CONOCIMIENTO MATEMÁTICO COMÚN EN GEOMETRÍA DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO: UNA PROPUESTA DE INNOVACIÓN

Víctor Barrera Castarnado, José Manuel Infante Infante y María del Mar Liñán García

RESUMEN

A cualquier estudiante que ingresa en la Universidad se le consideran adquiridos unos conocimientos matemáticos mínimos necesarios para trabajar sin dificultad las asignaturas del área de Didáctica de las Matemáticas. Nuestra experiencia muestra que ese supuesto no es cierto en todos los casos, y diferentes estudios de investigadores del área así lo avalan; no parece siquiera adquirido el conocimiento acuñado por Ball, Thames y Phelps (2008) como el *Conocimiento Matemático Común*, aquel que cualquier adulto bien instruido debería tener. Para conocer las carencias de los estudiantes para maestro en la comprensión de esos contenidos hemos diseñado una prueba de evaluación inicial, descrita en este artículo. Teniendo en cuenta que en las cuestiones geométricas el índice de error es mayor, proponemos diferentes actividades de trabajo autónomo utilizando como herramienta el software educativo *GeoGebra*.

Palabras clave: Formación inicial de Maestros, Pruebas de evaluación inicial, Educación matemática, Conocimiento Matemático Común (CCK), Actividades de trabajo autónomo, Geometría, GeoGebra.

TITLE: COMMON MATHEMATICAL KNOWLEDGE OF GEOMETRY OF TEACHER TRAINEES: AN INNOVATIVE PROPOSAL

ABSTRACT

Any student who starts university is considered to have acquired the minimum mathematical knowledge necessary to work without any difficulty in the subjects related to Didactics of Mathematics. Our experience demonstrates that this supposition is not always true in every case, and different studies by researchers in this area confirm this; they don't even seem to have acquired the knowledge coined by Ball, Thames and Phelps (2008) as *Common Mathematical Knowledge*, that which any well instructed adult should have. To find out what teacher trainers are lacking in the understanding of these contents, we have designed an initial assessment test which we describe in this article. Bearing in mind that the rate of errors is greater regarding geometric questions, we propose different autonomous work activities, using as a tool the educational software *GeoGebra*.

Keywords: Teacher training, Tests for initial assessment, Mathematical training, Common Mathematical Knowledge (CCK) Autonomous work activities, Geometry, CeoGebra

Correspondencia con los autores: Víctor Barrera Castarnado <vbarrera@ceuandalucia.com>. José Manuel Infante Infante <jminfante@ceuandalucia.com>. María del Mar Liñán García <mlinan@ceuandalucia.com>. CES Cardenal Spínola CEU. Original recibido: 09-11-2012. Original aceptado: 19-02-2013

1. Introducción

A los estudiantes para maestro, en particular los que cursan el Grado en Educación Primaria, en adelante EPM, se les supone adquiridos unos conocimientos matemáticos suficientemente maduros para poder abordar con seguridad los contenidos específicos y didácticos propios de las asignaturas del Área de Didáctica de la Matemática.

Sin embargo, diversos trabajos como el *Estudio sobre Habilidades Básicas en Matemáticas de Alumnos de Magisterio* y *Habilidades Básicas en Matemáticas de Alumnos de Magisterio en Relación con su Procedencia Curricular* (Hernández, Noda, Palarea y Socas, 2001), el Proyecto de Innovación Docente, actualmente en desarrollo, de la Universidad de Huelva, *Conocimiento para Enseñar Matemáticas de los Estudiantes para Maestro: Análisis de Dificultades*, coordinado por el Doctor Don Luis Carlos Contreras González[1], y, sobre todo, las investigaciones de Ball, *et al.* (2008), muestran –entre otros resultados– errores y carencias conceptuales relacionados con falsas percepciones de determinados conceptos, dificultades en la aplicación de los mismos y de sus relaciones, predisposición negativa a nuevos aprendizajes,… Incluso en el caso de obtener respuestas correctas en algunas de las cuestiones planteadas, los EPM no son capaces, en general, de justificarlas adecuadamente.

Asimismo, nuestra experiencia como formadores de maestros plasmada parcialmente en los resultados de los cuestionarios anuales de evaluación inicial del CES Cardenal Spínola CEU y en la comunicación *¿Qué saben los Estudiantes para Maestro de Geometría Elemental? Conocimiento Matemático Común de Geometría* (Barrera, Infante y Liñán, 2012) presentada en el Encuentro en Andalucía: *GeoGebra* en el aula, Granada, abril 2012; nos hace pensar que el conocimiento matemático común de los EPM es deficiente, en la línea de los trabajos citados anteriormente.

En este artículo se muestra una experiencia realizada por los autores en su entorno profesional: partiendo de la justificación, es decir, el porqué del planteamiento del problema, y apoyado en el marco teórico definido por Ball *et al.* (2008), con una metodología que nos permita establecer el porqué y el cómo, se obtienen los datos a través de un instrumento, cuestionario, que posteriormente se analizan e interpretan. En consecuencia con los resultados obtenidos, se hace una propuesta de trabajo de innovación docente utilizando el software educativo *GeoGebra*, con la intención de que el estudiante de manera autónoma y dinámica, pueda subsanar los errores detectados en la prueba citada anteriormente. Se han seleccionado algunas cuestiones representativas para este trabajo y se muestran actividades diseñadas para tal fin.

2. Justificación

Como ya hemos dicho antes, la normativa vigente, en cuanto al currículum de Matemáticas en la enseñanza obligatoria, aparentemente garantiza que los EPM tengan un conocimiento matemático suficiente como para abordar el temario y el nivel de razonamiento que se les propone en el Grado en Educación Primaria. Sin embargo nuestra experiencia como formadores de maestros a lo largo de estos años nos dice que los estudiantes llegan a la universidad con graves carencias en lo que Ball *et al.* (2008) vienen llamando Conocimiento Matemático Común, aquel conocimiento que todo adulto bien instruido debería tener como consecuencia de su formación académica o a lo largo de la vida.

Consideramos que la Geometría, en particular, es una de las grandes olvidadas en la enseñanza obligatoria, con un enfoque centrado en la definición conceptual y en el cálculo de magnitudes en Primaria, y debido a la forma casi exclusivamente analítica de trabajarla en Secundaria. Ball (2012), en su intervención en el reciente ICME-12[2], comenta la usual falta de comprensión de las ideas y procedimientos matemáticos básicos de los maestros.

Canals consideraba (Biniés, 2008, p. 13) que uno de los pilares fundamentales en la enseñanza de las Matemáticas es el conocimiento de la materia, y confesó haber encontrado muchos maestros con un conocimiento muy deficiente de la lógica matemática, pero, sobre todo, de la geometría; la consecuencia de enseñar matemáticas sin dominar la materia es que se termina enseñando la mecánica asociada y nunca el razonamiento subyacente. Así, *"los alumnos no practican la auténtica matemática, solo hacen mecánica de la suma, de la resta [...] sin acabar de entender el concepto matemático en sí"*.

