

# Los fenómenos de cambio

*Antonio Estepa Castro*

Universidad de Jaén

## Resumen

La preocupación de los hombres por los fenómenos de cambio desde los primeros tiempos se ha plasmado en ser un tema fundamental de estudio en Filosofía, desde su fundamentación helénica. Un modo eficaz de estudiar los fenómenos de cambio es la búsqueda de patrones, incluso los patrones que permanecen ocultos. Y una herramienta fundamental es la Matemática; mediante ella podemos: representarlos, comprenderlos, reconocer sus tipos y, algunas veces controlarlos. En este trabajo nos centraremos en los fenómenos de cambio que estudia la Estadística y Probabilidad. El primer problema que nos encontramos es su denominación, discutiremos los términos utilizados, en español, hasta ahora, el más utilizado es dispersión. A continuación, veremos el papel que juega en estas Ciencias, buscaremos sus fuentes (en la medida, en la Naturaleza, inducida y en el muestreo), finalizaremos con la noción de dispersión (siempre olvidada en los currícula oficiales), su consideración en la planificación de la enseñanza y las referencias utilizadas en este trabajo.

## 1. Introducción

*“La habilidad para tratar inteligentemente con la variación y la incertidumbre es el objetivo de la instrucción sobre datos y azar”*(Moore, 1990, p. 135)

Es comúnmente aceptado que vivimos en un mundo donde todo cambia, nada permanece idéntico en el tiempo y la mayoría de las acciones que se llevan a cabo son distintas cuando se vuelven a realizar.

La mayoría de los fenómenos naturales, desde los movimientos de partículas en el interior del átomo hasta los movimientos de los cuerpos celestes son manifestaciones del cambio. En la Naturaleza, los cambios están presentes en todas sus manifestaciones desde los fenómenos naturales (tiempo, fenómenos geológicos, mareas,...) hasta los seres vivos: un ser vivo se diferencia de otro, incluso el mismo ser vivo, desde los más pequeños (virus) hasta los más grandes (ballenas, elefantes) cambian con el tiempo; igual ocurre con las mareas, estaciones del año, tiempo atmosférico,... algunos de ellos son simples

Un tipo de cambios más complicados los encontramos en nuestra vida social y económica: evolución económica, la globalización produce cambios sociales de enorme complejidad. En consecuencia, los hombres se han preguntado siempre por la naturaleza de los cambios que han observado en su entorno.

## 2. Los fenómenos de cambio y la filosofía

Ya los filósofos griegos (Ferrater Mora, 1998) se preocuparon por estos fenómenos de cambio (en la actualidad los filósofos utilizan el término “devenir” para expresar estos fenómenos), destacando en primer lugar Parménides que sostiene que lo que es “todo es” y, en consecuencia, todo está en reposo, todo permanece; mientras que Heráclito basa su

filosofía en el principio “nada es todo cambia”, ejemplificado en “nadie se baña dos veces en el mismo río”. Filósofos posteriores interpretan el cambio diferenciando lo cualitativo de lo cuantitativo, así para Demócrito devenir es desplazamiento de átomos en sí mismos invariables sobre un fondo de no ser o extensión indeterminada (cuantitativo) Empédocles y Anaxágoras entiende el devenir como cambio de cualidades (cualitativo). La distinción entre lo cualitativo y cuantitativo en el devenir ha resultado fundamental en filosofía (también es fundamental en Estadística).

Aristóteles distingue seis clases de fenómenos de cambio (devenir): a) generación o génesis (el hecho de comenzar a ser otra cosa por la adquisición de una nueva forma); b) destrucción (dejar de ser lo que era); c) aumento; d) disminución; e) alteración (adquirir, perder o modificar alguna cualidad); f) traslación, desplazamiento, cambio de lugar o movimiento local.

Santo Tomás de Aquino decía que el cambio es la actualización de la potencia (capacidad de una cosa para producir un cambio en otra o potencialidad de una cosa para pasar a otro estado) en tanto que potencia, y por eso hay devenir cuando una causa eficiente lleva la potencia a la actualidad, y otorga al ser su perfección entitativa.

