EL APRENDIZAJE DE LA DEMOSTRACIÓN VISTO DESDE LA TEORÍA DE LA PRÁCTICA SOCIAL

Camargo, L. (1)**, Gutiérrez, Á.** (2)

Universidad Pedagógica Nacional Bogotá (1), *Universidad de Valencia* (2)

Resumen

La ponencia se centra en sugerir una vía metodológica para analizar el aprendizaje de la demostración basada en la perspectiva de la práctica social sugerida por Wenger (1998). Esta perspectiva pone de manifiesto aspectos del aprendizaje poco explorados por otros enfoques y hace explícitas algunas cuestiones investigativas para quienes decidan asumir que el aprendizaje es sinónimo de participación en una comunidad de práctica.

Abstract

This presentation proposes a methodology to analyze processes of students' learning to prove from Wenger's (1998) perspective of social practice. This perspective points to some aspects of learning that have not been explored by other theoretical approaches, and it raises some research questions about the analysis of learning processes understood as participation into a comunity of practice.

Palabras clave: Aprendizaje de la demostración; futuros profesores; educación secundaria; comunidad de práctica; contexto sociocultural.

Keywords: Learning of proof; pre-service teachers; secondary school; comunity of practice; sociocultural context.

Camargo, L., Gutiérrez, Á. (2010). El aprendizaje de la demostración visto desde la teoría de la práctica social. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 245-258). Lleida: SEIEM

Introducción

A pesar de que el advenimiento a la Educación Matemática de perspectivas socioculturales data del final de los años 80 (Lerman, 2006), su avance ha sido lento principalmente porque aún no hay propuestas metodológicas suficientemente estandarizadas que puedan ser usadas con confianza por los investigadores, en donde se aluda específicamente a procesos de construcción de conocimiento matemático. Los estudios comparativos parecen ser una vía apropiada en algunos casos (Wertsch, 1997), pero en otros, en donde el foco investigativo se remite al aprendizaje situado (es decir, producto de escenarios, gente, actividades, etc.) sin necesidad de establecer semejanzas y diferencias, se constituye en un reto para la investigación aportar técnicas e instrumentos de análisis.

El propósito de nuestra exposición es presentar una vía metodológica para analizar el aprendizaje de la demostración matemática de un grupo de estudiantes como participación en una comunidad de práctica de clase (Clark, 2005). Al centrarnos en la participación, nos ubicamos en la teoría de la práctica social propuesta por Wenger (1998). En anteriores simposios de la SEIEM se ha abordado la problemática del aprendizaje y la enseñanza de este proceso desde diferentes ópticas, con estudiantes de secundaria o con futuros profesores de matematicas (Ibáñez y otros, 2002; Cañadas, Castro, 2003; de la Torre, 2003; Cobo y otros, 2005; Vicario, Carrillo, 2005; Fiallo, Gutiérrez, 2006, 2007), pero en ninguna de dichas presentaciones se ha profundizado en una aproximación sociocultural como la que planteamos. En primer lugar, esbozamos una síntesis de algunos conceptos de la teoría. En segundo lugar, presentamos el contexto que sirvió de base para una enseñanza experimental de la que obtuvimos los datos. En tercer lugar, sintetizamos el proceso de constitución de un conjunto de datos y de un sistema de códigos con el cual analizar la participación de los estudiantes. En cuarto lugar, presentamos un ejemplo ilustrativo de la metodología de análisis que proponemos. Finalmente, señalamos algunas implicaciones para la investigación en el campo y una aportación de la metodología propuesta.