Contreras y Blanco (2011) admiten que los estudiantes de enseñanza obligatoria, en particular en Primaria, no tienen oportunidades reales de construir un conocimiento significativo. Estas carencias terminan siendo fatales en los EPM y, como consecuencia, en los maestros, que a su vez trasmiten conocimiento matemático mecánico. Citando a Enderson (1995), estos autores consideran que el dominio del contenido es directamente proporcional a la buena gestión de la clase y es un hecho que marca a los maestros ante la elección curricular.

Ante los resultados observados durante distintos cursos en las clases y en la evaluación de los EPM, en el área de Matemáticas del Departamento de Ciencias Experimentales y Matemáticas del CES Cardenal Spínola CEU decidimos preparar una prueba de evaluación inicial para alumnos de nuevo ingreso al Centro, con el fin de conocer la situación de la que partían dichos estudiantes al abordar las asignaturas correspondientes al área (González, Barrera y Oliva, 2000).

Alguna de las razones que nos llevaron a tomar esta decisión fueron poseer elementos de juicio que nos permitieran iniciar una evaluación continua teniendo en cuenta los conocimientos previos de los alumnos, así como poder ofrecer al estudiante la posibilidad de conocer su situación particular respecto a los niveles mínimos aconsejables para el seguimiento de las materias del área de Matemáticas, pudiendo así orientarles acerca de los contenidos a afianzar por cada uno.

La prueba consiste en un cuestionario con preguntas de diferente tipo (verdadero/falso, de respuestas anidadas, numéricas, cortas, varias opciones, emparejamiento,…) y una duración de 50 minutos; con la que se pretende recabar información acerca de las debilidades y fortalezas de los EPM en conceptos y procedimientos matemáticos básicos, como conocimiento de los diferentes tipos de números, operaciones, definiciones geométricas, razonamiento matemático,… Todos estos contenidos deben de ser conocidos por cualquier alumno que accede a la Universidad, independientemente de la opción cursada en Bachillerato.

La gran importancia que tiene la realización de estas pruebas se ve fuertemente refrendada por el estudio de la Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo[3] publicado en octubre de 2012, en el que se reflejan los resultados del TEDS-M[4] —primer estudio internacional a gran escala centrado en la formación inicial de profesores de Matemáticas de Educación Primaria y Secundaria— enfocado en este caso a la situación de nuestro país a este respecto y realizando una comparativa de esta con el promedio internacional. En este estudio se menciona otro también reciente y mucho más ambicioso, "*The Long-Term Impacts of Teachers: Teacher Value-Added and Student Outcomes in Adulthood*" del National Bureau of Economic Research[5], donde después de analizar datos longitudinales de dos millones y medio de alumnos de Educación Primaria y primer ciclo de Secundaria obligatoria, obtenidos desde 1989 hasta 2009, se aprecia que la buena calidad en la formación del profesorado genera un claro efecto económico positivo en el país.

Con el fin de detectar las debilidades y las fortalezas del Conocimiento Matemático Común en geometría, y sin ánimo de entrar aún en un análisis detallado de los datos obtenidos en el cuestionario de evaluación inicial por los alumnos de nuevo ingreso en el CES Cardenal Spínola-CEU en el curso actual, comparando la distribución de errores (Figura 1), podemos observar que el porcentaje de EPM con mayor índice de error en contenidos geométricos que en aritméticos casi duplica al de aquellos que presentan mayor dificultad en contenidos aritméticos que en geométricos.

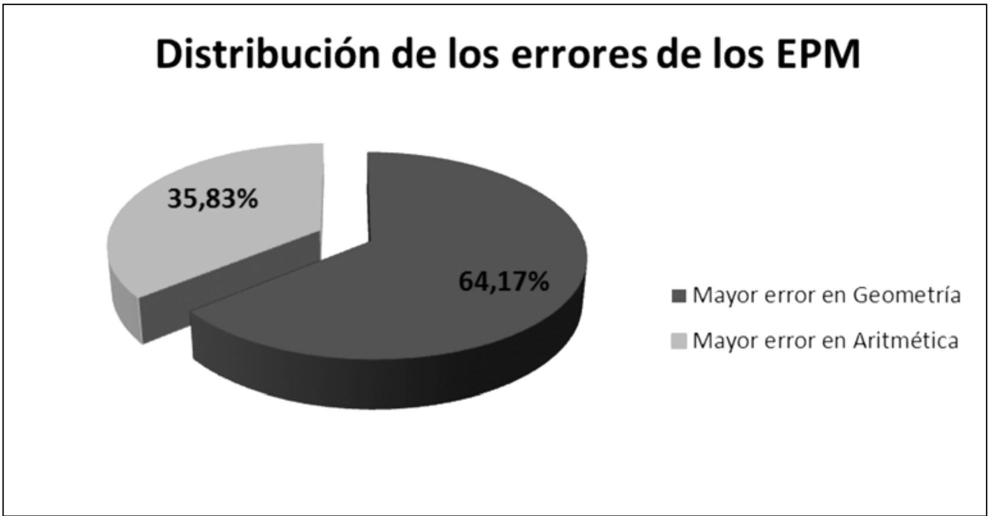

Figura 1. Distribución de los Errores de los Estudiantes para Maestro

Uniendo ambas ideas, la falta de una formación significativa y los resultados de las pruebas de ideas previas realizadas en el CES Cardenal Spínola CEU, consideramos justificado el análisis de la situación de los EPM en lo que respecta a su Conocimiento Matemático Común en geometría para, partiendo de él, generar herramientas innovadoras que permitan su trabajo autónomo en la consecución de la mejora de su formación como maestros de Matemáticas, lo que derivaría en una mejora general de su enseñanza.

3. Marco Teórico

Según Ball *et al*. (2008), la compresión propia de los contenidos por parte del profesor es imprescindible para enseñar. Sin embargo, el Conocimiento del Contenido se ha identificado con la posesión de un título en la materia o con completar un conjunto de cursos particulares: el conocimiento del contenido del profesor se daba por sentado. En 1986, Shulman identificó un especial dominio del conocimiento del profesor, el cual calificó como Conocimiento Didáctico del Contenido, distinguiendo el Conocimiento del Contenido en sí mismo de la especial amalgama de contenidos pedagógicos necesarios para enseñar la materia.

El **Conocimiento Matemático para la Enseñanza** (MKT), compuesto a su vez por el **Conocimiento Matemático Específico** y el **Conocimiento Didáctico del Contenido**, ha sido redefinido por Ball *et al.* (2008) tal y como refleja la Figura 2.