En algunas direcciones de la filosofía moderna se entiende el devenir como la única explicación plausible de todo cambio. Destacamos la concepción (Bergson) que nos dice que el devenir es una realidad primaria para lo cual el ser existe solamente en la medida en que deviene.

### **3. Los fenómenos de cambio en matemáticas**

Es de enorme importancia que los seres humanos comprendamos e intentemos controlar los cambios que se producen en nuestro mundo. Un modo eficaz de estudiar los fenómenos de cambio es la búsqueda de patrones, incluso los patrones que permanecen ocultos. Para lograr esto, según Steward (1990) se necesita:

- Representar los cambios de una forma comprensible,
- Comprender los tipos fundamentales de cambios,
- Reconocer tipos particulares de cambios, cuando ellos ocurren,
- Aplicar las técnicas anteriores al mundo exterior
- Controlar el universo cambiante para un mejor provecho.

Una herramienta eficaz para realizar estas tareas con eficacia son las Matemáticas, con las que elaboramos modelos para estudiar los cambios.

En general, los fenómenos de cambio pueden ser deterministas (cuando el cambio está completamente determinado, a partir de las condiciones iniciales) y aleatorios (cuando los cambios se los atribuimos al azar). Los primeros son estudiados en matemáticas y los segundos en estadística y probabilidad.

De manera general, la noción de cambio, se suele introducir en Matemáticas con la noción de variable que literalmente significa que varía o puede variar, que cambia de valor. En este contexto, la variación se suele expresar como la diferencia de dos valores y, se suele llamar incremento de la variable. Cuando se ponen en juego los cambios en dos o más variables, aparece el estudio de funciones, rama del análisis matemático. En una función, el límite de la tasa de variación entre la variable independiente y la variable dependiente, cuando esta última tiende a cero es lo que se conoce como derivada de una función. La

extensión del estudio de funciones a variables cualesquiera da origen a la noción de asociación estadística (Hildebrand y cols., 1977).

#### 4. Términos utilizados en estadística y probabilidad para referirse al cambio

En castellano está muy generalizado el uso de la palabra “*dispersión*”, generalmente utilizada cuando se refiere a la cuantificación de la misma. La expresión “medidas de dispersión” aparece en los currícula y libros de texto. En la literatura anglosajona aparecen cuatro términos: “*dispersion*” (dispersión), “*variation*” (variación), “*variability*” (variabilidad) y “*spread*”, palabra polisémica que significa como nombre: propagación, extensión, proliferación, generalización,..., y como verbo: difundir, propagarse, extenderse, extender, propagar, esparcir, contagiar, expandirse, untar, generalizar, tender, espaciar, ensancharse, explayarse... Debido a su polisemia esta última palabra “*spread*” da ocasión a dificultades cuando se utiliza en el estudio de la estadística en inglés, en los primeros cursos escolares; se recomienda usar en su lugar la palabras “*variability*” o “*dispersion*”, tomadas como sinónimos (Kaplan, Rogness, & Fisher, 2011).

Respecto a los términos “*variation*” y “*variability*” Reading y Shaughnessy (2004) apuntan que, según varios diccionarios consultados “*variation*” es un nombre usado para describir el acto de variar o cambiar una condición y “*variability*” es un nombre derivado del adjetivo “*variable*” y significa que algo es apto o propenso a variar o cambiar, concretando que, aunque muchos autores “*variation*” y “*variability*” los utilizan como términos sinónimos, ellos los utilizan con un sentido diferente, siendo el significado de “*variability*” una característica (propensa a variar) de una entidad observable y el significado de “*variation*” la descripción o medida de esa característica. Más adelante, en una definición que daremos de variación de Makar & Confrey (2005) se puede observar que estos autores entienden por variación lo que Reading y Shaughnessy (2004) entienden por variabilidad.

