Teorema Egregio en hipersuperficies de $\mathbb{R}^4$

LEONARDO SOLANILLA, ERIKA LORENA BARRERO ANGULO y TULIO ENRIQUE VARGAS MORALES

Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias, Universidad del Tolima, Barrio Santa Helena, Ibagué, Colombia

Resumen

En este artículo demostramos que las curvaturas seccionales de una hipersuperficie riemanniana inmersa en $\mathbb{R}^4$ son invariantes bajo isometrías locales, es decir, dependen únicamente del tensor métrico o primera forma fundamental. Por lo tanto, sus curvaturas escalares y de Ricci también tienen esta propiedad. Estos resultados constituyen la generalización natural del Teorema Egregio de Gauss a tres dimensiones.

Abstract

In this paper we show that the sectional curvatures of a Riemannian surface immersed in $\mathbb{R}^4$ are invariant under local isometries, that is to say, they depend only on the first fundamental form. Therefore, its Ricci and scalar curvatures have this very same property. These results constitute a natural generalization of Gauss' Theorema Egregium to immersed Riemannian 3-manifolds.

Palabras y frases clave: Curvatura seccional, Curvatura gaussiana, Teorema Egregio, Geometría Diferencial Clásica.

Key words: Sectional curvature, Gauss curvature, Theorema Egregium.

Clasificación matemática AMS: 53A07, 53A55 y 58A05.

INTRODUCCIÓN

La teoría contemporánea sobre la curvatura de una variedad riemanniana está erigida sobre el proyecto de Riemann (1854) de calcular las curvaturas gaussianas que corresponderían a superficies formadas por geodésicas, cuyos planos tangentes coinciden con las secciones planas bidimensionales del espacio tangente a la variedad. Con más precisión, dichas geodésicas parten del punto donde se desea calcular la curvatura, y sus velocidades yacen en el subespacio bidimensional de la sección considerada. A partir de tales curvaturas gaussianas se definen las curvaturas escalares y de Ricci. Este proceder

Correo electrónico: leonsolc@ut.edu.co

responde a una necesidad de concisión en el formalismo de la Geometría Riemanniana de hoy (Nomizu, 1956; Gromoll & Klingenberg & Meyer, 1975; Do Carmo, 1993, entre otros) que obvia toda referencia al Teorema Egregio. La construcción del mencionado formalismo es como sigue: Una variedad riemanniana M es una variedad diferencial con un tensor métrico; existe una única conexión afín sobre M que es simétrica y compatible con la métrica (Do Carmo, 1993:55; Levi-Civita, 1917; Ricci & Levi-Civita, 1901); dicha conexión se usa para definir curvaturas seccionales y con ellas se construyen otras nociones de curvatura. En concreto, este camino esconde y revela a la vez el Teorema Egregio. Decimos que lo esconde porque no aparece por ninguna parte; que lo revela, porque el camino trazado reconstruye su demostración.

Sin embargo, así no fue como Gauss (1827) construyó originariamente su teoría. En la construcción clásica original se parte de una superficie en el espacio ambiente $\mathbb{R}^3$, el cual induce su métrica en la superficie; luego se define la curvatura gaussiana en términos de dicha métrica y del operador de forma; por último se demuestra que, en verdad, la curvatura depende únicamente de la métrica (*Theorema Egregium*).

En este artículo aplicamos el procedimiento clásico de Gauss (1827) a una hipersuperficie de $\mathbb{R}^4$ siguiendo y modificando, cuando sea necesario, los procedimientos y las notaciones modernas de Do Carmo (1976). En la sección 1, presentamos la definición y las propiedades más importantes de las dos formas fundamentales de una hipersuperficie M de $\mathbb{R}^4$. En la sección 2, calculamos algunas medidas de la curvatura de M en términos de dichas formas fundamentales. En la sección 3, demostramos que las curvaturas seccionales de M dependen únicamente de la primera forma fundamental a través de los símbolos de Christoffel (1869), es decir, son invariantes bajo isometrías locales. Este resultado constituye el Teorema Egregium para hipersuperficies de $\mathbb{R}^4$.