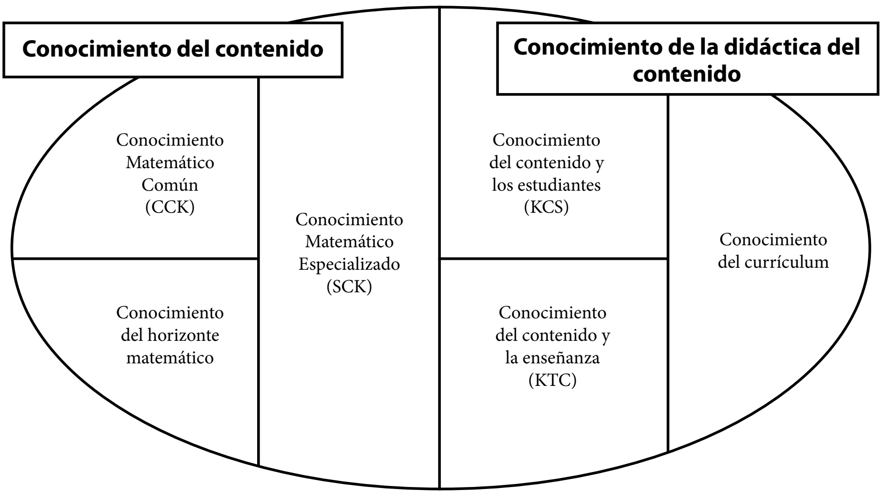

Figura 2. Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Ball et al., 2008)

Manteniendo las dos grandes categorías, Conocimiento del Contenido y Conocimiento de la Didáctica del Contenido, han subdividido cada una de ellas en otras tres (Rojas, 2010):

Conocimiento del Contenido:

- Conocimiento Matemático Común (CCK), aquel que todo adulto bien instruido debe tener como consecuencia de su formación académica o a lo largo de la vida. Es el que se pone en juego para resolver problemas matemáticos, operar correctamente y aplicar definiciones y propiedades.

- Conocimiento Matemático Especializado (SCK), el que los profesores necesitan saber, que incluye formas de representar las ideas, proporcionar explicaciones matemáticas precisas y adecuadas, aplicar modelos y visualizar, examinar o comprender métodos excepcionales de resolución de problemas.
- Conocimiento del Horizonte Matemático, referente a las relaciones existentes entre temas matemáticos en distintos niveles escolares y a su evolución.

Conocimiento de la Didáctica del Contenido:

- Conocimiento del Currículum, que ya estableciera Shulman (1986).
- Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS), conocimiento del contenido en sí que se entrelaza con el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden un contenido particular. Incluye el conocimiento de los errores comunes de los alumnos y dificultades más habituales, las concepciones erróneas, las estrategias que se pueden utilizar, etc.; todo esto hace que el profesor sea capaz de valorar la comprensión del alumno y saber cómo evoluciona su razonamiento matemático (qué aprende primero, tipos de problemas a la edad correspondiente); así como las estrategias de cálculo comunes en los alumnos.
- Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT), o lo que sería lo mismo, saber construir, a partir del razonamiento de los estudiantes y las estrategias utilizadas por ellos, procesos pertinentes para tratar y corregir sus errores y concepciones erróneas, seleccionar tareas de enseñanza, identificar y utilizar materiales y recursos didácticos (Rojas, 2010).

Particularizando en la problemática relacionada con las dificultades tradicionales de los EPM en el estudio de la geometría, como mencionan Contreras y Blanco (2012) estos estudiantes tienen concepciones profundas –unas erróneas, otras correctas, pero aprendidas sin el razonamiento matemático asociado– sobre la enseñanza-aprendizaje en matemáticas heredadas de su propia experiencia como alumnos de Enseñanza Primaria y Educación Secundaria y que se contradicen con la nueva cultura de la enseñanza-aprendizaje en la escuela. Estos errores en su Conocimiento Matemático Común generan, necesariamente, errores en el Conocimiento Específico y, como consecuencia, en el Conocimiento del Contenido y la Enseñanza.

4. Metodología

Los participantes en el estudio han sido 120 estudiantes de 1° de Grado en Educación Primaria del CES Cardenal Spínola CEU, que contestaron un cuestionario de respuesta cerrada de 35 preguntas sobre contenido matemático común aritmético y geométrico, en un tiempo máximo de 50 minutos. Los datos fueron recogidos a principio del curso 2012-2013, antes de haber recibido la formación específica relacionada con su titulación.

Los resultados obtenidos se sometieron a un tratamiento estadístico que ha proporcionado los datos de frecuencias necesarios para, posteriormente, analizarlos de manera descriptiva dentro de un paradigma interpretativo.

Con los resultados globales se ha podido justificar el hecho de que los EPM que cometen más errores en geometría prácticamente doblan a aquellos que lo hacen en aritmética (Figura 1). Una vez vistas las frecuencias de respuesta obtenidas, hemos decidido centrarnos en dos preguntas como se detalla en el siguiente apartado.

5. Profundizando en algunas preguntas del cuestionario: análisis e interpretación de la información

Destacamos dos de las cuestiones utilizadas en la prueba de ideas previas realizada en el CES Cardenal Spínola CEU en Octubre de 2012. Los criterios para su selección han sido tanto la importancia de las mismas en el Conocimiento Matemático Común en geometría como el elevado nivel de error cosechado en ellas por los EPM de primero de Grado en Educación Primaria. Mostramos, además, el análisis de frecuencias y proponemos finalmente algunas actividades para la mejora de ese conocimiento. En el análisis de frecuencias consideramos tres tipos de respuestas: la correcta; la esperada, basada en las creencias más habituales de los EPM y el resto, correspondiente a otras respuestas erróneas.

Pregunta

¿En qué punto cae el pie de la altura de una pirámide cuadrada?[6]

a. En el centro de la base.	Respuesta esperada
b. Depende de la pirámide.	Respuesta correcta
c. En el punto medio del lado de la base.	
d. En uno de los vértices.	

Resultados en Figura 3 y Figura 4:

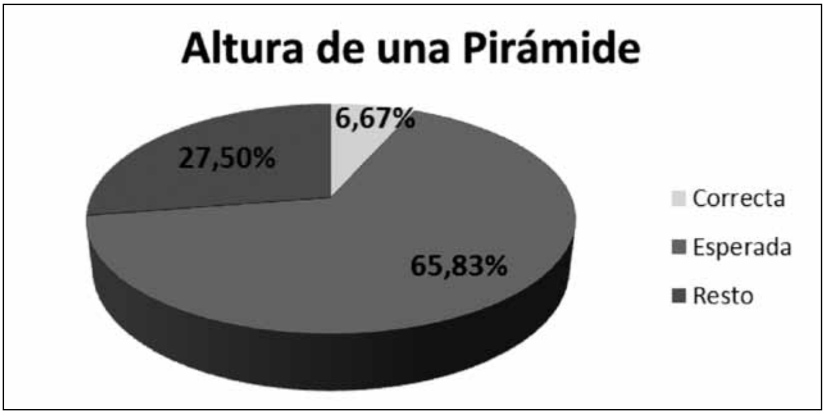

Figura 3. Resultados de la pregunta pirámide cuadrada

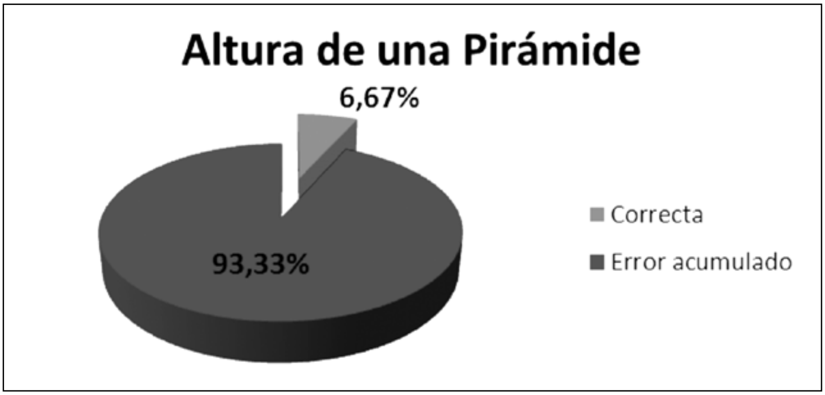

Figura 4. Error acumulado pirámide cuadrada

El tipo de Conocimiento Matemático Común que tienen los EPM estudiados explica el hecho de visualizar una pirámide cuadrada muy particular cuando se les cuestiona sobre esta figura. Los resultados nos han mostrado que la pirámide de base cuadrada en la que piensan los EPM es la que corresponde a la de la Figura 5, con el pie de la altura en el centro de la base, la más comúnmente representada en los libros de texto.

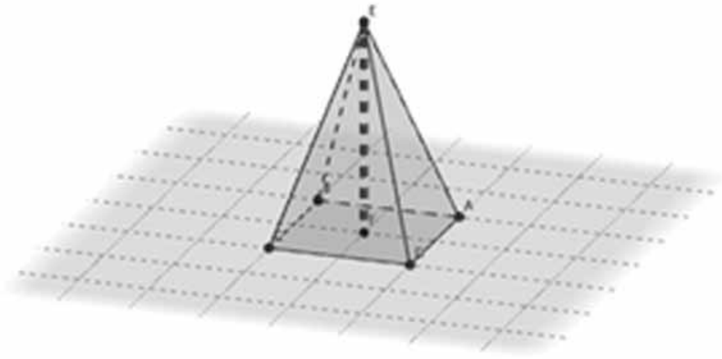

Figura 5. Pirámide correspondiente a la respuesta esperada

Mayoritariamente los EPM no han tenido en cuenta otras pirámides con base cuadrada Figura 6, Figura 7 y Figura 8.

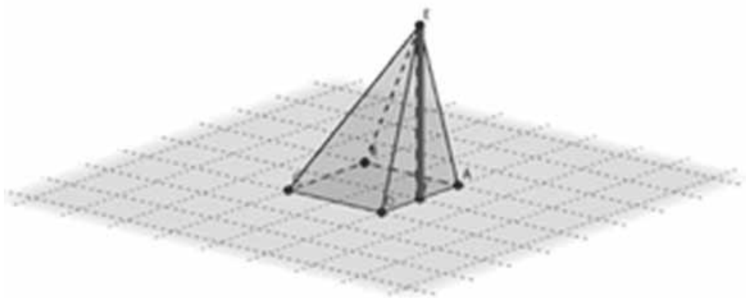

Figura 6. Pie de la altura en una arista de la base

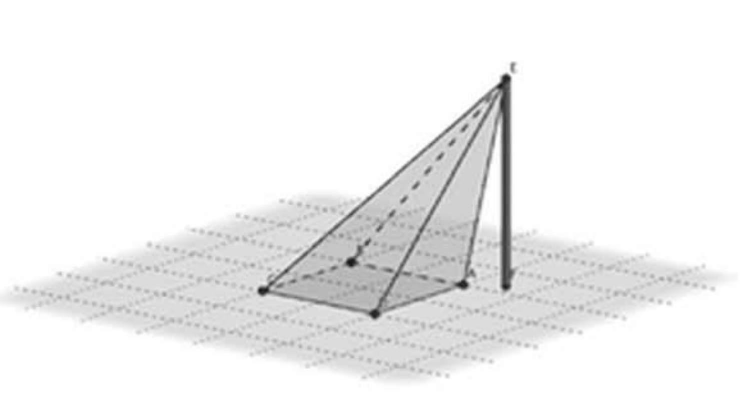

Figura 7. Pie de la altura fuera de la base

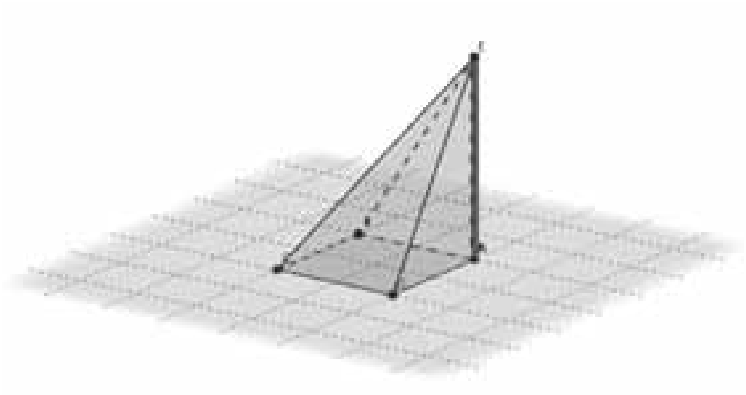

Figura 8. Pie de la altura en un vértice de la base

Pregunta

Sabiendo que el lado de la cuadrícula mide una unidad, ¿cuál es el perímetro del polígono de la figura?[7]

a. 8 ud.	Respuesta esperada
b. Aproximadamente 8,9 ud.	
c. Aproximadamente 9,66 ud.	Respuesta correcta
d. 7 ud.	