En la mayoría de la literatura estadística en inglés las palabras “*dispersion*”, “*variation*”, “*variability*” y “*spread*” se toman como sinónimas a lo que en castellano entendemos por dispersión. Aunque en los currícula oficiales del MEC solamente se utiliza la palabra dispersión, se observa que en algunos libros de estadística cada vez aparecen con más frecuencia, quizás por influencia de la literatura inglesa, las palabras variación y variabilidad, en consecuencia, en lo que sigue, tomaremos como sinónimas las palabras dispersión, variación y variabilidad, mientras no se diga lo contrario.

#### 5. Papel de la dispersión en Estadística desde el punto de vista educativo

Moore (1990, p. 135) resume los elementos esenciales del pensamiento estadístico de la siguiente forma:

- La omnipresencia de la variación en los procesos.
- La necesidad de procesar los datos.
- El diseño de la producción de los datos con la variación in mente.
- La cuantificación de la variación
- La explicación de la variación.,

Como vemos en 4 de los 5 puntos cita la variación, en consecuencia, la dispersión es un concepto fundamental en Estadística (Snee, 1990).

Los estadísticos tienen una relación compleja con la variabilidad. Algunas veces intentan minimizarla, otras maximizarla, otras veces estimarla o simplemente analizar la varianza (Gould, 2004).

Para Wild y Pfannkuch (1999), la consideración de la variación también es fundamental en el pensamiento estadístico, entienden que la variación es el punto de partida, ya que está omnipresente en el quehacer estadístico. Distinguen dos fuentes de variación en los datos: Real (características del sistema) e inducida (en la recolección de los datos). En esta última distinguen:

- La medida (medidores y aparatos de medida),
- El muestreo,
- Por accidente (recolección de datos, proceso de datos)

Estos autores dan las siguientes respuestas prácticas a la variación

- Ignorarla
- Tomarla en consideración. (Anticipar. diseño de sistemas/ proceso/producto para ser insensible a la variación – tallas de ropa y número en el calzado- )
- Cambio de patrón (“Control”). Cambio de sistema / proceso para incrementar resultados “deseables”.

## 6. Fuentes de dispersión

Son muchas las fuentes de la dispersión, aquí consideraremos las siguientes: la medida, la naturaleza, dispersión inducida, dispersión en el muestro (Franklin et al., 2005).

*Dispersión en la medida.* Como nos dice Utts (1999, 49) “*variabilidad es un concepto que se utiliza cuando se habla de dos o más medidas en relación con otra*”. Cuando realizamos medidas repetidas sobre un mismo ítem observamos que las diversas medidas no son iguales varían de una vez a otra, esto es debido a varias causas, entre otras, a que el instrumento de medida no es muy fiable o adecuado (medir las dimensiones del aula con un doble decímetro), o bien, que el sistema donde se hace la medida está en constante cambio. Para este segundo caso podemos poner como ejemplo la medida de la presión sanguínea, aunque el instrumento de medida sea preciso, la presión cambia en un instante. Este hecho fue observado por astrónomos babilonios y griegos, varias centurias antes de Cristo (Plackett, 1958). El estudio de este fenómeno dio lugar al desarrollo de las leyes del error, de gran fecundidad en Estadística.

*Dispersión en la Naturaleza.* La dispersión es inherente a la naturaleza. Si tomamos medidas sobre seres naturales de una misma especie encontramos diferencias, debido a que los individuos son diferentes (los estudiantes de una misma clase no tienen el mismo peso o la misma altura; las semillas de una bolsa no pesan todas lo mismo, etc.). Algunas veces encontramos patrones de la variación existente y buscamos maneras de trabajar sobre ella, tal es el caso de las tallas de la ropa o el número del calzado (Wild y Pfannkuch, 1999).

“*Comprender el concepto de la variabilidad natural es crucial para entender los métodos estadísticos modernos.*” (Utts, 1999, 50).