El aprendizaje de la demostración desde la teoría de la práctica social

Asumimos el aprendizaje de la demostración como sinónimo de participación en la actividad demostrativa que se despliega en una clase. Definimos 'actividad demostrativa', desde la perspectiva sociocultural, como el conjunto de acciones en las que se involucran los estudiantes, que apoyan e impulsan la producción de una demostración matemática. Generalmente éstas comienzan con la exploración de una situación para buscar regularidades, pasan por la formulación de conjeturas y la aceptación del hecho geométrico enunciado, posteriormente se concentran en la búsqueda de ideas o argumentos que conformarán la demostración del enunciado y la organización de dichas ideas en un discurso comunicable según reglas establecidas por el grupo humano al que se dirige y terminan con la inclusión del enunciado al interior de un sistema teórico. Esta conceptualización es sugerida por diversos investigadores, particularmente por aquellos que reconocen el carácter social de la demostración e impulsan su aprendizaje en cualquier nivel educativo (Marrades y Gutiérrez, 2000; Mariotti, 2006; Stylianides, 2007).

La participación en la actividad demostrativa conforma con la materialización de la actividad, en forma de producción de un conjunto de postulados, definiciones y teoremas con su correspondientes demostraciones, una relación de complementariedad que da significado a la práctica que se lleva a cabo en una clase de geometría euclidiana plana de nivel universitario, en la que se tiene como meta construir colectivamente una porción de un sistema axiomático. Mediante la participación, la rigidez de la forma de una demostración matemática y el propósito de ésta cobran significado para los estudiantes. Mediante la materialización, se organiza e institucionaliza la práctica en un conjunto de enunciados del sistema axiomático para poder comunicarlo, para tener una memoria colectiva que permita recordar decisiones y coordinar nuevas acciones.

A medida que los estudiantes avanzan en la actividad demostrativa, se espera que suceda una evolución en su participación. Lave y Wenger (1991) llaman ‘participación periférica legítima’ al proceso mediante el cual los recién llegados a una comunidad se integran a ésta, como una característica del aprendizaje. Sin embargo, estos autores no discriminan estados específicos para delinear la trayectoria de movilidad desde la posición de ‘miembros novatos’ a ‘miembros expertos’ de la comunidad. Para utilizar el constructo ‘participación periférica legítima’ analíticamente, nosotros adaptamos la propuesta de Fernández (2008), que define estados de involucramiento en las acciones que se llevan a cabo en el cumplimiento de la empresa, si bien no usamos los estados exactamente como los define la investigadora, ya que los contextos de su investigación y de la nuestra son muy diferentes.

Nos referimos a tres estados, participación periférica legítima, participación legítima y participación plena, distinguibles por el papel que desempeña el profesor, de acuerdo con Fernández (2008), y por la caracterización dada a la participación en términos de relevante (esencial y útil para el cumplimiento de la meta), genuina (con fundamento para lo que se dice o hace y con conciencia de la responsabilidad con la tarea que se lleva a cabo), autónoma (espontánea, por iniciativa propia y por un interés personal) y original (creativa, con ideas propias). En la Tabla 1 describimos las características teóricas particulares de cada estado, si bien no siempre es fácil calificar el grado de autonomía, relevancia y originalidad de la participación en una situación real.

Participación periférica legítima	Los estudiantes, bajo la dirección y acompañamiento cercano del profesor, participan en la actividad demostrativa con los recursos disponibles, de manera poco autónoma, genuina, relevante u original.
Participación legítima	Los estudiantes, con el apoyo del profesor, participan en la actividad demostrativa de manera genuina, relevante u original o legítima, pero no autónoma.
Participación plena	Los estudiantes, en interacción comunicativa con el profesor, participan en la actividad demostrativa de manera genuina, autónoma, relevante y eventualmente original y son reconocidos como líderes por los demás miembros de la comunidad.

TABLA 1. ESTADOS DE PARTICIPACIÓN EN UNA COMUNIDAD DE PRÁCTICA DE CLASE

Contexto experimental

La enseñanza experimental de donde obtuvimos los datos con los que pusimos en juego la metodología que proponemos se llevó a cabo con los 21 estudiantes (17-20 años) de un curso semestral de geometría plana del programa de Licenciatura[1] en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá, Colombia). A lo largo del curso, los estudiantes participaron en la construcción colectiva de una porción de un sistema axiomático para la geometría euclidiana relacionado con propiedades de ángulos, triángulos y cuadriláteros. Además, trabajaron en la resolución de problemas abiertos y ganaron conocimientos sobre el programa de geometría dinámica Cabri, para usarlo con cierta destreza en la exploración de figuras y la verificación de conjeturas.

