

# EXPLORACIÓN CON ESPEJOS Y ENSEÑANZA/APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA. SOBRE LA ACTUACIÓN DE LA PROFESORA Y LA TRANSFERENCIA DE PROCEDIMIENTOS

López, L. (1), Guillén, G. (2)

*IES Camp de Morvedre (1); Univesidad de Valencia (2)*

## Resumen

Este trabajo es parte de un estudio exploratorio sobre la enseñanza/aprendizaje de contenidos curriculares de la Enseñanza Secundaria Obligatoria de la Comunidad Valenciana que surgen al utilizar la exploración con espejos como contexto. Tiene como objetivo recoger información para reelaborar los componentes del Modelo Teórico Local elaborado previamente para servir de referente en esta investigación. Hemos diseñado un Modelo de Enseñanza que hemos desarrollado en la ESO en contexto laboratorio. Las observaciones las hemos distribuido en tres grupos: 1) las competencias de los alumnos y sus procesos cognitivos, 2) los efectos de la actuación de la profesora y 3) la transferencia que los alumnos hacen de los procedimientos. Aquí nos centramos en el Modelo de Enseñanza y en las observaciones de los grupos 2 y 3.

## Abstract

This paper is part of an exploratory study of the teaching/learning processes of the curriculum contents of the Obligatory Secondary Education (ESO) of the Valencian Community that can appear as a result of using the exploration of mirrors as a context. The objective is to gather information to reevaluate the preliminary components of the Local Theoretical Model which was developed to be used as a reference in this research. We have designed a Teaching Model that we have developed with ESO students in laboratory context. The observations have been distributed into three groups: 1) students' competences and cognitive processes, 2) the effects from teacher performance and 3) procedure transfer done by students. This paper covers the Teaching Model and observations included in the second and third groups.

**Palabras clave:** Exploración con calidoscopios, Modelo de Enseñanza, Actuación de la profesora, Transferencia de procedimientos, Elementos de competencia.

**Key words:** Exploration with kaleidoscopes, Teaching Model, Teacher performance, Procedure transfer, Competence components.

López, L., Guillén, G (2010). Exploración con espejos y enseñanza/aprendizaje de la geometría en la educación secundaria obligatoria. Sobre la actuación de la profesora y la transferencia de procedimientos. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 395-408). Lleida: SEIEM.

## Presentación

No es fácil encontrar investigación relacionada con calidoscopios en Didáctica de Geometría. Si bien hay trabajos que se han planteado esta problemática (Faux, 2008), no la abordan considerando los calidoscopios como situación-contexto para desarrollar actividad matemática. Tal y como subraya Guillén (2005), la exploración con calidoscopios es un contexto muy rico, pues permite tratar una presencia amplia de los contenidos curriculares<sup>1</sup>, abordar una problemática desde diferentes niveles, desarrollar la reinención en matemáticas y avanzar en el proceso de matematización<sup>2</sup>. La problemática de este estudio exploratorio es corroborar esta afirmación.

Como indicamos en López y Guillén (2009), nuestros referentes los constituyen trabajos previos desarrollados por una de nosotras (Guillén, 1991, 2005), quien realiza un análisis detallado de la problemática que tratamos; los Modelos Teóricos Locales (MTL) (Fillooy y cols., 1999) que utilizamos como marco metodológico y el trabajo de Guillén y Puig (2006) sobre la enseñanza y aprendizaje de los procesos matemáticos en el contexto de las relaciones de inscripción y dualidad entre poliedros regulares que usamos como referente para el análisis de los datos experimentales.

Con este estudio exploratorio pretendíamos: **i)** analizar la exploración con espejos para determinar qué contenidos del currículo de la ESO de la Comunitat Valenciana relativos a la geometría se pueden trabajar a partir de la exploración con una determinada enseñanza; **ii)** elaborar un Modelo de Enseñanza (ME) que contemple este análisis de la situación y diferentes enfoques para tratar el estudio; **iii)** al desarrollar el ME con estudiantes de la ESO, *iii.1)* explorar la enseñanza/aprendizaje de contenidos geométricos (conceptos, procesos matemáticos, relaciones,...) implicados en el ME, *iii.2)* determinar elementos que tienen que ver con los efectos de la actuación de la profesora y *iii.3)* determinar elementos sobre la transferencia que hacen los estudiantes de procedimientos al resolver problemas; y por último, **iv)** organizar los datos obtenidos en el estudio experimental a través de los cuatro componentes de un MTL. En este informe nos centramos en los propósitos **ii)**, *iii.2)*, *iii.3)* y **iv)**.

