_1$, es decir, que es suma directa de dos subespacios A_0, A_1 de modo que $A_0A_0 \subseteq A_0$, $A_0A_1 + A_1A_0 \subseteq A_1$, $A_1A_1 \subseteq A_0$.

Veamos algunos ejemplos. El álgebra de matrices $M_2(\mathbb{K})$, donde $M_2(\mathbb{K})_0$ viene dado por las matrices diagonales, y $M_2(\mathbb{K})_1$ por las antidiagonales, con el producto usual de matrices, es una superálgebra que además es asociativa. El anillo de polinomios sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ en una variable, $\mathbb{K}[X]$, donde $\mathbb{K}[X]_0$ son los polinomios de grado par y $\mathbb{K}[X]_1$ los de grado impar, con el producto usual del anillo de polinomios, es una superálgebra también asociativa. Y, finalmente, la $\mathbb{K}$-álgebra G generada por $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$ de modo que el producto en G viene dado porque $e_ie_j = -e_je_i$, donde G_0 es el subespacio con base $\{1\} \cup \{e_{i_1} \cdots e_{i_n}\}_{n\in 2\mathbb{Z}}$ y G_1 es el subespacio con base $\{e_{i_1} \cdots e_{i_n}\}_{n\in 2\mathbb{Z}+1}$; esta superálgebra se conoce con el nombre de *superálgebra de Grassmann*.

Las subálgebras e ideales de superálgebras son, en realidad, subálgebras e ideales graduados. Es decir, que dada una superálgebra $A = A_0 \oplus A_1$, un subespacio B es una subálgebra o un ideal si B es una subálgebra o ideal, respectivamente, de A como algebra sin graduar pero tal que $B = B_0 \oplus B_1$.

Una *superálgebra de Lie* es una superálgebra L tal que los elementos de $L_0 \cup L_1$, llamados elementos *homogéneos*, cumplen las identidades

$$[x_i, x_j] = -(-1)^{ij}[x_j, x_i],$$

$$(-1)^{ik}[[x_i, x_j], x_k] + (-1)^{ij}[[x_j, x_k], x_i] + (-1)^{jk}[[x_k, x_i], x_j] = 0,$$

donde el subíndice de x_i denota que está en el subespacio L_i.

En una superálgebra de Lie notemos que dos elementos $x, y \in L_1$ verifican que $[x, y] = [y, x]$; luego, si $L_1 \neq 0$, L no es un álgebra de Lie. Por tanto las superálgebras de Lie no son en general álgebras de Lie. Sin embargo están relacionadas

con ellas, ya que si consideramos la superálgebra de Grassmann $G = G_0 \oplus G_1$ y una superálgebra de Lie $L = L_0 \oplus L_1$, y tomamos el producto tensorial $G \otimes L$, entonces lo que se conoce como *envolvente de Grassmann* de L, denotado $G(L)$, es un álgebra de Lie. De hecho las superálgebras de Lie se pueden definir de modo equivalente así, como superálgebras L tales que su envolvente de Grasmann $G(L)$ es un álgebra de Lie.

Veamos algunos ejemplos de superálgebras de Lie. Dada una superálgebra asociativa $A = A_0 \oplus A_1$, al cambiar el producto de A por el supercorchete $[a_i, a_j]_s = a_i a_j + (-1)^{ij} a_j a_i$ con $a_i \in A_i, a_j \in A_j$, obtenemos una nueva superálgebra $(A = A_0 \oplus A_1, [,]_s)$ que es una superálgebra de Lie. Otro tipo de ejemplos se puede obtener también así: dada una superálgebra $A = A_0 \oplus A_1$, una *superinvolución* en A es una aplicación $\mathbb{K}$-lineal $^*: A \to A$ tal que es graduada, es decir, que $A_0^* \subseteq A_0, A_1^* \subseteq A_1$. En una superálgebra con superinvolución, los elementos $K(A) = \{x \in A : x^* = -x\}$ constituyen una subálgebra de $(A, [,]_s)$.