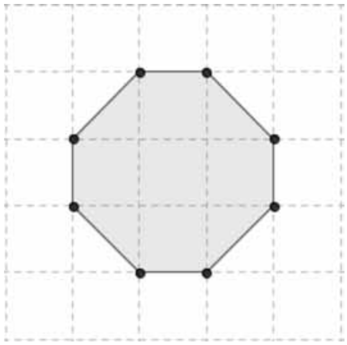

Figura 9. Octógono

Resultados en Figuras 10 y Figura 11:

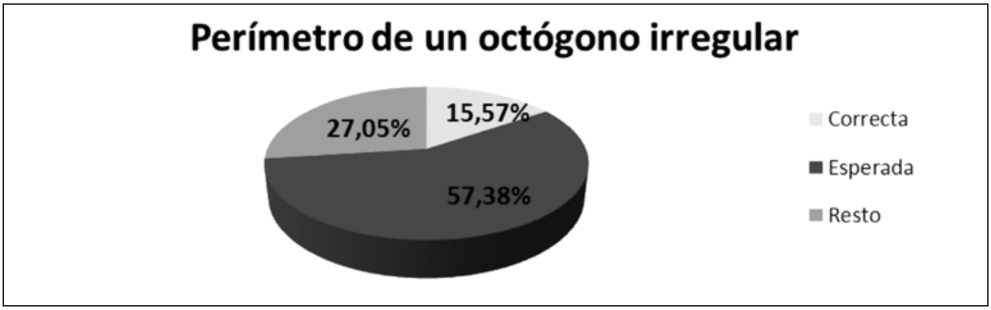

Figura 10. Resultados pregunta octógono

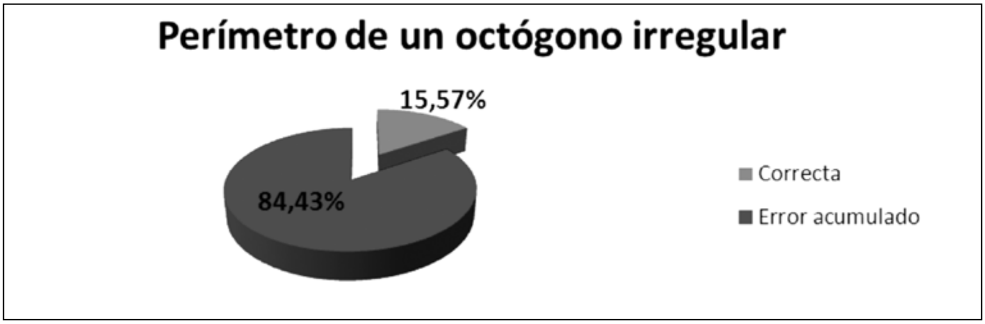

Figura 11. Errores acumulados pregunta octógono

En esta pregunta, los EPM asignan la propiedad *"ser regular"* a un polígono de ocho lados que no lo es aunque se observen *ciertas regularidades*, lo que les hace pensar que la respuesta correcta −esperada por los encuestadores− es 8 unidades, asunto derivado del análisis incompleto del enunciado del problema, en el que se les advierte que el lado de la cuadrícula en la que está dibujada la figura mide 1 ud. Otro concepto que está involucrado en esta cuestión es la aparición de unidades de medida no convencionales. En la Figura 9, una unidad de longitud es el lado de cualquier cuadrado de la cuadrícula, por lo que su diagonal mide $\sqrt{2}$ unidades; podrían ser conscientes de este detalle si visualizaran que se forma un triángulo rectángulo entre los lados de la cuadrícula perpendiculares y cada uno de los lados oblicuos del octógono. De ahí, aplicando el Teorema de Pitágoras, una simple estimación debería permitirles averiguar que la respuesta correcta es *c. Aproximadamente 9,66 ud.*

6. Algunos ejemplos de tareas para el aprendizaje autónomo

Las características de la Geometría y su trabajo escolar debe servir para ayudar a describir y analizar el espacio (Climent, 2011), por lo que consideramos imprescindible la realización de actividades atractivas con herramientas *ad hoc* de funcionamiento intuitivo, como *GeoGebra*. Este software permitirá suplir las citadas carencias, posibilitando el aprendizaje autónomo de los EPM y la profundización en conocimientos geométricos básicos de forma interactiva, como se haría con regla y compás, pero en este caso haciendo uso de herramientas TIC's[8]. *GeoGebra* ayuda a comprender conceptos matemáticos que de otra manera, más tradicional –geometría estática vs dinámica– se reducirían a la mera memorización y potencialmente generarían errores de concepción. Con esta herramienta se pueden trasladar demostraciones y construcciones matemáticas de los libros de texto a su pantalla dinámica e interactiva, con la posibilidad de observar cómo varían tanto los objetos gráficos como sus respectivas representaciones algebraicas al realizar algún cambio, facilitando así la compresión de los mismos, la construcción de las relaciones entre las figuras y formas y el reconocimiento de las características críticas que pueden definir a una figura en el plano o en el espacio.

A continuación proponemos una serie de actividades diseñadas en *GeoGebra* para ayudar a la comprensión de algunos tópicos que consideramos especialmente relevantes, algunos de ellos relacionados directamente con las dos preguntas comentadas anteriormente.

ACTIVIDAD 1: Trabajando con el Triángulo Rectángulo.

Propuesta para la reflexión:

El Teorema de Pitágoras se puede cumplir:

a) en triángulos isósceles
b) en triángulos equiláteros
c) en triángulos obtusángulos
d) en ninguno de los casos anteriores

Los EPM tienden a relacionar el Teorema de Pitágoras con el triángulo rectángulo, sin tener en cuenta que las clasificaciones respecto de los ángulos y respecto de los lados no son excluyentes.

Para trabajar triángulos rectángulos isósceles sugerimos la siguiente construcción *GeoGebra*: se facilita un triángulo rectángulo en una cuadrícula, permitiendo modificar la posición de cada vértice manteniendo la característica crítica. En todo momento están viendo un triángulo rectángulo, aunque seguramente no en la posición o posiciones más conocidas (hipotenusa horizontal o cateto horizontal). Disponen de sendas herramientas para medir ángulos y medir lados.

Resuelta la primera pregunta, la construcción *GeoGebra* (Figura 12) le da la posibilidad de pulsar en el botón *Solución* para verificar su respuesta.

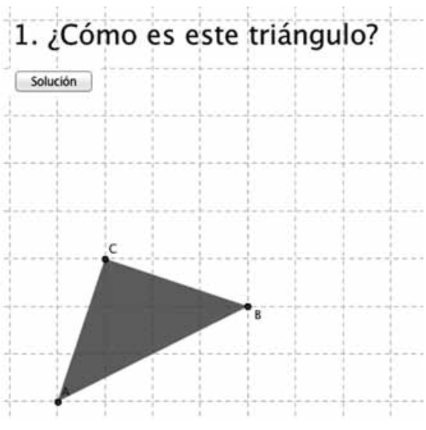

Figura 12. Triángulo rectángulo

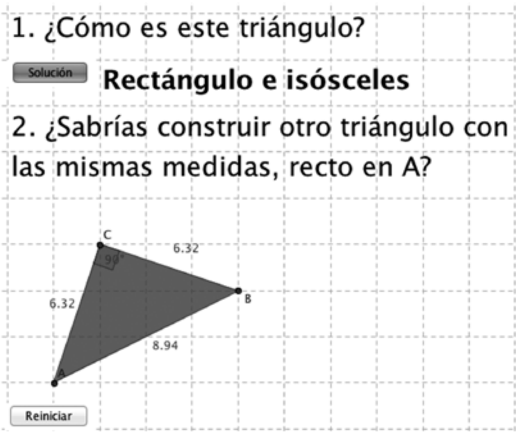

Figura 13. Triángulo rectángulo e isósceles

Será posible continuar con la reflexión sobre si es posible mover los vértices A, B, y C para conseguir un triángulo rectángulo, recto en A, e isósceles, conservando las medidas de los lados a través de las preguntas que nos mostrará a continuación (Figura 13).