Por lo anterior, las curvaturas escalares y de Ricci poseen la misma propiedad de invarianza. Por último, esbozamos algunas conclusiones sobre el procedimiento utilizado para demostrar el Teorema Egregio en hipersuperficies de $\mathbb{R}^4$.

1. HIPERSUPERFICIES DE $\mathbb{R}^4$

Un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^4$ es una hipersuperficie (regular) si todo $p \in M$ posee una vecindad V en $\mathbb{R}^4$ y una carta o parametrización $X : U \subset \mathbb{R}^3 \to V \cap M, U$ abierto. Por carta entendemos un homeomorfismo infinitamente diferenciable con diferencial dXq : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ inyectiva para todo $q \in U$. Estos supuestos aseguran que los cambios de coordenadas son difeomorfismos así como la existencia del fibrado tangente $T(M)$. M hereda naturalmente el producto interno de $\mathbb{R}^4$ en cada uno de sus espacios tangentes. Este producto heredado constituye la primera forma fundamental de M. De esta forma, en la base asociada de primeras derivadas parciales $\{X_1, X_2, X_3\}$, dicho tensor métrico se expresa como una matriz $G_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$, $i,j = 1, 2, 3$, en cada $p \in M$. Este tensor permite calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes en M.

El producto externo de $\mathbb{R}^4$ (Marmolejo, 1994) permite definir localmente una aplicación de Gauss $N : M \to S^3$. Para agilizar la presentación, supondremos que M es orientable, es decir, existe una aplicación de Gauss diferenciable definida globalmente en M.

La diferencial de esta aplicación constituye el operador de forma de M. Es fácil ver que, en cada $p \in M$, dN_p es una aplicación lineal autoadjunta del espacio tangente $T_p(M)$en sí mismo. En la base $X_i, i = 1, 2, 3$, asociada a la carta X, dN_p se expresa como una matriz $a = (a_{ij}), i, j = 1, 2, 3$. La forma cuadrática asociada a esta matriz es la segunda forma fundamental en cada punto de la hipersuperficie. Dicha forma cuadrática se deja expresar en coordenadas locales por la matriz $g_{ij} = \langle X_{ij}, N\rangle, i,j = 1, 2, 3$, donde las expresiones $X_{ij}, i, j = 1, 2, 3$ denotan las segundas derivadas parciales de la carta X. Tal como en el caso de las superficies, el operador de forma se escribe en términos de las dos formas fundamentales como sigue

$$a_{ij} = \frac{g_{ij}(G_{kl}^2 - G_{kk}G_{ll}) + g_{jk}(G_{ik}G_{ll} - G_{il}G_{ll}) + g_{jl}(G_{il}G_{kk} - G_{ik}G_{kl})}{\Delta}$$

donde $\Delta = \det(G_{ij}), i, j, k, l = 1, 2, 3$

2. NOCIONES DE CURVATURA EN *M*

Las medidas de curvatura de M que vamos a considerar resultan del cómputo de los valores propios de $-k_1, -k_2, -k_3$ de dN_p. Estos valores propios son las raíces del polinomio característico

$$\det(a + kI) = k^3 + k^2(a_{11} + a_{22} + a_{33})$$

$$+ k(a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{11}a_{33} - a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21} - a_{13}a_{31})$$

$$+ (a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22})$$

$$= k^3 + 3\frac{\operatorname{tra}(a)}{3}k^2 + 3\frac{\operatorname{men}(a)}{3}k + \det(a) = 0.$$

La curvatura media $\mathcal{H}$ de M en p es igual a $\frac{1}{3}$ de la traza de dN_p; la curvatura seccional media principal $\mathcal{L}$ de M en p se define como $\frac{1}{3}$ de la suma de los menores principales de dN_p y la curvatura gaussiana K de M en p es el determinante de dN_p. Las curvaturas media y gaussiana son las generalizaciones de los conceptos correspondientes en superficies de $\mathbb{R}^3$. El nombre de curvatura seccional media principal está justificado porque se trata del promedio de los subdeterminantes principales 2×2 (menores) de dN_p, los cuales están asociados a secciones bidimensionales del espacio tangente $T_p(M)$.