Procedimiento metodológico

Para analizar la puesta en práctica de la idea de aprendizaje como participación, desarrollamos una metodología que nos ha permitido construir paralelamente un conjunto de datos a analizar y un conjunto de códigos con los cuales dar cuenta del aprendizaje de los estudiantes.

El diseño experimental se centró en registrar lo que decían o hacían profesora y estudiantes, asociado a la actividad demostrativa, durante las interacciones de la

1 En Colombia, la Licenciatura en Matemáticas es la titulación en la que se forma a los futuros profesores de matemáticas de educación secundaria y media.

profesora con el grupo de estudiantes, así como de los estudiantes cuando trabajaban en parejas[2]. Optamos por grabar permanentemente a dos parejas de estudiantes y a un tercer grupo variable, escogido al azar cada vez que comenzaba una interacción. Los registros de audio y video, y sus transcripciones, fueron la materia prima para analizar el aprendizaje. También se usaron en los análisis, como información complementaria, notas de campo de las observaciones de las clases, notas de las reuniones de planeación y evaluación de las sesiones y copia de las producciones escritas de los estudiantes.

A medida que revisamos las trascripciones llevamos a cabo un proceso de construcción del cuerpo principal de datos experimentales y de un sistema de códigos con el que hicimos el análisis de las finalidades de participación, proceso similar a los empleados por Clark (2005) y Gómez (2007) que contempló las siguientes cinco fases:

- *Construcción del primer conjunto de datos*: dividimos cada sesión de clase según temas tratados o quehaceres llevados a cabo y construimos una base de datos.
- *Codificación abierta*: alimentamos el programa AtlasTi con los registros de la base de datos; constituimos 153 documentos primarios[3] y procedimos a hacer a los fragmentos de las interacciones de las clases del primer tema una asignación emergente de códigos que daban cuenta de diversos aspectos de la participación. Estos códigos se fueron depurando al analizar otros fragmentos. Así obtuvimos 54 códigos.
- *Reducción del conjunto de datos y constitución de episodios*: Utilizamos como criterio de clasificación de los fragmentos de clase la estrategia de gestión que se privilegiaba en cada uno y descartamos los que no aportaban suficiente información. Después, identificamos 15 temas o quehaceres representativos de la práctica matemática llevada a cabo y que cubren la totalidad de las estrategias de clase, abarcan todos los códigos del listado e incluyen clases del inicio, intermedias y finales.
- *Codificación axial*: establecimos relaciones entre códigos, subordinando unos a otros y ubicándolos en relación a aspectos específicos de la teoría de la práctica social de Wenger (1998). Al hacerlo, privilegiamos aquellos códigos que nos daban información sobre las finalidades de participación de los estudiantes en la actividad demostrativa y empleamos los demás códigos para explicar y contextualizar la participación. Así, construimos un conjunto de códigos principales y subordinados.

---

2 Se formaron 9 parejas y un trío.
3 Así se denomina en el programa AtlasTi a un registro que se incluye como fuente de análisis.

- *Identificación del conjunto principal de datos y refinamiento de la codificación*: la organización de códigos en principales y subordinados nos permitió limitar los extractos de clase correspondientes a los 15 temas, para poder hacer un análisis en profundidad de aquellos en donde hubiera un buen número de códigos principales. Este análisis nos llevó a la necesidad de refinar nuevamente la codificación.

Una vez seleccionados los extractos de clase con los que dimos cuenta de las finalidades de participación, hicimos un análisis de las características de dicha participación en cada extracto para lo cual usamos el marco teórico.