*Dispersión inducida.* Si plantamos un kilogramo de las mismas semillas en diferentes climas obtendremos resultados diferentes. La variabilidad de los resultados será debida a la variabilidad natural de las semillas, pero también a la variabilidad inducida por el clima, en

un tipo de clima obtendremos mejores o peores resultados que en otro. Si el clima es el mismo y utilizamos distinto fertilizante, se obtendrá variabilidad inducida por el fertilizante. La comparación de la variabilidad natural con la variabilidad inducida por otros factores está en la esencia de la estadística moderna, por ejemplo, es el caso de los estudios de la efectividad de los medicamentos. Estos tipos de problemas se estudian en el diseño y análisis de experimentos, donde es de crucial importancia identificar las principales fuentes de variabilidad que según Cobb (1998, p. 4) son:

1. Variabilidad debida a las condiciones de interés (deseada),
2. Variabilidad en el proceso de medida (no deseada) y,
3. Variabilidad en el material experimental (no deseada).

*Dispersión en el muestreo.* Si se toman diferentes muestras de una misma población, estas varían entre sí. Si se utiliza una adecuada técnica de muestreo y un tamaño de muestra suficiente la muestra se asemeja a la población.

## **7. La noción de dispersión**

Tradicionalmente la noción de dispersión se ha tomado como un objeto transparente que no necesita ser enseñado. Este fenómeno aparece algunas veces en la enseñanza, como por ejemplo, las nociones de conteo y magnitud que no han aparecido en los currícula escolares hasta hace unos años.

El proceso de conteo requiere una gran cantidad de atención. Para realizar un recuento efectivo se debe proceder así:

1. Distinguir los elementos que se van a contar de los que no.
2. Elegir un elemento cualquiera de los que se van a contar y asignarle el primer elemento de la secuencia numérica, el 1.
3. ¿Es este el último elemento que se va a contar?
4. Sí, el último elemento de la secuencia numérica asignado ese es el cardinal buscado y hemos terminado de contar.
5. No;
6. Separar los elementos contados de los que quedan por contar.
7. Asignar el siguiente número de la secuencia numérica a uno cualquiera de los elementos que quedan por contar.
8. Volver al paso 3).

Como vemos en el algoritmo que acabamos de exponer para el proceso de conteo, no es una noción trivial y simple que se pueda aprender espontáneamente.

Lo mismo ocurre con la noción de magnitud, así no es de extrañar que cuando se le pregunta a un estudiante que acaba de entrar en la universidad, que cuando medimos el agua que cabe en una botella, qué magnitud estamos midiendo, responda que los litros o los centilitros (unidades), en lugar de la capacidad que es el nombre de la magnitud que estamos preguntando.

Antes, por lo visto se creía que las nociones de conteo y magnitud eran tan evidentes que no necesitaban ser enseñadas, afortunadamente en los últimos currícula ya aparecen. El mismo caso es el de dispersión, en los currícula y en los libros de texto aparecen las medidas de dispersión, pero no suele aparecer la noción de dispersión como tal, parece ser que es una

noción tan fácil que no es necesario dedicarle un tiempo a su estudio y clarificación. Muy pocos libros incluyen una definición para la dispersión, parece ser que suponen que es un término que todo el mundo conoce y comprende y, en consecuencia, no hay que definirlo ni enseñarlo, está claro, es un término transparente, su significado es el del sentido común.

No es así, ni mucho menos. La literatura de investigación en Didáctica de la Estadística muestra las grandes dificultades que tienen los estudiantes en el estudio de las nociones elementales de Estadística, muchas de estas dificultades son debidas o están relacionadas con las concepciones o con las interpretaciones que hacen los estudiantes de la dispersión.

La dispersión es la esencia de la Estadística, porque sin dispersión no hay necesidad de investigación estadística (Moore, 1990). La dispersión tiene un significado cercano a los conceptos de variable e incertidumbre, porque si hay variabilidad, vivimos en la incertidumbre y, si algo no está determinado o no es cierto, hay variabilidad (Bakker, 2004). Mañana sabemos que amanece a una hora determinada, pero no estamos seguros si lucirá el sol o no.