Dado que dN_p es auto-adjunta, posee una base de vectores propios ortogonales en la cual se realiza como una matriz diagonal. Las cantidades que aparecen en la diagonal de dicha matriz son los valores propios $-k_1, -k_2, -k_3$. Estos valores son las llamadas curvaturas principales de M en p. En vista de que *tra*, *men* y *det* son invariantes bajo aplicaciones similares, las curvaturas definidas en el párrafo anterior se pueden calcular a partir de la mencionada matriz diagonal. La curvatura media se puede calcular fácilmente como menos un tercio de la suma de las curvaturas principales. La curvatura seccional media principal en p es $\frac{1}{3}(k_2k_2 + k_1k_3 + k_2k_2)$. La curvatura gaussiana de M en p es igual a $-k_1k_2k_3$. Se observa que, a diferencia del caso bidimensional, la curvatura gaussiana depende de la orientación.

3. TEOREMA EGREGIO

Tal como en el caso de superficies de $\mathbb{R}^3$, es fácil demostrar que si X y $\overline{X}$ son, respectivamente, cartas de ciertas hipersuperficies *M* y $\overline{M}$ de $\mathbb{R}^4$ definidas sobre un mismo dominio U y $G_{ij} = \overline{G}_{ij}$ en *U*, entonces $\overline{X}$ o X^{-1} define una isometría local entre *M* y $\overline{M}$.

Sea *M* una hipersuperficie orientada de $\mathbb{R}^4$ y $X : U \subset \mathbb{R}^3 \to M$ una carta compatible con la orientación *N*. Las derivadas segundas de *X* y las primeras de *N* se pueden expresar en la base asociada (tetraedro) a la carta X, es decir, X_i, $i = 1, 2, 3$; *N* como sigue

$$X_{ij} = \Gamma_{ij}^1 X_1 + \Gamma_{ij}^2 X_2 + \Gamma_{ij}^3 X_3 + g_{ij} N,\ j = 1, 2, 3,$$

$$N_j = a_{1j} X_1 + a_{2j} X_2 + a_{3j} X_3,\ \ j = 1, 2, 3,$$

Los $\Gamma_{ij}^k, i, j, k = 1, 2, 3,$ son los símbolos de Christoffel. Ellos son simétricos con respecto a sus subíndices y dependen únicamente de los coeficientes G_{ij} de la primera forma fundamental y sus derivadas parciales, tal como se muestra en Barrero y Vargas (2005:56):

$$\begin{cases}\langle X_{11}, X_1\rangle = \Gamma_{11}^1 G_{11} + \Gamma_{11}^2 G_{12} + \Gamma_{11}^3 G_{13} = \dfrac{(G_{11})_1}{2},\\ \langle X_{11}, X_2\rangle = \Gamma_{11}^1 G_{12} + \Gamma_{11}^2 G_{22} + \Gamma_{11}^3 G_{23} = (G_{12})_1 - \dfrac{(G_{11})_2}{2},\\ \langle X_{11}, X_3\rangle = \Gamma_{11}^1 G_{13} + \Gamma_{11}^2 G_{23} + \Gamma_{11}^3 G_{33} = (G_{13})_1 - \dfrac{(G_{11})_3}{2},\end{cases}$$