Ejemplo ilustrativo del análisis realizado

Hemos seleccionado un extracto que corresponde a una conversación sostenida en una de las clases finales del curso, centrada en demostrar la conjetura de que el lado más largo de un triángulo subtiende al ángulo mayor. La profesora explicó que debían comparar dos lados y sus respectivos ángulos opuestos y sugirió el siguiente enunciado: Dado el triángulo OKP, si OP > OK entonces m$\angle$OKP > m$\angle$OPK e hizo una representación como la de la Figura 1.

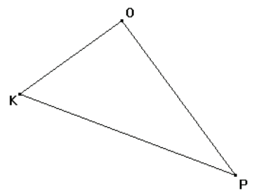


FIGURA 1

Después de trabajar un rato en parejas, Ana y Juan se ofrecieron para escribir la demostración en la pizarra. Primero, propusieron transferir la medida del lado OK al rayo OP para obtener el punto K' tal que OK = OK'.

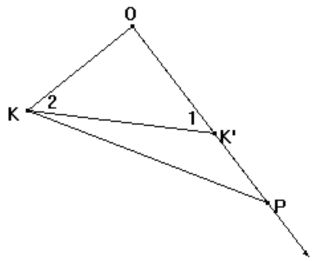
Los códigos a la derecha de cada intervención dan cuenta de las finalidades de participación: Identificar las condiciones de las que se parte (CondIni), asegurarse de que previamente se han mencionado las condiciones suficientes para afirmar una idea (CondSuf), controlar el rigor establecido para la escritura de las demostraciones (Rigor), proponer la justificación de una afirmación que se hace (Justif), controlar que el proceso se dirija a la conclusión (ContrCon), hacer explícita una conclusión necesaria (ConclNe) y usar el lenguaje especializado acordado (Lenguaj).

162	Ana:	(a)	Entonces, ya teníamos la condición de que OP era mayor que OK	CondIni
		(b)	Entonces podíamos transferir esa medida [OK] en el segmento OP … digamos, en el rayo OP… la medida,	ConstrAux
		(c)	por lo que OP es mayor que OK.	CondSuf
163	Juan:	(a)	[Escribe al lado de la figura: $\overline{OP} > \overline{OK}$].	Lenguaj
		(b)	Y además OK es mayor que 0.	CondSuf
		[…]		
168	Juan	(a)	Luego, por la construcción,	Justif
		(b)	OK es igual a OK’.	ConclNe
		(c)	[Escribe OK = OK’].	Lenguaj
		(d)	Y por definición de segmentos congruentes,	Justif
		(e)	OK es congruente con OK’.	ConclNe
		(f)	[Escribe $\overline{OK} \cong \overline{OK'}$; marca los segmentos congruentes en la figura].	Lenguaj

Una vez construido KK’ y justificada su existencia, los estudiantes construyeron un triángulo isósceles OKK’, justificando cuidadosamente en su exposición la construcción auxiliar.

172	Ana:	(a)	Entonces, por el teorema [del triángulo isósceles],	Justif
		(b)	tenemos que los ángulos son… que el ángulo K.	ConclNe
173	Profesora:		¿El ángulo K?	Lenguaj
174	Ana:		El ángulo OKK’ y el ángulo OK’K son congruentes.	ConclNe
175	Estudiante:		O ponga números.	Lenguaj

176	Profesora:	Pongámosle números, 1 y 2… [$\angle$ 1 y $\angle$2].	Lenguaj

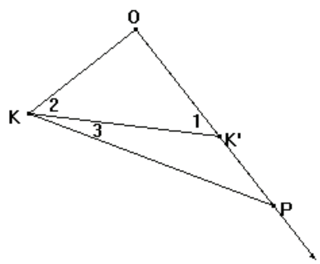


177	Juan:	No se si en la demostración tenemos que decir: “sea el triángulo OK’K”, para decir...	Rigor
178	Profesora:	Pues, necesitamos estar seguros de que [el triángulo] está. Pero ahora no vamos a hacer todo eso. Tenemos que asegurar que sí existe ese triángulo	Rigor
179	Juan:	[Escribe $\angle$ 1$\cong$ $\angle$2].	Lenguaj
180	Germán:	Y de que el punto K’ pertenece al…, pertenece al interior del ángulo OKP.	Rigor
181	Profesora:	¿Por qué? Hasta ahora no lo necesitó.	Rigor
182	Germán:	Pero después… [Se ríe].	ContrCon