Hemos visto que las superálgebras de Lie se pueden definir a partir de la envolvente de Grasmann de una superálgebra. Esto permite definir también de forma análoga otros tipos de superálgebras. Por ejemplo, una superálgebra de Jordan es una superálgebra, J, tal que $G(J)$ es un álgebra de Jordan. Al igual que ocurre con las álgebras asociativas y las de Jordan, a partir de un superálgebra asociativa se puede obtener una de Jordan cambiando su producto por el producto $a_i \circ_s b_j = a_i b_j + (-1)^{ij} b_j a_i$, llamado *supersimetrizado*. Esta relación fue la base del estudio de las subálgebras maximales de superálgebras simples asociativas y de Jordan en la tesis que realizó Sara Sacristán dentro del grupo [51], leída en 2005, y que aparece publicada en [22], [23] y [24]. Sara Sacristán se acreditó como profesora contratada doctora y es en la actualidad profesora funcionaria docente en enseñanza secundaria.

Para superálgebras de Lie se puede probar un análogo del Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt de álgebras de Lie. Es decir, que toda superálgebra de Lie, L, es una subálgebra de una superálgebra de Lie del tipo $(A, [,]_s)$ con A superálgebra asociativa y $[,]_s$ el supercorchete.

Al igual que ocurrió en álgebras de Lie, este hecho motivó que se estudiara la relación entre los ideales de $(A, [,]_s)$ como superálgebra de Lie y los ideales de A como superálgebra asociativa. Es lo que se conocía para el caso no graduado como Teoría de Herstein. En parte venía motivada porque muchas de las álgebras de Lie simples finitodimensionales sobre un cuerpo de característica cero vienen de álgebras asociativas simples o de considerar el álgebra de Lie de elementos antisimétricos en un álgebra asociativa simple con involución.

Nuestro grupo ha estado estudiando esta Teoría de Herstein en superalgebras y se han obtenido bastantes resultados que aparecen, por ejemplo, en [27], [41] y [40].

5. TEORÍA DE LIE NO ASOCIATIVA

Desde pequeños nos han enseñado que la suma y la diferencia de números cumplen las propiedades $(x+y)+z=x+(y+z)$ (*asociativa*), $x+0=x=0+x$ (existencia de *elemento neutro*), $x+(-x)=0=(-x)+x$ (existencia de *opuestos*). Los algebristas, muy propensos a abreviar, llamamos *grupo* a cualquier conjunto con una operación $+$ que cumpla estas mismas propiedades. Como es fácil jugar con estas operaciones vamos a complicarlo un poquito más. Vamos a sumar ángulos. Al contrario que los números, los ángulos solamente varían entre cero y trescientos sesenta grados, siendo estos dos ángulos iguales. Si lo pensamos un momento nos daremos cuenta de que sumar ángulos es lo mismo que sumar minutos en un reloj que tenga la esfera dividida en trescientos sesenta minutos en lugar de en los tradicionales sesenta minutos. Lo importante es que ¡ahora ya sabemos sumar entre sí elementos de una circunferencia y no simplemente elementos de una línea recta! *¿Podemos entonces «sumar» elementos en cualquier esfera (superficie esférica)?* Tras esta sencilla pregunta se encuentra un profundo teorema de la Matemática publicado en 1958 por R. Bott, J. W. Milnor y M. A. Kervaire y ampliado por J. F. Adams en 1960 en el contexto de H-espacios. Este teorema asegura que no, que solamente es posible dotar de estructura de grupo (de Lie) a las esferas de dimensiones 0, 1 o 3, ya que la única esfera que además de estas admite una «suma» es la esfera de dimensión 7, pero esta suma no cumple la propiedad asociativa. Este teorema tiene también una estrecha relación con las *álgebras de división reales de dimensión finita*, que solamente aparecen en dimensiones $1, 2, 4$ y 8, acerca de las cuales nuestro grupo ha publicado estudios [36, 37] y sobre las que versó la tesis doctoral de C. Jiménez Gestal [35]. Estas álgebras, generalizaciones en dimensiones 4 y 8 de los números complejos, permiten parametrizar de modo natural las álgebras de Lie expcepcionales, por lo que son los «números» adecuados para realizar los cálculos en ciertas áreas de la Física. Como consuelo por la respuesta negativa a la pregunta inicial cabe decir que Willian K. Clifford (1845–1879) desarrolló lo que hoy conocemos como *álgebras de Clifford*, muy utilizadas hasta nuestros días en Física, que permiten operar fácilmente con rotaciones en espacios de cualquier dimensión.