$$\begin{cases}\langle X_{12}, X_1\rangle = \Gamma_{12}^1 G_{11} + \Gamma_{12}^2 G_{12} + \Gamma_{12}^3 G_{13} = \dfrac{(G_{11})_2}{2},\\ \langle X_{12}, X_2\rangle = \Gamma_{12}^1 G_{13} + \Gamma_{12}^2 G_{22} + \Gamma_{12}^3 G_{23} = \dfrac{(G_{22})_1}{2},\\ \langle X_{12}, X_3\rangle = \Gamma_{12}^1 G_{13} + \Gamma_{12}^2 G_{23} + \Gamma_{12}^3 G_{33} = \dfrac{(G_{13})_2 - (G_{12})_3 + (G_{23})_1}{2},\end{cases}$$

$$\begin{cases}\langle X_{13}, X_1\rangle = \Gamma_{13}^1 G_{11} + \Gamma_{13}^2 G_{12} + \Gamma_{13}^3 G_{13} = \dfrac{(G_{11})_3}{2},\\ \langle X_{13}, X_2\rangle = \Gamma_{13}^1 G_{12} + \Gamma_{13}^2 G_{22} + \Gamma_{13}^3 G_{23} = \dfrac{(G_{12})_3 - (G_{13})_2 + (G_{23})_1}{2},\\ \langle X_{13}, X_3\rangle = \Gamma_{13}^1 G_{13} + \Gamma_{13}^2 G_{23} + \Gamma_{13}^3 G_{33} = \dfrac{(G_{33})_1}{2},\end{cases}$$

$$\begin{cases}\langle X_{22}, X_1\rangle = \Gamma_{22}^1 G_{11} + \Gamma_{22}^2 G_{12} + \Gamma_{22}^3 G_{13} = (G_{12})_2 - \dfrac{(G_{22})_1}{2},\\ \langle X_{22}, X_2\rangle = \Gamma_{22}^1 G_{12} + \Gamma_{22}^2 G_{22} + \Gamma_{22}^3 G_{23} = \dfrac{(G_{22})_2}{2},\\ \langle X_{22}, X_3\rangle = \Gamma_{22}^1 G_{13} + \Gamma_{22}^2 G_{23} + \Gamma_{22}^3 G_{33} = (G_{23})_2 - \dfrac{(G_{22})_3}{2},\end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle X_{23}, X_1\rangle = \Gamma^1_{23}G_{11} + \Gamma^2_{23}G_{12} + \Gamma^3_{23}G_{13} = \dfrac{(G_{13})_2 - (G_{23})_1 + (G_{12})_3}{2}, \\ \langle X_{23}, X_2\rangle = \Gamma^1_{23}G_{12} + \Gamma^2_{23}G_{22} + \Gamma^3_{23}G_{33} = \dfrac{(G_{22})_3}{2}, \\ \langle X_{23}, X_3\rangle = \Gamma^1_{23}G_{13} + \Gamma^2_{23}G_{23} + \Gamma^3_{23}G_{33} = \dfrac{(G_{33})_2}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle X_{33}, X_1\rangle = \Gamma^1_{33}G_{11} + \Gamma^2_{33}G_{12} + \Gamma^3_{33}G_{13} = (G_{13})_3 - \dfrac{(G_{33})_1}{2}, \\ \langle X_{33}, X_2\rangle = \Gamma^1_{33}G_{12} + \Gamma^2_{33}G_{22} + \Gamma^3_{33}G_{23} = (G_{23})_3 - \dfrac{(G_{33})_2}{2}, \\ \langle X_{33}, X_3\rangle = \Gamma^1_{33}G_{13} + \Gamma^2_{33}G_{23} + \Gamma^3_{33}G_{33} = \dfrac{(G_{33})_3}{2}, \end{cases}$$

Con esto se obtiene que todos los conceptos y propiedades geométricas expresables en términos de los símbolos de Christoffel son invariantes bajo isometrías locales.