---

<sup>1</sup> Como ya hemos indicado en otros trabajos, consideramos contenidos curriculares a los procesos matemáticos de describir, clasificar, definir y demostrar, los conceptos matemáticos y la resolución de problemas.

<sup>2</sup> Siguiendo a Treffers (1987), *formalizar*, *esquematizar*, *organizar*, *axiomatizar* y *transformar* son verbos que denotan aspectos del proceso de matematización.

El actual currículo de la Comunitat Valenciana (DOGV, 2007) y autores como Gairín (1993), Rico (1997) o Filloy y cols. (1999) proponen el uso de nuevos materiales en la enseñanza de las Matemáticas. En este sentido, aunque las actividades propuestas en el ME fueron diseñadas para la investigación, la readaptación de éstas hacia un modelo orientado a la formación de profesores o de estudiantes no se vislumbra muy difícil, pudiéndose alcanzar uno de los objetivos de cualquier investigación en Didáctica, que la investigación realizada tenga repercusión en el aula.

### **Antecedentes. Marco de referencia y revisión bibliográfica**

El ME y los resultados que aquí presentamos sobre la enseñanza y aprendizaje de los procesos matemáticos a través de la resolución de problemas en un contexto de calidoscopios son una parte del estudio exploratorio realizado para la obtención del Diploma de Estudios Avanzados (López, 2009).

Este estudio se ubica en la línea de investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de los procesos matemáticos a partir de la geometría de los sólidos desarrollada en la Universitat de València (Guillén, 1991, 1997, 2001; Guillén y Puig, 2006) y toma como marco de referencia el de estas investigaciones. Este marco ya lo detallamos en trabajos anteriores (López y Guillén, 2009); lo que ahora precisamos es lo relacionado con el objeto de estudio de este informe.

Una consecuencia indirecta de la enseñanza de los procesos matemáticos es la constitución de objetos mentales<sup>3</sup> de los conceptos matemáticos involucrados en el Modelo de Enseñanza (Guillén y Puig, 2006). Así pues, al desarrollar el ME que en este informe detallamos, será inevitable que el alumno amplíe los objetos mentales de conceptos sobre simetrías, inscripciones de sólidos y resolución de problemas.

Otra de las características de nuestro marco, subrayada en Guillén (2005), es el enfoque realista para la enseñanza de las matemáticas escolares desarrollado en el Instituto de Freudenthal. Los contextos ocupan un lugar dominante como fuente de formación de conceptos y como área de aplicación. En este sentido, la exploración con calidoscopios es un contexto que puede trabajarse desde dos enfoques diferentes. Al principio de nuestra experiencia, el alumno estudia la descripción de los calidoscopios, módulos y sólidos a nivel local y en términos de simetrías que comparten. El alumno parte del contexto (los fenómenos) para ir a las matemáticas, está adquiriendo conocimientos. Al final de la experiencia, el estudiante organiza esos conocimientos desde una nueva perspectiva y usa los fenómenos como campo de aplicación. En este caso, el alumno va desde las matemáticas al contexto.

---

<sup>3</sup> Utilizamos el término de *objeto mental* con el significado de Freudenthal (1983).

En relación al marco metodológico, el diagrama 1, readaptado del de la tesis de Fernández (2001), muestra cómo se ha organizado el diseño y desarrollo de la experimentación.