Pero, entonces, *¿por qué la suma de números y la suma de ángulos en la circunferencia son tan similares?* Si identificamos por un momento la circunferencia con los ángulos entre $-180°$ y $180°$, siendo estos dos ángulos iguales, y sumamos ángulos muy próximos al ángulo $0°$ notamos que no hay diferencia entre sumar ángulos o sumar números. La diferencia surge cuando nos acercamos al ángulo de $180°$ ya que, por ejemplo, $179°+3°=-178°$. La forma rigurosa de expresar que suficientemente cerca del elemento neutro ambas sumas son esencialmente la misma es decir que los dos grupos de Lie son *localmente isomorfos*. Globalmente, considerados en su totalidad, dos grupos localmente isomorfos pueden poseer, como sucede con la circunferencia y la línea recta, formas muy diferentes. Bien, pero *¿cómo se sabe si dos grupos de Lie son localmente isomorfos?* Para responder a esta pregunta, Sophus Lie asoció a cada grupo de Lie un álgebra de Lie y demostró que dos grupos son

localmente isomorfos si y solamente si sus correspondientes álgebras de Lie son isomorfas. En otras palabras, los grupos de Lie quedan localmente clasificados por sus álgebras de Lie. Sophus Lie también demostró que este proceso de asignar un álgebra de Lie a un grupo de Lie es reversible (al menos localmente). Este resultado queda claramente recogido en la famosa fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff que describe explícitamente una «suma» $x*y$ que cerca de 0 coincide esencialmente con la de cualquier grupo de Lie cuya álgebra de Lie sea $(\mathfrak{g},[\,,\,])$:

$$x*y = x+y+\frac{1}{2}[x,y]+\frac{1}{12}[x,[x,y]]-\frac{1}{12}[y,[y,x]]-\frac{1}{24}[y,[x,[x,y]]]+\cdots.$$

Los puntos suspensivos en la anterior fórmula indican que se trata una serie de la cual solamente hemos detallado algunos sumandos iniciales. Pero *¿por qué tanto énfasis en la palabra «local»?* Pues porque la obstrucción para poder definir una «suma» no solamente en esferas sino en *variedades diferenciables* con *conexiones afines* (objetos geométricos mucho más generales que las esferas) es debida a la forma de estos objetos, ya que localmente —es decir, sumar puntos muy próximos a uno dado— es siempre posible mediante la *suma geodésica*, una versión muy general de la suma de puntos en el plano. Esta suma puede no cumplir la propiedad asociativa, por lo que en lugar de grupos usamos el término *lazos* locales para designarla. La relación entre lazos y Geometría es tan profunda que L. Sabinin reformuló los objetos de estudio de la Geometría diferencial a través del lenguaje de los lazos. *¿Pueden entonces clasificarse localmente los lazos mediante algún álgebra similar al álgebra de Lie?* Sí. Las álgebras de Sabinin son una generalización de las álgebras de Lie y clasifican localmente los lazos. Así que, aunque no podamos definir una noción de «suma» global en las esferas, sí que lo podremos hacer localmente.

Descansemos un momento para cuestionarnos acerca de si realmente merece la pena extender los trabajos en álgebras y grupos de Lie a un contexto no asociativo. Para salir de dudas hagamos un sencillo experimento casero cuantitativo. Cualquier lector conoce muy bien la figura de *Sancho Panza* aunque nunca antes haya oído el término *Lie algebras*. El experimento consiste en buscar a través de Google ambos términos. En el momento de escribir estas líneas nuestro escudero universal aparece aproximadamente en 644 000 registros mientras que ese otro término «desconocido» aparece en aproximadamente 1 250 000 registros. Queda claro que nos encontramos ante uno de los objetos de estudio centrales de la Matemática, así que volvamos a su generalización no asociativa. Y es que, por sorprendente que parezca, incluso el cálculo de una fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff para lazos que no sean grupos sigue siendo un problema abierto, pues las técnicas geométricas que se han utilizado hasta hace poco tiempo no son válidas para abordar los nuevos problemas. Ha sido preciso establecer una conexión entre lazos, álgebras de Sabinin y *álgebras de Hopf no asociativas* para poder tratar algebraicamente estos problemas.