En la resolución de esta tarea nos hemos encontrado algunas respuestas como la que se observa en la Figura 14, en la que vemos hasta qué punto influye la enseñanza ostensiva a la que han sido acostumbrados los EPM, generando una imagen prototípica de triángulo rectángulo con un cateto en la horizontal.

En esta misma figura se muestra la respuesta que daría la aplicación ante esta postura del EPM. La solución sólo la encontraremos al visualizar el triángulo en una orientación no "*habitual*", Figura 15.

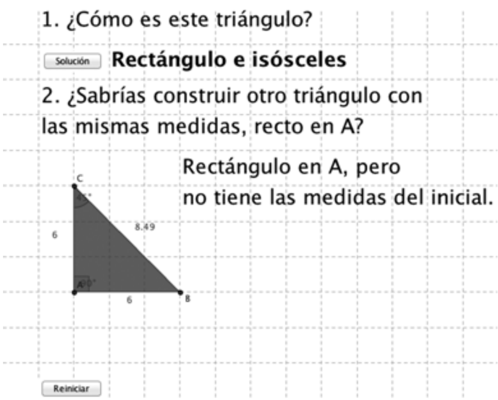

Figura 14. Rectángulo en A sin conservar las medidas

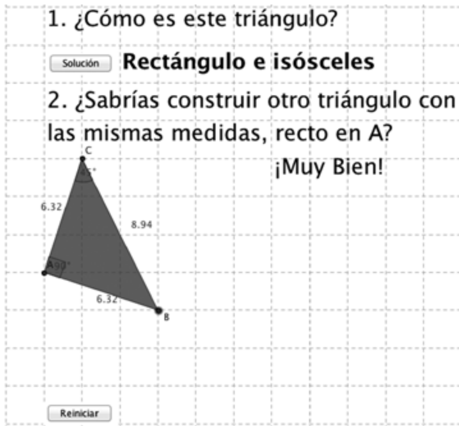

Figura 15. Rectángulo en A conservando medidas

ACTIVIDAD 2: Cuadriláteros

Propuesta para la reflexión:[9]

¿Cuáles de los siguientes ejemplos son definiciones correctas de cuadrado?

a) un paralelogramo de lados iguales
b) son dos líneas horizontales perpendiculares a otras dos verticales
c) es un rombo con un ángulo recto
d) una figura de ángulos iguales

¿Qué es un cuadrado?

- *a) un paralelogramo con dos diagonales iguales*
- *b) un cuadrilátero cuyas diagonales son bisectrices de sus ángulos*
- *c) un cuadrilátero con cuatro ángulos iguales*
- *d) un paralelogramo con dos diagonales iguales y perpendiculares*

Un cuadrilátero es un paralelogramo si tiene:

- *a) un par de lados paralelos*
- *b) una diagonal que es eje de simetría*
- *c) dos ángulos consecutivos iguales*
- *d) un par de lados consecutivos iguales*
- *e) dos pares de lados paralelos*

Considerando las siguientes figuras, ¿cuál o cuáles de ellas son rombos?[10]

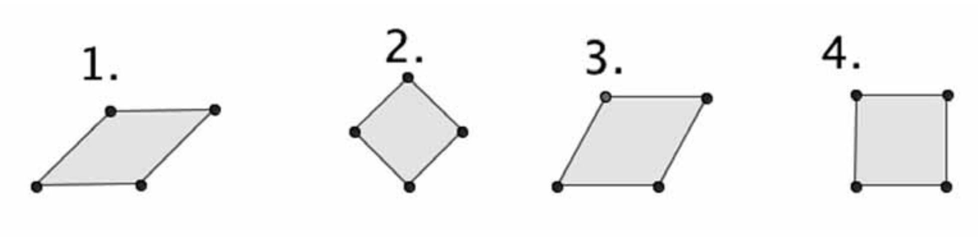

Figura 16. ¿Rombos?

- *a) sólo la figura número 2 es un rombo*
- *b) las figuras números 2 y 4 son rombos*
- *c) las figuras números 2, 3 y 4 son rombos*
- *d) sólo la figura número 1 es un rombo*

Cuestiones para profundizar:

¿Existen infinitos rombos con lados de longitud dada? Construcción de un rombo con lado dado.

¿Existen infinitos rombos con una diagonal dada? Construcción de un rombo dados dos vértices diagonalmente opuestos.

Mueve los vértices libres y semilibres de los siguientes cuadriláteros (Figura 17) para descubrir cuáles son las propiedades geométricas características de cada uno de ellos.

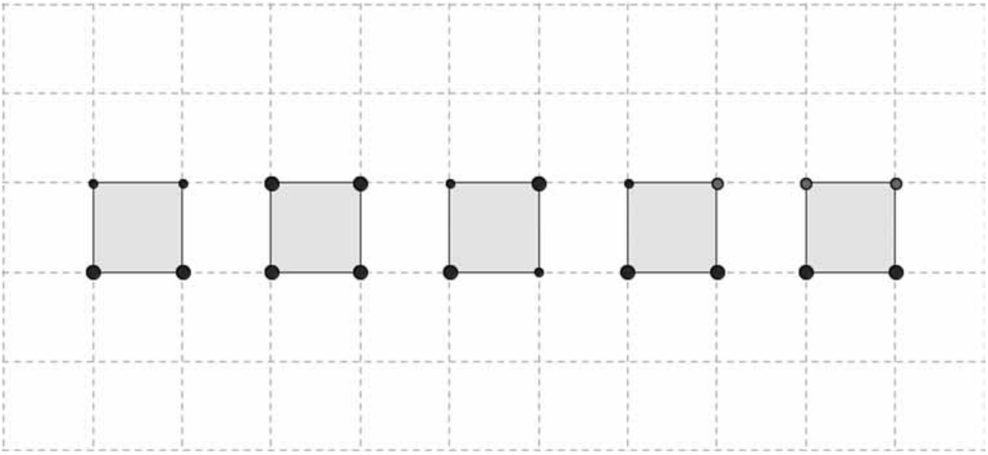

Figura 17. ¿Cuadrados?

Los vértices de mayor tamaño son libres, los de tamaño mediano semilibres y los pequeños son objetos dependientes. El resultado de mover vértices es el siguiente (Figura 18).