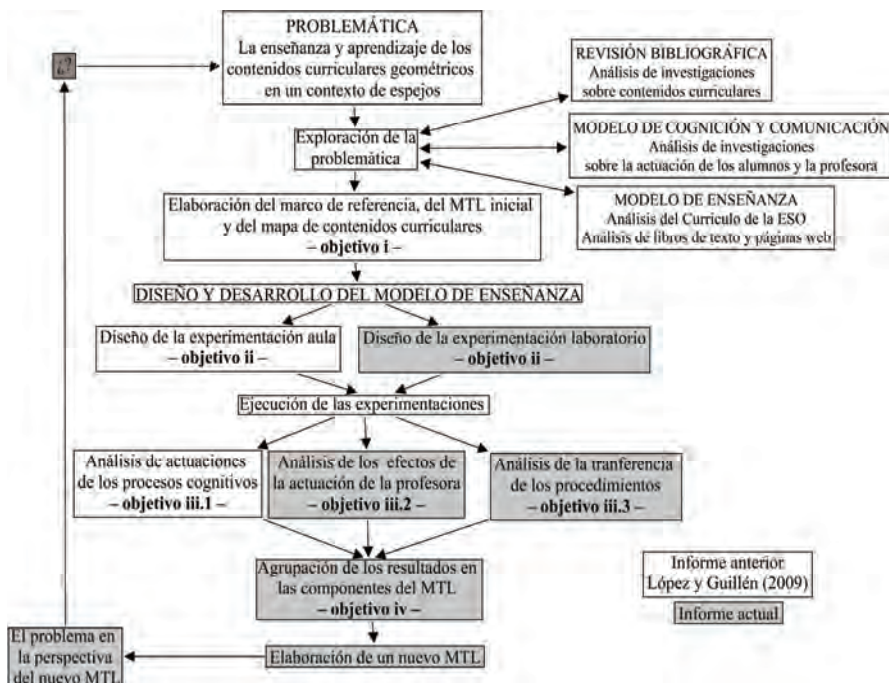


DIAGRAMA 1

Seguindo a Puig (2008), consideramos la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas como un proceso de comunicación y producción de sentido donde el concepto de competencia matemática no es independiente de la actuación del aprendiz. Cuando se quiere caracterizar el Modelo de Competencia (MC) no sólo debemos recurrir al análisis del dominio matemático que se está tratando, sino que además debemos tener en cuenta las actuaciones concretas de los sujetos reales en dicho dominio, ya que su contraposición con las actuaciones del sujeto ideal predichas por el análisis del dominio matemático pueden proporcionar nuevos elementos para este Modelo no predichos por dicho análisis.

En el trabajo que presentamos detallamos algunos indicadores de competencias provenientes del análisis de los datos sobre las actuaciones de los estudiantes sujetos reales referidos a la resolución de problemas de construcción de módulos y/o calidoscopios. Por ello, entre nuestros referentes figuran también algunos

estudios sobre resolución de problemas: los modelos heurísticos de Polya, Burton y Schoenfeld analizados desde el trabajo de Puig (1996). Cada uno de ellos describe el proceso de resolución de los problemas desde un punto de vista distinto: desde el resolutor ideal, desde la instrucción y desde el resolutor real, respectivamente. Estos tres aspectos se contemplan en el esquema de organización de los datos de este informe; el investigador que dirige la experiencia se considera como resolutor ideal que instruye en la resolución de problemas y que después observa y analiza las actuaciones de resolutores reales. En consecuencia, usamos indistintamente la jerga de estos tres autores.

Las herramientas heurísticas (hh) son los procedimientos independientes del contenido del problema que actúan sobre él para transformarlo, para formular un problema relacionado (Polya, 1954). Consideramos únicamente como hh las 8 herramientas propuestas por Puig (1996, pág. 41). Siguiendo a Burton (1984), los procedimientos son las acciones que actúan sobre el problema para resolverlo, pero no para transformarlo; los organizadores o sugerencias heurísticas según el vocabulario usado por Puig (1996) son las sugerencias que desencadenan el uso de hh y/o procedimientos y las destrezas son las formas de manejar la información, de representar un problema, de enumerar... De Schoenfeld (1985) tomamos los sistemas de creencias como el conjunto de determinantes (no necesariamente conscientes) del comportamiento del individuo; los recursos como los conocimientos matemáticos que poseen los individuos y que pueden traer a colación a propósito del problema en cuestión; las estrategias heurísticas o heurísticas como las estrategias y/o técnicas para realizar progresos en problemas no estándar y los mecanismos de control como las decisiones globales que regulan la selección y la implementación de recursos y estrategias heurísticas.

## **Metodología**

En relación con el estudio experimental vamos a describir brevemente las tareas del ME, el contexto donde hemos realizado la experimentación y el análisis realizado que ha conducido al esquema de organización de los datos.