Con el fin de generalizar el procedimiento de Gauss (1827), a continuación consideramos las siguientes derivadas terceras de X y segundas de N.

$$(X_{11})_2 - (X_{12})_1 = 0,\ (X_{22})_1 - (X_{21})_2 = 0,\ (X_{11})_3 - (X_{13})_1 = 0,$$

$$(X_{33})_1 - (X_{13})_3 = 0,\ (X_{22})_3 - (X_{23})_2 = 0,\ (X_{33})_2 - (X_{23})_3 = 0,$$

$$N_{12} - N_{21} = 0,\ N_{13} - N_{31} = 0,\ N_{23} - N_{32} = 0.$$

Estas nueve relaciones se pueden reescribir en la base X_i, $i = 1, 2, 3$; N para obtener las igualdades vectoriales $A_iX_1 + B_iX_2 + C_iX_3 + D_iN = 0, i = 1, \ldots 9$, donde por la independencia lineal se debe tener $A_i = B_i = C_i = D_i = 0$. De las 36 igualdades escalares resultantes, presentamos a continuación solamente 18 de ellas, con las cuales se puede obtener el Teorema Egregio. En la primera columna se muestran las derivadas terceras que se igualan; en la segunda columna se presenta la expresión resultante que involucra los coeficientes de la segunda forma fundamental. Cada una de estas expresiones es igual a una función de los coeficientes de la primera forma fundamental y sus derivadas. Al igualar los coeficientes A_i de X_1, se obtiene lo siguiente.

$$(X_{11})_2 = (X_{12})_1 \quad (g_{11}g_{22} - g_{12}^2)(G_{13}G_{23} - G_{12}G_{33}) + (g_{11}g_{23} - g_{12}g_{13})(G_{12}G_{23} - G_{12}G_{22})$$

$$(X_{11})_3 = (X_{13})_1 \quad (g_{11}g_{23} - g_{12}g_{13})(G_{13}G_{23} - G_{12}G_{33}) + (g_{11}g_{33} - g_{13}^2)(G_{12}G_{23} - G_{13}G_{22})$$

$$(X_{22})_1 = (X_{12})_2 \quad (g_{12}g_{23} - g_{22}g_{13})(G_{13}G_{22} - G_{12}G_{23}) + (g_{11}g_{22} - g_{12}^2)(G_{22}G_{33} - G_{23}^2)$$

$$(X_{33})_1 = (X_{13})_1 \quad (g_{11}g_{33} - g_{13}^2)(G_{22}G_{33} - G_{23}^2) + (g_{12}g_{33} - g_{13}g_{23})(G_{13}G_{23} - G_{12}G_{33})$$

$$(X_{22})_3 = (X_{23})_2 \quad (g_{12}g_{23} - g_{22}g_{13})(G_{23}^2 - G_{22}G_{33}) + (g_{22}g_{33} - g_{23}^2)(G_{12}G_{23} - G_{13}G_{22})$$

$$(X_{33})_2 = (X_{23})_3 \quad (g_{12}g_{33} - g_{13}g_{23})(G_{22}G_{33} - G_{23}^2) + (g_{22}g_{33} - g_{23}^2)(G_{13}G_{23} - G_{12}G_{33})$$

El mismo procedimiento aplicado a X_2 y X_3 produce respectivamente

$$(X_{11})_2=(X_{12})_1 \quad (g_{11}g_{22}-g_{12}^2)(G_{11}G_{33}-G_{13}^2)+(g_{11}g_{23}-g_{12}g_{13})(G_{12}G_{23}-G_{11}G_{23})$$

$$(X_{11})_3=(X_{13})_1 \quad (g_{11}g_{23}-g_{12}g_{13})(G_{11}G_{33}-G_{13}^2)+(g_{11}g_{33}-g_{13}^2)(G_{13}G_{12}-G_{11}G_{23})$$

$$(X_{22})_1=(X_{12})_2 \quad (g_{12}g_{23}-g_{22}g_{13})(G_{11}G_{23}-G_{13}G_{12})+(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)(G_{13}G_{23}-G_{12}G_{33})$$

$$(X_{33})_1=(X_{13})_1 \quad (g_{11}g_{33}-g_{13}^2)(G_{13}G_{23}-G_{12}G_{33})+(g_{12}g_{33}-g_{13}g_{23})(G_{11}G_{33}-G_{13}^2)$$