Las *álgebras de Hopf* son otro campo de investigación muy activo con profundas implicaciones en muchas ramas de la Matemática y de la Física. De entre los muchos ejemplos que se podrían citar baste mencionar su conexión con la *renormalización* en el estudio perturbacional de la *Teoría cuántica de campos*, donde

el proceso BPHZ (Bogoliubov, Parasiuk, Hepp y Zimmermann) se puede interpretar como la descomposición de Birkhoff de los caracteres del álgebra de Hopf de Connes-Kreimer de diagramas de Feynman codificados mediante árboles [19]. Bien, pero *¿qué tienen que ver las álgebras de Hopf con los grupos y las álgebras de Lie?* Todo, hasta el punto de que las álgebras de Hopf sustituyen al concepto de grupo en contextos donde no hay ningún grupo responsable de la simetría (*grupos cuánticos*). De hecho, como ya se ha mencionado, el producto $[x,y]$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ puede interpretarse como $[x,y]=xy-yx$ donde xy denota el producto de una cierta álgebra asociativa $U(\mathfrak{g})$, su envolvente universal, que resulta ser un álgebra de Hopf. Cambiando $[x,y]$ por $xy-yx$ en la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff vemos que en realidad se trata de una fórmula que involucra elementos y operaciones en $U(\mathfrak{g})$, un álgebra en la cual, al ser asociativa, los cálculos son más sencillos. Miembros de nuestro grupo introdujeron las álgebras de Hopf no asociativas en 2007 y desde entonces han estado involucrados, junto con J. Mostovoy e I. P. Shestakov, en su desarrollo, extendiendo resultados fundamentales de la Teoría de Lie a un contexto no asociativo (véanse [48] y [49]). En 2012, S. Madariaga defendió su tesis doctoral [44] sobre envolventes de álgebras de Sabinin. Actualmente se está calculando la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff y la recursión de Magnus para lazos y, como tema central de la tesis de doctorado de D. de la Concepción, se está explorando el concepto de superálgebra de Sabinin. La *recursión de Magnus* es un método de encontrar soluciones aproximadas de la ecuación diferencial $Y'(t)=A(t)Y(t)$ bajo la hipótesis de que $A(t)Y(t)$ puede ser diferente de $Y(t)A(t)$, i.e. $Y(t)$ y $A(t)$ no necesariamente conmutan. La *ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo* en *Mecánica Cuántica*

$$i\hbar U'(t)=\lambda H(t)U(t)$$

es un ejemplo de este tipo de ecuaciones. El método de W. Magnus permite obtener soluciones aproximadas que comparten propiedades cualitativas con la solución exacta $Y(t)$, como por ejemplo el carácter unitario en la ecuación de Schrödinger. Es por ello que este método resulta de gran interés tanto en Matemática como en Física. Miembros de nuestro equipo están extendiendo los métodos de Magnus a un contexto donde el producto $A(t)Y(t)$ puede no ser ni conmutativo ni asociativo.

Para terminar, ya que la conexión entre grupos de Lie y álgebras de Lie ha permitido clasificar localmente a estos grupos, cabría preguntarse si a cualquier grupo, sea o no de Lie, se le puede asociar un anillo de Lie de modo que este anillo ayude a comprender mejor el grupo. La respuesta es que sí, aunque en general son necesarias condiciones de nilpotencia en el grupo. Para profundizar en este interesante tema y en sus aplicaciones remitimos al lector al trabajo de E. Zelmanov [60]. Simplemente señalar que esta relación entre grupos nilpotentes y anillos de Lie fue extendida en [47] a una relación entre lazos nilpotentes y anillos de Sabinin en un trabajo conjunto de un miembro de nuestro equipo y J. Mostovoy.

6. IDENTIDADES POLINOMIALES EN ÁLGEBRAS

Algunas de las propiedades de las álgebras de Lie, como de muchas otras álgebras, pueden expresarse mediante identidades polinomiales (por ejemplo, (2)). Una identidad polinomial para un álgebra es un polinomio que se anula cuando es evaluado en elementos del álgebra. El estudio de identidades polinomiales permite, entre otras cosas, clasificar variedades de álgebras.

La teoría de identidades polinomiales tiene dos vertientes fundamentales: la estructural o teórica y la computacional o combinatoria. La primera se inició en 1948 con un trabajo de I. Kaplansky [38] y estudia las propiedades teóricas de los anillos o álgebras que satisfacen identidades polinomiales. La segunda comenzó en 1950 con un trabajo de Specht [54] y trata de describir el conjunto de identidades polinomiales que satisface una determinada álgebra (llamado T-ideal del álgebra). En particular, se busca la respuesta al conocido como *problema de Specht*: ¿es el T-ideal de un álgebra finitamente generado? Kemer dio en 1987 una respuesta afirmativa para el caso de álgebras asociativas sobre cuerpos de característica cero [39]. Resultados similares fueron obtenidos por Vais y Zelmanov en 1989 para álgebras de Jordan finitamente generadas [57] y por Iltyakov en 1991 y 1992 para álgebras alternativas finitamente generadas y álgebras de Lie [32, 33].