### **Sobre las tareas laboratorio.**

En el cuadro 1 listamos los problemas sobre la construcción de módulos que generen sólidos de diferentes familias para los calidoscopios octaédrico y cúbico en el mismo orden que fueron desarrollados en la experiencia laboratorio.

- PROBLEMA 1: Construye un módulo de un prisma recto hexagonal para un calidoscopio octaédrico. (Datos para el prisma: altura del prisma 16 cm y lado del hexágono 3 cm).
- PROBLEMA 2: Construye un módulo de un tetraedro para un calidoscopio octaédrico. (Datos para el tetraedro: arista 3 cm).
- PROBLEMA 3: Construye un módulo de un octaedro para un calidoscopio octaédrico. (Datos para el octaedro: arista 3 cm).
- PROBLEMA 4: Construye un módulo de un cilindro para un calidoscopio octaédrico. (Datos para el cilindro: altura del cilindro 16 cm y radio 3 cm).
- PROBLEMA 5: ¿Podrías construir un módulo de un prisma recto de base un pentágono regular para un calidoscopio octaédrico? Si la respuesta es afirmativa, constrúyelo. (No hay datos)
- PROBLEMA 6: ¿Podrías construir un módulo de una bipirámide de base rectangular para un calidoscopio octaédrico? Si la respuesta es afirmativa, constrúyelo. (Datos para la bipirámide: altura de la bipirámide 8 cm y lados del rectángulo 6 y 2 cm)
- PROBLEMA 7: ¿Podrías construir un módulo de un prisma recto de base un pentágono regular para un calidoscopio cúbico? ¿Y para uno octaédrico? Razona tu respuesta. (No hay datos)

CUADRO 1: PROBLEMAS DE CONSTRUCCIÓN DE MÓDULOS DE LA EXPERIENCIA LABORATORIO

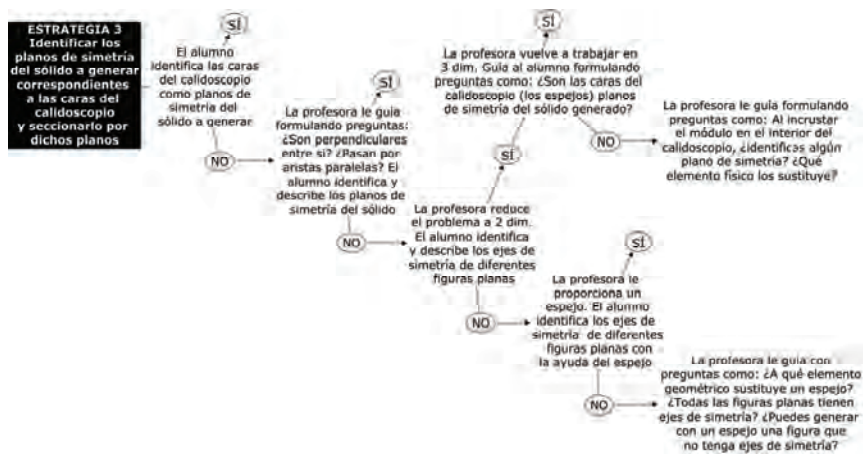
Estos problemas fueron seleccionados de los trabajos de Guillén (1991, págs. 193-208, 2005) por ser muy adecuados para ser planteados desde de los dos enfoques a los que nos hemos referido en el apartado anterior. Considerando el objetivo iii.3, todos se refieren a la construcción de módulos; lo que cambia es el sólido que ha de generarse y el caleidoscopio que se usa.

La selección de problemas también se explica desde otros análisis realizados. En ellos determinamos la actividad matemática que generan, los conocimientos previos y los recursos didácticos que se requieren para su resolución, los aspectos de la geometría que permiten tratar y las diferentes estrategias que se pueden usar para resolverlos.