Después propusieron los pasos centrales de la demostración haciendo uso de propiedades del triángulo isósceles y del teorema del ángulo externo a un triángulo.

184	Ana:	Listo, Entonces vamos a mirar el triángulo… que el ángulo 1 es externo al triángulo K’PK.	ConclNe
185	Profesora:	Ángulo 1 externo… ¡miren! Estamos usando el teorema del ángulo externo… Sí.	Justif
186	Juan:	[Escribe: $\angle$ 1 externo al ΔK`PK].	Lenguaj
187	Ana:	Entonces como el ángulo 1 es congruente al ángulo 2.	CondSuf

188	Juan:	(a)	Espere. Como ángulo 1 es externo	CondSuf
		(b)	Entonces la medida del ángulo 1 es mayor que la medida del ángulo OPK. [Escribe: m$\angle$ 1 > m$\angle$ OPK].	ConclNe
		[…]		
190	Ana:	(a)	Entonces tenemos ahora que estos dos [$\angle$1 y $\angle$2] son congruentes	CondSuf
		(b)	Y que la medida de éste ángulo [$\angle$OKP], va a ser mucho mayor a ésta [$\angle$OPK].	ConclNe
		(c)	Entonces, la suma de estas dos medidas, la del ángulo OKK’ y [la del ángulo] K’KP es mayor, entonces, va a ser mayor que…	ConclNe
		[...]		
193	Juan:	(a)	Es que como K’ está en el interior el ángulo OKP entonces,	CondSuf
		(b)	por el postulado de adición de medidas de ángulos	Justif
		(c)	tenemos que el ángulo 2 más	ConclNe
194	Profesora:	Pongámosle [nombre] al otro		Lenguaj
195	Juan:	[Llama $\angle$3 al $\angle$K’KP].		Lenguaj



196	Juan:	(a)	La medida del ángulo 2 más la medida del ángulo 3 es igual a la medida del ángulo OKP	ConclNe
		(b)	[Escribe: m$\angle$ 2 + m $\angle$ 3 = m$\angle$ OKP].	Lenguaj

197	Profesora:		Siempre y cuando sí sepamos eso [que K’ está en el interior del ángulo OKP].	CondSuf
198	Juan:	(a)	Sí. O sea la interestancia O-K’-P. Teniendo eso, entonces teníamos, desde el inicio, de lo que traíamos, que la medida del ángulo 2 es mayor que la medida del ángulo P, bueno, OPK [Escribe: $m\angle 2 > m\angle P$]. Y por acá, como medida del ángulo 2 más medida del ángulo 3 es igual a medida de ángulo OKP,	CondSuf
		(b)	también puedo escribir que la medida del ángulo 2 es mayor que la medida de ángulo…	ConclNe
199	Profesora:	(a)	Es al revés, medida del ángulo OKP es mayor que la medida del ángulo 2.	ConclNe
		(b)	Por definición de mayor que.	Justif
200	Juan:	(a)	[Escribe: $m\angle OKP > m\angle 2$].	Lenguaj
		(b)	Entonces por ese lado tendré [Escribe: $m\angle OKP > m\angle 2 > m\angle P$].	ConclNe

[P88:162-200]

Juan y Ana tienen una idea original, probablemente asociada al hecho de imaginar en qué casos los ángulos son iguales. Sus primeras intervenciones se refieren a los pasos de la construcción del segmento OK’ congruente al OK, haciendo explícitas las condiciones suficientes para poder usar el teorema de localización de puntos. La condición inicial no es necesaria para poder hacer la transferencia en el rayo OP. Después, Juan concluye que necesariamente se tiene la congruencia de los segmentos [ConclNe; 168e] aludiendo, como justificación la definición de congruencia.