$$(X_{22})_3=(X_{23})_2 \quad (g_{12}g_{23}-g_{22}g_{13})(G_{12}G_{33}-G_{13}G_{23})+(g_{22}g_{33}-g_{23}^2)(G_{12}G_{13}-G_{11}G_{23})$$

$$(X_{33})_2=(X_{23})_3 \quad (g_{12}g_{23}-g_{13}g_{23})(G_{13}G_{23}-G_{12}G_{33})+(g_{22}g_{33}-g_{23}^2)(G_{11}G_{33}-G_{13}^2)$$

y

$$(X_{11})_2=(X_{12})_1 \quad (g_{11}g_{22}-g_{12}^2)(G_{12}G_{13}-G_{11}G_{23})+(g_{11}g_{23}-g_{12}g_{13})(G_{11}G_{22}-G_{12}^2)$$

$$(X_{11})_3=(X_{13})_1 \quad (g_{11}g_{23}-g_{12}g_{13})(G_{12}G_{13}-G_{11}G_{33})+(g_{11}g_{33}-g_{13}^2)(G_{11}G_{22}-G_{12}^2)$$

$$(X_{22})_1=(X_{12})_2 \quad (g_{12}g_{23}-g_{22}g_{13})(G_{12}^2-G_{11}G_{22})+(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)(G_{12}G_{23}-G_{13}G_{22})$$

$$(X_{33})_1=(X_{13})_1 \quad (g_{11}g_{33}-g_{13}^2)(G_{12}G_{23}-G_{13}G_{22})+(g_{12}g_{33}-g_{13}g_{23})(G_{12}G_{13}-G_{11}G_{23})$$

$$(X_{22})_3=(X_{23})_2 \quad (g_{12}g_{23}-g_{22}g_{13})(G_{22}G_{13}-G_{12}G_{23})+(g_{22}g_{33}-g_{23}^2)(G_{11}G_{11}-G_{12}^2)$$

$$(X_{33})_2=(X_{23})_3 \quad (g_{12}g_{33}-g_{13}g_{23})(G_{12}G_{23}-G_{22}G_{13})+(g_{22}g_{33}-g_{23}^2)(G_{12}G_{13}-G_{11}G_{23})$$

Ahora bien, si denotamos por a, b, c, d, e, f a los subdeterminantes 2×2 de g_{ij} y por A, B, C, D, E, F a los subdeterminantes correspondientes de G_{ij}, cada uno de los tres sistemas anteriores es de la forma

$$-fB+eC=\Delta_1\Delta, \quad -eB+dC=\Delta_2\Delta, \quad -cC+fA=\Delta_3\Delta$$

$$-bB+dA=\Delta_4\Delta, \quad -cA+aC=\Delta_5\Delta, \quad -aB+bA=\Delta_6\Delta$$

Aquí, los $\Delta_{i,}\, i=1,\cdots 6$, denotan las expresiones mencionadas arriba, las cuales dependen sólo de la primera forma, ya directamente, ya a través de los símbolos de Christoffel. Es fácil ver que la matriz asociada a este sistema lineal es regular. Por lo tanto, los a, b, c, d, e, f son expresables únicamente en términos de los coeficientes de la primera forma y de sus derivadas. En resumen,

Teorema 3.1

Todos los subdeterminantes 2×2 de la matriz de coeficientes de la segunda forma fundamental pueden expresarse en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental y sus derivadas parciales. En particular, la curvatura seccional media principal de una hipersuperficie de $\mathbb{R}^4$ depende solamente de estos coeficientes.

Dado que este procedimiento se puede repetir para todas las cartas posibles X que cubren al punto $p \in M$, los pares de vectores X_i, X_j, $i,j = 1, 23$, generan todos los subespacios bidimensionales del espacio tangente $T_p(M)$. Esto prueba que las curvaturas seccionales de una hipersuperficie riemanniana inmersa en $\mathbb{R}^4$ son invariantes bajo isometrías locales.