	ACCIÓN PREVIA	ESTRATEGIA	ACCIÓN FINAL
ESTRATEGIA 1		Identificar entre el material el módulo que genera el sólido y reproducirlo	Adquisición de conocimientos matemáticos
ESTRATEGIA 2	Conocer la relación entre calidoscopios y número de imágenes que generan	Seccionar el sólido en tantas partes iguales como número de imágenes genera el calidoscopio del problema	Usar calidoscopios y módulos como soporte visual para verificar los resultados obtenidos
ESTRATEGIA 3	Conocer la relación entre calidoscopios y planos de simetría	Identificar en el sólido a generar los planos de simetría correspondientes a los espejos del calidoscopio y seccionar el sólido por dichos planos	Usar calidoscopios y módulos como soporte visual para verificar los resultados obtenidos

TABLA 1: ESTRATEGIAS PARA LA RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS DE CONSTRUCCIÓN DE MÓDULOS

Por brevedad, nos vamos a centrar en el último análisis citado. Examinamos los problemas desde dos puntos de vista: las posibles estrategias para su resolución y las posibles problemáticas que pudiesen surgir durante el proceso de resolución; tras ello, elaboramos patrones de conducta dirigidos al profesor/a ideal<sup>4</sup> en relación con el análisis realizado. La tabla 1 muestra tres estrategias determinadas para la resolución de los problemas y el mapa 1 el patrón de conducta de la tercera de ellas.



MAPA 1: PATRON DE ACTUACION DEL PROFESOR IDEAL DE LA ESTRATEGIA 3 PARA LOS PROBLEMAS DE CONSTRUCCION DE MODULOS

### Contexto, registro y análisis de los datos. Esquema de organización.

El estudio se realizó en Diciembre de 2008 con 5 alumnos de 3º de la ESO del IES Camp de Morvedre. Se desarrollaron 5 sesiones laboratorio de 2 horas cada una en las que los estudiantes estaban organizados como una pareja y un trío.

Tal y como indicamos en López y Guillén (2009), los datos se obtuvieron de las respuestas de los estudiantes a los problemas y del análisis de las grabaciones de vídeo. Transcribimos las sesiones, las dividimos en extractos<sup>5</sup> y los numeramos. A partir de ellos hicimos observaciones que codificamos de manera que quedase

<sup>4</sup> Llamamos profesor/a ideal a cualquier docente con los conocimientos necesarios para dirigir el ME.

<sup>5</sup> Llamamos extracto al fragmento de texto de la profesora y/o los estudiantes que refleja una idea que consideramos de interés porque corresponde a una observación de procesos de enseñanza/aprendizaje de contenidos geométricos curriculares. La revisión bibliográfica realizada facilitó la selección de estas observaciones.

reflejado el problema, el equipo al que correspondía y el número de extracto de la transcripción (ver protocolo 1 del anexo).

Para el análisis de los datos, elaboramos una batería de preguntas que distribuimos en tres grandes grupos, según con respecto a qué se quería interrogar objetivo iii.1, iii.2 y iii.3 . En el trabajo mencionado ya nos hemos referido a las relativas al objetivo iii.1. Para los otros dos, distinguimos las observaciones referidas a la actuación de la profesora que guiaba la experimentación de aquellas que se referían a las actuaciones de los estudiantes. La tabla 2 muestra cómo nombramos estos grupos de observaciones y las preguntas guía que delimitamos para cada uno de ellos.

		Cd.	NOMBRE	PREGUNTAS GUÍA
<b>SOBRE LA PROFESORA</b>	Actuación de la profesora	a	Sobre las herramientas heurísticas (hh)	¿Qué hh se proponen para su uso y/o se usan? ¿Cuáles son las más aconsejadas? ¿Y las más utilizadas? ¿Qué hh se sugiere que se usen ante las dificultades de los alumnos?
		b	En relación con organizadores	¿Qué sugerencias heurísticas se dan para desencadenar el uso de procedimientos? ¿Y para que se usen diferentes destrezas? ¿A qué fase de la resolución del problema corresponden?
		c	Procedimientos para resolver los problemas	Procedimientos para resolver los problemas: ¿Qué procedimientos se sugiere y/o usa en el proceso de resolución de los problemas? ¿A qué fase de la resolución del problema corresponden?
		d	Sobre las destrezas	¿Qué destrezas se sugieren y/o usan en el proceso de resolución de los problemas?, ¿para qué se usan? ¿Para manejar información? ¿Para representar el problema? ¿Para enumerar? ¿Para encontrar patrones o pautas? ¿Para contrastar?
		e	Sobre mecanismos de control	¿Se planifica? ¿Cómo?, ¿cuándo? ¿Cómo se gestiona y evalúa el propio proceso de resolución? ¿Cuándo se toman decisiones? ¿Por qué? ¿Qué decisiones?
		f	Sobre sistema de creencias	¿Qué razones pueden explicar un comportamiento determinado? ¿Qué creencias se reflejan sobre la asignatura, la profesora y/o sobre la resolución de problemas?
		g	Metodología empleada por la profesora	¿La metodología seguida por la profesora se contempla como diferente a las clases magistrales de pizarra y tiza? ¿En qué sentido? ¿Qué cosas de las que hace la profesora en el desarrollo de las sesiones se considera que no ocurren en este tipo de clases? ¿Qué es lo que ha llamado la atención?