Una vez construido el triángulo isósceles OKK’, Ana concluye que los ángulos de la base son congruentes [172a a 174]. Luego, Juan pregunta si es necesario justificar primero la existencia del triángulo OKK’ [177]. La profesora acepta que hay que estar seguros de que el triángulo existe, pero considera que ese es un detalle que los estudiantes pueden incluir posteriormente [178]. Con ello, flexibiliza la norma de justificar todas las afirmaciones en lugar de hacerla cumplir. Adicionalmente, Germán indica que deben justificar que el punto K’ está en el interior del $\angle OKP$ [180], anticipándose a una necesidad posterior que parece entrever sólo él, por lo que percibimos que tiene control sobre la conclusión a la que esperan llegar [ContrCon; 182].

A continuación, Ana menciona que el $\angle 1$ es externo al triángulo K’PK [184] y pretende usar la congruencia de los ángulos $\angle 1$ y $\angle 2$ [187] para establecer la desigualdad entre $\angle$ OKP y $\angle$ OPK [190b]. Juan la interrumpe para ir completando la demostración. Él es quien concluye la desigualdad entre los ángulos $\angle 1$ y $\angle$ OPK [188b], inferida a partir del teorema del ángulo externo, y los pasos posteriores de la demostración [196 a 200].

En el extracto del ejemplo, consideramos que la participación de Ana y Juan es plena, pues los estudiantes interactúan entre sí y con la profesora con la naturalidad de una conversación espontánea.

Su participación es relevante pues encuentran una vía exitosa para hacer la demostración, la desarrollan atendiendo a las normas para la escritura de demostraciones e incluso se preocupan por el grado de rigor con el que se deben justificar ciertos aspectos menores. Juan desplaza a la profesora en la función que ella generalmente asume de controlar que se hagan explícitas las justificaciones, que el lenguaje sea apropiado, etc. Por esta razón, la profesora asume un papel secundario, interviene poco, generalmente para apoyar el trabajo que los estudiantes están haciendo, o para tomar alguna decisión de tipo técnico relacionada con el rigor de la demostración. Es una participación genuina: los estudiantes intervienen con ideas propias, conscientes de su papel en la producción de la demostración y fundamentando cada una de las afirmaciones que hacen.

Adicionalmente, la participación es autónoma y original pues no siguen un patrón usual, sino que articulan los teoremas del triángulo isósceles y del ángulo externo a un triángulo de manera creativa. La sorpresa con la que la profesora reacciona cuando ellos introducen el teorema del ángulo externo a un triángulo [185] es muestra de que ella no había previsto esa vía para la demostración.

Discusión

Como nuestro interés es presentar la metodología mediante la cual hemos analizado la participación de los estudiantes en la actividad demostrativa, esta discusión está centrada en la implementación de dicha metodología.

El ejemplo ilustra tres aspectos de nuestra aproximación metodológica:

- Permite dar cuenta de una participación situada, es decir, condicionada a la especificidad del contexto y de la actividad matemática que se desarrolla. En nuestro análisis aludimos a lo que dicen y hacen los estudiantes cuando están inmersos en la producción de una demostración, podemos apreciar qué saben hacer los estudiantes, qué tipos de ayuda necesitan de la profesora y damos cuenta de su aprendizaje.

- Muestra la complejidad de dar cuenta del aprendizaje como participación, pues se requiere poder capturar la esencia de la participación de los estudiantes en unos pocos extractos, que a su vez sean representativos de la participación en general. La selección de dichos extractos requiere de un proceso de reducción de una gran cantidad de información inicial. Poco a poco, de este proceso emerge un conjunto de datos que representan la participación del grupo de estudiantes en la clase y el conjunto de códigos con los que se analiza.
- La fiabilidad del análisis no se basa en afirmar que la interpretación que hemos hecho es la única posible, sino en la coherencia con la que se usan los códigos en los diferentes extractos y en el cuidado que se presta al análisis para que éste sea factible de hacer.