El estudio de las componentes homogéneas del T-ideal de un álgebra, considerando la graduación del álgebra de polinomios por grado total, conduce al problema de determinación del grado mínimo de las identidades de un álgebra y la obtención de conjuntos óptimos de generadores (identidades no redundantes y «lo más sencillas posible»: mínimo número de términos y coeficientes pequeños). Por ejemplo, Amitsur and Levitzki probaron en 1950 que el grado mínimo de las identidades que verifican las álgebras de matrices $M_n(\mathbb{K})$ es $2n$, y que toda identidad de grado $2n$ verificada por $M_n(\mathbb{K})$ es un múltiplo escalar del polinomio estándar [1]

$$s_{2n}(x_1,\ldots,x_{2n}) = \sum_{\sigma\in S_{2n}} \epsilon(\sigma) x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(2n)}.$$

Sobre cuerpos de característica cero, toda identidad polinomial es equivalente a un conjunto finito de identidades multilineales [61], luego una identidad polinomial es una combinación lineal de monomios multilineales no asociativos: diferentes posiciones de paréntesis con permutaciones de las variables $x_1,\ldots,x_n$. Por tanto, los términos con la misma estructura de paréntesis pueden verse como elementos del álgebra grupo del grupo simétrico $\mathbb{K}S_n$. Esta idea fue introducida en 1950 independientemente por Malcev [45] y Specht [54]; su implementación fue iniciada en 1977 por Hentzel [30, 31]. Hentzel, Bremner y Peresi (recientemente también Madariaga [6, 15, 16, 17]) han desarrollado diversos algoritmos basados en estas técnicas y los han aplicado al estudio de diferentes álgebras, diálgebras y otras estructuras dotadas de productos multilineales. En [18] se detallan dichos métodos y se particularizan al álgebra de los octoniones.

Agradecimientos

Los autores agradecen la financiación que han recibido para su investigación durante los últimos años de distintos ministerios españoles (actualmente el proyecto MTM2010-18370-C04-03) y de los siguientes organismos internacionales: PIMS de Canadá, CONACYT de México y FAPESP de Brasil. También agradecen el apoyo económico de la Comunidad Autónoma de La Rioja en varios proyectos, y muy especialmente el del Instituto de Estudios Riojanos en los primeros años de andadura.

REFERENCIAS

[1] A. S. Amitsur y J. Levitzki, Minimal identities for algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* **1** (1950), 449–463.

[2] N. Andruskiewitsch, *De los grupos de Lie a los grupos cuánticos*, Notas del curso «Primeira Escola de Verao em História Conceitual da Matemática», Brasilia, 2008.

[3] J. Baez y J. Huerta, The algebra of grand unified theories, *Bull Amer. Math. Soc. (N.S.)* **47** (2010), no. 3, 483–552.

[4] J. Baez y J. Huerta, The strangest numbers in string theory, *Scientific American*, May 1 (2011), 61–65.

[5] V. J. Del Barco y G. P. Ovando, Free nilpotent Lie algebras admitting ad-invariant metrics, *J. Algebra* **4366** (2012), 205–216.

[6] P. Benito, M. Bremner y S. Madariaga, Symmetric matrices, orthogonal Lie algebras and Lie-Yamaguti algebras, *Linear and Multilinear Algebra* (2014), `http://dx.doi.org/10.1080/03081087.2014.930141`.

[7] P. Benito y D. de-la-Concepción, Sage computations of $\mathfrak{sl}_2(k)$-Levi extensions, *Tibilisi Math. J.* **5** (2012), no. 2, 3–17.

[8] P. Benito y D. de-la-Concepción, On Levi extensions of nilpotent Lie algebras, *Linear Algebra Appl.* **439** (2013), 1441–1457.

[9] P. Benito y D. de-la-Concepción, On extensions of nilpotent Lie algebras of Type 2, *Linear Algebra Appl.* **457** (2014), 363–382.

[10] P. Benito, D. de-la-Concepción y J. Laliena, Quadratic nilpotent Lie algebras from forms on free nilpotent algebras, prepublicación.