SOBRE DE LOS ESTUDIANTES	Efectos de la actuación de la profesora	M <sup>6</sup>	Uso de herramientas heurísticas por parte del alumnado	¿Cómo afecta en el comportamiento de los alumnos cuando la profesora transforma una tarea a través de una hh? ¿Copian esta manera de proceder? ¿En qué tareas? ¿Lo hacen de manera apropiada? ¿Qué hh de las usadas por la profesora han usado de manera autónoma? ¿Siguen las sugerencias de la profesora cuando les propone el uso de alguna de estas herramientas?
		N	Uso de las destrezas y procedimientos utilizados por la profesora en un problema análogo	¿Qué destrezas ha aprendido el alumno tras la actuación de la profesora? ¿En qué manera han afectado en su autonomía de trabajo? ¿Y para resolver los problemas? ¿Qué consecuencias han tenido sobre el manejo de la información? ¿Y sobre la manera de representar en el plano los objetos? ¿Usan más de una representación? ¿Descartan las representaciones innecesarias? ¿Son precisos en sus representaciones y notaciones? ¿Buscan relaciones para determinar las incógnitas? ¿Contrastan los resultados? ¿Qué estrategias comunicativas han copiado los alumnos de la profesora?
		O	Efectos del material	¿Cómo ha influido el uso que ha hecho la profesora del material? ¿Han hecho uso los alumnos de él? ¿Con qué finalidad? ¿En qué tareas? Cuando la profesora les negaba el uso del material ¿Cómo les afectaba este hecho? ¿Usaban otras estrategias de trabajo? ¿Cuáles? ¿De qué manera han influido los módulos de los sólidos? ¿Y sus representaciones a través de los calidoscopios? ¿Qué ocurre al plantear las tareas sin que antes se hayan mostrado los modelos?
	Transferecia de procedimientos	P	Sobre la transferencia que se hace de los procedimientos	¿Resuelven sus actividades adaptando el procedimiento usado por la profesora en una actividad análoga? ¿Adaptan los procedimientos vistos en otras sesiones para resolver actividades análogas? ¿Y procedimientos estudiados en clase? ¿Son capaces de precisar lo que cambia y lo que permanece en la resolución de tareas análogas? ¿Son capaces de adaptar a nuevas situaciones patrones de trabajo aprendidos? ¿Se aplican los resultados ya obtenidos para encontrar resultados nuevos que se piden o se resuelven las tareas de nuevo sin recurrir a ellos?

TABLA 2: GRUPOS DE PREGUNTAS GUÍA

A partir de estas preguntas guía, reorganizamos las observaciones de manera que para cada grupo determinamos diferentes “acciones”. Dada la brevedad de este informe, sólo indicamos las “acciones” establecidas para el grupo N (véase tabla 2). Ésas fueron:

<sup>6</sup> Hemos codificado los grupos sobre las actuaciones de los estudiantes a partir de la letra M para dar continuidad a los 12 grupos descritos en López y Guillén (2009) en relación al objetivo iii.1).

- N.1. Recurren a la biblioteca de recursos en busca de patrones o pautas de trabajo.
- N.2. Usan distintos colores en sus representaciones.
- N.3. Dibujan de manara aislada el objeto a analizar.
- N.4. Representan con precisión los objetos del problema, incluso los vuelven a dibujar.
- N.5. Descomponen en triángulos los polígonos de las caras del objeto problema para determinar alguno de sus elementos.
- N.6. Comprueban los resultados de algunos resultados.
- N.7. Particularizan a una dimensión para simplificar el problema.
- N.8. Generalizan a familias propiedades de alguno de sus componentes.
- N.9. Se ayudan del lenguaje corporal y/o de diferentes tipos de representaciones para comunicarse.
- N.10. Representan en el plano el módulo/la base del módulo problema inscrito en el sólido/ base del sólido.
- N.11. Buscan relaciones.
- N.12. Cuentan de manera estructurada los elementos de los poliedros que no son ni prismas ni pirámides.