Aportaciones

La comparación de diferentes extractos en los que los estudiantes contribuyen con la producción de una demostración permite identificar una trayectoria inclusiva de participación, hecho que se constituye en evidencia de aprendizaje, desde la perspectiva de la práctica social. En ese sentido, consideramos que la metodología es útil para destacar aspectos no suficientemente analizados aún, tales como el proceso de convertirse en participante legítimo de una comunidad que aprende a demostrar.

Referencias

Cañadas, M.C.; Castro, E. (2003): Razonamiento inductivo puesto de manifiesto por alumnos de secundaria. En Castro, E.; Ortega, T. (eds.), *Actas del VII Simposio de la SEIEM*, pp. 15-21.

Clark, P. (2005). *The emergence of a classroom community of practice in a mathematical structures course.* Doctoral Dissertation. Department of Philosophy, Arizona State University.

Cobo, P.; Figueras, O.; Fortuny, J.M.; González, M.J.; Gutiérrez, A.; Martínez Recio, A.; Murillo, J. (2005): Investigación en Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC). en Educación Matemática (Seminario de Investigación I), en Maz, A.; Gómez, B.; Torralbo, M. (eds.), Actas del *IX Simposio de la SEIEM*, pp. 3-78.

De la Torre, E. (2003): Didáctica de la geometría y demostración de propiedades. En E., Castro, Ortega, T. (Eds.), *Actas del VII Simposio de la SEIEM*, pp.3-78.

Fernández, E. (2008). Rethinking success and failure in mathematics learning: the rol of participation. *Proceedings of the Fifth International Mathematics Education al Society Conference*, 1 - 11.

Fiallo, J.; Gutiérrez, A. (2006): Unidad de enseñanza de las razones trigonométricas en un ambiente Cabri para el desarrollo de las habilidades de demostración. En *Actas del X Simposio de la SEIEM*, pp. 41-62.

Fiallo, J.; Gutiérrez, A. (2007): Tipos de demostración de estudiantes del grado 10º. En Santander (Colombia), en Camacho, M.; Flores, P.; Bolea, P. (eds.), *Actas del XI Simposio de la SEIEM*, pp. 355-368.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Disertación doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Ibáñez, M.; Martínez Recio, A.; Ortega, T.; Sáenz, C. (2002): Prueba y demostración: Razonamiento matemático (Seminario de Investigación I). En Moreno, M. y otros (eds.), Actas del V Simposio de la SEIEM, pp. 11-67.

Lave, J., y Wenger, E. (1991). Situated learning. Legitimate peripheral participation. Cambridge: University Press.

Lerman, S. (2006). Socio-cultural research in PME. En A. Gutiérrez, P. Boero (Eds). *Handbook of Research on the Psichology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 347-366). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Mariotti, M.A. (2006). Proof and proving in Mathematics Education. In A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 173 - 204). Rotterdam: Sense Publishers.

Marrades, R., y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 87 - 125.

Stylianides, A.J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289-321.

Vicario, V.; Carrillo, J. (2005): Concepciones del profesor de secundaria sobre la demostración matemática. El caso de la irracionalidad de ˆ2 y las funciones de la demostración. En Maz, A.; Gómez, B.; Torralbo, M. (eds.), *Actas del 9º Simposio de la SEIEM*, pp. 145-152.

Wenger, E. (1998). *Comminities of practice. Learning, meaming and identity*. Cambridge, Cambridge University.

Wertsch, J. (1997). Teorías de la acción en la investigación sociocultural. En James Wertsch, Pablo del Río y Amelia Álvarez (Eds.). *La mente sociocultural. Aproximaciones teóricas y aplicadas*. Colección Cultura y Conciencia: Madrid.