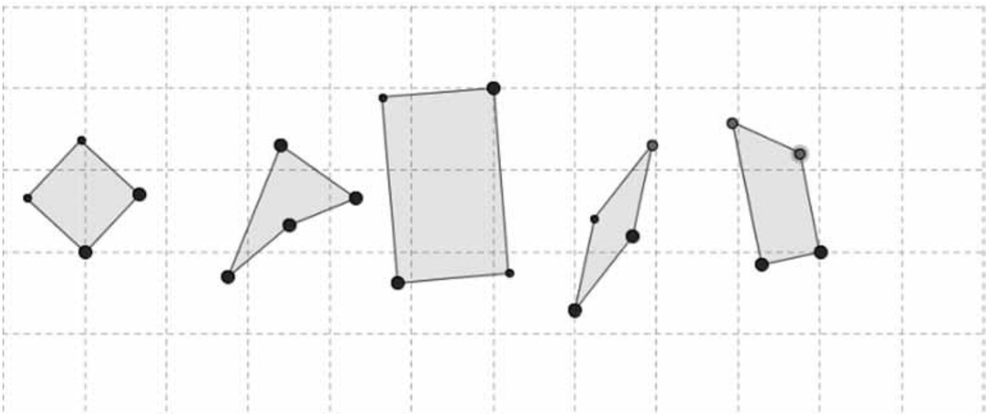

Figura 18. Resultado de mover vértices

ACTIVIDAD 3: No todos los polígonos son regulares

Propuesta para la reflexión:

Un polígono de ocho lados está dibujado en un papel cuadriculado de 1 cm de lado. ¿Cuánto mide su perímetro?

- *a) 8 centímetros*
- *b) aproximadamente 9,6 centímetros*
- *c) 7 centímetros*
- *d) 10 centímetros*

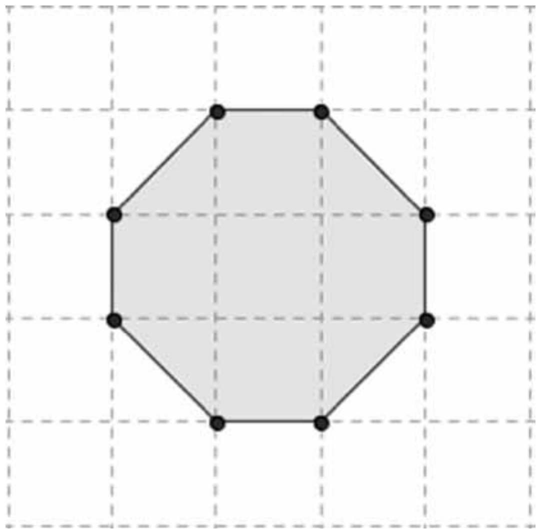

Figura 19. Octógono no regular

Construye un polígono, comprobando la construcción utilizando las herramientas adecuadas, de los siguientes tipos:

- *a) equiángulo y no equilátero*
- *b) no equiángulo y equilátero*
- *c) no equiángulo y no equilátero*
- *d) equiángulo y equilátero*

Propuesta de solución (Figura 20).

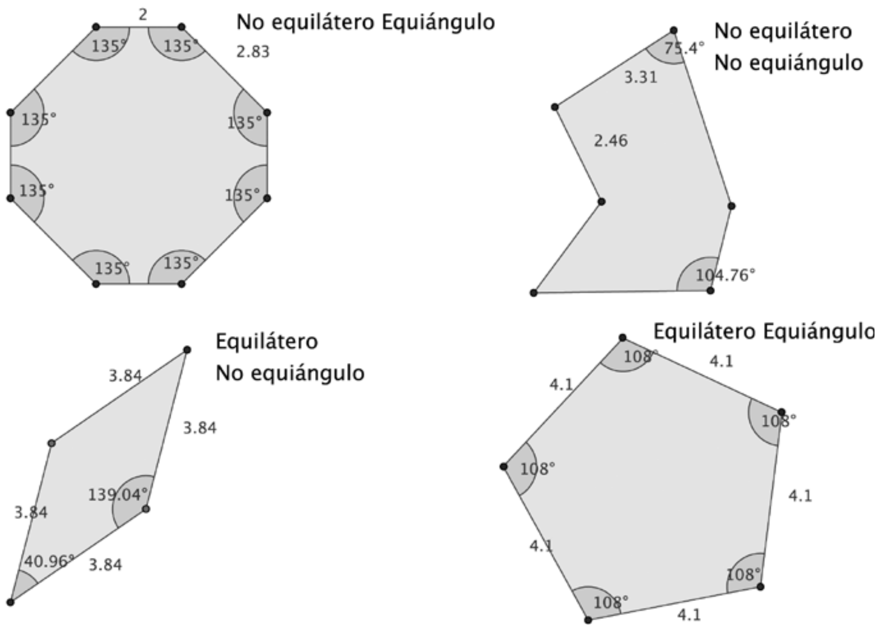

Figura 20. Equiángulo y / o equilátero

Dibujar puede ser fácil para la mayoría de los estudiantes pero construir exige conocer con más profundidad las propiedades geométricas que implica ser equilátero o no, equiángulo o no.

Cuestiones para profundizar:

Construye un rectángulo a partir de una diagonal dada. ¿Queda determinado un único rectángulo fijando una diagonal?

Construye un cuadrilátero con la diagonal dada y la otra de distinta medida.

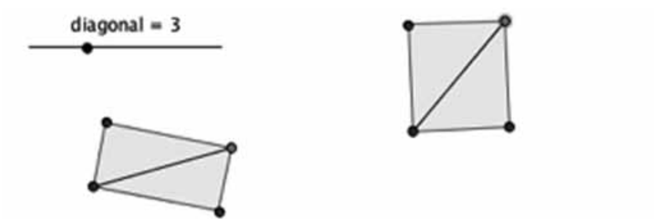

Figura 21. Cuadrilátero de diagonal dada

8. A modo de reflexión…

Los resultados obtenidos en el cuestionario de ideas previas descrito anteriormente, más concretamente en las dos preguntas en las que se centra este artículo, muestran las debilidades conceptuales y procedimentales de los EPM en ciertos tópicos geométricos.

Las tareas propuestas pretenden convertir en fortalezas las debilidades detectadas en los EPM, sobre todo las referidas a las dos cuestiones seleccionadas en el apartado 5 de este artículo. En el diseño de dichas tareas se han tenido en cuenta, entre otros, los siguientes descriptores geométricos relacionados con el Conocimiento Matemático Común en Geometría tratado en esas dos preguntas:

- Resolución de problemas geométricos, como eje vertebrador de la enseñanza matemática (Real Decreto 1513/2006 de Enseñanzas Mínimas en Educación Primaria), supone el germen de todos los descriptores que pretendemos trabajar.
- Argumentación y razonamiento geométrico que incluiría la composición/descomposición de figuras y el análisis de una misma propiedad en distintos tipos de entes geométricos variando características como el número de lados. Esto permitiría trabajar el razonamiento inductivo (Barrera, 2009), buscando propiedades generales partiendo de particulares. Es más, se podría trabajar adicionalmente la idea de medida unidimensional de cualquier magnitud.
- Clasificación de polígonos (triángulos, cuadriláteros) atendiendo a diferentes criterios no excluyentes, como por ejemplo triángulos respecto de sus lados y respecto de sus ángulos, o la clasificación interfigural de cuadriláteros (Vecino, 2003), inclusiva, que implicaría una visión más general de los mismos: un cuadrado es un rombo con un ángulo recto.
- Construcción de polígonos y cuerpos no prototípicos, dejando a un lado su "*aspecto*" para atender a las características críticas de los mismos (Climent, 2011).
- Análisis intrafigural de entes geométricos, deduciendo a partir de las características de determinados elementos de tal ente, relaciones entre otros de sus elementos o nuevas propiedades de estos: por ejemplo, si tenemos un polígono con cuatro lados y cuatro ángulos iguales, necesariamente sus diagonales han de ser perpendiculares e iguales y viceversa.
- El Teorema de Pitágoras, como herramienta que permite el estudio intrafigural y la descomposición de polígonos para ser vistos desde otra perspectiva.