## Resultados y conclusiones

Parte de los resultados de este informe están expandidos a lo largo del apartado anterior. En cuanto al objetivo ii, describimos y analizamos una parte del ME en la que se tratan dos de los contenidos curriculares de la ESO a partir de nuestro contexto de estudio: los procesos matemáticos y la resolución de problemas. Referente a los objetivos iii.2 y iii.3, obtuvimos tipos de *acciones* para cada uno de los grupos de la tabla 2.

También hemos obtenido resultados relativos al objetivo iv, a los que nos vamos a referir ahora brevemente. Siguiendo a Puig (1996), los tipos de *acciones* de los estudiantes y la agrupación de las que a nuestro juicio eran similares han llevado a determinar los primeros elementos del MC surgidos de las actuaciones concretas del sujeto real. Como ejemplo, enunciamos elementos que provienen de acciones del grupo N.

- Examinar ejemplos en busca de una idea feliz (N.1)
- Utilizar una notación adecuada (N.2)
- Identificar el objeto cuestionado en el problema (N.3)
- Traducir a una representación en el plano (N.3, N.4, N.10)

- Entresacar datos (N.5)
- Comprobar los resultados (N.6)
- Simplificar el problema (N.7)
- Generalizar resultados (N.8)
- Usar diferentes “lenguajes” para comunicarse (verbal, gráfico y/o gestual) (N.9)
- Examinar las relaciones entre los datos (N.11)
- Contar de manera estructurada (N.12)

Como conclusiones del trabajo referidos a los objetivos planteados destacamos la eficacia del ME para recoger información sobre la actuación de los estudiantes y la profesora, lo que conlleva eficiencia para determinar elementos para reelaborar los diferentes componentes del MTL diseñado previamente como referente para la investigación (objetivo iv). En López y Guillén (2009) informamos sobre acciones que se pueden reorientar hacia elementos del modelo cognitivo y de comunicación. En los párrafos anteriores hemos hecho referencia a la determinación de elementos para el MC; destacamos también cómo las acciones delimitadas sobre la actuación de la profesora llevan a la reelaboración del ME.

Asimismo, cabe subrayar cómo los diferentes tipos de análisis realizados no sólo han permitido explicar la selección de los mismos para el ME elaborado; la determinación de las distintas estrategias para su resolución y el análisis de las mismas se han mostrado muy apropiados para poder interpretar las actuaciones de los estudiantes y guiar la actuación de la profesora.

Al centrar la atención en los datos obtenidos sobre la transferencia que se hace de los procedimientos, el estudio sugiere que en el ME reelaborado se incluyan problemas relacionados con calidoscopios tetraédrico, octaédrico, cúbico y dodecaédrico y con módulos que correspondan a diferentes poliedros regulares y semi-regulares. De esta manera se puede tratar de nuevo este tipo de problemática y obtener mayor riqueza en el tipo de acciones asociadas a este grupo.

Lo expuesto en párrafos anteriores permite responder afirmativamente a la problemática de este estudio: Es posible tratar la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos curriculares geométricos de la ESO en un contexto de espejos. Asimismo destacamos cómo a partir de los materiales diseñados para este trabajo se pueden reelaborar otros materiales orientados a los profesores de secundaria para trabajar estos contenidos curriculares desde los contextos.