[11] P. Benito, C. Draper y A. Elduque, On some algebras related to simple Lie triple systems, *J. Algebra* **4219** (1999), no. 1, 234–254.

[12] P. Benito, C. Draper y A. Elduque, Lie-Yamaguti algebras related to $\mathfrak{g}_2$, *J. Pure Appl. Algebra* **202** (2005), no. 1-3, 22–54.

[13] P. Benito, A. Elduque y F. Martín-Herce, Irreducible Lie-Yamaguti algebras, *J. Pure Appl. Algebra* **213** (2009), 795–808.

[14] P. Benito, A. Elduque y F. Martín-Herce, Irreducible Lie-Yamaguti algebras of generic type, *J. Pure Appl. Algebra* **215** (2011), 108–130.

[15] M. R. Bremner y S. Madariaga, Special identities for the pre-Jordan product in the free dendriform algebra, *Linear Algebra Appl.* **439** (2013), no. 2, 435–454.

[16] M. R. Bremner y S. Madariaga, Jordan quadruple systems, *J. Algebra* **412** (2014), no. 2, 51–86.

[17] M. R. Bremner y S. Madariaga, Polynomial identities for tangent algebras of monoassociative loops, *Comm. Algebra* **42** (2014), no. 1, 203–227.

[18] M. Bremner, S. Madariaga y L. A. Peresi, Structure theory for the group algebra of the symmetric group, with applications to polynomial identities for the octonions, arXiv:1407.3810.

[19] A. Connes y D. Kreimer, Hopf algebras, renormalization and noncommutative geometry, *Math. Phys.* **198** (1998), no. 1, 199–246.

[20] W. Dickinson W y M. M. Kerr, The geometry of compact homogeneous spaces with two isotropy summands, *Ann. Global Anal. Geom.* **34** (2008), 329–350.

[21] C. Draper, *Espacios homogéneos deductivos y álgebras no asociativas*, Tesis doctoral, Universidad de La Rioja, 2001.

[22] A. Elduque, J. Laliena y S. Sacristán, Maximal subalgebras of assocative superalgebras, *J. Algebra* **275** (2004), no. 1, 40–58.

[23] A. Elduque, J. Laliena y S. Sacristán, The Kac Jordan superalgebra: automorphisms and maximal subalgebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* **135** (2007), no. 12, 3805–3813.

[24] A. Elduque, J. Laliena y S. Sacristán, Maximal subalgebras of Jordan superalgebras, *J. Pure Appl. Algebra* **212** (2008), no. 11, 2461–2478.

[25] F. Engel y S. Lie, *Theorie der Tranformations Gruppen*, B. G. Teubner, Leipzig, 1890.

[26] J. R. Faulkner y J. C. Ferrar, Exceptional Lie algebras and related algebraic and geometric structures, *Bull. London Math. Soc.* **9** (1977), no. 1, 1–35.

[27] C. Gómez-Ambrosi, J. Laliena y I. Shestakov, On the Lie structure of the Skew elements of a prime super algebra with super involution, *Comm. Algebra* **28** (2000), 3277–3291.

[28] Ming-Peng Gong, *Classification of nilpotent Lie algebras of dimension 7 over algebraically closed fields and* $\mathbb{R}$, Ph. D., Waterloo, Ontario (Canadá), 1998.

[29] J. L. Guijarro, *Lie. Más allá de la geometría*, Nivola, Madrid, 2007.

[30] I. R. Hentzel, Processing identities by group representation, *Computers in Nonassociative Rings and Algebras* (Special Session, 82nd Annual Meeting, Amer. Math. Soc., San Antonio, Texas, 1976), 13–40, Academic Press, New York, 1977.

[31] I. R. Hentzel, Applying group representation to nonassociative algebras, *Ring Theory* (Ohio, 1976), Vol. 25, 133–141, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., Athens, 1977.

[32] A. V. Iltyakov, Finiteness of basis of identities of a finitely generated alternative PI-algebra over a field of characteristic zero, *Siberian Math. J.* **32** (1991), 948–961.

[33] A. V. Iltyakov, On finite basis of identities of Lie algebra representations, *Nova J. Alg. Geom.* **1** (1992), 207–259.

[34] N. Jacobson, *Lie algebras*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, Vol. 10, John Wyley & Sons, 1962.