4. CONCLUSIONES

El procedimiento esbozado en esta nota revela lo intrincado del procedimiento clásico de Gauss para enfrentar el estudio de la curvatura de una variedad riemanniana. En particular, se destaca el uso innecesario de la segunda forma fundamental, la cual luego se demuestra como superflua dentro del enfoque utilizado. Sin embargo, no se trata de un mero ejercicio de futilidad puesto que justifica la relevancia del concepto de curvatura seccional en el formalismo de la Geometría Diferencial contemporánea. En verdad, dentro del procedimiento presentado arriba no es claro, por lo menos a primera vista, que los subdeterminantes de orden distinto al 2×2 de la matriz g_{ij} tengan que depender solamente de la matriz G_{ij}.

REFERENCIAS

Barrero, E. L. y Vargas, T. E. (2005). *Hacia una Noción de Curvatura Gaussiana para Hipersuperficies de* $\mathbb{R}^4$, Trabajo de Grado, Programa de Matemáticas con énfasis en Estadística, Facultad de Ciencias, Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia.

Cotton, E. (1899). Sur les variétés à trois dimensions. *Annales de la faculté des Sciences de Toulouse*, 2e serie, Tome 1 4, 385-438.

Christoffel, E. B. (1869) Uber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades. *Journal für Mathematik (de Crelle)*, Bd. 70 Heft 1, 46-70.

Do Carmo, M. P. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Do Carmo, M. P. (1993). *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, Boston.

Gauss, C. F. (1827). Disquisitiones generales circa superficies curvas. *Commentationes societatis regiae scientiarum Göttingensis recentiores* 6, (ad a. 1823-1827, 1828). Reimpresa en Werke (1873). Königlichen Gessellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 4 (1873), 217-258. Traducción inglesa de Morehead, J. C. y Hiltebeitel, A. M. (1902). General Investigations of Curved Surfaces of 1827 and 1825. The Princeton University Library, Princeton.

Gromoll, D. & Klingenberg, W. & Meyer, W. (1975) *Riemannische Geometrie im Großen*. Zweite Auflage, Springer-Verlag, Berlin.

Levi-Civita, T. (1917). Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana. *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 42, 173-205. Reimpreso en Opere Matematiche, Memorie e Note (1960), publicate a cura dell'a Academia Nazionale dei Lincei, Vol. 4, 1917-1928, Nicola Zanichelli Editore, Bologna, 1-39.

Marmolejo, M. A. (1994) Producto Cruz en $\mathbb{R}^n$: La Identidad general de Lagrange. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, 3 2, 109-117.

Nomizu, K. (1956). *Lie Groups and Differential Geometry*. The Mathematical Society of Japan, Tokio.

Ricci G. & Levi-Civita T. (1901) Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. *Mathematische Annalen*, 54, 125-201. Reimpresión de la Libraire Scientifique Albert Blanchard, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*. (1923). Paris, Blanchard, Collection de monographies scientifiques étrangers.

Riemann, B. (1854). *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*. Habilitationsschrift presentada a la Facultad de Filosofía de la Universidad de Göttingen y publicada después de la muerte de su autor en los Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 13 (1867), 133-152. Reimpresa en Mathematische Werke (1892), bajo la supervisión de H. Weber y R. Dedekind, segunda edición, 1892. Traducción inglesa de W. K. Clifford, On the Hypotheses which lie at the Bases of Geometry, Nature, 8 183 184, 14–17, 36, 37.

Referencia	Fecha de recepción	Fecha de aprobación
Solanilla, L., Barrero Angulo, E. L., Vargas Morales, T. E., (2006). Teorema Egregio en hipersuperficies de $\mathbb{R}^4$. *Revista Tumbaga, 1, 81-88*	**Día/mes/año 16/01/2006**	**Día/mes/año 14/07/2006**