## Referencias

- Burton, L. (1984). Mathematical Thinking: The Struggle for Meaning, *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 15, págs. 35–49.
- Faux, E. (2008). Kalidoscope. *Mathematics Teaching Incorporating Micromath*, 206, págs. 19-21.
- Fernández, A. (2001). *Precursores del razonamiento proporcional. Un estudio con alumnos de primaria*. Tesis Doctoral. Universitat de València. Valencia.
- Filloy, E. y cols. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel.
- Gairín, J. M. (1993). Selección y empleo de materiales a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. En Blanco, L. y Casas, L.M. (Eds.). *VI Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas. Sociedad Extremeña de Educación Matemática (FESPM)*, págs. 161-177. Badajoz.
- Generalitat Valenciana (2007). Decreto 112/2007, de 20 de julio, del Gobierno Valenciano, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunitat Valenciana, *DOGV*, 5562.
- Guillén, G. (1991). *Poliedros. Matemáticas: cultura y aprendizaje*. Madrid: Síntesis.
- Guillén, G. (1997). *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje*. Tesis doctoral. (Publicada en 1999 en la Col·lecció: Tesis doctorals en Microfitxes). Universitat de València. Valencia.
- Guillén, G. (2001). Las relaciones entre familias de prismas. Una experiencia con estudiantes de Magisterio. *Enseñanza de las Ciencias*, vol.19 (3) 415-431.
- Guillén, G. (2005). *La enseñanza de la geometría en la educación básica. Algunas investigaciones*. Texto actualizado de la conferencia impartida en el departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México D.F.
- Guillén, G. y Puig, L. (2006). Construcción de un modelo de enseñanza de procesos matemáticos en el contexto del estudio de las relaciones de inscripción y de dualidad entre poliedros. *Educación Matemática*, vol. 18 (3), págs. 65-102.
- López, L. (2009). *La exploración con espejos y la enseñanza de la geometría en la Educación Secundaria Obligatoria. Estudio exploratorio*. Trabajo de investigación del Programa de Doctorado. Universitat de València. Valencia.

- López, L. y Guillén, G. (2009). La exploración con espejos y la enseñanza de la geometría en la Educación Secundaria Obligatoria. Sobre competencias de los alumnos y sus procesos cognitivos. Estudio exploratorio. En Murillo, J.; González, M.T. y González, M.J. (Eds.). *Investigación en Educación Matemática. XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, págs. 273-283. Santander.
- Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning*. 2 vols. Princeton University Press: Princeton, NJ. (Traducción castellana de José Luis Abellán, Matemáticas y razonamiento plausible. Madrid: Tecnos).
- Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Madrid Síntesis.
- Puig, L. (2008). Sentido y elaboración del componente de competencia de los Modelos Teóricos Locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. *PNA*, vol. 2 (3), págs. 87-107.
- Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En Rico L. (Coord.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: Horsori.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, FL: Academic Press.
- Treffers, A. (1987). *Three dimensions (a Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction - the Wiskobas Project)*. Dordrecht: D. Reidel.

## Anexo

49. Pr: Ahora tengo que determinar los lados y ángulos de la zona sombreada. Os aconsejo aislar cada una de las caras de la pirámide y trabajarlas de manera independiente.

La Pr les proponen representar aisladamente las caras del módulo de la base para determinar los datos (6.1/49).

50. J: Entonces ¿la altura es la mitad?

51. D: Si esto es 6, esto es la mitad vale 3. Y todo esto es 2, (sustrayendo uno de los lados del rectángulo de la base de la bipirámide), por lo que este lado es 1. ¿Y los ángulos del bicho éste, (módulo), cuánto son?

Se preguntan tanto por los lados como por los ángulos de las caras (6.1/51).

Uso de deícticos (6.1/51).

52. D: Son 90 (figura 10).

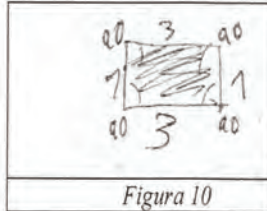


Figura 10

Determinan con facilidad todos los datos de la base del módulo al representar de manera aislada la base de la pirámide (6.1/51-52).

53. J: Éste trozo, ¿qué es la mitad de la altura?, ¿es 4?

54. Pr: ¿Qué trozo?, cambia de color y pntalo.

La Pr les sugiere que usen distintos colores para diferenciar las aristas (6.1/54).

55. J: (Con el color rojo), esto es la altura de la pirámide, por lo que este trozo es 4.

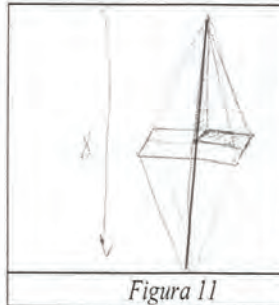


Figura 11

Los alumnos hacen caso de la recomendación de la Pr y pintan de rojo la altura de la bipirámide (6.1/55).