[35] C. Jiménez-Gestal, *Núcleo alternativo generalizado y derivaciones ternarias de algunas estructuras algebraicas no asociativas*, Tesis doctoral, Universidad de La Rioja, 2010.

[36] C. Jiménez-Gestal y J. M. Pérez-Izquierdo, Ternary derivations of generalized Cayley-Dickson algebras, *Comm. Algebra* **31** (2003), no. 10, 5071–5094.

[37] C. Jiménez-Gestal y J. M. Pérez-Izquierdo, Ternary derivations of finite-dimensional real division algebras, *Linear Algebra Appl.* **428** (2008), no. 8-9, 2192–2219.

[38] I. Kaplansky, Rings with a polynomial identity, *Bull. Amer. Math. Soc.* **54** (1948), 575–580.

[39] A. R. Kemer, Finite basis property in associative algebras, *Algebra and Logic* **26** (1987), 362–397.

[40] J. Laliena, On the Lie structure of a prime associative superalgebra, *J. Algebra* **404** (2014), 18–30.

[41] J. Laliena y S. Sacristán, Lie structure in semiprime superalgebras with superinvolution, *J. Algebra* **315** (2007), 751–760.

[42] H. T. Laquer, Invariant affine connections on symmetric spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **331** (1992), no. 2, 447–454.

[43] H. T. Laquer, Invariant affine connections on Lie groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **331** (1992), no. 2, 541–551.

[44] S. Madariaga, *Envolventes universales de álgebras de Sabinin*, Tesis doctoral, Universidad de La Rioja, 2012.

[45] A. I. Malcev, On algebras defined by identities, *Mat. Sbornik N. S.* **26** (1950), 19–33.

[46] F. Martín-Herce, *Álgebras de Lie-Yamaguti y sistemas algebraicos no asociativos*, Tesis doctoral, Universidad de La Rioja, 2006.

[47] J. Mostovoy y J. M. Pérez-Izquierdo, Dimension filtration on loops, *Israel J. Math.* **158** (2007), no. 1, 105–118.

[48] J. Mostovoy, J. M. Pérez-Izquierdo y I. P. Shestakov, Hopf algebras in non-associative Lie theory, *Bull. Math. Sci.* **4** (2014), no. 1, 129–173.

[49] J. Mostovoy, J. M. Pérez-Izquierdo y I. P. Shestakov, Nilpotent Sabinin algebras, arXiv:1312.2223.

[50] K. Nomizu, Invariant affine connections on homogeneous spaces, *Amer. J. Math.* **76** (1954), 33–65.

[51] S. Sacristán, *Subálgebras maximales de superálgebras asociativas y de Jordan*, Tesis doctoral, Universidad de La Rioja, 2005.

[52] T. Sato, The derivations of the Lie algebras, *Tohoku Math. J. (2)* **23** (1971), 21–36.

[53] R. D. Schafer, *An introduction to Nonassociative Algebras*, Dover Publications, 1966.

[54] W. Specht, Gesetze in Ringen. I, *Math. Z.* **52** (1950), 557–589.

[55] A. Stubhaug, *The Mathematician Sophus Lie*, Springer, Berlín, 2002.

[56] T. S. Tsou y G. Walker, Metrisable Lie Groups and Algebras, *Proc. Royal Soc. Edinburgh. Sect. A* **64** (1955/1957), 290–304.

[57] A. Ya. Vais y E. I. Zelmanov, Kemer's theorem for finitely generated Jordan algebras, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.* **1989** (1989), no. 6, 42–51.

[58] J. A. Wolf, The geometry and structure of isotropy irreducible homogeneous spaces, *Acta Math.* **120** (1968), 59–148; Correction, *Acta Math.* **152** (1984), 141–142.

[59] K. Yamaguti, On the Lie triple system and its generalization, *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A* **21** (1957/1958), 155–160.

[60] E. I. Zelmanov, Lie ring methods in the theory of nilpotent groups, *Groups'93 Calway/St. Andrews*, Vol. 2, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 212, Cambridge Univ. Pres, Cambridge, 1995.

[61] K. A. Zhevlakov, A. M. Slinko, I. P. Shestakov y A. I. Shirshov, *Rings That Are Nearly Associative*, Pure and Applied Mathematics, 104, Academic Press, New York, 1982.

ZUBÍA

26

00026
9 771131 542004

Gobierno de La Rioja
www.larioja.org

Instituto
de Estudios
Riojanos