9. Referencias

Ball, D. L. (2012). *Challenges of knowing mathematics for teaching in the Unites States*. Presented at 12th International Congress on Mathematical Education. Seoul, Corea (paper). Recuperado el 05/11/2012 de http://www-personal.umich.edu/~dball/presentations/071012_ICME12.pdf.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 399-406.

Barrera, V. (2009). Evolución del uso del razonamiento inductivo en un grupo de maestros en formación. *EA, Escuela Abierta,* 12, 33-45.

Barrera, V., Infante, J. M. y Liñán, M. (2011). ¿Qué saben los Estudiantes para Maestro de Geometría Elemental?: Conocimiento Matemático Común de Geometría. En M. Torralbo y A. Carrillo (Eds.), *Encuentro en Andalucía: GeoGebra en el aula*. Granada, España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES.

Biniés, P. (2008). *Conversaciones Matemáticas con Maria Antònia Canals: o cómo hacer de las matemáticas un aprendizaje apasionante*. Barcelona: Biblioteca de Aula.

Chetty, R., Friedman, J. N. y Rockoff, J. E. (2011). The Long-Term Impacts of Teachers: Teacher Value-Added and Student Outcomes in Adulthood. *NBER Working Papers.* Recuperado el 05/11/2012 de http://www.nber.org/papers/w17699.

Climent, N. (2011). *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*. Huelva: Proyecto Docente y de Investigación. Universidad de Huelva no publicado.

Contreras, L. C. y Blanco, L. (2011). ¿Qué conocen los maestros sobre el contenido que enseñan?: un modelo formativo alternativo. *XXI: Revista de Educación*, Norteamérica, 3. Recuperado el 05/11/2012 de http://www.uhu.es/publicaciones/ojs/index.php/xxi/article/view/599.

Contreras, L. C. y Blanco, L. (2012). Conceptualizando y ejemplificando el conocimiento matemático para la enseñanza. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 30, 101-123.

Enderson, M. C. (1995). *Assesment practices of three prospective secondary mathematics teachers*. Tesis no publicada. Universidad de Georgia, Atenas.

González, I., Barrera, V. y Oliva, J. (2000). El test de ideas previas: motivaciones, ideas y resultados. En *IV Simposio Propuestas Metodológicas y de Evaluación en la*

Formación Inicial de los Profesores del Área de Didáctica de la Matemática (pp. 273-282). Oviedo: Universidad de Oviedo.

Hernández, J., Noda, M. A., Palarea, M. M. y Socas, M. M., (2001). *Estudio sobre habilidades básicas en Matemáticas de alumnos de Magisterio*. La Laguna: Universidad de La Laguna.

Liñán, M. (2012). *Debilidades y Fortalezas en el Conocimiento Matemático Común en Geometría de los Estudiantes para Maestro*. Trabajo fin de Máster en Investigación en Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias Sociales, Experimentales y Matemáticas no publicado. Universidad de Huelva.

MECD (2012). *Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros. Informe Español*. Madrid: Centro de Publicaciones del MECD. Recuperado el 05/11/2012 de http://www.educacion.gob.es/dctm/inee/internacional/teds-mlinea.pdf.

Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria. Boletín Oficial del Estado, 8 de diciembre de 2006, núm. 293, 43053-43102.

Rojas, N. (2010). *Conocimiento para la enseñanza y la calidad matemática de la instrucción del concepto de fracción: estudio de caso de un profesor chileno*. Trabajo Fin de Máster no publicado. Universidad de Granada. Recuperado el 05/11/2012 de http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Nielka_Rojas.pdf.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14.

Vecino, F. (2003). Didáctica de la Geometría en la Educación Primaria. En M. C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las matemáticas* (pp. 301-328). Madrid: Pearson Educación.

Zazkis, R. y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, 69 (2), 131-148.

Notas

1. La parte relacionada con Geometría ha sido desarrollada en el Trabajo Fin de Máster *Debilidades y Fortalezas en el Conocimiento Matemático Común en Geometría de los Estudiantes para Maestro* (Liñán, 2012).

2. *Challenges of Knowing Mathematics for Teaching in the United States,* ponencia de Ball, D. en The 12th International Congress on Mathematical Education celebrado entre el 8 y 12 de julio de 2012 en Seúl, Corea del Sur.

3. *International Association for the Evaluation of Educational Achievement*, IEA, es una asociación independiente, cuyos miembros son universidades, institutos o agencias ministeriales dedicadas a la investigación sobre evaluación educativa, que representan al sistema educativo de su país. El Instituto Nacional de Evaluación Educativa del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de España es miembro de la IEA.

4. *Teacher Education and Development Study in Mathematics*, TEDS-M.

5. Firmado por Chetty, R., Friedman, J. N., y Rockoff, J. E. *The Long-Term Impacts of Teachers: Teacher Value-Added and Student Outcomes in Adulthood*. NBER Working Papers, diciembre 2011.

6. Interpretación de una de las preguntas utilizadas en el Proyecto de Innovación Docente, actualmente en desarrollo, de la Universidad de Huelva, *Conocimiento para Enseñar Matemáticas de los Estudiantes para Maestro: Análisis de Dificultades*, coordinado por el Doctor Don Luis Carlos Contreras González.

7. Interpretación de una pregunta aparecida en el *Estudio sobre habilidades básicas en Matemáticas de alumnos de Magisterio* (Hernández, Noda, Palarea y Socas, Universidad de la Laguna, 2001)

8. TIC's: Tecnologías de la Información y la Comunicación

9. Interpretación de algunos ejemplos mostrados en *Exemplifying definitions: a case of a square* (Zazkis y Leikin, 2008).

10. Interpretación de una de las preguntas utilizadas en el Proyecto de Innovación Docente, actualmente en desarrollo, de la Universidad de Huelva, *Conocimiento para Enseñar Matemáticas de los Estudiantes para Maestro: Análisis de Dificultades*, coordinado por el Doctor Don Luis Carlos Contreras González.