Entre las pocas definiciones de dispersión que hemos encontrado en la literatura estadística ofrecemos dos, la primera de un libro de Estadística y la segunda de un artículo de Educación Estadística:

A la mayor o menor separación de los valores respecto a otro, que se pretende que sea su síntesis, se le llama dispersión o variabilidad (Martín-Guzmán y Martín Pliego, 1985, p. 57).

En palabras sencillas, variación es la cualidad de una entidad (una variable) para variar, incluyendo variación debida a la incertidumbre (Makar & Confrey, 2005, p. 28).

Como vemos, la primera definición es lo que Reading y Shaughnessy (2004) llaman variación y la segunda lo que estos autores llaman variabilidad.

En cuanto al tratamiento de la dispersión en la enseñanza, generalmente en los curricula solo aparecen las medidas de dispersión, pero, aunque la medida de la dispersión es una herramienta muy importante en el análisis de datos, cuando consideramos la dispersión, tanto en el trabajo estadístico como en la enseñanza, debemos tener en cuenta (Makar & Confrey, 2005):

- a. El concepto de dispersión, su definición, saber explicar en qué consiste;
- b. Su uso, sobre todo cuando se mide, las técnicas matemáticas asociadas a la medida de la dispersión;
- c. El propósito que pretendemos con la dispersión, su utilidad dentro de un contexto, las fuentes de dispersión.

Dichos puntos se complementan con las tres perspectivas de (Peters, 2009), necesarias para razonar con competencia sobre variabilidad: una perspectiva de diseño que integra el reconocimiento y la previsión de la variabilidad en el diseño de los estudios cuantitativos, una perspectiva centrada en los datos que integra los procesos de representar, medir y describir la variación en el análisis exploratorio de datos, y la perspectiva de modelización que integra el razonamiento sobre modelos que ajustan patrones de variabilidad en los datos.

## Referencias

- Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education: On symbolizing and computer tools*. PhD. Utrecht : Utrecht University.
- Cobb, G. W. (1998). *Introduction to design and analysis of experiments*. New York: Springer - Verlag
- Ferrater Mora, J. (1998). *Diccionario de filosofía* (1ª reimpresión). Barcelona: Ariel
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J, Peck, R. Perry, M. & Scheaffer, R. (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report. A Pre-K–12 Curriculum Framework*. Alexandria, VA: American Statistical Association.
- Gould, R. (2004). Variability: One statistician's view. *Statistics Education Research Journal*, 3(2), 7-16.
- Hildebrand, D. K., Lang, J. D. y Rosenthal, H. (1977) *Analysis of nominal data*. Londres: Sage University Papero
- Makar, K. y Confrey, J. (2005). "Variation-talk": articulating meaning in statistics. *Statistics Education Research Journal*, 4(1), 27-54.
- Martín-Guzmán, M. P. y Martín Pliego, F. J. (1985). *Curso básico de estadística económica*. Madrid: Editorial AC.
- Moore, D. S. (1990). Uncertainty. En L. A. Steen (Eds.). *On the shoulders of giants. New approaches to numeracy* (pp. 183-217). Washington, D. C.: National Academy Press.
- Pearson, E. S. & M. Kendall, M. (1970). *Studies in the history of statistics and probability*. London: Charles Griffin.
- Peters, S. A. (2009). *Developing an understanding of variation: AP statistics teachers' perception and recollections of critical moments*. Ph.D. Pennsylvania State University. USA.
- Plackett, R. L. (1958). The principle of the arithmetic mean. *Biometrika*, 45, 130-135. (Reproducido en E. S. Pearson & M. Kendall (1970). *Studies in the History of Statistics and Probability*. (pp. 121-126). London: Charles Griffin.
- Snee, R. D. (1990). Statistical thinking and its contributions to total quality. *The American Statistician*, 44(2), pp. 116-121.
- Stewart, I. (1990). Change. En L. A. Steen (Eds.). *On the shoulders of giants. New approaches to numeracy* (pp. 183-217). Washington, D. C.: National Academy Press.
- Wild, C. J. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67,3, 223-265.